

**TỔNG HỢP CÂU HỎI VẬN DỤNG, VẬN DỤNG CAO  
TRONG ĐỀ THI THỬ 2023**

**I. HÀM SỐ**

**1. Đơn điệu**

**Câu 1:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc khoảng  $(-15;15)$  để hàm số  $y = x^4 - 6x^2 - mx + 2526$  nghịch biến trên khoảng  $(-1;1)$ .

A. 8.

**B. 7.**

C. 25.

D. 6.

**Lời giải**

**Chọn B**

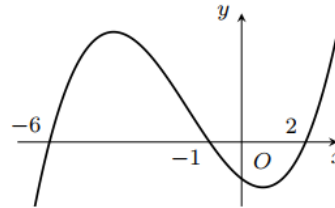
Ta có  $y' = 4x^3 - 12x - m$ .

Hàm số  $y = x^4 - 6x^2 - mx + 2526$  nghịch biến trên khoảng  $(-1;1)$  khi và chỉ khi  $y' \leq 0, \forall x \in (-1;1)$

$$\Leftrightarrow 4x^3 - 12x - m \leq 0, \forall x \in (-1;1) \Leftrightarrow m \geq 4x^3 - 12x, \forall x \in (-1;1) \Leftrightarrow m \geq 8.$$

Vì  $m$  nguyên thuộc khoảng  $(-15;15)$  nên có 7 giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 2:** Cho hàm số  $y = f(x)$ . Đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình bên. Hỏi hàm số  $g(x) = f(3 - x^2)$  nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?



A.  $(1;2)$ .

B.  $(-3;-2)$ .

C.  $(-1;0)$ .

**D.  $(2;3)$ .**

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có  $g'(x) = -2x \cdot f'(3 - x^2)$ .

$$\text{Phương trình } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(3 - x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3 - x^2 = -6 \\ 3 - x^2 = -1 \\ 3 - x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 3 \\ x = \pm 2 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

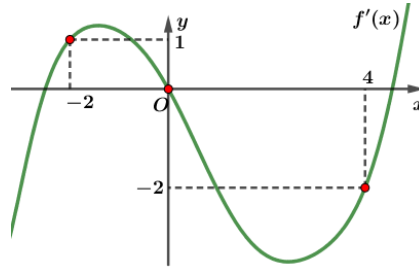
Lập bảng xét dấu đạo hàm của hàm số  $g(x)$

| $x$           | $-\infty$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $+\infty$ |
|---------------|-----------|------|------|------|-----|-----|-----|-----|-----------|
| $-2x$         | +         | +    | +    | +    | 0   | -   | -   | -   | -         |
| $f'(3 - x^2)$ | -         | 0    | +    | 0    | -   | 0   | +   | 0   | -         |
| $g'(x)$       | -         | 0    | +    | 0    | -   | 0   | +   | 0   | +         |

Dựa vào bảng xét dấu đạo hàm, ta thấy hàm số  $g(x)$  nghịch biến trên khoảng  $(2;3)$ .

**Câu 3:** Cho hàm số đa thức  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$ . Biết đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$

như hình vẽ sau



Hàm số  $g(x) = 4f(x^2 - 1) + x^4 - 2x^2$  đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A.  $(2; +\infty)$ .

B.  $(-\infty; -2)$ .

C.  $(-2; -1)$ .

D.  $(0; 2)$ .

Lời giải

**Chọn C.**

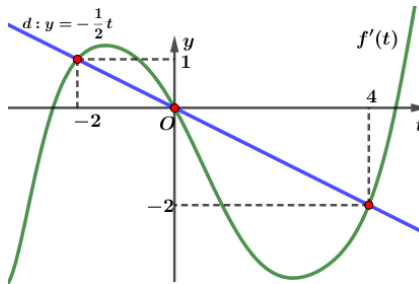
Ta có:  $g'(x) = 8x \cdot f'(x^2 - 1) + 4x^3 - 4x = 4x(2f'(x^2 - 1) + (x^2 - 1))$ .

Suy ra  $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 - 1) = -\frac{1}{2}(x^2 - 1) (*) \end{cases}$

Đặt  $t = x^2 - 1$ .

Khi đó:  $(*)$  trở thành  $f'(t) = -\frac{1}{2}t$

Vẽ đồ thị của hàm số  $y = f'(t)$  và đường thẳng  $d: y = -\frac{1}{2}t$  lên cùng hệ trục tọa độ  $Oty$



Dựa vào đồ thị trên, ta được:  $f'(t) = -\frac{1}{2}t \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = 0 \\ t = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = -2 \\ x^2 - 1 = 0 \\ x^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm \sqrt{5} \end{cases}$ .

Bảng xét dấu:

|         |           |             |      |     |     |            |           |
|---------|-----------|-------------|------|-----|-----|------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-\sqrt{5}$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $\sqrt{5}$ | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | $-$       | $0$         | $+$  | $0$ | $-$ | $0$        | $+$       |

Dựa vào bảng xét dấu của  $g'(x)$ , ta suy ra  $g(x)$  đồng biến trên từng khoảng  $(-\sqrt{5}; -1), (0; 1), (\sqrt{5}; +\infty)$ .

Hay  $g(x)$  đồng biến trên khoảng  $(-2; -1)$ .

**Câu 4:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = 3x^2 + 6x + 4, \forall x \in \mathbb{R}$ . Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên thuộc  $(-2023; 2023)$  của tham số  $m$  để hàm số  $g(x) = f(x) - (2m+4)x - 5$  nghịch biến trên  $(0; 2)$

**A.** 2011.

**B.** 2010.

**C.** 2008.

**D.** 2009.

**Lời giải**

**Chọn A**

$$g(x) = f(x) - (2m+4)x - 5 \Rightarrow g'(x) = f'(x) - (2m+4) = 3x^2 + 6x - 2m.$$

Điều kiện hàm số  $g(x) = f(x) - (2m+4)x - 5$  nghịch biến trên  $(0; 2)$  là

$$g'(x) \leq 0, \forall x \in (0; 2) \Leftrightarrow 3x^2 + 6x \leq 2m, \forall x \in (0; 2).$$

$$\text{Đặt } h(x) = 3x^2 + 6x \Rightarrow h'(x) = 6x + 6 > 0, \forall x \in (0; 2)$$

Bảng biến thiên của  $y = h(x), x \in (0; 2)$ .

|         |   |    |
|---------|---|----|
| $x$     | 0 | 2  |
| $h'(x)$ | + |    |
| $h(x)$  | 0 | 24 |

Dựa vào bảng biến thiên ta có:  $2m \geq 24$ .

$$\text{Do } \begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in (-2023; 2023) \\ m \geq 12 \end{cases} \Rightarrow \text{số giá trị của } m \text{ là: } 2023 - 12 = 2011.$$

**Câu 5:** Cho hàm số  $f(x) = -x^4 - (5 - m^2)x + 2023$  và  $g(x) = -x^3 + 5x^2 - 2022x + 2023$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $h(x) = g[f(x)]$  đồng biến trên khoảng  $(1; +\infty)$ ?

**A.** 7.

**B.** 5.

**C.** 6.

**D.** 8.

**Lời giải**

**Chọn A**

$$f'(x) = -4x^3 - (5 - m^2)$$

$$g'(x) = -3x^3 + 10x^2 - 2022 < 0 \quad \forall x \in (1; +\infty)$$

$$h'(x) = (g[f(x)])' = f'(x) \cdot g'[f(x)]$$

Để hàm số đồng biến trên khoảng  $(1; +\infty)$  thì  $h'(x) > 0; \forall x \in (1; +\infty)$

$$\Rightarrow f'(x) \cdot g'[f(x)] > 0; \forall x \in (1; +\infty)$$

$$\Rightarrow f'(x) < 0; \forall x \in (1; +\infty)$$

$$\Rightarrow -4x^3 - (5 - m^2) < 0; \forall x \in (1; +\infty)$$

$$\Rightarrow -4x^3 < (5 - m^2); \forall x \in (1; +\infty)$$

$$\text{Xét hàm: } K(x) = -4x^3 \Rightarrow K'(x) = -12x^2$$

$$K'(x) = 0 \Leftrightarrow -12x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Bảng xét dấu

|         |           |   |   |   |  |           |
|---------|-----------|---|---|---|--|-----------|
| $x$     | $-\infty$ |   | 0 | 1 |  | $+\infty$ |
| $K'(x)$ |           | - | 0 | - |  |           |
| $K(x)$  | $+\infty$ |   |   |   |  |           |

Dựa vào bảng biến thiên

$$-4x^3 < (5 - m^2); \forall x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow 5 - m^2 \geq -4 \Leftrightarrow m^2 \leq 9 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 3.$$

Vậy có 7 giá trị nguyên của  $m$  thỏa mãn bài toán.

**Câu 6:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $g(x) = f'(x^3 + 2)$  có bảng xét dấu như sau

|        |           |    |   |   |   |           |
|--------|-----------|----|---|---|---|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | -2 | 0 | 2 | 3 | $+\infty$ |
| $g(x)$ |           | +  | 0 | - | 0 | +         |

Có bao nhiêu số nguyên  $m \in [-2023; 2023]$  để hàm số  $y = f(x - m)$  đồng biến trên  $(-\infty; 0)$  ?

**A.** 2017.

**B.** 2020.

**C.** 2019.

**D.** 2018.

**Lời giải**

**Chọn D**

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x^3 + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(-6) = 0 \\ f'(2) = 0 \\ f'(10) = 0 \\ f'(29) = 0 \end{cases}, \text{ suy ra } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ x = 2 \\ x = 10 \\ x = 29 \end{cases}.$$

$$\text{Xét hàm số } h(x) = f(x - m) \Rightarrow h'(x) = f'(x - m)$$

$$\text{Ta có } h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - m = -6 \\ x - m = 2 \\ x - m = 10 \\ x - m = 29 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m - 6 \\ x = m + 2 \\ x = m + 10 \\ x = m + 29 \end{cases}$$

Ta có bảng xét dấu theo khoảng như sau

$$(\text{với } h'(m) = f'(0) = g(-\sqrt[3]{2}) < 0)$$

|                 |           |       |   |       |   |        |   |        |           |
|-----------------|-----------|-------|---|-------|---|--------|---|--------|-----------|
| $x$             | $-\infty$ | $m-6$ |   | $m+2$ |   | $m+10$ |   | $m+29$ | $+\infty$ |
| $h'(x)=f'(x-m)$ | +         | 0     | - | 0     | + | 0      | - | 0      | +         |

Để hàm số đồng biến trên  $(-\infty; 0)$  thì  $m-6 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 6$

Suy ra  $m \in \{6; 7; 8; \dots; 2023\}$ , vậy có 2018 giá trị nguyên của  $m$  thỏa mãn.

**Câu 7:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm là  $f'(x) = (x-1)(x-m)$  với  $m$  là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để hàm số đồng biến trên  $(-\infty; +\infty)$ .

**A.**  $m \leq 1$ .

**B.**  $m > 1$ .

**C.**  $m = 1$ .

**D.**  $m \geq 1$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Hàm số đồng biến trên  $(-\infty; +\infty)$  khi

$$f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x-1)(x-m) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (m+1)x + m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta = (m+1)^2 - 4m \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (m-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow m-1=0 \Leftrightarrow m=1.$$

**Câu 8:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m \in (-25; 0)$  sao cho hàm số

$$y = (x^4 - 5)e^x - mx^2 - (m^2 - m)x + 2 \text{ luôn đồng biến trên khoảng } (2; +\infty) ?$$

**A.** 5.

**B.** 24.

**C.** 20.

**D.** 19.

**Lời giải**

**Chọn D**

$$y' = (x^4 + 4x^3 - 5)e^x - 2mx - (m^2 - m).$$

$$\text{Đặt } h(x) = (x^4 + 4x^3 - 5)e^x$$

$$h'(x) = (x^4 + 8x^3 + 12x^2 - 5)e^x > 0, \forall x > 2 \text{ vì } x^4 - 5 > 0, \forall x > 2.$$

$$h'(x) = (x^4 + 8x^3 + 12x^2 - 5)e^x > 0, \forall x > 2 \Rightarrow h(x) > h(2) = 43e^2.$$

Để hàm số đồng biến trên khoảng  $(2; +\infty)$  điều kiện là  $y' \geq 0, \forall x > 2$ .

$$\Leftrightarrow (x^4 + 4x^3 - 5)e^x \geq 2mx + (m^2 - m)(1), \forall x > 2$$

$$\text{Đặt } g(x) = 2mx + (m^2 - m) \Rightarrow g'(x) = 2m < 0, \forall x > 2. \text{ Do } m \in (-25; 0).$$

$$\Rightarrow g(x) < g(2), \forall x > 2 \Leftrightarrow g(x) < m^2 + 3m, \forall x > 2.$$

$$\text{Để (1) nghiệm đúng với } \forall x > 2 \Rightarrow 43e^2 > m^2 + 3m \Leftrightarrow m^2 + 3m - 43e^2 < 0$$

$$\Leftrightarrow -19,39 < m < 16,39.$$

$$\text{Do } \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in (-25; 0) \\ -19,39 < m < 16,39 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m \in \{-19, -18, -17, -16, -15, -14, -13, -12, -11, -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1\}.$$

Vậy có 19 giá trị của  $m$ .

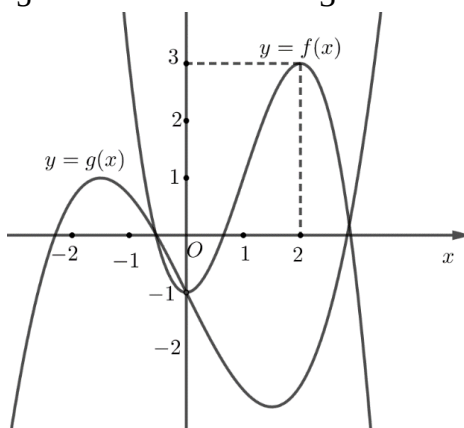
**Câu 9:** Cho hàm số bậc ba  $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị là  $(C)$  và hàm số  $y = g(x) = -f(mx+1)$ ,  $m > 0$  (như hình vẽ). Với giá trị nào của  $m$  để hàm số  $y = g(x)$  nghịch biến trên đúng một khoảng có độ dài bằng 3?

**A.**  $\frac{2}{3}$ .

**B.**  $\frac{2}{5}$ .

**C.**  $\frac{1}{3}$ .

**D.**  $\frac{1}{2}$ .



**Lời giải**

Từ đồ thị ta có  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

$g(x) = -f(mx+1) \Rightarrow g'(x) = -m \cdot f'(mx+1)$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow m \cdot f'(mx+1) = 0 \quad (m > 0) \Leftrightarrow \begin{cases} mx+1 = 0 \\ mx+1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{m} \\ x = \frac{1}{m} \end{cases}$

Bảng xét dấu của  $g'(x)$

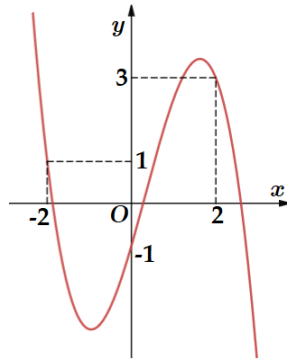
|         |           |                |               |           |   |   |
|---------|-----------|----------------|---------------|-----------|---|---|
| $x$     | $-\infty$ | $\frac{-1}{m}$ | $\frac{1}{m}$ | $+\infty$ |   |   |
| $g'(x)$ |           | +              | 0             | -         | 0 | + |

Hàm số  $y = g(x)$  nghịch biến trên khoảng  $\left(\frac{-1}{m}; \frac{1}{m}\right)$ .

Để hàm số  $y = g(x)$  nghịch biến trên đúng một khoảng có độ dài bằng 3 thì

$\frac{1}{m} - \frac{-1}{m} = 3 \Leftrightarrow \frac{2}{m} = 3 \Leftrightarrow m = \frac{2}{3}$ .

**Câu 10:** Cho hàm số  $f(x)$  là hàm đa thức bậc bốn. Đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  được cho trong hình vẽ bên dưới.



Đặt  $g(x) = f(x) - \frac{x^3}{4} - \frac{x^2}{4} + x$ . Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $g(x+m)$  nghịch biến trên khoảng  $3; +\infty$  là

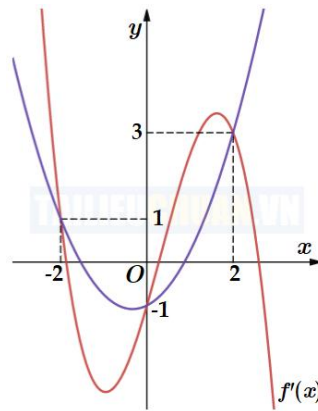
- A.  $-\infty; -5]$ .      B.  $-5; -1$ .      C.  $[-1; +\infty$ .      D.  $-1; +\infty$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có  $g'(x) = f'(x) - \frac{3x^2}{4} - \frac{x}{2} + 1 \leq 0 \Leftrightarrow f'(x) \leq \frac{3x^2}{4} + \frac{x}{2} - 1$  (Mục đích để xét dấu chứ chưa liên quan đến đồng hay nghịch biến, có thể xét dấu bằng thay số)

Vẽ đồ thị hàm số  $f'(x), \frac{3x^2}{4} + \frac{x}{2} - 1$  trên cùng một hệ trục tọa độ:



Từ hình vẽ ta thấy được  $g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x) < \frac{3x^2}{4} + \frac{x}{2} - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 0 \\ x > 2 \end{cases}$ .

Vậy có

| $x$     | $-\infty$ | $-2$ | $0$ | $2$ | $+\infty$ |
|---------|-----------|------|-----|-----|-----------|
| $g'(x)$ | +         | 0    | -   | 0   | -         |
| $g(x)$  |           |      |     |     |           |

Xét  $[g(x+m)]' = g'(x+m)$ .1 Với  $x \in (3; +\infty)$  thì  $x+m \in (3+m; +\infty)$

Nên  $3+m \geq 2 \Leftrightarrow m \geq -1$

**Câu 11:** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m \in [-20; 20]$  để hàm số  $f(x) = 3x^4 + 4(1 - 2m^2)x^3 + 6(m - 2m^2)x^2 + 12mx - 1$  nghịch biến trên khoảng  $(0; 1)$ ?

A. 2.

B. 20.

C. 19.

D. 21.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có:  $f'(x) \leq 0, \forall x \in (0; 1) \Leftrightarrow 12x^3 + 12(1 - 2m^2)x^2 + 12(m - 2m^2)x + 12m \leq 0, \forall x \in (0; 1).$

$$\Leftrightarrow x^2(x+1) - 2m^2x(x+1) + m(x+1) \leq 0, \forall x \in (0; 1).$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 2m^2x + m) \leq 0, \forall x \in (0; 1).$$

Vì  $x \in (0; 1) \Rightarrow x+1 > 0$  nên yêu cầu bài toán  $\Leftrightarrow \underbrace{x^2 - 2m^2x + m}_{g(x)} \leq 0, \forall x \in (0; 1). (*)$

Xét  $\Delta_{g(x)}' = m^4 - m.$

**TH1:**  $\Delta_{g(x)}' \leq 0$ , do  $a = 1 > 0 \Rightarrow g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$  (không thỏa mãn).

$$\textbf{TH2: } \Delta_{g(x)}' > 0 \Leftrightarrow m^4 - m > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < 0 \end{cases}.$$

Khi đó  $g(x) = 0$  có 2 nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  (giả sử  $x_1 < x_2$ ).

Ta có bảng xét dấu của  $g(x)$  như sau:

|        |           |       |          |          |       |           |
|--------|-----------|-------|----------|----------|-------|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $x_1$ | <b>0</b> | <b>1</b> | $x_2$ | $+\infty$ |
| $g(x)$ | +         | 0     | -        | 0        | +     |           |

$$\text{Theo yêu cầu bài toán ta có } \begin{cases} g(0) \leq 0 \\ g(1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ 1 - 2m^2 + m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq 1 \\ m \leq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -\frac{1}{2}$$

Do  $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-20; 20] \end{cases}$  nên ta nhận  $m \in \{-20; -19; \dots; -1\}$ . Vậy có tất cả 20 giá trị thỏa mãn.

**Câu 12:** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = |3x^4 - mx^3 + 6x^2 + m - 3|$  đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$ ?

A. 5

B. 6

C. 4

D. 7

**Lời giải**

**Chọn B**

Đặt  $f(x) = 3x^4 - mx^3 + 6x^2 + m - 3$

Do  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^4 - mx^3 + 6x^2 + m - 3) = +\infty > 0.$

Nên  $y = |f(x)|$  đồng biến trên  $(0; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f'(x) \geq 0 \end{cases}, \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} f(0) \geq 0 \\ f'(x) \geq 0 \end{cases}, \forall x \in (0; +\infty)$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-3 \geq 0 \\ 12x^3 - 3mx^2 + 12x \geq 0, \forall x \in (0; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 3 \\ m \leq 4x + \frac{4}{x}, \forall x \in (0; +\infty) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 3 \\ m \leq \min_{x \in (0; +\infty)} \left( 4x + \frac{4}{x} \right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 3 \\ m \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow 3 \leq m \leq 8.$$

Vậy  $3 \leq m \leq 8$ .

**Câu 13:** (VD) Có bao nhiêu số nguyên dương của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{\cos x + 1}{10 \cos x + m}$  đồng

biến trên khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

**A.** 9.

**B.** 12.

**C.** 10.

**D.** 20.

**Lời giải**

**Chọn A**

Đặt  $u = \cos x, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow u \in (0; 1)$ .

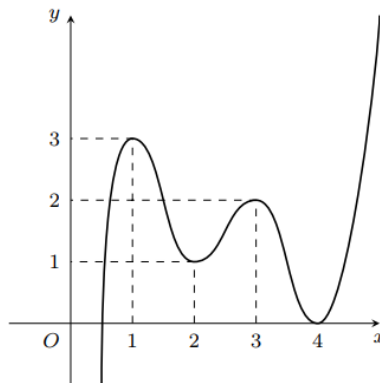
- **Điều kiện**  $t \neq -\frac{m}{10}$ , nên  $\begin{cases} \frac{-m}{10} \leq 0 \\ \frac{-m}{10} \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ m \leq -10 \end{cases}$

- **Hàm số đồng biến:** Xét  $y' = \frac{m-10}{(10 \cos x + m)} \cdot (-\sin x)$ . Hàm số đồng biến trên khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$  khi và chỉ khi  $y' > 0$  với  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

Ta có  $-\sin x < 0 \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ . Vậy  $\frac{m-10}{(10t+m)^2} < 0, \forall t \in (0; 1) \Leftrightarrow m < 10$ .

Khi đó ta có:  $\begin{cases} m < 10 \\ m \geq 0 \\ m \leq -10 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m < 10 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}^+} m \in \{1; \dots; 9\}$ .

**Câu 14:** Cho hàm số đa thức bậc năm  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Hàm số  $h(x) = 2[f(x)]^3 - 9[f(x)]^2$  đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A.  $(3; +\infty)$ .B.  $(1; 2)$ .C.  $(2; 3)$ .D.  $(-\infty; 1)$ .

Lời giải

Chọn B

Ta có  $h'(x) = 6f(x) \cdot f'(x)[f(x) - 3]$ 

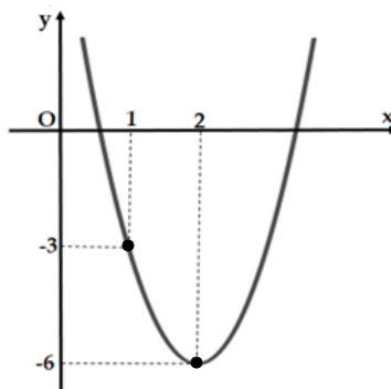
$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = 3 \\ f'(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a, x = 4 & (0 < a < 1) \\ x = 1, x = b & (b > 4) \\ x = 1, x = 2, x = 3, x = 4. \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên

| $x$        | $-\infty$ | $a$ | 1 | 2 | 3 | 4 | $b$ | $+\infty$ |
|------------|-----------|-----|---|---|---|---|-----|-----------|
| $f'(x)$    | +         | +   | 0 | - | 0 | + | 0   | +         |
| $f(x)$     | -         | 0   | + | + | + | + | 0   | +         |
| $f(x) - 3$ | -         | -   | 0 | - | - | - | -   | 0         |
| $h'(x)$    | +         | 0   | - | 0 | + | 0 | -   | 0         |

Vậy hàm số  $h(x)$  đồng biến trên khoảng  $(1; 2)$ .

**Câu 15:** Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$ . Biết hàm số  $y = f'(5-2x)$  có đồ thị là một Parabol ( $P$ ) như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = f(2x^2 + 2x + m)$  nghịch biến trên khoảng  $(0; 1)$ .



A. 4.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị ta xác định được  $y = f'(5-2x) = 3x^2 - 12x + 6$ .

$$\text{Đặt } 5-2x = t \Rightarrow x = \frac{5-t}{2}.$$

$$\text{Khi đó: } 3x^2 - 12x + 6 = \frac{3}{4}(5-t)^2 - 6(5-t) + 6 = \frac{3}{4}t^2 - \frac{3}{2}t - \frac{21}{4} = f'(t).$$

$$f'(t) < 0 \Leftrightarrow 1 - 2\sqrt{2} < t < 1 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 1 - 2\sqrt{2} < 5 - 2x < 1 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 2 - \sqrt{2} < x < 2 + \sqrt{2}.$$

Hàm số  $y = g(x) = f(2x^2 + 2x + m)$  nghịch biến trên khoảng  $(0; 1)$ .

$$\Rightarrow g'(x) = (4x + 2)f'(2x^2 + 2x + m) < 0, \forall x \in (0; 1) \Leftrightarrow f'(2x^2 + 2x + m) < 0, \forall x \in (0; 1) \\ (\text{do } 4x + 2 > 0, \forall x \in (0; 1))$$

$$\Leftrightarrow 2 - \sqrt{2} < 2x^2 + 2x + m < 2 + \sqrt{2}, \forall x \in (0;1) \Leftrightarrow -m - \sqrt{2} < 2x^2 + 2x - 2 < -m + \sqrt{2}, \forall x \in (0;1).$$

$$\text{Đặt } h(x) = 2x^2 + 2x - 2 \Rightarrow h'(x) = 4x + 2 > 0, \forall x \in (0;1).$$

BBT:

$$\text{Điều kiện bài toán } \Leftrightarrow -m - \sqrt{2} < 0 < 1 < -m + \sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt{2} < m < \sqrt{2} - 1 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-1; 0\}.$$

Vậy có 2 giá trị nguyên của  $m$  thỏa mãn bài toán.

## 2. Cực trị

**Câu 16:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$  là  $f'(x) = x(x-1)^2(x+2)$ . Khi đó, hàm số  $y = f(-2x)$  đạt cực đại tại

**A.**  $x = -\frac{1}{2}$ .

**B.**  $x = 0$ .

**C.**  $x = 1$ .

**D.**  $x = -1$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\text{Xét } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x-1)^2(x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 (\text{boichan}) \\ x = -2 \end{cases}.$$

hàm số  $y = f(x)$  như sau

|         |           |         |        |     |           |           |
|---------|-----------|---------|--------|-----|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-2$    | $0$    | $1$ | $+\infty$ |           |
| $f'(x)$ |           | $+$     | $0$    | $-$ | $0$       | $+$       |
| $f(x)$  |           | $f(-2)$ | $f(0)$ |     |           | $+\infty$ |

$$\text{Xét } y = f(-2x), \text{ ta có } y' = -2f'(-2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = -2 \\ -2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \end{cases}.$$

Khi đó, ta có bảng biến thiên của hàm số  $y = f(-2x)$  như sau

|      |           |        |     |           |     |           |
|------|-----------|--------|-----|-----------|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $0$    | $1$ | $+\infty$ |     |           |
| $y'$ |           | $-$    | $0$ | $+$       | $0$ | $-$       |
| $y$  | $+\infty$ |        |     | $y(1)$    |     |           |
|      |           | $y(0)$ |     |           |     | $-\infty$ |

Vậy hàm số  $y = f(-2x)$  đạt cực đại tại  $x = 1$ .

**Câu 17:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = x^3 - 8x^2 + (m^2 + 11)x - 2m^2 + 2$  có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành?

**A.** 7

**B.** 5

**C.** 6

**D.** 4

**Lời giải**

**Chọn B**

Để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành thì phương trình

$y = x^3 - 8x^2 + (m^2 + 11)x - 2m^2 + 2$  có ba nghiệm phân biệt.

$$x^3 - 8x^2 + (m^2 + 11)x - 2m^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 - 6x + m^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^2 - 6x + m^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Khi đó phương trình  $x^2 - 6x + m^2 - 1 = 0$  có hai nghiệm phân biệt khác

$$2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 10 - m^2 > 0 \\ 4 - 12 + m^2 - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{10} < m < \sqrt{10} \\ m \neq \pm 3 \end{cases}.$$

Vì  $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$

**Lưu ý:** Đây là một tính chất rất đặc biệt của đồ thị hàm số bậc ba.

**Câu 18:** Có bao nhiêu số nguyên  $m \in [-2023; 2023]$  để đồ thị hàm số  $y = x^3 + mx^2 - m(2m + 1)x + m^2$  có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành?

A. 4044.

B. 4045.

C. 4046.

D. 4047.

**Lời giải**

**Chọn B**

Đồ thị hàm số đã có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành khi và chỉ khi phương trình  $y = 0$  có ba nghiệm phân biệt.

$$\text{Ta có } y = 0 \Leftrightarrow (x - m)(x^2 + 2mx - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ g(x) = x^2 + 2mx - m = 0. \end{cases}$$

Yêu cầu bài toán tương đương  $g(x) = 0$  có hai nghiệm phân biệt khác  $m$

$$\begin{cases} \Delta'_g = m^2 + m > 0 \\ g(m) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < -1 \\ m \neq 0; m \neq \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < -1 \\ m \neq \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Vì  $m$  nguyên và  $m \in [-2023; 2023]$  nên có 4045 giá trị.

**Câu 19:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{8}{3}x^3 - mx + 2023$  có bốn điểm cực trị?

A. 17.

B. 10.

C. 16.

D. 15.

**Lời giải**

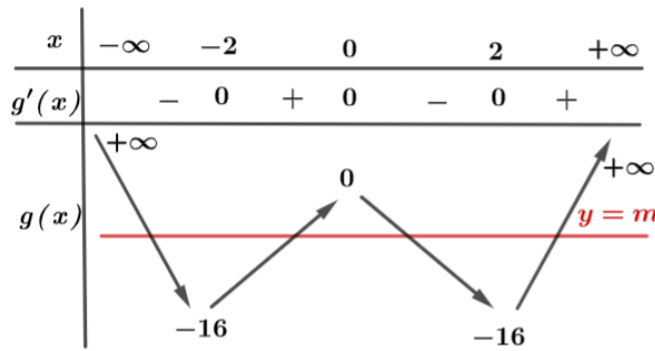
**Chọn D**

Ta có  $y' = x^4 - 8x^2 - m$ ;  $y' = 0 \Leftrightarrow x^4 - 8x^2 = m$  (1).

Ycbt  $\Leftrightarrow$  (1) có bốn nghiệm phân biệt.

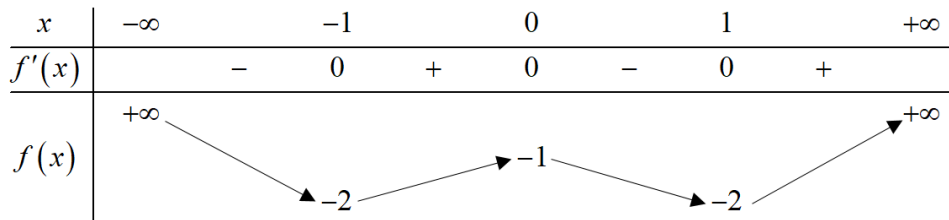
$$\text{Xét hàm số } g(x) = x^4 - 8x^2, \text{ có } g'(x) = 4x^3 - 16x. \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 16x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2. \end{cases}$$

Bảng biến thiên.



Từ đây ta có  $-16 < m < 0$ , vậy có 15 giá trị nguyên của tham số  $m$  thỏa mãn.

**Câu 20:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau



Số điểm cực trị của hàm số  $g(x) = f^3(x) + 3f^2(x) + 2020$  là

A. 3

B. 7

C. 5

D. 4

Lời giải

**Chọn C**

Ta có  $g(x) = f^3(x) + 3f^2(x) + 2020$

$$\Rightarrow g'(x) = f'(x)[3f^2(x) + 6f(x)] = 3f'(x)f(x)[f(x) + 2]$$

$$\text{Ta có } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = 0 \text{ (1)} \\ f(x) = -2 \end{cases}$$

Kết hợp với bảng biến thiên của hàm số  $y = f(x)$  ta thấy (1) có 5 nghiệm bội lẻ nên hàm số  $g(x)$  có 5 điểm cực trị.

**Câu 21:** Tổng tất cả các giá trị nguyên của  $m$  để hàm số  $y = 2022mx^4 + 2023(m^2 - 25)x^2 + 2024$  có một điểm cực đại và hai điểm cực tiểu là:

A. -10.

B. 0.

C. 15.

D. 10.

Lời giải

**Chọn D**

Để hàm số có một điểm cực đại và hai điểm cực tiểu là

$$\begin{cases} a > 0 \\ a.b < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m^2 - 25 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ -5 < m < 5 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 5.$$

**Câu 22:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = mx^4 + (m^2 - 25)x^2 + |m + 2005|$  có một điểm cực đại

A. 8.

B. 9.

C. 10.

D. 11.

Lời giải

**Chọn C**

TH1:  $m = 0$

$$y = -25x^2 + 2005 \text{ (TM)}$$

TH2:  $m \neq 0$

- Để hàm số có đúng một điểm cực đại

$$\begin{cases} m < 0 \\ m^2 - 25 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m^2 \leq 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ -5 \leq m \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow -5 \leq m < 0$$

- Để hàm số có có 2 điểm cực tiểu, 1 điểm cực đại

$$\begin{cases} m > 0 \\ m^2 - 25 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m^2 < 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ -5 < m < 5 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 5$$

$$\Rightarrow m = \{-5; -4; \dots; 4\} \rightarrow 10 \text{ số giá trị}$$

**Câu 23:** Vì  $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{1; 2; 3; 4\} \Rightarrow 1+2+3+4=10$ . Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x(x+1)(x^2+2x+m)$  trên  $\mathbb{R}$ . Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc  $[-10; 10]$  của  $m$  để hàm số  $y = f(x)$  có 4 điểm cực trị?

**A.** 13.

**B.** 10.

**C.** 11.

**D.** 20.

**Lời giải**

**Chọn B**

Hàm số  $y = f(x)$  có 4 điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình  $f'(x) = 0$  có 4 nghiệm phân biệt. Nói cách khác, phương trình  $x^2 + 2x + m = 0$  có 2 nghiệm phân biệt khác 0 và -1.

$$\begin{cases} \Delta' = 1 - m > 0 \\ 0^2 + 2 \cdot 0 + m \neq 0 \\ (-1)^2 + 2(-1) + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m \neq 0 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}.$$

Có giá trị nguyên của  $m$  thuộc  $[-10; 10]$  thỏa yêu cầu bài toán là  $-10; -9; -8; \dots; -1$ .

**Câu 24:** (VD) Cho hàm số  $f(x) = |x^3 - 3x^2 + m|$  với  $m \in [-4; 4]$  là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để hàm số  $y = f(x)$  có đúng 3 điểm cực trị?

**A.** 6.

**B.** 8.

**C.** 5.

**D.** 4.

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\text{Xét hàm số: } g(x) = x^3 - 3x^2 \Rightarrow g'(x) = 3x^2 - 6x \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Bảng biên thiên:

|      |           |     |      |           |     |
|------|-----------|-----|------|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $0$ | $2$  | $+\infty$ |     |
| $y'$ | $+$       | $0$ | $-$  | $0$       | $+$ |
| $y$  | $-\infty$ | $0$ | $-4$ | $+\infty$ |     |

Số điểm cực trị của hàm số  $f(x)$  bằng số điểm cực trị cộng với số nghiệm bội lẻ nên để hàm số  $f(x)$  có đúng 3 điểm cực trị thì:  $m \leq -4 \vee m \geq 0$

$$\text{Do } \begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-4; 4] \end{cases} \Rightarrow m \in \{-4; 0; 1; 2; 3; 4\}.$$

**Câu 25:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = |x^4 - 4x^3 - 8x^2 - m|$  có đúng 7 điểm cực trị?

**A.** 127.

**B.** 124.

**C.** 5.

**D.** 2.

**Lời giải**

Xét hàm số  $f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 - m$ .

Tập xác định  $D = \mathbb{R}$ .

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 16x = 4x(x^2 - 3x - 4); \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 4 \end{cases}.$$

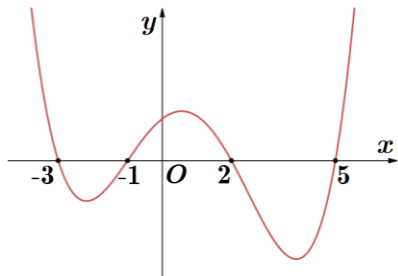
Bảng biến thiên của  $y = f(x)$ :

|         |           |      |          |      |     |            |     |           |
|---------|-----------|------|----------|------|-----|------------|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ |          | $0$  |     | $4$        |     | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | $-$  | $0$      | $+$  | $0$ | $-$        | $0$ | $+$       |
| $f(x)$  | $+\infty$ |      |          | $-m$ |     |            |     | $+\infty$ |
|         |           |      | $-3 - m$ |      |     | $-128 - m$ |     |           |

Ta thấy hàm số  $y = f(x)$  luôn có 3 điểm cực trị với mọi giá trị của  $m$ . Do đó hàm số  $y = |f(x)|$  có đúng 7 điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình  $f(x) = 0$  có 4 nghiệm đơn (hoặc bội lẻ), tức là  $-3 - m < 0 < -m \Leftrightarrow -3 < m < 0$ .

Vì  $m$  nguyên nên  $m \in \{-2; -1\}$ .

**Câu 26:** Cho hàm đa thức bậc năm  $y = f(x)$  và hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như trong hình bên.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $g(x) = f(|x^3 + 3x| + m - 2m^2)$  có đúng ba điểm cực đại?

**A.** 3.

**B.** 0.

**C.** 4.

**D.** 1.

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\text{Ta có } g'(x) = f'(|x^3 + 3x| + m - 2m^2) \frac{(3x^2 + 3)(x^3 + 3x)}{|x^3 + 3x|}$$

$$\text{Ta có } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x^3 + 3x| + m - 2m^2 = -3 \\ |x^3 + 3x| + m - 2m^2 = -1 \\ |x^3 + 3x| + m - 2m^2 = 2 \\ |x^3 + 3x| + m - 2m^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x^3 + 3x| = 2m^2 - m - 3 \\ |x^3 + 3x| = 2m^2 - m - 1 \\ |x^3 + 3x| = 2m^2 - m + 2 \\ |x^3 + 3x| = 2m^2 - m + 5 \end{cases} (*) \text{ và } g'(x) \text{ không}$$

xác định tại  $x = 0$ .

Do  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$  nên để hàm số  $g(x)$  có ba điểm cực đại khi và chỉ khi hàm số  $g(x)$  có bảy điểm cực trị.

Xét hàm số  $h(x) = x^3 + 3x$ , ta có  $h'(x) = 3x^2 + 3 > 0, \forall x$  nên  $h(x)$  đồng biến trên  $(-\infty; +\infty)$ .

Khi đó, ta có được bảng biến của hàm số  $y = |h(x)| = |x^3 + 3x|$  như sau:

|          |           |     |           |
|----------|-----------|-----|-----------|
| $x$      | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
| $ h(x) $ | $+\infty$ | $0$ | $+\infty$ |

Để hàm số  $g(x)$  có bảy điểm cực trị thì (\*) phải có 6 nghiệm phân biệt:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2 - m - 1 > 0 \\ 2m^2 - m - 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < \frac{-1}{2} \end{cases}, \text{ mà } m \text{ là số nguyên nên } m \in \{-1; 2; 3\}.$$

**Câu 27:** Cho hai hàm số  $f(x) = 2x^3 - 9x^2$  và  $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + m$  ( $m$  là tham số). Có bao nhiêu số nguyên  $m$  để hàm số  $h(x) = f(g(x))$  có đúng 6 điểm cực trị?

A. 23.

B. 21.

C. 6.

D. 4.

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\text{Ta có: } h(x) = f(g(x)) \Rightarrow h'(x) = g'(x) \cdot f'(g(x)) \Rightarrow h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g'(x) = 0 \\ f'(g(x)) = 0 \end{cases}$$

$$\bullet g'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\bullet f'(g(x)) = \begin{cases} g(x) = 0 \\ g(x) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - 3x^2 - 12 = -m \\ 2x^3 - 3x^2 - 12 = -m + 3 \end{cases} \quad (1)$$

Vẽ bảng biến thiên của hàm số  $g(x)$  như sau:

|      |           |      |       |           |     |
|------|-----------|------|-------|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $2$   | $+\infty$ |     |
| $y'$ | $+$       | $0$  | $-$   | $0$       | $+$ |
| $y$  | $+\infty$ | $7$  | $-20$ | $+\infty$ |     |



Để hàm số  $h(x)$  có 6 điểm cực trị thì (1) phải có 4 nghiệm nên:

$$\begin{cases} -m+3 > 7 \\ -20 < -m \leq 7 \\ -m \leq -20 \\ -20 < -m+3 < 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7 < m \leq -4 \\ 20 \leq m < 23 \end{cases}$$

Vậy có 6 giá trị nguyên của tham số  $m$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 28:** (VD) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $f(x) = (m+1)x^3 - (2m-1)x^2 + x - 1$  **không** có điểm cực đại?

**A. 4.**

**B. 6.**

**C. 5.**

**D. 3.**

**Lời giải**

**Chọn A**

Với  $m = -1$ , ta có:  $f(x) = 3x^2 + x - 1$  là một parabol với hệ số  $a = 3 > 0$  suy ra hàm số chỉ có 1 điểm cực tiểu thỏa yêu cầu đề bài.

Với  $m \neq -1$ , ta có:  $f(x) = (m+1)x^3 - (2m-1)x^2 + x - 1$ .

Suy ra  $f'(x) = 3(m+1)x^2 - 2(2m-1)x + 1$ . Khi đó, hàm số không có điểm cực đại  $\Leftrightarrow$  hàm số không có cực trị  $\Leftrightarrow$  phương trình  $f'(x) = 0$  vô nghiệm hoặc có nghiệm kép  $\Leftrightarrow \Delta' \leq 0$

$$\Leftrightarrow (2m-1)^2 - 3(m+1) \cdot 1 \leq 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 7m - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq m \leq 2.$$

Mà  $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0, 1, 2\}$ .

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số  $m$  thỏa mãn yêu cầu đề bài.

**Câu 29:** Cho hàm số  $f(x)$  có bảng biến thiên như hình sau

|         |           |                  |   |   |                            |           |
|---------|-----------|------------------|---|---|----------------------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | 0                |   |   | 3                          | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | -                | 0 | + | 0                          | -         |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $\swarrow$<br>-1 |   |   | $\nearrow$ 5<br>$\searrow$ | $-\infty$ |

Hàm số  $g(x) = 2f^2(x)[f(x) - 3]$  có bao nhiêu điểm cực đại?

**A. 8**

**B. 4**

**C. 3**

**D. 6**

**Lời giải**

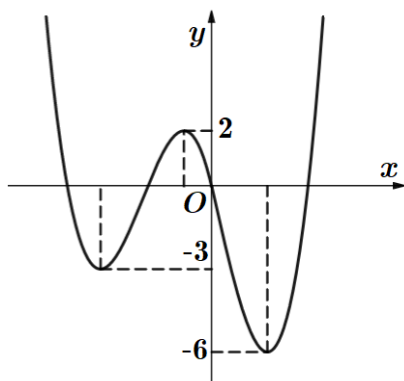
**Chọn B**

Ta có  $g(x) = 2f^3(x) - 6f^2(x) \Rightarrow g'(x) = 6f'(x)[f^2(x) - 2f(x)]$ .

$$\text{Ta có } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = 0 \text{ (1)} \\ f(x) = 2 \end{cases}$$

Kết hợp với bảng biến thiên của  $f(x)$  ta thấy được (1) có 8 nghiệm bội lẻ nên  $g(x)$  có 8 điểm cực trị nên  $g(x)$  có 4 điểm cực đại.

**Câu 30:** Cho hàm số đa thức bậc bốn  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số  $m \in [-2022; 2022]$  để hàm số  $y = |f^2(x) - m^2|$  có 9 điểm cực trị. Số phần tử của tập  $S$  là

**A.** 4034.

**B.** 2027.

**C.** 4032.

**D.** 2022.

**Lời giải**

**Chọn A**

Đặt  $g(x) = f^2(x) - m^2$ .

Ta có  $g'(x) = 2f(x)f'(x)$ ;  $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases} \quad (1)$ .

Từ đồ thị hàm số  $y = f(x)$  ta thấy (1) có 7 nghiệm đơn nên  $g(x)$  có 7 điểm cực trị.

Xét  $g(x) = 0 \Leftrightarrow f^2(x) - m^2 = 0 \Leftrightarrow f^2(x) = m^2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = m \\ f(x) = -m \end{cases} \quad (2)$ .

Do  $g(x)$  đã có 7 điểm cực trị rồi nên để  $|g(x)|$  có 9 điểm cực trị thì phương trình

$g(x) = 0$  phải có 2 nghiệm bội lẻ hay (2) phải có 2 nghiệm bội lẻ  $\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 6 \\ m \leq -6 \end{cases}$ .

$\Rightarrow S = \{-2022; \dots; -6; 6; \dots; 2022\}$ . Vậy có 4034 giá trị  $m$ .

**Câu 31:** Cho hàm số  $y = f(x)$  với đạo hàm  $f'(x) = x^2(x+1)(x^2+2mx+5)$ . Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = f(x)$  có đúng 1 điểm cực trị?

**A.** 5.

**B.** 3.

**C.** 4.

**D.** 6.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có:  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(x+1)(x^2+2mx+5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x^2 + 2mx + 5 = 0 \end{cases}$ .

Hàm số  $y = f(x)$  có đúng 1 điểm cực trị  $\Leftrightarrow f'(x) = 0$  chỉ có đúng một nghiệm bội lẻ.

TH1:  $x^2 + 2mx + 5 = 0$  vô nghiệm hoặc có nghiệm kép  $\Leftrightarrow m^2 - 5 \leq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{5} \leq m \leq \sqrt{5}$   
 $\Rightarrow m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$

TH2:  $x^2 + 2mx + 5 = 0$  có nghiệm là  $-1 \Leftrightarrow -2m + 6 = 0 \Leftrightarrow m = 3$ .

$$\text{Với } m=3, f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2(x+1)(x^2+6x+5)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 & (\text{bội chẵn}) \\ x=-1 & (\text{bội chẵn}) \\ x=-5 & (\text{bội lẻ}) \end{cases}$$

Suy ra  $m=3$  thỏa mãn yêu cầu.

Vậy  $m \in \{-2; -1; 0; 1; 2; 3\}$ .

**Câu 32:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$  và  $f'(x) = (x-1)(x+2)$  với mọi  $x$ . Số các giá trị nguyên  $m$  sao cho hàm số  $y = f(|2x^3 + 3x^2 - 12x - m|)$  có 11 điểm cực trị là

A. 23.

B. 27.

C. 24.

D. 26.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có:

$$y = f(|2x^3 + 3x^2 - 12x - m|) \Rightarrow y' = \frac{(2x^3 + 3x^2 - 12x - m)(6x^2 + 6x - 12)}{|2x^3 + 3x^2 - 12x - m|} \cdot f'(|2x^3 + 3x^2 - 12x - m|)$$

$$f'(x) = (x-1)(x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 + 6x - 12 = 0 \\ |2x^3 + 3x^2 - 12x - m| = 1 \end{cases} \text{ và } y' \text{ không xác định } 2x^3 + 3x^2 - 12x - m = 0.$$

$$6x^2 + 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases}$$

Theo yêu cầu bài toán thì phương trình  $2x^3 + 3x^2 - 12x - m = 0$  và  $|2x^3 + 3x^2 - 12x - m| = 1$  phải có 9 nghiệm phân biệt.

Khảo sát hàm số  $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x$  ta có được bảng biến thiên:

|      |           |      |      |           |     |
|------|-----------|------|------|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-2$ | $1$  | $+\infty$ |     |
| $y'$ | $+$       | $0$  | $-$  | $0$       | $+$ |
| $y$  | $+\infty$ | $20$ | $-7$ | $+\infty$ |     |

Dựa vào bảng biến thiên:

$$\begin{cases} 2x^3 + 3x^2 - 12x = m \\ 2x^3 + 3x^2 - 12x = m+1 \\ 2x^3 + 3x^2 - 12x = m-1 \end{cases} \text{ có 9 nghiệm:}$$

$$\begin{cases} m+1 < 20 \\ m-1 > -7 \end{cases} \Leftrightarrow -6 < m < 19$$

Vậy có 24 giá trị nguyên  $m$  thỏa mãn.

**Câu 33:** Cho hàm số  $f(x) = x^4 - 12x^3 + 30x^2 + 3 - m$ , với  $m$  là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để hàm số  $g(x) = f(|x|)$  có đúng 7 điểm cực trị?

A. 25.

B. 27.

C. 26.

D. 28.

### Lời giải

Ta có  $f'(x) = 4x^3 - 36x^2 + 60x + 3 - m$ .

Hàm số  $g(x) = f(|x|)$  có đúng 7 điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số  $y = f(x)$  có đúng 3 điểm cực trị dương phân biệt, hay phương trình  $f'(x) = 0$  có ba nghiệm dương phân biệt.

Khi đó  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 36x^2 + 60x + 3 - m = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 36x^2 + 60x + 3 = m$  (1).

Yêu cầu bài toán là phương trình (1) có ba nghiệm dương phân biệt.

Xét hàm số  $h(x) = 4x^3 - 36x^2 + 60x + 3$

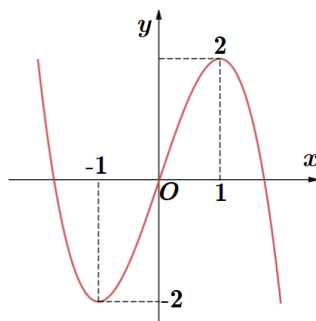
$$h'(x) = 12x^2 - 72x + 60 \text{ suy ra } h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 5 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên của hàm số  $y = h(x)$

|         |           |   |    |   |     |   |           |
|---------|-----------|---|----|---|-----|---|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | 0 | 1  |   | 5   |   | $+\infty$ |
| $h'(x)$ |           | + | 0  | - | 0   | + |           |
| $h(x)$  | $-\infty$ | 3 | 31 |   | -97 |   | $+\infty$ |

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình (1) có ba nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi  $3 < m < 31$ , vậy có 27 giá trị nguyên của  $m$  thỏa yêu cầu bài toán.

**Câu 34:** Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên.



Có bao giá trị nguyên của tham số  $m \in [0; 2023]$  để hàm số  $y = \left| \frac{mf(x) + 100}{f(x) + m} \right|$  có đúng 5

điểm cực trị?

**A.** 1974.

**B.** 1923.

**C.** 1973.

**D.** 2013

### Lời giải

**Chọn A**

Xét hàm số  $g(x) = \frac{mf(x) + 100}{f(x) + m}$

$$\text{Ta có } g'(x) = \frac{m^2 - 100}{[f(x) + m]^2} f'(x)$$

Với  $m = \pm 10$  thì hàm số  $g(x)$  là hàm hằng nên  $y = |g(x)|$  là hàm hằng nên loại  $m = \pm 10$ .

$$\text{Với } m \neq \pm 10, \text{ ta có } g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}.$$

Do đó  $g(x)$  có hai điểm cực trị. Nên để hàm số  $y = |g(x)|$  có đúng 5 điểm cực trị thì phương trình  $g(x) = 0$  có ba nghiệm phân biệt  $\Leftrightarrow mf(x) + 10 = 0$  có ba nghiệm phân biệt.

Với  $m = 0$ , phương trình vô nghiệm nên loại  $m = 0$ .

$$\text{Với } m \neq 0, \text{ phương trình } \Leftrightarrow f(x) = \frac{-100}{m}.$$

$$\text{Để } f(x) = \frac{-100}{m} \text{ có ba nghiệm } \Leftrightarrow -2 < \frac{-100}{m} < 2, \text{ mà } m \in [0; 2023] \text{ nên } m > 50.$$

$$\Rightarrow m \in \{51; 52; \dots; 2023\}.$$

**Câu 35:** Cho hàm số  $f(x) = \frac{2}{5}x^5 - \frac{m}{2}x^4 + \frac{4(m+3)}{3}x^3 - (m+7)x^2$  với  $m$  là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $g(x) = f(|x|)$  có đúng một điểm cực đại?

A. 16.

B. 17.

C. 12.

D. 13.

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\text{Ta có } f'(x) = 2x^4 - 2mx^3 + 4(m+3)x^2 - 2(m+7)x = 2x[x^3 - mx^2 + 2(m+3)x - m - 7]$$

$$\text{Ta thấy phương trình } x^3 - mx^2 + 2(m+3)x - m - 7 = 0 \text{ có nghiệm là } x = 1$$

$$\text{Khi đó ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x(x-1)[x^2 + (1-m)x + m+7] = 0$$

Do  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  nên để hàm số  $g(x) = f(|x|)$  có đúng một điểm cực đại khi  $f(x)$  có một điểm cực trị dương.

**(Đây là 1 nhận xét rất tinh tế dựa trên đặc điểm đồ thị hàm số GTTĐ và chiều đi lên của hàm số f(x), phải vẽ BBT ra mới hiểu kỹ được).**

TH1: Phương trình  $x^2 + (1-m)x + m+7 = 0$  có hai nghiệm phân biệt không dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-m)^2 - 4(m+7) > 0 \\ m-1 \leq 0 \\ m+7 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m - 27 > 0 \\ m \leq 1 \\ m \geq -7 \end{cases} \Leftrightarrow -7 \leq m < -3 \Rightarrow m \in \{-7; -6; -5; -4\}.$$

TH2: Phương trình  $x^2 + (1-m)x + m+7 = 0$  vô nghiệm hoặc có nghiệm kép

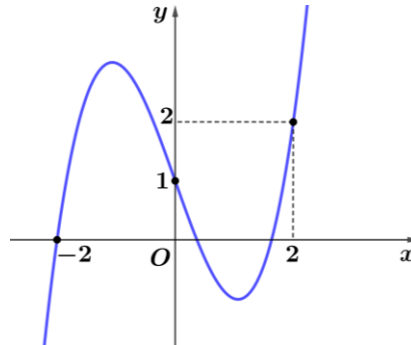
$$\Leftrightarrow (1-m)^2 - 4(m+7) \leq 0 \Leftrightarrow m^2 - 6m - 27 \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 9 \Rightarrow m \in \{-3; -2; \dots; 9\}.$$

TH3: Phương trình  $x^2 + (1-m)x + m+7 = 0$  có nghiệm  $x = 1$ .

$$\Leftrightarrow 1^2 + (1-m)1 + m+7 = 0 \Leftrightarrow 9 = 0 \text{ (Vô lý).}$$

Vậy  $m \in \{-7; -6; \dots; 8; 9\}$ .

**Câu 1.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Đồ thị hàm số  $y = f'(\sqrt[3]{x})$  được cho trong hình bên. Hàm số  $g(x) = \left| f(x) - \frac{1}{8}x^4 - x \right|$  có tối đa bao nhiêu điểm cực đại?



A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

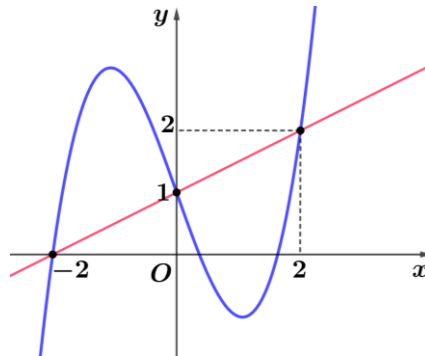
**Lời giải**

**Chọn B**

$$\text{Đặt } h(x) = f(x) - \frac{1}{8}x^4 - x.$$

$$\text{Ta có: } h'(x) = f'(x) - \frac{1}{2}x^3 - 1 \xrightarrow{h'(x)=0} f'(x) = \frac{1}{2}x^3 + 1.$$

$$\text{Đặt } x = \sqrt[3]{t}. \text{ Khi đó phương trình trở thành } f'(\sqrt[3]{t}) = \frac{1}{2}t + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = 0 \\ t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{-2} \\ x = 0 \\ x = \sqrt[3]{2} \end{cases}.$$



Bảng biến thiên của hàm số  $y = h(x)$ :

| $x$     | $-\infty$ | $\sqrt[3]{-2}$    | $0$    | $\sqrt[3]{2}$    | $+\infty$ |
|---------|-----------|-------------------|--------|------------------|-----------|
| $h'(x)$ | $-$       | $0$               | $+$    | $0$              | $+$       |
| $h(x)$  | $+\infty$ | $h(\sqrt[3]{-2})$ | $h(0)$ | $h(\sqrt[3]{2})$ | $+\infty$ |

Khi đó, hàm số  $g(x) = |h(x)|$  có số điểm cực đại nhiều nhất  $\Leftrightarrow h(x) = 0$  có 4 nghiệm.

Vậy hàm số  $g(x) = |h(x)|$  có tối đa 3 điểm cực đại.

### 3. Tiệm cận

**Câu 36:** Số giá trị nguyên của  $m$  thuộc  $[-10;10]$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{(x-1)\sqrt{x^2+3x}}{x^2+(m+1)x-m-2}$  có

đúng ba đường tiệm cận là

A. 20.

B. 18

C. 17.

**D. 19.**

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\text{Ta có } y = \frac{(x-1)\sqrt{x^2+3x}}{x^2+(m+1)x-m-2} = \frac{(x-1)\sqrt{x^2+3x}}{(x-1)(x+m+2)}$$

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq -3 \\ x \neq 1 \\ x \neq -m-2 \end{cases}$$

$$\text{Với điều kiện trên thì } y = \frac{(x-1)\sqrt{x^2+3x}}{x^2+(m+1)x-m-2} = \frac{(x-1)\sqrt{x^2+3x}}{(x-1)(x+m+2)} = \frac{\sqrt{x^2+3x}}{x+m+2}$$

Ta có  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+3x}}{x+m+2} = 1 \Rightarrow y = 1$  là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+3x}}{x+m+2} = -1 \Rightarrow y = -1$  là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Để đồ thị hàm số có 3 tiệm cận thì cần có thêm 1 tiệm cận đứng

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -m-2 \geq 0 \\ -m-2 \leq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -2 \\ m \geq 1 \end{cases}$$

Do  $m \in \mathbb{Z}, m \in [-10;10]$  nên có 19 giá trị nguyên.

**Câu 37:** Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{1+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2-mx-3m}}$  có đúng hai đường

tiệm cận đứng

A.  $(0; +\infty)$ .

B.  $\left(0; \frac{1}{2}\right]$ .

**C.  $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ .**

D.  $(-\infty; -12) \cup (0; +\infty)$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Nhận xét:  $1+\sqrt{x+1} > 0$  và đk  $x \geq -1$  nên đồ thị hàm số có đúng 2 đường tiệm cận đứng khi:

TH1: Phương trình  $x^2 - mx - 3m = 0$  có 1 nghiệm  $x = -1$  và 1 nghiệm lớn hơn  $-1$

$$\Rightarrow m = \frac{1}{2}. \text{ Khi đó hàm số } y = \frac{1 + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}}} = \frac{1 + \sqrt{x+1}}{\sqrt{(x+1)\left(x - \frac{3}{2}\right)}} \text{ chỉ có một tiệm cận đứng}$$

là  $x = \frac{3}{2}$   $m = \frac{1}{2} \Rightarrow$  không thỏa mãn (vì không tồn tại lim khi  $x \rightarrow -1^+; -1^-$ ).

TH2: Phương trình  $x^2 - mx - 3m = 0$  có 2 nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  lớn hơn  $-1 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 > -2 \\ (x_1 + 1)(x_2 + 1) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-m)^2 - 4 \cdot (-3m) > 0 \\ m > -2 \\ m + (-3m) + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -12 \\ m > 0 \\ m > -2 \\ m < \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < \frac{1}{2}$$

Kết hợp TH1 và TH2 ta có giá trị  $m$  cần tìm là  $0 < m < \frac{1}{2}$ .

**Câu 38:** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số  $m$  để đồ thị hàm số

$$y = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x^2 - 6x + 2m}} \text{ có đúng hai đường tiệm cận đứng. Số phần tử của tập } S \text{ là}$$

**A.** 13.

**B.** Vô số.

**C.** 11.

**D.** 12.

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\text{Điều kiện xác định } \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x^2 - 6x + 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2 - 6x + 2m > 0 \end{cases}.$$

Đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận đứng  $\Leftrightarrow$  phương trình  $x^2 - 6x + m = 0$  có

$$\text{hai nghiệm phân biệt lớn hơn } -2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (-3)^2 - 2m > 0 \\ (x_1 + 2)(x_2 + 2) > 0 \\ (x_1 + 2) + (x_2 + 2) > 0 \end{cases} \quad (1)$$

với  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình  $x^2 - 6x + m = 0$ , theo Vi-et ta có  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 \cdot x_2 = 2m \end{cases}$ ,

$$\text{thay vào hệ (1) ta được } \begin{cases} m < \frac{9}{2} \\ 2m + 16 > 0 \\ 10 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -8 < m < \frac{9}{2},$$

vì  $m \in \mathbb{Z}$  nên có 12 phần tử thỏa mãn là  $\{-7; -6; \dots; 3; 4\}$ .



**Câu 39:** Tìm số giá trị nguyên thuộc đoạn  $[-2022; 2022]$  của tham số  $m$  để đồ thị hàm số

$$y = \frac{\sqrt{x-3}}{x^2 + x - m} \text{ có đúng hai đường tiệm cận.}$$

A. 2010.

B. 2008.

C. 2009.

D. 2011.

Lời giải

**Chọn D**

$$\text{Hàm số xác định} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 + x - m \neq 0 \end{cases}$$

Ta có  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0 \Rightarrow y = 0$  là tiệm cận ngang

Suy ra, đồ thị hàm số đã cho có đúng 2 tiệm cận  $\Leftrightarrow x^2 + x - m = 0$  (1) có đúng 1 nghiệm lớn hơn hoặc bằng 3. (2)

$$\text{Xét (1)} \Leftrightarrow x^2 + x = m$$

$$h(x) = x^2 + x; h'(x) = 2x + 1$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Bảng biến thiên

| $x$     | $-\infty$ | $-\frac{1}{2}$ | $3$            | $+\infty$ |
|---------|-----------|----------------|----------------|-----------|
| $h'(x)$ |           | -              | 0              | +         |
| $h(x)$  | $+\infty$ |                | $-\frac{1}{4}$ | $+\infty$ |

Từ BBT suy ra

$$(2) \Leftrightarrow m \geq 12$$

Mà  $m \in \mathbb{Z}; m \in [-2022; 2022]$  nên  $m \in \{12; \dots; 2022\}$

Vậy số giá trị nguyên thỏa mãn ycbt là:  $2022 - 12 + 1 = 2011$ .

**Câu 40:** Cho hàm số  $y = \frac{x-4}{x^3 - 2mx^2 + (m^2+1)x - m}$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$

thuộc đoạn  $[-2023; 2023]$  để đồ thị hàm số có đúng 4 đường tiệm cận?

A. 4041.

B. 4046.

C. 4042.

D. 4040.

Lời giải

**Chọn A**

Ta có  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0$  và  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0$  suy ra  $y = 0$  là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Đồ thị hàm số có đúng 4 đường tiệm cận khi và chỉ khi  $g(x) = 0$  có 3 nghiệm phân biệt khác 4.

$$\text{Mặt khác } g(x) = (x-m)(x^2 - mx + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ h(x) = x^2 - mx + 1 = 0. \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} h(4) \neq 0 \\ m \neq 4 \\ h(m) \neq 0 \\ \Delta_h = m^2 - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \frac{17}{4} \\ m \neq 4 \\ \begin{cases} m > 2 \\ m < -2. \end{cases} \end{cases}$$

Vì  $m$  nguyên thuộc đoạn  $[-2023; 2023]$  nên có 4041 giá trị  $m$  thỏa yêu cầu bài toán.

#### 4. Max. Min

**Câu 41:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $f(x) = x^4 + 2mx^3 + (2m+3)x^2 + 2$  đạt giá trị nhỏ nhất tại  $x=0$ ?

A. 6.

B. 4.

C. 3.

D. 5.

Lời giải

**Chọn D**

Ta có  $f(x) \geq f(0), \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^4 + 2mx^3 + (2m+3)x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$

Suy ra  $x^2 + 2mx + 2m+3 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 2m - 3 \leq 0 \Rightarrow -1 \leq m \leq 3.$

Do đó có 5 giá trị nguyên của tham số  $m$  thỏa mãn điều kiện bài toán.

**Câu 42:** Cho hàm số  $y = \frac{x-m^2}{x-8}$  với  $m$  là tham số thực. Giả sử  $m_0$  là giá trị dương của tham số  $m$  để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn  $[0;3]$  bằng  $m$ . Giá trị  $m_0$  thuộc khoảng nào sau đây

A.  $(20;25).$

B.  $(6;9).$

C.  $(5;6).$

D.  $(2;5).$

Lời giải

**Chọn D**

Ta có :  $y' = \frac{8+m^2}{(x+8)^2} > 0, \forall x \neq -8$

Do đó  $\min_{[0;3]} y = y(0) = \frac{-m^2}{8}$ . Theo giả thiết  $\min_{[0;3]} y = -3 \Rightarrow \frac{-m^2}{8} = -3 \Leftrightarrow m^2 = 24 \Leftrightarrow m = \pm 2\sqrt{6}$

Vậy  $m_0 = 2\sqrt{6} \in (2;5).$

**Câu 43:** Cho hàm số  $y = g(x)$  thỏa mãn  $2g^3(x) - 6g^2(x) + 7g(x) = 3 - (2x-3)\sqrt{1-x}$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = 2g(x) + x$

A. 0

B. 1

C. 4

D. 6

Lời giải

**Chọn C**

$$2g^3(x) - 6g^2(x) + 7g(x) = 3 - (2x-3)\sqrt{1-x}$$

$$\Leftrightarrow 2g^3(x) - 6g^2(x) + 6g(x) - 2 + g(x) + 2 = 3 - (2x-2)\sqrt{1-x} + \sqrt{1-x}$$

$$\Leftrightarrow 2[g(x)-1]^3 + g(x) - 1 = 2(1-x)\sqrt{1-x} + \sqrt{1-x}(1)$$

Xét hàm số  $f(t) = 2t^3 + t$

Ta có  $f'(t) = 6t^2 + 1 > 0 \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$  đồng biến trên  $(-\infty; +\infty)$

$$(1) \Leftrightarrow g(x) - 1 = \sqrt{1-x} \Leftrightarrow g(x) = \sqrt{1-x} + 1 \Rightarrow P = 2\sqrt{1-x} + 2 + x$$

$$\text{Ta có } P = 2\sqrt{1-x} + 2 + x = -\sqrt{1-x}^2 + 2\sqrt{1-x} - 1 + 4 = -(\sqrt{1-x} - 1)^2 + 4 \leq 4$$

Đẳng thức xảy ra khi  $\sqrt{1-x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .

**Câu 44:** Cho hàm số  $f(x) = ax^3 - 4(a+2)x + 1$  với  $a$  là tham số. Nếu  $\max_{(-\infty; 0]} f(x) = f(-2)$  thì

$\max_{[0; 3]} f(x)$  bằng

A. 4.

B. 1.

C. -8.

D. -9.

Lời giải

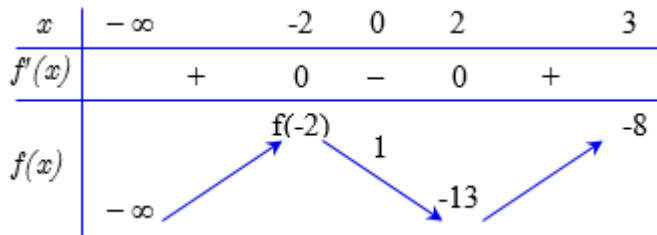
**Chọn B**

$$\text{TXĐ } D = \mathbb{R}, f'(x) = 3ax^2 - 4(a+2)$$

$$\max_{(-\infty; 0]} f(x) = f(-2) \Rightarrow f'(-2) = 0 \Leftrightarrow 12a - 4(a+2) = 0 \Leftrightarrow a = 1.$$

$$\text{Suy ra } f(x) = x^3 - 12x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2.$$



Vậy với  $a = 1$  thì hàm số đạt  $\max_{(-\infty; 0]} f(x) = f(-2)$  và khi đó  $\max_{[0; 3]} f(x) = 1$ .

**Câu 45:** Cho hàm số  $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+4}$ , với  $a, b$  là tham số,  $a \neq 0$ . Nếu  $\min_{\mathbb{R}} f(x) = f(-1) = -1$  thì

$\max_{\mathbb{R}} f(x)$  bằng

A.  $\frac{11}{20}$ .

B.  $\frac{5}{12}$ .

C.  $\frac{3}{4}$ .

D.  $\frac{1}{4}$ .

Lời giải

**Chọn D**

$$\text{Từ } f(-1) = -1 \Rightarrow -a + b = -5, (1)$$

$$f'(x) = \frac{-ax^2 - 2bx + 4a}{(x^2 + 4)^2}.$$

Phương trình  $-ax^2 - 2bx + 4a = 0, (\Delta' = b^2 + 4a^2 > 0)$  luôn có hai nghiệm phân biệt.

$$\text{Vì } \min_{\mathbb{R}} f(x) = f(-1) \text{ nên } -a(-1)^2 - 2b(-1) + 4a = 0 \Leftrightarrow 3a + 2b = 0, (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } a = 2, b = -3. \text{ Do đó } f(x) = \frac{2x-3}{x^2+4}, f'(x) = \frac{-2x^2+6x+8}{(x^2+4)^2}.$$

|         |                                                                                   |      |     |           |     |
|---------|-----------------------------------------------------------------------------------|------|-----|-----------|-----|
| $x$     | $-\infty$                                                                         | $-1$ | $4$ | $+\infty$ |     |
| $f'(x)$ | $-$                                                                               | $0$  | $+$ | $0$       | $-$ |
| $f(x)$  |  |      |     |           |     |

Nên  $\max_{\mathbb{R}} f(x) = \frac{1}{4}$ .

**Câu 46:** Cho hàm số  $f(x) = \frac{2\sqrt{x+1}+m}{\sqrt{x+1}+4}$  với  $m$  là tham số thực. Gọi  $S$  là tập hợp các giá trị nguyên dương của  $m$  để hàm số có giá trị lớn nhất trên đoạn  $[-1;8]$  nhỏ hơn 3. Số phần tử của tập  $S$  là

A. 9.

B. 11.

C. 12.

D. 10.

Lời giải

**Chọn B.**

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot \frac{8-m}{(\sqrt{x+1}+4)^2}.$$

Trường hợp 1: Nếu  $m < 8 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow$  hàm số đồng biến trên  $(-1;8)$ .

$$\Rightarrow \max_{[-1;8]} f(x) = f(8) = \frac{6+m}{7} < 3 \Leftrightarrow m < 15.$$

$$\text{Mà } m < 8; m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow m \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}.$$

Trường hợp 2: Nếu  $m > 8 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow$  hàm số nghịch biến trên  $(-1;8)$

$$\Rightarrow \max_{[-1;8]} f(x) = f(-1) = \frac{m}{4} < 3 \Leftrightarrow m < 12.$$

$$\text{Mà } m > 8; m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow m \in \{9; 10; 11\}.$$

Trường hợp 3: Nếu  $m = 8 \Rightarrow f(x) = 2 \Rightarrow \max_{[-1;8]} f(x) = 2 < 3$  (thỏa mãn)  $\Rightarrow m = 8$  thỏa mãn.

Vậy có 11 giá trị của  $m$  thỏa mãn yêu cầu bài toán là  $m \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11\}$ .

**Câu 47:** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số thực  $m$  sao cho giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \left| \frac{1}{4}x^4 - 14x^2 + 48x + m - 30 \right|$  trên đoạn  $[0;2]$  không vượt quá 30. Tổng giá trị các phần tử của tập hợp  $S$  bằng bao nhiêu?

A. 210.

B. 108.

C. 136.

D. 120.

Lời giải

**Chọn C**

$$\text{Đặt } g(x) = \frac{1}{4}x^4 - 14x^2 + 48x + m - 30 \Rightarrow g'(x) = x^3 - 28x + 48 \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ x = 2 \\ x = 4 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

|         |           |      |     |        |     |           |
|---------|-----------|------|-----|--------|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-6$ | $0$ | $2$    | $4$ | $+\infty$ |
| $g'(x)$ |           |      |     | $+$    | $0$ |           |
| $g(x)$  |           |      |     | $m+14$ |     |           |
|         |           |      |     | $m-30$ |     |           |

Ta có  $y = |g(x)| \Rightarrow \max_{[0;2]} y = \max_{[0;2]} |g(x)| = \max \{|m+14|, |m-30|\}$ .

**Trường hợp 1:** Nếu  $|m+14| \geq |m-30| \Leftrightarrow m \geq 8$  thì

$$\max_{[0;2]} y = |m+14| \Rightarrow |m+14| \leq 30 \Leftrightarrow -30 \leq m+14 \leq 30 \Leftrightarrow -44 \leq m \leq 16.$$

Do đó  $8 \leq m \leq 16$ .

**Trường hợp 2:** Nếu  $|m+14| \leq |m-30| \Leftrightarrow m \leq 8$  thì

$$\max_{[0;2]} y = |m-30| \Rightarrow |m-30| \leq 30 \Leftrightarrow -30 \leq m-30 \leq 30 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 60.$$

Do đó  $0 \leq m \leq 8$ .

Vậy  $S = \{0; 1; 2; 3; \dots; 16\}$ . Suy ra tổng giá trị các phần tử của tập hợp  $S$  bằng 136.

**Câu 48:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để giá trị lớn nhất của hàm số  $y = |x^3 - 3x^2 + m|$  trên đoạn  $[-2; 3]$  đạt nhỏ nhất?

A.  $m = 8$ .

B.  $m = -8$ .

C.  $m = 10$ .

D.  $m = -10$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Xét hàm số  $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + m$  liên tục trên đoạn  $[-2; 3]$ .

$$+) f'(x) = 3x^2 - 6x; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = 2 \in [-2; 3].$$

$$+) f(-2) = m - 20, f(2) = m - 4, f(3) = f(0) = m.$$

$$\text{Khi đó } \max_{[-2;3]} |f(x)| = \max \{|m|; |m-20|\} = M.$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} M \geq |m| \\ M \geq |m-20| = |20-m| \end{cases} \Rightarrow 2M \geq |m| + |20-m| \geq |m+20-m| = 20 \Rightarrow M \geq 10.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} |m| = |20-m| = 10 \\ m(20-m) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 10.$$

**Câu 49:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để  $\max_{[1;3]} |x^3 - 3x^2 + m| \leq 3$ ?

A. 5

B. 6

C. 8

D. 3

**Lời giải**

**Chọn D**

Xét hàm  $f(x) = x^3 - 3x^2 + m$  trên đoạn  $[1; 3]$ .

$$\text{Ta có: } f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

|         |       |       |     |
|---------|-------|-------|-----|
| $x$     | 1     | 2     | 3   |
| $f'(x)$ |       | - 0 + |     |
| $f(x)$  | $m-2$ | $m-4$ | $m$ |

+ **TH1:**  $m-4 > 0 \Leftrightarrow m > 4$  thì  $\max_{[1;3]} |x^3 - 3x^2 + m| = m$ .

Khi đó  $\max_{[1;3]} |x^3 - 3x^2 + m| \leq 3 \Leftrightarrow m \leq 3$  (**Loại**).

+ **TH2:**  $m < 0 \Leftrightarrow m < 0$  thì  $\max_{[1;3]} |x^3 - 3x^2 + m| = 4 - m$ .

Khi đó  $\max_{[1;3]} |x^3 - 3x^2 + m| \leq 3 \Leftrightarrow 4 - m \leq 3 \Leftrightarrow m \geq 1$  (**Loại**).

+ **TH3:**  $\begin{cases} m \geq 0 \\ m-4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ m \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 4$  thì  $\max_{[1;3]} |x^3 - 3x^2 + m| = \max \{4 - m; m\}$ .

Khi đó  $\max_{[1;3]} |x^3 - 3x^2 + m| \leq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - m \leq 3 \\ 4 - m \geq m \\ m \leq 3 \\ m \geq 4 - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq m \leq 2 \\ 2 \leq m \leq 3 \end{cases}$

Kết hợp điều kiện và  $m \in \mathbb{Z}$  ta suy ra có 3 giá trị nguyên tham số  $m$  là  $m \in \{1; 2; 3\}$ .

**Câu 50:** Có bao nhiêu số thực  $m$  để hàm số  $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$  có giá trị lớn nhất trên đoạn  $[-3; 2]$  bằng 150?

**A.** 2.

**B.** 0.

**C.** 6.

**D.** 4.

**Lời giải**

Đặt  $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m$ . Ta có  $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$ .

$f(-3) = 243 + m$ ,  $f(-1) = -5 + m$ ,  $f(0) = m$ ,  $f(2) = -32 + m$ .

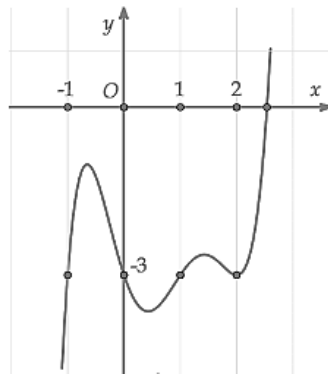
Đặt  $\begin{cases} A = f(-3) = 243 + m \\ a = f(2) = -32 + m \end{cases}$ .

TH1:  $\frac{A+a}{2} = \frac{2m+211}{2} \geq 0$  thì  $\max = m + 243 = 150 \Leftrightarrow m = -93$  nhận

TH2:  $\frac{A+a}{2} = \frac{2m+211}{2} < 0$  thì  $\max = -(m-32) = 150 \Leftrightarrow m = -118$  nhận

Vậy có 2 giá trị của tham số  $m$ .

**Câu 51:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x)$ . Đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ.

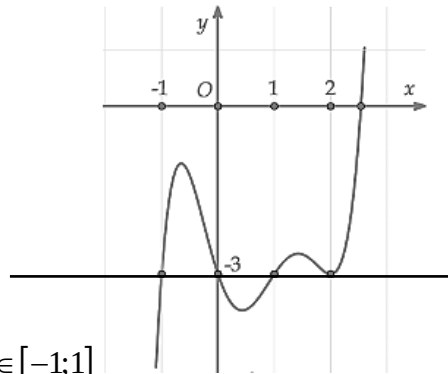


Giá trị lớn nhất của hàm số  $g(x) = f(3x) + 9x$  trên đoạn  $\left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right]$  là

- A.**  $f(0)$ .      **B.**  $f(1) + 2$ .      **C.**  $f\left(\frac{1}{3}\right)$ .      **D.**  $f(1)$ .

**Lời giải**

**Chọn A**



Đặt  $t = 3x \xrightarrow{x \in \left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right]} t \in [-1; 1]$

Xét hàm số  $y = f(t) + 3t, t \in [-1; 1]$  có  $y' = f'(t) + 3$

Cho  $y' = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 0 \\ t = 1 \\ t = 2(\text{loại}) \end{cases}$

$y(-1) = f(-1) - 3; y(1) = f(1) + 3; y(0) = f(0)$

| $t$  | -1                                                                                                                                                                                                                              | 0 | 1 |
|------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| $y'$ | 0                                                                                                                                                                                                                               | + | 0 |
| $y$  | <div style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: center;"> <div style="width: 30%;"></div> <div style="width: 40%; text-align: center;"> <math>f(0)</math> </div> <div style="width: 30%;"></div> </div> |   |   |

Vậy  $\max_{[-1; 1]} y = f(0)$

**Câu 52:** Cho hàm số  $y = x^3 + mx^2 + (2m^2 - m + 1)x + m^2 - 3m$ . Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  sao cho giá trị lớn nhất của hàm số trên  $(-\infty; 0]$  bằng  $-2$ . Tích các phần tử của  $S$  bằng

- A.** 0.      **B.** 1.      **C.** 3.      **D.** 2.

### Lời giải

#### Chọn D

Ta có:  $y' = 3x^2 + 2mx + 2m^2 - m + 1$ .

Vì  $y'$  có  $a = 3 > 0$  và  $\Delta'_{y'} = m^2 - 3(2m^2 - m + 1) = -5m^2 + 3m - 3 < 0, \forall m \in \mathbb{R}$  do đó hàm số đã cho đồng biến trên  $\mathbb{R}$ , do đó  $\max_{(-\infty; 0]} y = y(0) = m^2 - 3m$ .

Theo đề bài, ta có:  $m^2 - 3m = -2 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$  suy ra  $S = \{1; 2\}$ .

Vậy tích các phần tử của tập  $S$  bằng  $2.1 = 2$ .

**Câu 53:** Biết giá trị lớn nhất của hàm số  $y = f(x) = |2x^3 - 15x + m + 5| + 9x$  trên đoạn  $[0; 3]$  là 60.

Tính tổng các giá trị thực của tham số  $m$ .

A. 48

B. 5

C. 6

D. 62

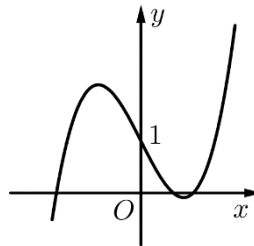
HD: Ta có  $|2x^3 - 15x + m - 5| + 9x \leq 60$  với mọi  $x \in [0; 3]$  và dấu bằng có xảy ra.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - 15x + m - 5 \leq 60 - 9x \\ 2x^3 - 15x + m - 5 \geq 9x - 60 \end{cases}. \text{ Cô lập } m \text{ ta có } \begin{cases} m \geq -2x^3 + 24 - 55 \\ m \leq -2x^3 + 6x + 65 \end{cases} \text{ với mọi } x \in [0; 3].$$

Dùng hàm số ta có  $\begin{cases} m \geq -23 \\ m \leq 29 \end{cases}$ . Để xảy ra dấu bằng thì  $m$  bằng các giá trị trên. Đáp án C.

### 5. Tương giao

**Câu 54:** Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ, phương trình  $f(x^2) = 1$  có bao nhiêu nghiệm?



A. 5.

B. 3.

C. 2.

D. 6

### Lời giải

#### Chọn B

Từ đồ thị hàm số ta thấy đường thẳng  $y = 1$  cắt đồ thị hàm số  $y = f(x)$  tại 3 điểm có hoành độ là  $a, 0, b$  ( $a < 0 < b$ ).

$$\text{Suy ra: } f(x^2) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = a & (1) \\ x^2 = 0 & (2) \\ x^2 = b & (3) \end{cases}$$

Số nghiệm của phương trình (1), (2), (3) lần lượt là 0, 1, 2.

**Câu 55:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới.



|      |           |      |     |           |      |           |
|------|-----------|------|-----|-----------|------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $3$ | $+\infty$ |      |           |
| $y'$ |           | $+$  | $0$ | $-$       | $0$  | $+$       |
| $y$  |           |      | $4$ |           | $-2$ |           |
|      | $-\infty$ |      |     |           |      | $+\infty$ |

Số nghiệm thực phân biệt của phương trình  $f[f(x)+1]+2=0$  là

A. 2.

B. 6.

C. 4.

D. 3.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có:  $f[f(x)+1]+2=0 \Leftrightarrow f[f(x)+1]=-2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)+1=3 \\ f(x)+1=a \ (a < -1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=2 \\ f(x)=-a-1 \end{cases}$

$f(x)=2$  Thì phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

$f(x)=-a-1$  với  $a < -1$  thì phương trình có 1 nghiệm.

Vậy phương trình:  $f[f(x)+1]+2=0$  có 4 nghiệm thực phân biệt.

**Câu 56:** Cho hàm số  $f(x)=x^3-3x^2+2$ . Tìm tổng các số nguyên  $m$  sao cho phương trình  $f(x^3-3x)=m$  có 7 nghiệm phân biệt.

A. 0.

B. 3.

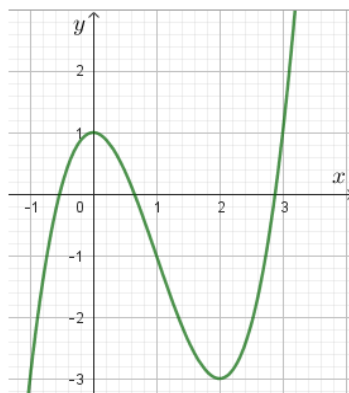
C. 2.

D. -2.

**Lời giải**

**Chọn A.** Sử dụng PP ghép bảng

**Câu 57:** Cho hàm số  $y=f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Số nghiệm phân biệt của phương trình  $f'(-4-2f(x))=0$  là

A. 5.

B. 6.

C. 3.

D. 4.

**Lời giải**

**Chọn A**

Từ đồ thị của hàm số  $y=f(x)$  ta có:

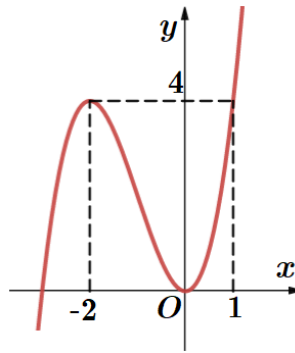
$$f'(-4-2f(x))=0 \Leftrightarrow \begin{cases} -4-2f(x)=0 \\ -4-2f(x)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=-2 \\ f(x)=-3 \end{cases}$$

+) Với  $f(x)=-2 \Rightarrow$  có 3 nghiệm phân biệt khác 2.

+) Với  $f(x)=-3 \Rightarrow$  có 2 nghiệm trong đó có nghiệm kép  $x=2$ .

Số nghiệm phân biệt của phương trình  $f'(-4-2f(x))=0$  là 5.

**Câu 58:** Cho hàm số  $y=f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $f(x^2 + 2x - 2) = 3m + 1$  có nghiệm thuộc khoảng  $[0; 1]$  là

A.  $\left[-\frac{1}{3}; 1\right]$

B.  $[0; 1]$

C.  $[0; 4]$

D.  $[-1; 0]$

**Câu 59:** Cho hàm số  $y = f(2 - x)$  có bảng biến thiên như sau:

|      |           |   |   |   |   |   |   |   |           |
|------|-----------|---|---|---|---|---|---|---|-----------|
| $x$  | $-\infty$ |   | 2 |   | 4 |   | 6 |   | $+\infty$ |
| $y'$ |           | - | 0 | + | 0 | - | 0 | + |           |
| $y$  | $+\infty$ |   |   |   |   |   |   |   | $+\infty$ |

$\swarrow$        $\searrow$        $\swarrow$        $\searrow$   
 $\infty$       -3      2      -2       $\infty$

Tổng các giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $3f^2(x^2 - 4x) - (m + 2)f(x^2 - 4x) + m - 1 = 0$  có đúng 8 nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng  $(0; +\infty)$ ?

A. 7.

B. -6.

C. 3.

D. -13.

**Lời giải**

**Chọn B**

Từ BBT của hàm số  $f(2 - x)$  ta suy ra BBT của hàm số  $f(x)$  là:

|        |           |    |    |   |           |
|--------|-----------|----|----|---|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | -4 | -2 | 0 | $+\infty$ |
| $f(x)$ |           |    | 2  |   |           |

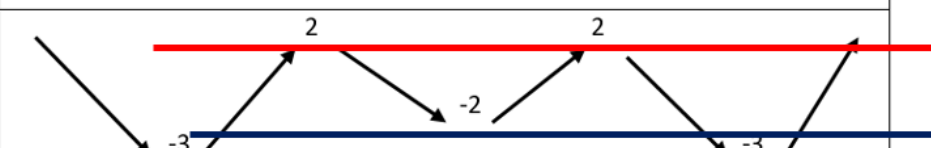
$\swarrow$        $\searrow$        $\swarrow$        $\searrow$   
 $\infty$       -2      2      -3       $\infty$

Đặt  $t = f(x^2 - 4x)$ . Ta tìm miền giá trị của  $t$  (chú ý là khi đặt ẩn phụ trong các bài tham số, việc đầu tiên là tìm điều kiện của tham số. Chẳng hạn, đặt  $t = x^2$  thì  $t \geq 0$ . Điều kiện này ở đâu ra, chính là mình khảo sát hàm số  $t = x^2$ )

Có  $t'(x) = (2x - 4)f'(x^2 - 4x)$ . Cho  $t'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ f'(x^2 - 4x) = 0 \end{cases} \quad (1)$

$$\text{Ta có: } f'(x^2 - 4x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x = -4 \\ x^2 - 4x = -2 \\ x^2 - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 2 \pm \sqrt{2} \\ \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases} \end{cases}$$

Bảng biến thiên của t

|         |                                                                                    |   |                |   |                |   |           |
|---------|------------------------------------------------------------------------------------|---|----------------|---|----------------|---|-----------|
| $x$     | $-\infty$                                                                          | 0 | $2 - \sqrt{2}$ | 2 | $2 + \sqrt{2}$ | 4 | $+\infty$ |
| $t'(x)$ | -                                                                                  | 0 | +              | 0 | +              | 0 | +         |
| $t(x)$  |  |   |                |   |                |   |           |

$$\text{Khi đó } 3f^2(x^2 - 4x) - (m+2)f(x^2 - 4x) + m - 1 = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - (m+2)t + m - 1 = 0 \quad (2).$$

$$\text{Ta có: } \Delta = (m+2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (m-1) = m^2 - 8m + 16 = (m-4)^2 > 0, \forall m \neq 4.$$

Khi  $m = 4$  thì  $t = 1$ , ta chỉ có 5 nghiệm  $x$  thuộc  $(0; +\infty)$

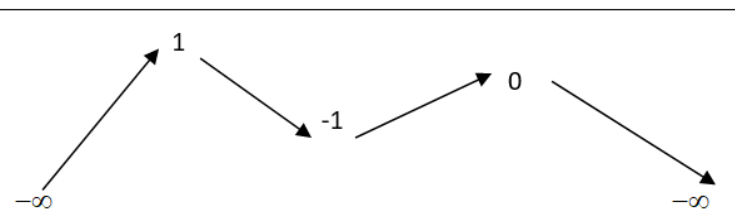
$$\text{Khi } m \neq 4 \text{ thì } \begin{cases} t_1 = 1 & (1) \\ t_2 = \frac{m-1}{3} & (2) \end{cases}$$

Với  $t = 1$  ta có 5 nghiệm  $x \in (0; +\infty)$ , để có đúng 8 nghiệm thì (2) có đúng 3 nghiệm

$$\text{TH1: } \frac{m-1}{3} = 2 \Leftrightarrow m = 7$$

$$\text{TH2: } -3 < \frac{m-1}{3} < -2 \Leftrightarrow -8 < m < -5 \Leftrightarrow m = -7; m = -6$$

**Câu 60:** Cho hàm số  $y = f(x)$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có bảng biến thiên như sau:

|         |                                                                                      |    |   |   |           |
|---------|--------------------------------------------------------------------------------------|----|---|---|-----------|
| $x$     | $-\infty$                                                                            | -1 | 1 | 3 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |  |    |   |   |           |

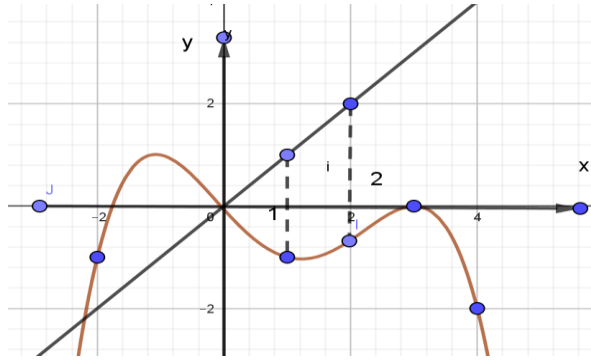
Điều kiện cần và đủ của tham số  $m$  để bất phương trình  $f(x) - \frac{1}{2}x^2 < m$  nghiệm đúng với mọi  $x \in [1; 2]$  là

$$\text{A. } m > f(2) - 2. \quad \text{B. } m \geq f(2) - 2. \quad \text{C. } m \geq f(1) - \frac{1}{2}. \quad \text{D. } m > f(1) - \frac{1}{2}.$$

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\text{Đặt } g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow g'(x) = f'(x) - x. \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) - x = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x.$$

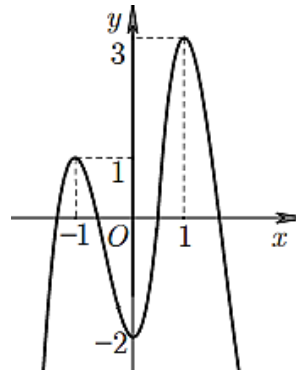


Đưa vào đồ thị 2 hàm số  $y = f'(x)$  và đồ thị hàm số  $y = x$  ta được  $g'(x) < 0, \forall x \in [1; 2]$

Do đó hàm số  $g(x)$  nghịch biến trên  $[1; 2] \Rightarrow \max_{[1; 2]} g(x) = g(1) = f(1) - \frac{1}{2}$ .

Yêu cầu bài toán  $m > \max_{[1; 2]} g(x) = f(1) - \frac{1}{2}$ .

**Câu 61:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Tập nghiệm của phương trình  $f'(2f(x) - 3) = 0$  có số phần tử là



**A.** 7.

**B.** 10.

**C.** 9.

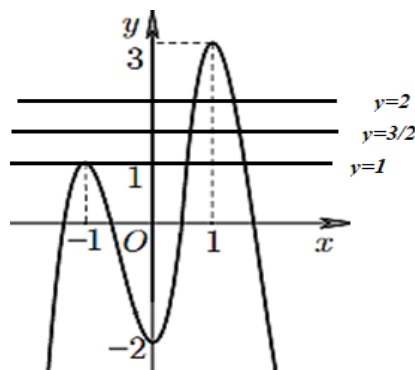
**D.** 6.

**Lời giải**

**Chọn A**

Từ đồ thị hàm số  $y = f(x)$  ta có

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow f'(2f(x) - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2f(x) - 3 = -1 \\ 2f(x) - 3 = 0 \\ 2f(x) - 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 1 \\ f(x) = \frac{3}{2} \\ f(x) = 2 \end{cases}$$



Từ sự tương giao trên hình vẽ, phương trình  $f'(2f(x) - 3) = 0$  có 7 nghiệm.

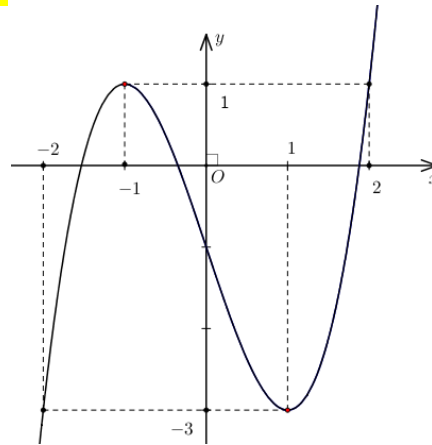
**Câu 62:** Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu số nguyên  $m$  để phương trình  $f(f(x) - m + 1) = 0$  có tất cả 9 nghiệm thực phân biệt.

A. 3.

B. 1.

C. 0.

D. 2.



**Lời giải**

**Chọn B**

$$\text{Ta có } f(f(x) - m + 1) = 0 (*) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) - m + 1 = a, & a \in (-2; -1) \\ f(x) - m + 1 = b, & b \in (-1; 0) \\ f(x) - m + 1 = c, & c \in (1; 2) \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} f(x) = m - 1 + a, & (1) \\ f(x) = m - 1 + b, & (2) \\ f(x) = m - 1 + c, & (3) \end{cases}$$

Để phương trình (\*) có 9 nghiệm phân biệt thì mỗi phương trình (1), (2), (3) đều có 3

$$\text{nghiệm phân biệt, khi đó } \begin{cases} -3 < m - 1 + a < 1 \\ -3 < m - 1 + b < 1 \\ -3 < m - 1 + c < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m + a < 2 \\ -2 < m + b < 2 \\ -2 < m + c < 2 \end{cases}$$

$$\text{Do } a \in (-2; -1), b \in (-1; 0), c \in (1; 2) \text{ nên ta suy ra } \begin{cases} -1 < m < 4 \\ -2 < m < 3 \\ -4 < m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 1$$

Vì  $m \in \mathbb{Z}$  nên  $m = 0$

**Câu 63:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

|      |           |      |      |     |           |      |     |           |
|------|-----------|------|------|-----|-----------|------|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-4$ | $-2$ | $0$ | $+\infty$ |      |     |           |
| $y'$ |           | $-$  | $0$  | $+$ | $0$       | $-$  | $0$ | $+$       |
| $y$  | $+\infty$ |      | $-2$ | $2$ |           | $-3$ |     | $+\infty$ |

Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để phương trình  $4f(x^2 - 4x) = m$  có ít nhất ba nghiệm dương phân biệt?

A. 19.

B. 21.

C. 20.

D. 18.

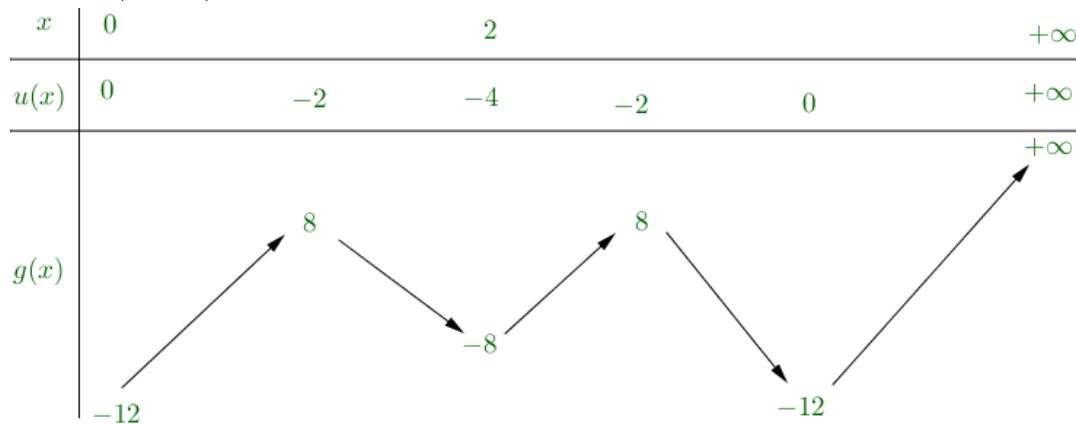
**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có:  $4f(x^2 - 4x) = m \Leftrightarrow 4f(u(x)) = m$ , với  $u(x) = x^2 - 4x$ .

Đặt  $g(x) = 4f(u(x))$ .

Phương trình đã cho có ít nhất ba nghiệm dương phân biệt khi đồ thị hàm số  $y = g(x)$  trên khoảng  $(0; +\infty)$  và đường thẳng  $y = m$  có ít nhất ba điểm chung phân biệt.



Vậy phương trình  $4f(x^2 - 4x) = m$  có ít nhất ba nghiệm dương phân biệt khi  $-12 < m \leq 8$ , mà  $m$  nguyên nên  $m = -11, -10, \dots, 8$ .

**Câu 64:** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = x^3 - (2+m)x^2 - (2m^2 - 3m - 1)x + 2m^2 - 2m$  cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ dương theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Tổng tất cả các phần tử của  $S$  bằng:

A.  $\frac{7}{5}$ .

B.  $\frac{13}{20}$

C.  $\frac{33}{20}$

D.  $\frac{5}{4}$

**Lời giải**

**Chọn B**

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^3 - (2+m)x^2 - (2m^2 - 3m - 1)x + 2m^2 - 2m = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)[x^2 - (m+1)x - (2m^2 - 2m)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^2 - (m+1)x - (2m^2 - 2m) = 0 (*) \end{cases}$$

Để đồ thị hàm số đã cho cắt Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ dương thì (\*) có 2 nghiệm dương phân biệt và khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (0; 1) \setminus \left\{ \frac{1}{2}; \frac{1}{3} \right\}$$

Khi đó (\*) có 2 nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  và  $x_1 + x_2 = m + 1$  và 1 nghiệm ban đầu  $x_3 = 1$

Để 3 giao điểm có hoành độ lập thành cấp số cộng thì  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2x_3 \\ x_1 + x_3 = 2x_2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+1=2 \\ x_1 - 2x_2 = -1 \end{cases}$$

Theo Vi-ét: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m + 1 \\ x_1 x_2 = -2m^2 + 2m \Rightarrow m = \frac{2}{5}; m = \frac{1}{4} \\ x_1 - 2x_2 = -1 \end{cases}$$
 (Từ phương trình 1 và 3 tính được  $x_1; x_2$

theo  $m$  rồi thay vào phương trình 2)

Vậy tổng các giá trị của  $S$  là  $13/20$

**Thảo luận:** Đây là kiểu bài cũ từ ngày thi tự luận

**Cách làm khác:** Do tính chất tâm đối xứng của đồ thị hàm bậc ba nên để đồ thị cắt trục hoành tại 3 điểm lập thành cấp số cộng thì điểm uốn nằm trên trục hoành, sau đó thử lại xem phương trình có 3 nghiệm hay không.

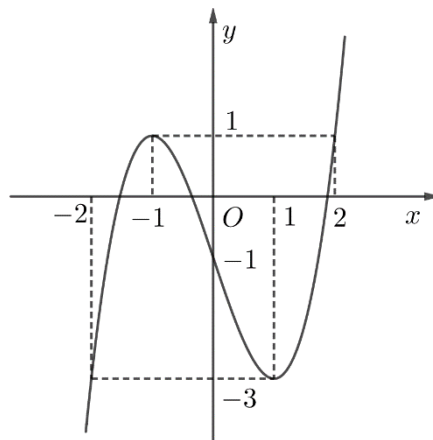
$$y'' = 6x - 2(m + 2) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{m + 2}{3}$$

$$\text{Với } x = \frac{m + 2}{3} \text{ thì } y = -\frac{20}{27}x^3 + \frac{11}{9}x^2 - \frac{5}{9}x + \frac{2}{27}$$

$$\text{Điểm uốn thuộc trục } Ox \text{ thì } y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{4} \\ m = \frac{2}{5} \\ m = 1 \end{cases}$$

Thử lại (chỉ cần thay  $m$  vào hàm số và kiểm tra xem phương trình  $y = 0$  có ba nghiệm hay không)

**Câu 65:** Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ



Đặt  $g(x) = f(f(x) + 2)$ . Phương trình  $g'(x) = 0$  có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

**A. 6.**

**B. 7.**

**C. 4.**

**D. 5.**

**Lời giải**

**Chọn A**

$$g(x) = f(f(x) + 2)$$

$$\text{Có } g'(x) = f'(x)f'(f(x) + 2).$$

$$\text{Ta được } g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x)f'(f(x) + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 & (1) \\ f'(f(x) + 2) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) + 2 = -1 \\ f(x) + 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = -3 \\ f(x) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \\ x = a \in (-2; -1) \\ x = 0 \\ x = b \in (1; 2) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -1 \\ x = 1 \\ x = 0 \\ x = a \in (-2; -1) \\ x = b \in (1; 2) \end{cases} \text{ nên 6 nghiệm thực phân biệt.}$$

**Câu 66:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để phương trình  $|x^3 + x^2 - 5x - m + 2| = |x^3 - x^2 - x - 2|$  có 5 nghiệm phân biệt?

**A.** 7.

**B.** 3.

**C.** 1.

**D.** 5.

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\text{Ta có } |x^3 + x^2 - 5x - m + 2| = |x^3 - x^2 - x - 2| \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + x^2 - 5x - m + 2 = x^3 - x^2 - x - 2 \\ x^3 + x^2 - 5x - m + 2 = -x^3 + x^2 + x + 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 4x + 4 = m \\ 2x^3 - 6x = m \end{cases} \quad (1).$$

Xét hàm số  $h(x) = 2x^3 - 6x$ . Ta có  $h'(x) = 6x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ .

Bảng biến thiên:

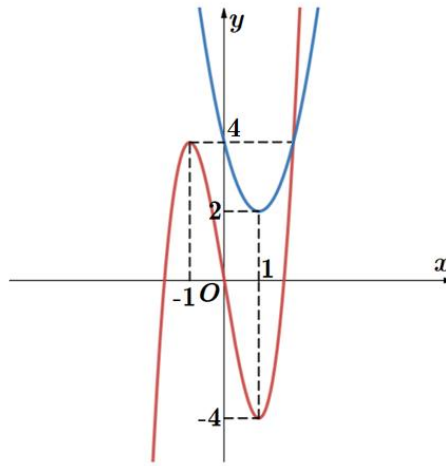
|         |           |      |     |           |      |     |           |
|---------|-----------|------|-----|-----------|------|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $1$ | $+\infty$ |      |     |           |
| $h'(x)$ |           | $+$  | $0$ | $-$       | $0$  | $+$ |           |
| $h(x)$  |           |      | $4$ |           | $-4$ |     | $+\infty$ |

Xét hàm số  $g(x) = 2x^2 - 4x + 4$ . Ta có bảng biến thiên:

|         |           |     |           |           |
|---------|-----------|-----|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |           |
| $g'(x)$ |           | -   | 0         | +         |
| $g(x)$  | $+\infty$ |     | 2         | $+\infty$ |

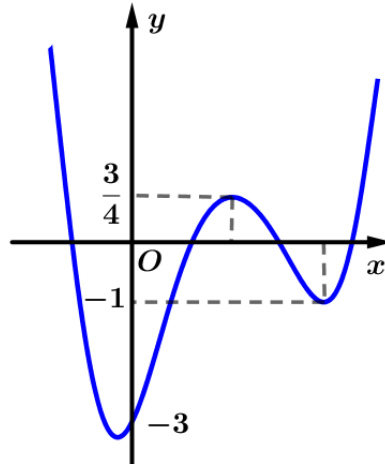
Phác họa đồ thị của hàm số  $h(x) = 2x^3 - 6x$  và  $g(x) = 2x^2 - 4x + 4$  trên mặt phẳng tọa độ:





Từ hình vẽ ta thấy để (1) có 5 nghiệm phân biệt  $\Leftrightarrow 2 < m < 4$ .

**Câu 67:** Cho hàm số bậc bốn  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Gọi  $S$  là tập hợp các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $f(|2022x + m|) = 6m + 12$  có đúng 4 nghiệm thực phân biệt. Tính tổng tất cả các phần tử của  $S$ .



A.  $\frac{1}{2}$ .

B.  $-\frac{1}{2}$ .

C.  $\frac{97}{24}$ .

D.  $-\frac{97}{24}$ .

**Lời giải**

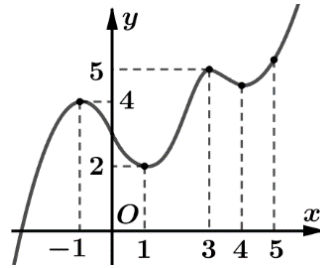
Đặt  $t = |2022x + m|$  (\*), khi đó với mỗi  $t > 0$  ta được hai giá trị  $x$  thỏa (\*) và với  $t = 0$  tồn tại duy nhất một giá trị  $x$  thỏa (\*).

Phương trình  $f(|2022x + m|) = 6m + 12$  có đúng 4 nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi phương trình  $f(t) = 6m + 12$  có hai nghiệm dương phân biệt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6m + 12 = \frac{3}{4} \\ 6m + 12 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{15}{8} \\ m = -\frac{13}{6} \end{cases}.$$

Suy ra  $S = \left\{ -\frac{15}{8}; -\frac{13}{6} \right\}$ . Vậy  $-\frac{15}{8} + \left( -\frac{13}{6} \right) = -\frac{97}{24}$ .

**Câu 68:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $f(3\log_3 x) = m - 1$  có nghiệm duy nhất trên  $\left[\frac{1}{\sqrt[3]{3}}; 3\right)$ ?



A. 2.

B. 4.

C. 3.

D. 1.

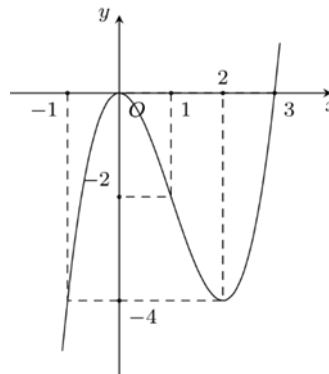
Lời giải

**Chọn D**

Đặt  $u = 3\log_3 x, x \in \left[\frac{1}{\sqrt[3]{3}}; 3\right) \Rightarrow u \in [-1; 3)$ . Do hàm số  $u = 3\log_3 x$  là hàm số đồng biến trên  $(0; +\infty)$  nên với  $u \in [-1; 3)$  phương trình có nghiệm duy nhất trên  $\left[\frac{1}{\sqrt[3]{3}}; 3\right)$ .

Do đó yêu cầu bài toán tương đương với phương trình  $f(u) = m - 1$  có nghiệm duy nhất trên  $[-1; 3)$ . Từ đồ thị hàm số suy ra  $\begin{cases} m - 1 = 1 \\ 4 < m - 1 < 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ 5 < m < 6 \end{cases} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = 2.$

**Câu 69:** Cho hàm số  $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ) có đồ thị như hình vẽ



Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $f^2(x) - (m + 5)|f(x)| + 4m + 4 = 0$  có 7 nghiệm phân biệt là

A. 3.

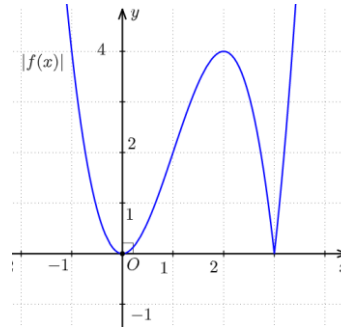
B. 6.

C. -6.

D. 4.

Lời giải

**Chọn A**



Dựa vào giả thiết ta vẽ được đồ thị hàm số  $|f(x)|$  như bên trên

Ta có:  $f^2(x) - (m+5)|f(x)| + 4m + 4 = 0 \Leftrightarrow (|f(x)| - 4)(|f(x)| - m - 1) = 0$

**TH1:**  $|f(x)| = 4$  thì phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

**TH2:**  $|f(x)| = m+1$  theo yêu cầu bài toán thì phương trình cần có 4 nghiệm phân biệt, nên:

$$0 < m+1 < 4 \Leftrightarrow -1 < m < 3. \text{ Do } m \in \mathbb{Z} \text{ nên } m \in \{0; 1; 2\}.$$

Vậy tổng tất cả các giá trị của  $m$  bằng 3.

**Câu 70:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m \in [-2023; 2023]$  để phương trình  $(x^2 - 1)\log^2(x^2 + 1) - m\sqrt{2(x^2 - 1)}\log(x^2 + 1) + m + 4 = 0$  có đúng hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $1 \leq |x_1| \leq |x_2| \leq 3$ ?

**A.** 4035.

**B.** 4040.

**C.** 2025.

**D.** 2023.

**Lời giải**

**Chọn B**

Xét phương trình  $(x^2 - 1)\log^2(x^2 + 1) - m\sqrt{2(x^2 - 1)}\log(x^2 + 1) + m + 4 = 0$  (\*).

Để thấy rằng nếu phương trình có nghiệm là  $x_0$  thì phương trình cũng có nghiệm là  $-x_0$ .

Đặt  $t = x^2$ , ta được phương trình  $(t - 1)\log^2(t + 1) - m\sqrt{2(t - 1)}\log(t + 1) + m + 4 = 0$  (1).

Để (\*) có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $1 \leq |x_1| \leq |x_2| \leq 3$  thì (1) có đúng một nghiệm  $t$  thỏa mãn  $1 \leq t \leq 9$ .

Đặt  $u = \sqrt{2(t - 1)}\log(t + 1)$ .

Ta có  $u' = \frac{1}{\sqrt{2(t - 1)}}\log(t + 1) + \sqrt{2(t - 1)} \cdot \frac{1}{t + 1} > 0, \forall t \in (1; 9]$ .

Nên  $u$  đồng biến trên  $(1; 9] \Rightarrow 0 \leq u \leq 4$ .

Để (1) có đúng một nghiệm  $t$  thỏa mãn  $1 \leq t \leq 9$  thì phương trình  $u^2 - 2mu + 2m + 8 = 0$  (2) có đúng một nghiệm  $u$  thỏa mãn  $0 \leq u \leq 4$ .

Ta có  $u^2 - 2mu + 2m + 8 = 0 \Leftrightarrow 2m = \frac{u^2 + 8}{u - 1} = u + 1 + \frac{9}{u - 1}$  (do  $u = 1$  không thỏa mãn (2))

Xét hàm số  $f(u) = u + 1 + \frac{9}{u-1}$ , ta có

$$f'(u) = 1 - \frac{9}{(u-1)^2} = \frac{(u+2)(u-4)}{(u-1)^2} \leq 0, \forall u \in [0; 4] \setminus \{1\}.$$

Bảng biến thiên:

|      |               |              |   |
|------|---------------|--------------|---|
| $x$  | 0             | 1            | 4 |
| $y'$ | —             | —            | — |
| $y$  | —8<br>↘<br>—∞ | +∞<br>↘<br>8 |   |

Phương trình  $u^2 - 2mu + 2m + 8 = 0$  có đúng một nghiệm  $u$  thỏa mãn  $0 \leq u \leq 4$  khi và

$$\text{chỉ khi } \begin{cases} 2m \geq 8 \\ 2m \leq -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 4 \\ m \leq -4 \end{cases}.$$

Do  $m \in [-2023; 2023] \cap \mathbb{Z}$  nên  $m \in \{-2023; -2022; \dots; -4; 4; 5; \dots; 2023\}$ .

Vậy có tất cả 4040 giá trị  $m$ .

**Câu 71:** Cho hàm số  $f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

|         |               |      |               |     |           |
|---------|---------------|------|---------------|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$     | $-1$ | $0$           | $1$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | +             | 0    | —             | 0   | +         |
| $f(x)$  |               | ↗    | ↘             | ↗   |           |
|         | $\frac{1}{4}$ | 1    | $\frac{1}{2}$ | 2   | $+\infty$ |

Biết  $f(1) = 2$ , có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  thỏa mãn  $m \leq 10$  và bất phương trình  $(x-1)[mf^2(x) - (2m+1)f(x) + 2] \geq 0$  đúng với mọi  $x \in \mathbb{R}$ ?

A. 10.

B. 6.

**C. 7.**

D. 9.

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\text{Xét } g(x) = mf^2(x) - (2m+1)f(x) + 2$$

$$+ m = 0 \Rightarrow g(x) = -f(x) + 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \rightarrow \text{bpt có đúng 1 nghiệm } x = 1.$$

$$+ m > 0 \text{ thì } g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 2 \rightarrow 1 \text{ nghiệm } x = 1 \\ f(x) = \frac{1}{m} \end{cases}$$

Để bpt nghiệm đúng với mọi  $x \in \mathbb{R}$  thì  $g(x) = 0$  có đúng 1 nghiệm đơn

$$x = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{m} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow m \geq 4 (\text{vì } m > 0).$$

Kết hợp với điều kiện  $m \leq 10$  và  $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = \{4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$ .

**Câu 72:** Cho hàm số  $y = f(x)$  bậc ba có bảng biến thiên sau:

|      |           |     |               |           |     |
|------|-----------|-----|---------------|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $0$ | $\frac{3}{2}$ | $+\infty$ |     |
| $y'$ | $+$       | $0$ | $-$           | $0$       | $+$ |
| $y$  | $-\infty$ | $1$ | $0$           | $+\infty$ |     |

Đặt  $g(x) = f\left(\frac{1}{2}f^2(x) - f(x)\right)$ . Phương trình  $g'(x) = 0$  có bao nhiêu nghiệm phân biệt?

**A.** 8.

**B.** 6.

**C.** 9.

**D.** 7.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có  $g'(x) = f'(x)[f(x) - 1]f'\left(\frac{1}{2}f^2(x) - f(x)\right)$  nên

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0; f(x) = 1 \\ f'\left(\frac{1}{2}f^2(x) - f(x)\right) = 0. \end{cases}$$

$$\text{Xét phương trình } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

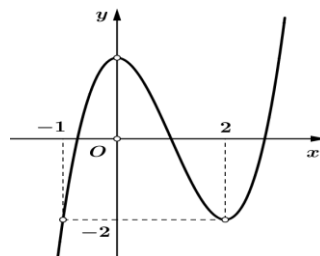
$$\text{Xét phương trình } f(x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = a \left(a > \frac{3}{2}\right). \end{cases}$$

Xét phương trình

$$f'\left(\frac{1}{2}f^2(x) - f(x)\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}f^2(x) - f(x) = 0 \\ \frac{1}{2}f^2(x) - f(x) = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = b (b < 0) \end{cases} \\ f(x) = 2 \Leftrightarrow x = c (c > a) \\ f(x) = 3 \Leftrightarrow x = d (d > c) \\ f(x) = -1 \Leftrightarrow x = e (e < b). \end{cases}$$

Vậy phương trình  $g'(x) = 0$  có 7 nghiệm phân biệt.

**Câu 73:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình dưới đây:



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $f \sqrt{x+4} + \sqrt{4-x} - m + 2 = 0$  có nghiệm trong khoảng  $-4; 4$  ?

A. 3.

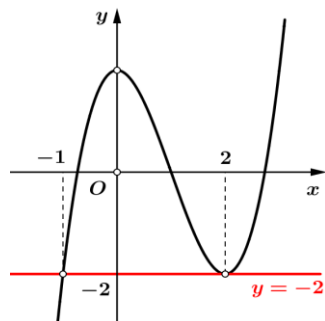
B. 4.

C. 5.

D. 2.

Lời giải

Chọn B.



Xét phương trình  $f \sqrt{x+4} + \sqrt{4-x} - m + 2 = 0$  \* trong khoảng  $-4; 4$

$$* \Leftrightarrow f \sqrt{x+4} + \sqrt{4-x} - m = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+4} + \sqrt{4-x} - m = 2 \\ \sqrt{x+4} + \sqrt{4-x} - m = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+4} + \sqrt{4-x} = m+2 \\ \sqrt{x+4} + \sqrt{4-x} = m-1 \end{cases}$$

Xét hàm số  $g(x) = \sqrt{x+4} + \sqrt{4-x}$  trong khoảng  $-4; 4$ .

$$\text{Ta có } g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+4}} - \frac{1}{2\sqrt{4-x}}; g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Bảng biến thiên

|         |                                                                                                                                                                                              |   |   |
|---------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| $x$     | -4                                                                                                                                                                                           | 0 | 4 |
| $g'(x)$ | -                                                                                                                                                                                            | 0 | + |
| $g(x)$  | <div style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: center;"> <span><math>2\sqrt{2}</math></span> <span><math>4</math></span> <span><math>2\sqrt{2}</math></span> </div> |   |   |

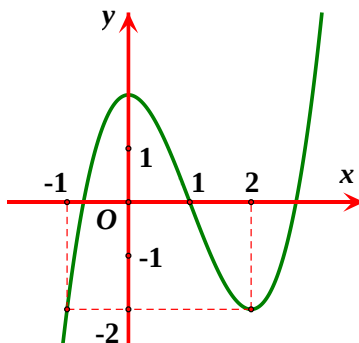
Dựa vào bảng biến thiên, để phương trình đã cho có nghiệm thì

$$\begin{cases} 2\sqrt{2} < m+2 \leq 4 \\ 2\sqrt{2} < m-1 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{2} - 2 < m \leq 2 \\ 2\sqrt{2} + 1 < m \leq 5 \end{cases}$$

Mà  $m \in \mathbb{Z}$  nên  $m \in \{1; 2\} \cup \{4; 5\}$ .

Vậy có 4 giá trị nguyên của  $m$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 74:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình dưới đây



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $f(\sqrt{x+2} + \sqrt{2-x} - m) + 2 = 0$  có nghiệm trong khoảng  $(-2; 2)$ ?

**A.** 1.

**B.** 3.

**C.** 2.

**D.** 0.

**Lời giải**

**Chọn D**

$$PT \Leftrightarrow f(\sqrt{x+2} + \sqrt{2-x} - m) = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+2} + \sqrt{2-x} - m = -1 \\ \sqrt{x+2} + \sqrt{2-x} - m = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+2} + \sqrt{2-x} + 1 = m \\ \sqrt{x+2} + \sqrt{2-x} - 2 = m \end{cases}$$

Xét

$$+ f(x) = \sqrt{x+2} + \sqrt{2-x} + 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} - \frac{1}{2\sqrt{2-x}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Ta có BBT sau

|         |    |               |   |
|---------|----|---------------|---|
| $x$     | -2 | 0             | 2 |
| $f'(x)$ | +  | 0             | - |
| $f(x)$  | 3  | $1+2\sqrt{2}$ | 3 |

Từ BBT trên phương trình  $\sqrt{x+2} + \sqrt{2-x} + 1 = m$  có nghiệm

$$+ g(x) = \sqrt{x+2} + \sqrt{2-x} - 2 \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} - \frac{1}{2\sqrt{2-x}}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Ta có BBT sau

|         |    |               |   |
|---------|----|---------------|---|
| $x$     | -2 | 0             | 2 |
| $g'(x)$ | +  | 0             | - |
| $g(x)$  | 0  | $2\sqrt{2}-2$ | 0 |

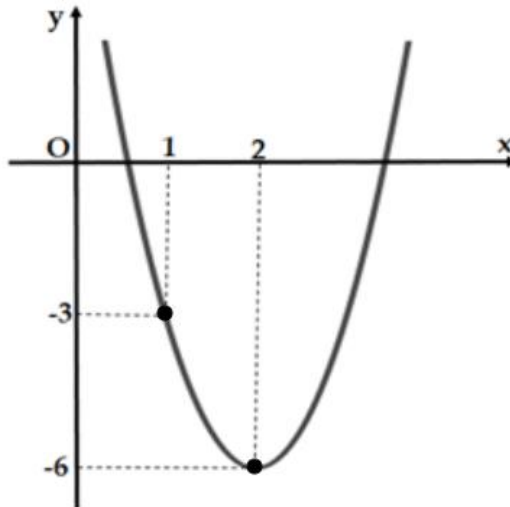
Từ BBT trên phương trình  $\sqrt{x+2} + \sqrt{2-x} - 2 = m$  có nghiệm  $\Leftrightarrow 0 < m \leq 2\sqrt{2} - 2$

Vậy PT  $f(\sqrt{x+2} + \sqrt{2-x} - m) + 2 = 0$  có nghiệm trong khoảng  $(-2; 2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m \leq 2\sqrt{2} - 2 \\ 3 < m \leq 1 + 2\sqrt{2} \end{cases}, m \in \mathbb{Z} \Rightarrow \text{có 1 giá trị nguyên } m = 3 \text{ thỏa mãn.}$$

## II. MŨ, LOGARIT

**Câu 75:** Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$ . Biết hàm số  $y = f'(5-2x)$  có đồ thị là một Parabol (P) như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = f(2x^2 + 2x + m)$  nghịch biến trên khoảng  $(0;1)$ .



A. 4.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

**Chọn D**

Từ đồ thị ta xác định được  $y = f'(5-2x) = 3x^2 - 12x + 6$ .

$$\text{Đặt } 5-2x = t \Rightarrow x = \frac{5-t}{2}.$$

$$\text{Khi đó: } 3x^2 - 12x + 6 = \frac{3}{4}(5-t)^2 - 6(5-t) + 6 = \frac{3}{4}t^2 - \frac{3}{2}t - \frac{21}{4} = f'(t).$$

$$f'(t) < 0 \Leftrightarrow 1 - 2\sqrt{2} < t < 1 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 1 - 2\sqrt{2} < 5 - 2x < 1 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 2 - \sqrt{2} < x < 2 + \sqrt{2}.$$

Hàm số  $y = g(x) = f(2x^2 + 2x + m)$  nghịch biến trên khoảng  $(0;1)$ .

$$\Rightarrow g'(x) = (4x+2)f'(2x^2 + 2x + m) < 0, \forall x \in (0;1) \Leftrightarrow f'(2x^2 + 2x + m) < 0, \forall x \in (0;1)$$

$$(\text{do } 4x+2 > 0, \forall x \in (0;1))$$

$$\Leftrightarrow 2 - \sqrt{2} < 2x^2 + 2x + m < 2 + \sqrt{2}, \forall x \in (0;1) \Leftrightarrow -m - \sqrt{2} < 2x^2 + 2x - 2 < -m + \sqrt{2}, \forall x \in (0;1).$$

$$\text{Đặt } h(x) = 2x^2 + 2x - 2 \Rightarrow h'(x) = 4x + 2 > 0, \forall x \in (0;1).$$

BBT:

$$\text{Điều kiện bài toán } \Leftrightarrow -m - \sqrt{2} < 0 < 1 < -m + \sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt{2} < m < \sqrt{2} - 1 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-1; 0\}.$$

Vậy có 2 giá trị nguyên của  $m$  thỏa mãn bài toán.



**Câu 76:** Cho các số dương  $a, b$  thay đổi luôn thỏa mãn  $b > a > 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = \log_a b + \frac{1}{\log_a b - 1}$ .

A.  $2\sqrt{2}$

B.  $\frac{13}{4}$

C. 3

D.  $3\sqrt{2}$

**Lời giải**

**Chọn D**

Đặt  $\log_a b = t$ . Do  $1 < a < b \Rightarrow \log_a b > 1 \Rightarrow t > 1$ . Áp dụng BĐT Co-si cho 2 số dương  $t-1$ ;  $\frac{1}{t-1}$

Ta có:  $P = t + \frac{1}{t-1} = (t-1 + \frac{1}{t-1}) + 1 \geq 2\sqrt{(t-1) \cdot \frac{1}{t-1}} + 1 = 3$ .

Dấu  $=$  xảy ra  $\Leftrightarrow t-1 = \frac{1}{t-1} \Leftrightarrow t = 2$ . Vậy GTNN của  $P$  bằng 3 khi  $b = a^2$ .

**Cách khác:** Khảo sát hàm số  $P(t) = t + \frac{1}{t-1} \ (t > 1)$

**Câu 77:** Cho  $x, y$  là các số thực thỏa mãn  $x > y > 1$ . Biểu thức  $A = \log_{\frac{x}{y}}^2 x^3 + \frac{8}{3} \log_y \left( \frac{x}{y} \right)$  đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi

A.  $x = y^4$ .

B.  $x = y$ .

C.  $x^4 = y$ .

D.  $x = 4y$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có

$$A = \log_{\frac{x}{y}}^2 x^3 + \frac{8}{3} \log_y \left( \frac{x}{y} \right) = \frac{9}{\log_x^2 \frac{x}{y}} + \frac{8}{3} [\log_y x - 1] = \frac{9}{(1 - \log_x y)^2} + \frac{8}{3 \log_x y} - \frac{8}{3}$$

Đặt  $\log_x y = t \ (\log_x y > \log_x 1 = 0 \Rightarrow t > 0 \text{ và } x > y \Rightarrow \log_x x > \log_x y \Rightarrow 1 > t)$

Suy ra  $0 < t < 1$ .

Khi đó  $A$  trở thành:  $A = \frac{9}{(1-t)^2} + \frac{8}{3t} - \frac{8}{3} = f(t)$

Xét hàm số  $f(t) = \frac{9}{(t-1)^2} + \frac{8}{3t} - \frac{8}{3}$  có  $f'(t) = -\frac{2 \cdot 9}{(t-1)^3} - \frac{8}{3t^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{4} \text{ (tm)} \\ t = -2 \text{ (loại)} \end{cases}$

Ta có bảng biến thiên

|      |        |                             |        |
|------|--------|-----------------------------|--------|
| $t$  | 0      | $\frac{1}{4}$               | 1      |
| $y'$ | —      | 0                           | +      |
| $y$  | $f(0)$ | $f\left(\frac{1}{4}\right)$ | $f(1)$ |

Vậy  $A$  đạt giá trị nhỏ nhất khi  $t = \frac{1}{4} \Rightarrow \log_x y = \frac{1}{4} \Rightarrow x = y^4$ .

**Cách khác:** Thay số từ đáp án.

**Câu 78:** Cho phương trình  $\log_3 \frac{2x^2 - x + m}{x^2 + 1} = x^2 + x + 4 - m$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m \in [-2022; 2022]$  để phương trình có hai nghiệm trái dấu?

**A.** 2022.

**B.** 2021.

**C.** 2016.

**D.** 2019.

**Lời giải**

Điều kiện:  $\frac{2x^2 - x + m}{x^2 + 1} > 0 \Leftrightarrow 2x^2 - x + m > 0$ .

Ta có:  $\log_3 \frac{2x^2 - x + m}{x^2 + 1} = x^2 + x + 4 - m$

$$\Leftrightarrow \log_3 (2x^2 - x + m) - \log_3 (x^2 + 1) = (3x^2 + 3) - (2x^2 - x + m) + 1$$

$$\Leftrightarrow \log_3 (2x^2 - x + m) + (2x^2 - x + m) = \log_3 (x^2 + 1) + 1 + (3x^2 + 3)$$

$$\Leftrightarrow \log_3 (2x^2 - x + m) + (2x^2 - x + m) = \log_3 (3x^2 + 3) + (3x^2 + 3), (*)$$

Xét hàm số:  $f(t) = \log_3 t + t$  với  $t > 0$ .

Ta có:  $f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0, \forall t > 0$ .

$\Rightarrow$  Hàm số  $f(t)$  đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$ .

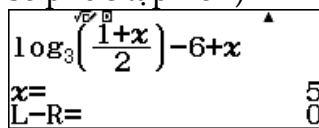
Khi đó:  $(*) \Leftrightarrow f(2x^2 - x + m) = f(3x^2 + 3)$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - x + m = 3x^2 + 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x + 3 - m = 0, (**)$$

**Cách khác để ra (\*\*):**

Cho  $x=1$ , tính  $m$  bằng SHIFT SOLVE (không nên cho  $m$  tính  $x$  vì phương trình khi đó sẽ phức tạp hơn)



The image shows a calculator screen with the equation  $\log_3\left(\frac{1+x}{2}\right) - 6 + x = 0$  and the solution  $x=5$ .

Vậy với  $x=1$  thì  $m=5$ .

Thay vào biểu thức  $\log_3 \frac{2x^2 - x + m}{x^2 + 1} = 1 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - x + m}{x^2 + 1} = 3$

Phương trình đã cho có 2 nghiệm trái dấu  $\Leftrightarrow$  phương trình  $(**)$  có 2 nghiệm trái dấu

$$\Leftrightarrow 1 \cdot (3 - m) < 0 \Leftrightarrow m > 3.$$

Mà  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $m \in [-2022; 2022]$  nên  $m \in \{4; 5; 6; \dots; 2022\} \Rightarrow$  Có 2019 số nguyên  $m$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 79:** Số các giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $\log_{\sqrt{2}}(x-1) = \log_2(mx-8)$  có hai nghiệm thực phân biệt là:

**A.** Vô số.

**B.** 4.

**C.** 5.

**D.** 3.

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\log_{\sqrt{2}}(x-1) = \log_2(mx-8) \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \\ mx-8 > 0 \\ (x-1)^2 = mx-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ (x-1)^2 = mx-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ m = \frac{x^2-2x+9}{x} \end{cases}$$

Xét hàm số  $y = \frac{x^2-2x+9}{x}$  trên  $(1; +\infty)$ , ta có

$$y' = \frac{x^2-9}{x^2}; y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 3$$

Bảng biến thiên

| $x$  | 1 | 3 | $+\infty$ |
|------|---|---|-----------|
| $y'$ | - | 0 | +         |
| $y$  | 8 | 4 | $+\infty$ |

Để thỏa mãn yêu cầu thì  $4 < m < 8$  nên các giá trị nguyên của tham số  $m$  là 5, 6, 7.

**Câu 80:** Tập nghiệm của bất phương trình  $(9^x - 244 \cdot 3^x + 243) \cdot \sqrt{8 - \log_2(x+2)} \geq 0$  có tất cả bao nhiêu số nguyên?

**A. 252.**

**B. 250.**

**C. 249.**

**D. 254.**

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x+2 > 0 \\ 8 - \log_2(x+2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ \log_2(x+2) \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x+2 \leq 256 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < x \leq 254.$$

**Lập bảng xét dấu:** Bất phương trình có tập nghiệm là  $S = (-2; 0] \cup [5; 254]$ .

Do đó tập nghiệm của bất phương trình có 252 số nguyên.

**Câu 81:** Có bao nhiêu cặp số nguyên  $(x; y)$  thỏa mãn  $0 \leq x \leq 4000$  và

$$5(25^y + 2y) = x + \log_5(x+1)^5 - 4?$$

**A. 5.**

**B. 2.**

**C. 4.**

**D. 3.**

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\text{Ta có: } 5(25^y + 2y) = x + \log_5(x+1)^5 - 4 \Leftrightarrow 5\log_5(x+1) + x+1 = 5^{2y+1} + 5(2y+1) - 1$$

$$\text{Đặt } \log_5(x+1) = t \Rightarrow x+1 = 5^t.$$

$$\text{Phương trình 1 trở thành: } 5t + 5^t = 5^{2y+1} + 5(2y+1) - 2$$

Xét hàm số  $f(u) = 5u + 5^u$  trên  $\mathbb{R}$ .

$$f'(u) = 5 + 5^u \ln 5 > 0, \forall u \in \mathbb{R} \text{ nên hàm số } f(u) \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}.$$

Do đó

$$2 \Leftrightarrow f(t) = f(2y+1) \Leftrightarrow t = 2y+1 \Rightarrow \log_5(x+1) = 2y+1 \Leftrightarrow x+1 = 5^{2y+1} \Leftrightarrow x = 5 \cdot 25^y - 1$$

$$\text{Vì } 0 \leq x \leq 4000 \Rightarrow 0 \leq 5 \cdot 25^y - 1 \leq 4000 \Leftrightarrow \frac{1}{5} \leq 25^y \leq \frac{4001}{5} \Leftrightarrow \frac{-1}{2} \leq y \leq \log_{25} \frac{4001}{5} \approx 2.08$$

Do  $y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \in \{0, 1, 2\}$ , có 3 giá trị của  $y$  nên cũng có 3 giá trị của  $x$

**Cách khác:** Cho  $x = 4000$  ấn SHIFT SOLVE ra  $y = 2,07$

Cho  $x = 0$  ấn SHIFT SOLVE ra  $y = -0,7$ .

Vậy  $y = 0, y = 1, y = 2$ . Với mỗi  $y$  ta lại thay ngược vào tìm  $x$  thì được 3 số nguyên  $x$ .

Vậy có 3 cặp số nguyên  $x; y$ .

**Câu 82:** Có bao nhiêu số nguyên  $x$  là nghiệm của bất phương trình

$$\log_3 \left( \frac{\sqrt{x^2 - x + 4} + 1}{27} \right) + \log_5 (x^2 - x + 5)^2 \leq 0?$$

A. 5.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

**Chọn D**

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x^2 - x + 4} (t > 0).$$

$$\text{Khi đó: } \log_3(t+1) + 2\log_5(t^2+1) - 3 \leq 0 \Leftrightarrow \log_3(t+1) + 2\log_5(t^2+1) \leq 3.$$

Xét hàm số

$$f(t) = \log_3(t+1) + 2\log_5(t^2+1) - 3 \Rightarrow f'(t) = \frac{1}{(t+1)\ln 3} + \frac{4t}{2(t^2+1)\ln 5} > 0, \forall t > 0. \text{ Hàm số}$$

luôn đồng biến trên  $(0; +\infty)$ .

Mặt khác từ bất phương trình suy ra

$$f(t) \leq f(2) \Leftrightarrow t \leq 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x + 4} \leq 2 \Leftrightarrow x^2 - x \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1.$$

Do  $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{0; 1\}$  nên có 2 giá trị của  $x$  thỏa mãn.

**Cách khác:** Hoàn toàn có thể dùng MODE 8 để dò đáp án.

**Câu 83:** Có bao nhiêu cặp số nguyên dương  $(x; y)$  thỏa mãn điều kiện

$$3(9^y + 2y) \leq x + \log_3(x+1)^3 - 2 \text{ và } x \leq 2023?$$

A. 2.

B. 4040.

C. 3780.

D. 3776.

Lời giải

**Chọn C**

Ta có

$$3(9^y + 2y) \leq x + \log_3(x+1)^3 - 2 \Leftrightarrow 3(3^{2y} + 2y) \leq x + 1 + 3\log_3(x+1) - 3$$

$$\Leftrightarrow 3(3^{2y} + 2y) \leq 3^{\log_3(x+1)} + 3\log_3(x+1) - 3 \Leftrightarrow 3^{2y} + 2y \leq 3^{\log_3(x+1)-1} + \log_3(x+1) - 1, \quad (1)$$

Xét hàm số  $y = f(t) = 3^t + t$  có  $f'(t) = 3^t \ln 3 + 1 > 0, \forall t$  nên hàm số  $y = f(t) = 3^t + t$  đồng biến.

$$\text{Từ (1)} \Leftrightarrow f(2y) \leq f(\log_3(x+1) - 1) \Leftrightarrow 2y \leq \log_3(x+1) - 1.$$

$$\text{Mà } x \leq 2023, \text{ suy ra } 2y \leq \log_3(x+1) - 1 \leq \log_3 2024 - 1 \Rightarrow y \leq \frac{1}{2} \log_3 2024 - \frac{1}{2}.$$

Do  $y$  nguyên dương nên  $y = 1$  hoặc  $y = 2$ .

+) Với  $y = 1 \Rightarrow \log_3(x+1) \geq 2.1+1 \Leftrightarrow x+1 \geq 27 \Leftrightarrow x \geq 26$ .

Mà  $x \leq 2023$  và  $x$  nguyên dương nên  $x \in \{26; 27; \dots; 2023\}$ .

Do đó có 1998 cặp số nguyên dương  $(x; y)$  thỏa mãn.

+) Với  $y = 2 \Rightarrow \log_3(x+1) \geq 2.2+1 \Leftrightarrow x+1 \geq 243 \Leftrightarrow x \geq 242$ .

Mà  $x \leq 2023$  và  $x$  nguyên dương nên  $x \in \{242; 243; \dots; 2023\}$ .

Do đó có 1782 cặp số nguyên dương  $(x; y)$  thỏa mãn.

Vậy có tất cả 3780 cặp số nguyên dương  $(x; y)$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Cách khác:**

Cho  $x = 2023$  ấn SHIFT SOLVE ta có  $y = 2,9$ . Cho  $x = 1$  ta có  $y = -0,18$

Vậy  $y = 1; y = 2$

Với  $y = 1$  thay trở lại bất phương trình ta có  $x + 3\log_3(x+1) \geq 35$ . Ta xem BPT này có bao nhiêu nghiệm thuộc  $[1; 2023]$ . Dễ thấy  $x = 2023$  thỏa mãn, Mò khoảng bên dưới thì  $x = 26$  thỏa mãn. Vậy  $x \in [26; 2023]$

Với  $y = 2$  làm tương tự ta có  $x \in [242; 2023]$

**Câu 84:** Cho phương trình  $\log_{\sqrt[3]{2}}(x^3 + 3x^2 + 4) + (x+2)^2(x-1) + 8 = 2^m + 3m$ , ( $m$  là tham số). Tìm số giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình đã cho có nghiệm duy nhất thuộc  $[-2; 4]$ ?

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 2.

**Lời giải**

**Chọn B**

Điều kiện  $x^3 + 3x^2 + 4 > 0$

Ta có

$$\log_{\sqrt[3]{2}}(x^3 + 3x^2 + 4) + (x+2)^2(x-1) + 8 = 2^m + 3m$$

$$\Leftrightarrow 3\log_2(x^3 + 3x^2 + 4) + (x^3 + 3x^2 + 4) = 3\log_2 2^m + 2^m, \quad (1)$$

Xét hàm số  $y = f(t) = 3\log_2 t + t$  với  $t > 0$  có  $f'(t) = \frac{1}{t \cdot \ln 2} + 1 > 0, \forall t > 0$  nên hàm số

$y = f(t) = 3\log_2 t + t$  đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$ .

$$\text{Từ (1)} \Leftrightarrow f(x^3 + 3x^2 + 4) = f(2^m) \Leftrightarrow 2^m = x^3 + 3x^2 + 4.$$

$$\text{Đặt } g(x) = x^3 + 3x^2 + 4 \text{ với } x \in [-2; 4] \text{ có } g'(x) = 3x^2 + 6x \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

|         |    |   |     |
|---------|----|---|-----|
| $x$     | -2 | 0 | 4   |
| $g'(x)$ | -  | 0 | +   |
| $g(x)$  | 8  | 4 | 116 |

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình đã cho có nghiệm duy nhất thuộc  $[-2; 4)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^m = 4 \\ 8 < 2^m < 116 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ 3 < m < \log_2 116 \end{cases}$$

Mà tham số  $m$  nguyên nên  $m \in \{2; 4; 5; 6\}$ .

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình đã cho có nghiệm duy nhất thuộc  $[-2; 4)$ .

**Câu 85:** Có bao nhiêu số nguyên  $x$  sao cho ứng với mỗi  $x$  có không quá 242 số nguyên  $y$  thỏa mãn  $\log_4(2x^2 + y) \geq \log_3(x + y)$ ?

A. 21.

B. 40.

C. 20.

D. 39.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 2x^2 + y > 0 \\ x + y > 0 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } \log_4(2x^2 + y) \geq \log_3(x + y) \Leftrightarrow 2x^2 + y \geq 4^{\log_3(x+y)} \Leftrightarrow 2x^2 + y \geq (x + y)^{\log_3 4} (1).$$

Điều kiện:  $x + y \geq 1$  (do  $x, y \in \mathbb{Z}, x + y > 0$ ).

$$\text{Đặt } t = x + y (t \geq 1). \text{ Ta được } 2x^2 + t - x \geq t^{\log_3 4} \Leftrightarrow 2x^2 - x \geq t^{\log_3 4} - t$$

Để (1) không có quá 242 nghiệm nguyên  $y \Leftrightarrow$  (2) có không quá 242 nghiệm nguyên dương  $t$ .

Đặt  $f(t) = t^{\log_3 4} - t$ . Ta có:  $f'(t) = \log_3 4 \cdot t^{\log_3 4 - 1} - 1 > 0 \quad \forall t > 1 \Rightarrow f(t)$  là hàm số đồng biến trên  $[1; +\infty) \Rightarrow$  (2) có không quá 242 nghiệm nguyên  $\Leftrightarrow f(t_1) \leq 242$  hay

$$2x^2 - x \leq 242^{\log_3 4} - 242 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 242^{\log_3 4} + 242 \leq 0 \Leftrightarrow -19,5 \leq x \leq 19,96$$

Lại có:  $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow$  Có 39 số nguyên  $x$  thỏa mãn bài toán.

**Câu 86:** Có bao nhiêu số nguyên  $a$  sao cho ứng với mỗi  $a$ , tồn tại ít nhất bốn số nguyên  $b \in (-10; 10)$  thỏa mãn  $5^{a^2+b} \leq 4^{b-a} + 26$ ?

A. 7.

B. 6.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn D

$$5^{a^2+b} \leq 4^{b-a} + 26 \Leftrightarrow 5^{a^2+b} - 4^{b-a} - 26 \leq 0 \Leftrightarrow 5^{a^2} - \frac{1}{4^a} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^b - 26 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^b \leq 0$$

$$\text{Xét } f(b) = 5^{a^2} - \frac{1}{4^a} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^b - 26 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^b, b \in (-10; 10)$$

$$\Rightarrow f'(b) = -\frac{1}{4^a} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^b \cdot \ln \frac{4}{5} - 26 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^b \cdot \ln \frac{1}{5} > 0$$

Suy ra,  $f(b)$  đồng biến với  $b \in (-10; 10)$

$$\text{Để } f(b) \leq 0 \text{ có ít nhất bốn nghiệm nguyên thì } f(-6) \leq 0 \Leftrightarrow 5^{a^2-6} - 4^{-a-6} - 26 \leq 0$$

$$\Rightarrow 5^{a^2-6} \leq 26 \Leftrightarrow -2,83... \leq a \leq 2,83...$$

$$\text{Vì } a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}.$$

**Câu 87:** Có bao nhiêu số nguyên dương  $x$  sao cho ứng với mỗi  $x$  tồn tại đúng hai số thực  $y$  thỏa mãn  $(\log_2^2 y - 3\log_2 y + 2)\sqrt{3^y - x} = 0$ ?

A. 78.

B. 72.

C. 79.

D. 73.

**Lời giải**

**Chọn B**

$$(\log_2^2 y - 3\log_2 y + 2)\sqrt{3^y - x} = 0$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} y > 0 \\ y \geq \log_3 x \end{cases}$$

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2^2 y - 3\log_2 y + 2 = 0 \\ 3^y - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = 4 \\ y = \log_3 x \end{cases}$$

$$\text{Để tồn tại đúng hai số thực } y \Leftrightarrow 2 \leq \log_3 x < 4 \Leftrightarrow 9 \leq x < 81 \Rightarrow x \in \{9; 10; \dots; 80\}.$$

**Câu 88:** Bất phương trình  $4^x + 2023(x+1) < (x+2024).2^x$  có bao nhiêu nghiệm nguyên dương:

A. 7.

B. 9.

C. 8.

D. 10.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có:

$$4^x + 2023(x+1) < (x+2024).2^x \Leftrightarrow 4^x - 2024.2^x + 2023 - (2^x - 2023).x < 0$$

$$\Leftrightarrow (2^x - 1)(2^x - 2023) - (2^x - 2023).x < 0$$

$$\Leftrightarrow (2^x - 2023)(2^x - x - 1) < 0$$

Do  $x$  nguyên dương nên  $2^x > x+1 \Rightarrow 2^x - x - 1 > 0$

Do đó bpt  $\Leftrightarrow 2^x < 2023 \Rightarrow x \in \{1; 2; \dots; 10\}$ .

Vậy có 10 số nguyên dương  $x$  thỏa mãn BPT.

**Câu 89:** Có bao nhiêu cặp số nguyên dương  $(x; y)$  thỏa mãn

$$\log_2 \frac{x+y}{x^2+y^2+2} \geq x(x-4) + y(y-4)?$$

A. 13.

B. 18.

C. 15.

D. 21.

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\log_2 \frac{x+y}{x^2+y^2+2} \geq x(x-4) + y(y-4) \Leftrightarrow \log_2 (x+y) - \log_2 (x^2+y^2+2) \geq x^2+y^2-4(x+y)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 4(x+y) + 4(x+y) \geq \log_2 (x^2+y^2+2) + x^2+y^2+2.$$

$$\text{Đặt } f(t) = \log_2 t + t, (t > 0) \Rightarrow f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t > 0.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} f'(t) > 0 \\ f(4(x+y)) \geq f(x^2+y^2+2) \end{cases} \Rightarrow 4x+4y \geq x^2+y^2+2 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 6.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x-2)^2 \leq 6 \\ (y-2)^2 \leq 6 \\ x, y \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{6}+2 \leq x \leq 2+\sqrt{6} \\ -\sqrt{6}+2 \leq y \leq 2+\sqrt{6} \\ x, y \in \mathbb{Z}, x > 0, y > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1, 2, 3, 4 \\ y=1, 2, 3, 4 \end{cases}.$$

Thay  $(x; y)$  thỏa điều kiện  $\begin{cases} x=1, 2, 3, 4 \\ y=1, 2, 3, 4 \end{cases}$  và  $(x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 6$  thì có 15 cặp  $(x; y)$  là  $(x; y) \in \{(1;1), (1;2), (1;3), (1;4), (2;1), (2;2), (2;3), (2;4), (3;1), (3;2), (3;3), (3;4), (4;1), (4;2), (4;3)\}$ .

**Câu 90:** Cho bất phương trình  $\log_7(x^2 + 2x + 2) + 1 > \log_7(x^2 + 6x + 5 + m)$ . Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số  $m$  để bất phương trình trên nghiệm đúng với mọi  $x \in [1; 3]$ .

**A.** 187.

**B.** 36.

**C.** 198.

**D.** 34.

**Lời giải**

**Chọn A**

Bất phương trình  $\log_7(x^2 + 2x + 2) + 1 > \log_7(x^2 + 6x + 5 + m)$  nghiệm đúng với mọi  $x \in [1; 3]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x^2 + 14x + 14 > x^2 + 6x + 5 + m \\ x^2 + 6x + 5 + m > 0 \end{cases}, \forall x \in [1; 3] \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 6x^2 + 8x + 9 > m \\ g(x) = -x^2 - 6x - 5 < m \end{cases}, \forall x \in [1; 3]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \min_{[1;3]} f(x) = 23 > m \\ \max_{[1;3]} g(x) = -12 < m \end{cases} \Leftrightarrow -12 < m < 23.$$

Vậy tổng các giá trị của tham số  $m$  là  $\sum_{m=-11}^{22} m = 187$ .

**Câu 91:** Có bao nhiêu số nguyên dương  $a$  sao cho ứng với mỗi  $a$  có đúng hai số nguyên  $b$  thỏa mãn  $(b-2)(b-6+\log_2 a) < 0$ ?

**A.** 67.

**B.** 64.

**C.** 65.

**D.** 66.

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\text{TH1: } \begin{cases} b < 2 \\ b - 6 + \log_2 a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b < 2 \\ b > \log_2 \frac{64}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \log_2 \frac{64}{a} < b < 2.$$

Để có đúng hai số nguyên  $b$  thỏa mãn thì  $-1 \leq \log_2 \frac{64}{a} < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{64}{a} < 1 \Leftrightarrow 64 < a \leq 128$ .

Có  $128 - 64 + 1 = 65$  số.

$$\text{TH2: } \begin{cases} b > 2 \\ b - 6 + \log_2 a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b > 2 \\ b < \log_2 \frac{64}{a} \end{cases} \Leftrightarrow 2 < b < \log_2 \frac{64}{a}.$$



Để có đúng hai số nguyên  $b$  thỏa mãn thì  
 $5 \leq \log_2 \frac{64}{a} < 6 \Leftrightarrow 32 \leq \frac{64}{a} < 64 \Leftrightarrow 1 < a \leq 2 \Rightarrow a = 2.$   
 Vậy có 67 số thỏa mãn.

- Câu 92:** Cho phương trình  $(4\log_2^2 x + \log_2 x - 5)\sqrt{7^x - m} = 0$  ( $m$  là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của  $m$  để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt?  
**A.** 47                      **B.** 49                      **C.** Vô số                      **D.** 48

**Lời giải**

**Chọn A**

Xét phương trình  $(4\log_2^2 x + \log_2 x - 5)\sqrt{7^x - m} = 0$

Điều kiện:  $\begin{cases} x > 0 \\ m \leq 7^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \log_7 m \\ x > 0 \end{cases}.$

Phương trình tương đương  $\begin{cases} 4\log_2^2 x + \log_2 x - 5 = 0 \\ 7^x - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 2^{\frac{-5}{4}} \\ x = \log_7 m \end{cases}.$

Để phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt:

TH1:  $\log_7 m \leq 0 \Leftrightarrow 0 < m \leq 1 \Rightarrow m = 1.$

TH2:  $2^{\frac{-5}{4}} \leq \log_7 m < 2 \Leftrightarrow 7^{2^{\frac{-5}{4}}} \leq m < 49 \Rightarrow m \in \{3; 4; \dots; 48\}.$

Vậy có tất cả 47 giá trị  $m$  thỏa mãn.

- Câu 93:** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $4^x - m \cdot 2^{x+1} + m + 2 = 0$  có hai nghiệm phân biệt thuộc  $(0; 2)$  là

**A.**  $(-\infty; -1) \cup \left(2; \frac{18}{7}\right).$     **B.**  $(-2; 2).$                       **C.**  $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty).$     **D.**  $\left(2; \frac{18}{7}\right).$

**Lời giải**

**Chọn D**

Đặt  $t = 2^x$ . Do  $x \in (0; 2) \Rightarrow t \in (1; 4).$

Khi đó phương trình thành  $t^2 - 2mt + m + 2 = 0$

$\Leftrightarrow (2t - 1)m - (t^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow m = \frac{t^2 + 2}{2t - 1} = g(t), \forall t \in (1; 4).$

Ta có:  $g'(t) = \frac{2t^2 - 2t - 4}{(2t - 1)^2}$ , cho  $g'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 (\text{loại}) \\ t = 2 (\text{nhanh}) \end{cases}.$

Ta có  $g(2) = 2, g(1) = 3, g(4) = \frac{18}{7}$  và bảng biến thiên của  $g(t)$ :

|         |   |   |                |
|---------|---|---|----------------|
| $t$     | 1 | 2 | 4              |
| $g'(t)$ | — | 0 | +              |
| $g(t)$  | 3 | 2 | $\frac{18}{7}$ |

Yêu cầu bài toán  $\Leftrightarrow m \in \left(2; \frac{18}{7}\right)$ .

**Câu 94:** Số các giá trị nguyên của tham số  $m$  để bất phương trình  $2^{2x^2+2x-2} - 2^{x^2+4x+m} - 2^{x^2-2x-m} + 4 < 0$  có không quá 6 nghiệm nguyên là:

**A.** 7.

**B.** 4.

**C.** 10.

**D.** 9.

**Lời giải**

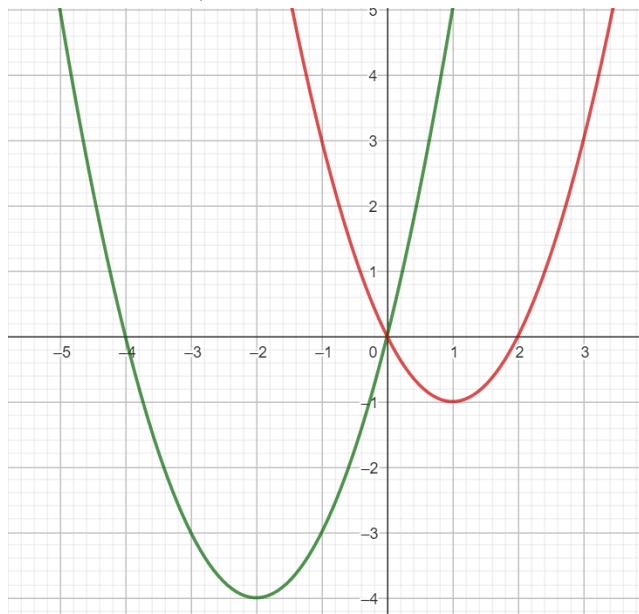
**Chọn B**

$$\text{Đặt: } \begin{cases} x^2 + 4x + m = a \\ x^2 - 2x - m = b \end{cases} \Rightarrow 2x^2 + 2x - 2 = a + b - 2$$

Ta có:

$$\begin{aligned} 2^{a+b-2} - 2^a - 2^b + 4 < 0 &\Leftrightarrow 2^{a+b} - 2^{a+2} - 2^{b+2} + 2^4 < 0 \\ &\Leftrightarrow 2^a (2^b - 2) - 2^2 (2^b - 2^2) < 0 \\ &\Leftrightarrow (2^a - 2^2) (2^b - 2^2) < 0 \end{aligned}$$

$$\text{TH1: } \begin{cases} a > 2 \\ b < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x + m > 2 \\ x^2 - 2x - m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x > 2 - m \\ x^2 - 2x < 2 + m \end{cases}$$



Để phương trình có không quá 6 nghiệm nguyên thì:  $-1 < 2 + m < 2 \Leftrightarrow -3 < m < 0$

$$\text{TH2: } \begin{cases} a < 2 \\ b > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x + m < 2 \\ x^2 - 2x - m > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x < 2 - m \\ x^2 - 2x > 2 + m \end{cases}$$

Để phương trình có không quá 6 nghiệm nguyên thì:

$$-4 < 2 - m < -1 \Leftrightarrow 1 < m - 2 < 4 \Leftrightarrow 3 < m < 6$$

Do  $m \in \mathbb{Z}$  nên có: 4 giá trị  $m$  thỏa mãn.

**Câu 95:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc đoạn  $[0; 100]$  để bất phương trình  $4^{2x-m} - 4.2^{3x-2m} + 4.2^{x-m} < 1$  nghiệm đúng với  $\forall x \in (-\infty; 4]$ ?

A. 99.

B. 92.

C. 98.

D. 93.

**Lời giải**

**Chọn B**

$$4^{2x-m} - 4.2^{3x-2m} + 4.2^{x-m} < 1 \Leftrightarrow 2^{4x} - 4.2^{3x} + 4.2^x . 2^m < 2^{2m}$$

$$\Leftrightarrow (2^m - 2^{2x})(2^m + 2^{2x} - 4.2^x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^m > 2^{2x} \\ 2^m > 4.2^x - 2^{2x} \end{cases} (1)$$

$$\begin{cases} 2^m < 2^{2x} \\ 2^m < 4.2^x - 2^{2x} \end{cases} (2)$$

$$+ \text{Giải } \begin{cases} 2^m > 2^{2x} \\ 2^m > 4.2^x - 2^{2x} \end{cases} (1)$$

$$\text{Để (1) nghiệm đúng với } \forall x \in (-\infty; 4] \Leftrightarrow \begin{cases} 2^m > \max(2^{2x}) \\ 2^m > \max(4.2^x - 2^{2x}) \end{cases} \Leftrightarrow m > 8. \text{ Do } m \text{ nguyên}$$

thuộc đoạn  $[0; 100]$  nên có  $100 - 8 = 92$  giá trị của  $m$ .

$$+ \text{Giải } \begin{cases} 2^m < 2^{2x} \\ 2^m < 4.2^x - 2^{2x} \end{cases} (2)$$

$$\text{Để (1) nghiệm đúng với } \forall x \in (-\infty; 4] \Leftrightarrow \begin{cases} 2^m \leq 0 \\ 2^m < -192 \end{cases} \text{ không có giá trị nào của } m \text{ thỏa}$$

mãn.

Vậy có 92 giá trị của  $m$ .

**Câu 96:** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  nằm trong khoảng  $(-2023; 2023)$  để

hàm số  $y = \frac{2023}{m \log_3^2 x - 4 \log_3 x + m + 3}$  xác định trên khoảng  $(0; +\infty)$

A. 4040.

B. 4044.

C. 4039.

D. 4046.

**Lời giải**

Hàm số đã cho xác định trên  $(0; +\infty)$  khi và chỉ khi  $m \log_3^2 x - 4 \log_3 x + m + 3 \neq 0, \forall x \in (0; +\infty)$

hay phương trình  $mt^2 - 4t + m + 3 = 0, (1)$  vô nghiệm  $t \in \mathbb{R}$

Nếu  $m = 0$  thì  $(1) \Leftrightarrow t = \frac{3}{4}$  không thỏa mãn.

$$\text{Nếu } m \neq 0 \text{ thì (1) vô nghiệm khi và chỉ khi } \Delta' = 4 - m(m + 3) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -4 \\ m > 1 \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện  $m \in (-2023; 2023) \Rightarrow m \in (-2023; -4) \cup (1; 2023)$ .

Vì  $m \in \mathbb{Z}$  suy ra có 4039 giá trị  $m$  thỏa mãn.

**Câu 97:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc đoạn  $[-2022; 2023]$  để phương trình  $x \log_2(x+1) = \log_4[16(x+1)^{2m}]$  có hai nghiệm phân biệt?

A. 2022.

B. 2021.

C. 2023.

D. 2024.

**Lời giải**

**Chọn D**

Điều kiện:  $x > -1$ .

Phương trình  $\Leftrightarrow x \log_2(x+1) = \log_4 16 + \log_4[(x+1)^{2m}] \Leftrightarrow x \log_2(x+1) = 2 + m \log_2(x+1)$ .

Đặt  $t = \log_2(x+1)$ ,  $t \in \mathbb{R} \Rightarrow x = 2^t - 1$ . Khi đó ta có phương trình  $\Leftrightarrow (2^t - 1)t = 2 + mt$  (1)

+ Nếu  $t = 0$  thì không thỏa mãn phương trình (1)

+ Nếu  $t \neq 0$  thì (1)  $\Leftrightarrow m = 2^t - 1 - \frac{2}{t}$  (2).

Đặt  $f(t) = 2^t - 1 - \frac{2}{t}$ ;  $t \neq 0$ .  $\Rightarrow f'(t) = 2^t \ln 2 + \frac{2}{t^2} > 0$ ,  $\forall t \neq 0$ . Ta có bảng biến thiên

| $t$     | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---------|-----------|---|-----------|
| $f'(t)$ |           | + | +         |
| $f(t)$  | $-1$      |   | $+\infty$ |

Với  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty$ ,  $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = -1$ ,  $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = -\infty$ ,  $\lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) = +\infty$ .

Phương trình đã cho có 2 nghiệm  $\Leftrightarrow$  (2) có 2 nghiệm phân biệt  $t \neq 0 \Leftrightarrow m > -1$ .

Vì  $m \in \mathbb{Z}$  và  $m \in [-2022; 2023]$  nên  $m \in \{0; 1; 2; \dots; 2023\}$ . Vậy có 2024 số nguyên  $m$ .

**Câu 98:** Có bao nhiêu cặp số nguyên  $(x; y)$  thỏa mãn  $\log_2 \frac{1+x^2+y^2}{x-2y} \leq 4^{x-2y} - 2 \cdot 2^{x^2+y^2} + 1$ ?

A. 6.

B. 13.

C. 21.

D. 9.

**Lời giải**

**Chọn B**

Đk:  $x - 2y > 0$  (1)

$\log_2 \frac{1+x^2+y^2}{x-2y} \leq 4^{x-2y} - 2 \cdot 2^{x^2+y^2} + 1 \Leftrightarrow \log_2(1+x^2+y^2) - \log_2(x-2y) \leq 2^{2x-4y} - 2^{1+x^2+y^2} + 1$

$\Leftrightarrow \log_2(1+x^2+y^2) + 2^{1+x^2+y^2} \leq \log_2(2x-4y) + 2^{2x-4y}$  (\*)

Xét hàm số  $f(t) = \log_2 t + 2^t$ ,  $t > 0$ ;  $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 2^t \ln 2 > 0$ ,  $\forall t > 0$

Nên hàm số  $f(t)$  đồng biến trên  $(0; +\infty)$

(\*)  $\Leftrightarrow 1+x^2+y^2 \leq 2x-4y \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 \leq 4$  (\*\*).

Có  $(x-1)^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq x-1 \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3$ . Mà  $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-1; 0; 1; 2; 3\}$

+) Với  $x = -1 \Rightarrow (**) \Leftrightarrow (y+2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow y = -2(T/m(1))$   
 +) Với  $x = 0 \Rightarrow (**) \Leftrightarrow (y+2)^2 \leq 3, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \in \{-3; -2; -1\}(T/m(1))$   
 +) Với  $x = 1 \Rightarrow (**) \Leftrightarrow (y+2)^2 \leq 4, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \in \{-4; -3; -2; -1; 0\}(T/m(1))$   
 +) Với  $x = 2 \Rightarrow (**) \Leftrightarrow (y+2)^2 \leq 3, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \in \{-3; -2; -1\}(T/m(1))$   
 +) Với  $x = 3 \Rightarrow (**) \Leftrightarrow (y+2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow y = -2(T/m(1))$   
 Vậy có tất cả 13 cặp số nguyên  $(x; y)$  thỏa đề bài.

**Câu 99:** Có bao nhiêu  $m$  nguyên  $m \in [-2023; 2023]$  để phương trình  $5^x - 2m = \log_{\sqrt[3]{5}}(20(x+1) + 10m)$  có nghiệm?

A. 2026.

B. 2023.

C. 2025.

D. 2024.

**Lời giải**

**Chọn C**

$$5^x - 2m = \log_{\sqrt[3]{5}}(20(x+1) + 10m) \Leftrightarrow 5^x - 2m - 4 = 4\log_5(4(x+1) + 2m).$$

$$\text{Đặt } t = \log_5(4(x+1) + 2m) \Rightarrow 5^t - 2m - 4 = 4x.$$

$$\text{Ta được hệ } \begin{cases} 5^x - 2m - 4 = 4t \\ 5^t - 2m - 4 = 4x \end{cases} \Rightarrow 5^x - 5^t = 4t - 4x \Rightarrow 5^x + 4x = 5^t + 4t.$$

$$\text{Đặt } f(u) = 5^u + 4u \Rightarrow f'(u) = 5^u \cdot \ln 5 + 4 > 0, \forall u \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} f'(u) > 0, \forall u \in \mathbb{R} \\ f(x) = f(t) \end{cases} \Rightarrow t = x. \text{ Ta có } 5^x - 2m - 4 = 4x. \Leftrightarrow 2m = 5^x - 4x - 4.$$

$$\text{Đặt } h(x) = 5^x - 4x - 4 \Rightarrow h'(x) = 5^x \ln 5 - 4.$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 5^x \ln 5 - 4 = 0 \Leftrightarrow 5^x = \frac{4}{\ln 5} \Leftrightarrow x = x_1 = \log_5 \frac{4}{\ln 5} \approx 0.566.$$

Ta có bảng biến thiên của  $y = h(x)$ .

|         |           |               |           |
|---------|-----------|---------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $x_1$         | $+\infty$ |
| $h'(x)$ | $-$       | $0$           | $+$       |
| $h(x)$  | $+\infty$ | $A = -3,7733$ | $+\infty$ |

Dựa vào bảng biến thiên để phương trình có nghiệm  $2m \geq -3,7733 \Rightarrow m \geq -1,886$ .

$$\text{Do } \begin{cases} m \in [-2023; 2023] \\ m \in \mathbb{Z} \\ m \geq -1,886 \end{cases} \Rightarrow \text{Số giá trị của } m \text{ là } [2023+1] + 1 = 2025.$$

**Câu 100:** Cho 2 số thực  $x; y$  thỏa mãn  $x^2 + y^2 \geq 3$  và  $\log_{x^2+y^2} [x(4x^2 - 3x + 4y^2) - 3y^2] \geq 2$  gọi  $M; m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = x - y$  khi đó biểu  $T = 2(M + m)$  có giá trị gần nhất với số nào sau đây

**A.** 9.

**B.** 8.

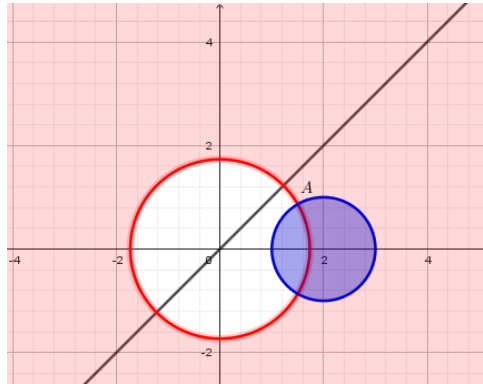
**C.** 7.

**D.** 10.

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \log_{x^2+y^2} [x(4x^2 - 3x + 4y^2) - 3y^2] \geq 2 \Leftrightarrow \log_{x^2+y^2} [(x^2 + y^2)(4x - 3)] \geq 2$$

$$1 + \log_{x^2+y^2} (4x - 3) \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x + 3 \leq 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + y^2 \leq 1$$



Giả sử  $M$  là giá trị lớn nhất của  $P$ . Gọi  $\Delta_1 : x - y - M = 0$  để tồn tại giá trị lớn nhất thì

$$d(I; (\Delta)) \leq R \Leftrightarrow \frac{|2 - M|}{\sqrt{2}} \leq 1 \Leftrightarrow M \leq 2 + \sqrt{2}$$

Vậy giá trị lớn nhất của  $P$  là  $M = 2 + \sqrt{2}$

Giả sử  $m$  là giá trị nhỏ nhất của  $P$ . Gọi  $\Delta_2 : x - y - m = 0$ . Dựa vào miền nghiệm của  $P$

ta thấy  $P$  đạt giá trị nhỏ nhất khi  $\Delta_2$  đi qua điểm  $A\left(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow m = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}$

$$\text{Vậy } T = 2(M + m) = 2\left(2 + \sqrt{2} + \frac{3 - \sqrt{3}}{2}\right) \approx 8.096$$

**Câu 101:** Gọi  $S$  là tập hợp các giá trị thực của  $m$  để tồn tại duy nhất cặp số  $(x; y)$  thỏa mãn  $\log_{x^2+y^2+2} (4x + 4y + m^2 - 6m + 3) \geq 1$  và  $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ . Tổng giá trị các phần tử của tập  $S$  bằng

**A.** 12.

**B.** 0.

**C.** 6.

**D.** 8.

**Lời giải**

$$\text{Ta có } x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 2^2 \quad (1) \text{ và}$$

$$\log_{x^2+y^2+2} (4x + 4y + m^2 - 6m + 3) \geq 1 \Leftrightarrow 4x + 4y + m^2 - 6m + 3 \geq x^2 + y^2 + 2$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 2)^2 \leq (m - 3)^2 \quad (2).$$

Xét  $m = 3$ , ta có  $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$ . Cặp số  $(x; y) = (2; 2)$  không thỏa mãn điều kiện (1).

Xét  $m \neq 3$ , khi đó tập hợp các cặp số  $(x; y)$  thỏa mãn điều kiện (1) là tọa độ các điểm thuộc đường tròn tâm  $I(-1; 2)$  bán kính  $R = 2$ .

Tập hợp các cặp số  $(x; y)$  thỏa mãn điều kiện (2) là tọa độ các điểm thuộc hình tròn tâm  $I_1(2; 2)$  bán kính  $R_1 = |m-3|, (m \neq 3)$ .

Do đó để tồn tại duy nhất cặp số  $(x; y)$  thỏa mãn hai điều kiện trên thì:

TH1. Hai đường tròn  $(I; R)$  và  $(I_1; R_1)$  tiếp xúc ngoài. Khi đó

$$II_1 = R + R_1 \Leftrightarrow 3 = |m-3| + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = 2 \end{cases}.$$

TH2. Hai đường tròn  $(I; R)$  và  $(I_1; R_1)$  tiếp xúc trong và  $R > R_1$ . Khi đó

$$\begin{cases} II_1 = R - R_1 \\ R > R_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 2 - |m-3| \\ 2 > |m-3| \end{cases}, \text{ không tồn tại } m.$$

Vậy tổng giá trị các phần tử của tập  $S$  bằng 6.

**Câu 102:** Gọi  $S$  là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số  $m \in [-100; 100]$  sao cho bất phương trình  $3^{x^2-2x+1} - \log_5(x^2 - 2x + 6)^8 + 10 - \sqrt{-x^2 + 2x + m} < 0$  có nghiệm thực. Tổng tất cả phần tử của  $S$  bằng

A. 5044.

B. 4914.

C. 5014.

D. 5022.

Lời giải

Chọn C

$$3^{x^2-2x+1} - \log_5(x^2 - 2x + 6)^8 + 10 - \sqrt{-x^2 + 2x + m} < 0$$

$$\Leftrightarrow 3^{(x-1)^2} - 8\log_5[(x-1)^2 + 5] + 10 - \sqrt{-(x-1)^2 + 1 + m} < 0.$$

Đặt  $t = (x-1)^2, (t \geq 0)$ . Bất phương trình trở thành:  $3^t - 8\log_5(t+5) + 10 - \sqrt{-t+1+m} < 0$ .

Xét hàm số  $f(t) = 3^t - 8\log_5(t+5) + 10 - \sqrt{-t+1+m}$  với  $t \geq 0$ .

$$f'(t) = 3^t \ln 3 - 8 \cdot \frac{1}{(t+5) \cdot \ln 5} + \frac{1}{2\sqrt{-t+1+m}}$$

$$\text{Với mọi } t \geq 0 \text{ ta có } t+5 \geq 5 \Leftrightarrow (t+5) \ln 5 > 8 \Rightarrow 8 \cdot \frac{1}{(t+5) \ln 5} < 1$$

$$\Rightarrow 3^t \ln 3 - 8 \cdot \frac{1}{(t+5) \ln 5} > 0, \forall t \geq 0$$

$$\Rightarrow f'(t) = 3^t \ln 3 - 8 \cdot \frac{1}{(t+5) \cdot \ln 5} + \frac{1}{2\sqrt{-t+1+m}} > 0, \forall t \geq 0$$

Do đó hàm số  $y = f(t)$  đồng biến trên  $[0; +\infty) \Rightarrow f(t) \geq f(0) = 3 - \sqrt{1+m}, \forall t \geq 0$

Để bất phương trình có nghiệm thực  $\Leftrightarrow 3 - \sqrt{1+m} < 0 \Leftrightarrow 1+m > 9 \Leftrightarrow m > 8$ .

Mà  $m \in \mathbb{Z}, m \in [-100; 100] \Rightarrow m \in \{9; 10; 11; \dots; 100\}$ .

$$\text{Tổng các phần tử của tập } S \text{ là: } 9 + 10 + 11 + \dots + 100 = \frac{(9+100)92}{2} = 5014.$$

**Câu 103:** Tổng tất cả các giá trị nguyên của  $m$  thỏa  $\log_3 \left| \frac{x^2 - 2(m-1)x + 2-m}{3x^2 + 2x + 1} \right| \leq 1$  với mọi  $x$  là

A. -14.

B. 21.

C. 14.

D. 1

Lời giải

**Chọn D**

Ta có  $\log_3 \left| \frac{x^2 - 2(m-1)x + 2 - m}{3x^2 + 2x + 1} \right| \leq 1$  với mọi  $x$ .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2(m-1)x + 2 - m \neq 0 \\ |x^2 - 2(m-1)x + 2 - m| \leq 3(3x^2 + 2x + 1) \end{cases} \text{ với mọi } x.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2(m-1)x + 2 - m \neq 0 \\ x^2 - 2(m-1)x + 2 - m \leq 9x^2 + 6x + 3 \\ x^2 - 2(m-1)x + 2 - m \geq -9x^2 - 6x - 3 \end{cases} \text{ với mọi } x.$$

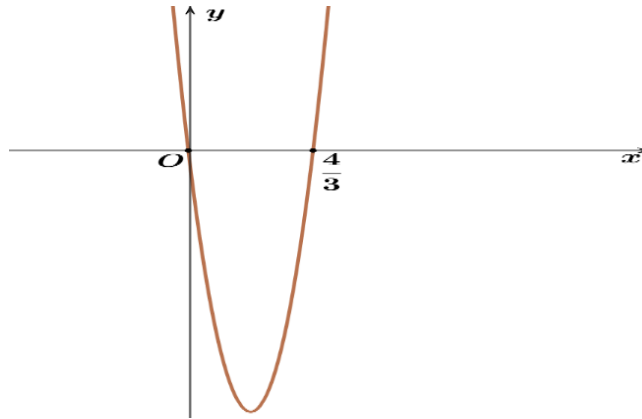
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2(m-1)x + 2 - m \neq 0 \\ -8x^2 - 2(m+2)x - 1 - m \leq 0 \\ 10x^2 - 2(m-4)x + 5 - m \geq 0 \end{cases} \text{ với mọi } x.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)^2 + m - 2 < 0 \\ (m+2)^2 - 8(m+1) \leq 0 \\ (m-4)^2 - 10(5-m) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 1 < 0 \\ (m+2)^2 - 8(m+1) \leq 0 \\ (m-4)^2 - 10(5-m) \leq 0 \end{cases}.$$

Mà  $m$  là số nguyên nên  $m = 0$  hay  $m = 1$ . Vậy tổng tất cả các giá trị  $m$  là 1.

### III. NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN

**Câu 104:** Cho hàm số  $y = f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx (a, b \in \mathbb{R})$ . Biết hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ



Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị  $y = f(x)$  và  $y = f'(x)$  bằng

$\frac{m}{n} (m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*)$  và  $\frac{m}{n}$  là phân số tối giản. Tính  $m + n$

**A.** -157.

**B.** 74.

**C.** 13.

**D.** 119.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có:  $f'(x) = 6x^2 + 2ax + b$ .

$$\text{Từ đồ thị suy ra: } \begin{cases} f'(0) = 0 \\ f'\left(\frac{4}{3}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = -4 \end{cases}.$$



Ta có:  $f(x) - f'(x) = 2x^3 - 10x^2 + 8x$ . Cho  $f(x) - f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=4 \end{cases}$ .

Vậy diện tích hình phẳng là  $S = \int_0^4 |2x^3 - 10x^2 + 8x| dx = \frac{71}{3} \Rightarrow m+n=74$ .

**Câu 105:** Khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi đường cong

$y = \sqrt{\frac{5+(x-4)e^x}{xe^x+1}}$ , trục hoành và hai đường thẳng  $x=0, x=1$  quanh trục hoành có thể tích  $V = \pi[a+b\ln(e+1)]$ , trong đó  $a, b$  là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.**  $a+b=9$ .      **B.**  $a+b=5$ .      **C.**  $a-2b=13$ .      **D.**  $a-2b=-3$ .

**Lời giải**

Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi đường cong

$y = \sqrt{\frac{5+(x-4)e^x}{xe^x+1}}$ , trục hoành và hai đường thẳng  $x=0, x=1$  quanh trục hoành là:

$$V = \pi \int_0^1 \frac{5+(x-4)e^x}{xe^x+1} dx = \pi \int_0^1 \frac{5+xe^x-4e^x}{xe^x+1} dx = \pi \int_0^1 \left(1 + \frac{4-4e^x}{xe^x+1}\right) dx = \pi \left( \int_0^1 dx + \int_0^1 \frac{4-4e^x}{xe^x+1} dx \right)$$

Đặt  $I = \int_0^1 \frac{4-4e^x}{xe^x+1} dx$ .

Ta có:  $I = \int_0^1 \frac{4-4e^x}{xe^x+1} dx = 4 \int_0^1 \frac{1-e^x}{xe^x+1} dx = 4 \int_0^1 \frac{\frac{1}{x}-1}{x+\frac{1}{e^x}} dx$

Đặt  $t = x + \frac{1}{e^x} \Rightarrow dt = \left(1 - \frac{1}{e^x}\right) dx$ . Đổi cận ta có:  $x=0 \Rightarrow t=1$   $x=1 \Rightarrow t=1+\frac{1}{e}$

$$I = 4 \int_1^{1+\frac{1}{e}} -\frac{dt}{t} = 4(-\ln t) \Big|_1^{1+\frac{1}{e}} = 4(-\ln(1+\frac{1}{e}) + 1)$$

Nên  $V = \pi[1+4.(1-\ln(1+\frac{1}{e}))] = \pi(5-4\ln(1+\frac{1}{e}))$

Do đó  $a=5; b=-4 \Rightarrow a-2b=13$

**Câu 106:** Cho hàm số  $y = f(x) = \begin{cases} x^2+3, & x \geq 1 \\ 5-x, & x < 1 \end{cases}$ . Tính  $I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx + \frac{3}{2} \int_0^1 f(3-2x) dx$ .

- A.**  $I = \frac{32}{3}$ .      **B.**  $I = 20$ .      **C.**  $I = 32$ .      **D.**  $I = 31$ .

**Lời giải**

Ta có:  $I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx + \frac{3}{2} \int_0^1 f(3-2x) dx = 2I_1 + \frac{3}{2}I_2$ .

$$+ I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) d(\sin x) = \int_0^1 f(x) dx.$$

$$\Rightarrow I_1 = \int_0^1 (5-x) dx = \left( 5x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{9}{2}.$$

$$+ I_2 = \int_0^1 f(3-2x) dx = \frac{-1}{2} \int_0^1 f(3-2x) d(3-2x) = \frac{-1}{2} \int_3^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_1^3 f(x) dx.$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{1}{2} \int_1^3 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_1^3 (x^2+3) dx = \frac{1}{2} \left( \frac{x^3}{3} + 3x \right) \Big|_1^3 = \frac{22}{3}.$$

$$\text{Vậy } I = 2I_1 + \frac{3}{2}I_2 = 2 \cdot \frac{9}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{22}{3} = 20.$$

**Câu 107:** Cho  $f(x)$  là hàm số liên tục trên tập số thực không âm và thỏa mãn

$$f(x^2+3x+1) = x+2 \quad \forall x \geq 0. \text{ Tính } \int_1^5 f(x) dx$$

**A.**  $\frac{37}{6}.$

**B.**  $\frac{527}{3}.$

**C.**  $\frac{61}{6}.$

**D.**  $\frac{464}{3}.$

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\text{Ta có: } I = \int_0^1 f(x^2+3x+1)(2x+3) dx = \int_0^1 (x+2)(2x+3) dx = \frac{61}{6}$$

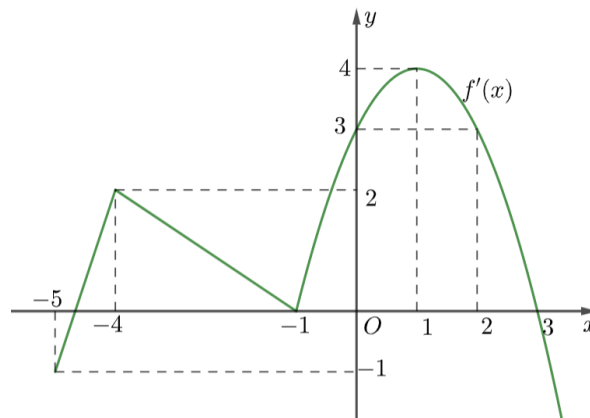
$$\text{Đặt } t = x^2+3x+1 \Rightarrow dt = (2x+3) dx,$$

$$\text{Đổi cận: } x=0 \Rightarrow t=1$$

$$x=1 \Rightarrow t=5$$

$$\text{Suy ra } \frac{61}{6} = \int_0^1 f(x^2+3x+1)(2x+3) dx = \int_1^5 f(t) dt = \int_1^5 f(x) dx.$$

**Câu 108:** Cho hàm số  $y = f(x)$ . Đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  trên đoạn  $[-5;3]$  như hình vẽ (phần cong của đồ thị là một phần của parabol  $y = ax^2 + bx + c$ ). Biết  $f(0) = 0$ , giá trị của  $2f(-5) + 3f(2)$  bằng



**A.** 33.

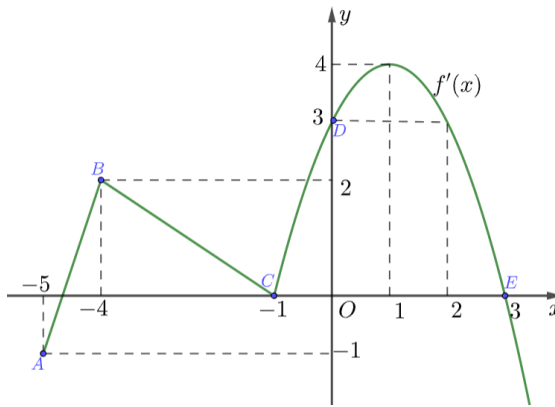
**B.**  $\frac{35}{3}.$

**C.** 11.

**D.**  $\frac{109}{3}.$

**Lời giải**

Kí hiệu các điểm như hình vẽ.



Đường thẳng  $AB$  đi qua hai điểm  $A(-5;-1)$  và  $B(-4;2)$  nên có phương trình  $y = 3x + 14$ .

Đường thẳng  $BC$  đi qua hai điểm  $B(-4;2)$  và  $C(-1;0)$  nên có phương trình  $y = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$ .

Parabol  $y = ax^2 + bx + c$  đi qua các điểm  $C(-1;0)$ ,  $D(0;3)$ ,  $E(3;0)$  nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a - b + c = 0 \\ c = 3 \\ 9a + 3b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 3 \end{cases}.$$

$$\text{Do đó } f'(x) = \begin{cases} 3x + 14 & \text{khi } x \in (-5; -4) \\ -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3} & \text{khi } x \in (-4; -1) \\ -x^2 + 2x + 3 & \text{khi } x \in (-1; 3) \end{cases}$$

$$\text{Ta có } f(0) - f(-5) = \int_{-5}^0 f'(x) dx = \int_{-5}^{-4} (3x + 14) dx + \int_{-4}^{-1} \left(-\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}\right) dx + \int_{-1}^0 (-x^2 + 2x + 3) dx = \frac{31}{6}.$$

$$\text{Vì } f(0) = 0 \text{ nên } f(-5) = -\frac{31}{6}.$$

$$\text{Lại có } f(2) - f(0) = \int_0^2 f'(x) dx = \int_0^2 (-x^2 + 2x + 3) dx = \frac{22}{3}.$$

$$\text{Vì } f(0) = 0 \text{ nên } f(2) = \frac{22}{3}.$$

$$\text{Vậy } 2f(-5) + 3f(2) = \frac{35}{3}.$$

**Câu 109:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Biết  $f(x) > -1, \forall x \in \mathbb{R}, f(0) = 0$  và thoả mãn

$$f'(x)\sqrt{x^2+1} = 2x\sqrt{f(x)+1}. \text{ Khi đó, } \int_0^{\sqrt{3}} f'(x) dx \text{ bằng}$$

A. 0.

B. 3.

C. 9.

D. 5.

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\text{Ta có: } f'(x)\sqrt{x^2+1} = 2x\sqrt{f(x)+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow \left[ \sqrt{f(x)+1} \right]' = \left( \sqrt{x^2+1} \right)'$$

Suy ra  $\sqrt{f(x)+1} = \sqrt{x^2+1} + C$ . Do  $f(0) = 0$  nên  $C = 0$ .

Do đó,  $f(x) = x^2$ . Khi đó,  $\int_0^{\sqrt{3}} f'(x) dx = \int_0^{\sqrt{3}} 2x dx = 3$ .

**Câu 110:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Biết  $\int_1^e \frac{1-f(\ln x)}{x} dx = 2$  và  $f(1) = \frac{1}{3}$ .

Tích phân  $\int_0^1 xf'(x) dx$  bằng

**A.**  $-\frac{2}{3}$ .

**B.**  $\frac{2e}{3}$ .

**C.**  $\frac{4}{3}$ .

**D.**  $\frac{2}{3}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có  $\int_1^e \frac{1-f(\ln x)}{x} dx = \int_1^e \frac{1}{x} dx - \int_1^e \frac{f(\ln x)}{x} dx = \ln x \Big|_1^e - \int_1^e f(\ln x) d(\ln x) = 1 - \int_0^1 f(x) dx$ .

Mặt khác  $\int_1^e \frac{1-f(\ln x)}{x} dx = 2$  suy ra  $\int_0^1 f(x) dx = -1$ .

Do đó  $\int_0^1 xf'(x) dx = \int_0^1 x d(f(x)) = xf(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) dx = f(1) + 1 = \frac{4}{3}$ .

**Câu 111:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $f(x) + f'(x) = x^3 + 3x^2 - 4x + 4, \forall x \in \mathbb{R}$  và  $f(1) = 5$ . Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = f(x)$  và  $y = f'(x)$ .

**A.**  $\frac{131}{4}$ .

**B.**  $\frac{125}{4}$ .

**C.**  $\frac{35}{4}$ .

**D.**  $\frac{203}{4}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Chọn  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ .

Suy ra  $f(x) + f'(x) = ax^3 + (3a+b)x^2 + (2b+c)x + d + c$ .

Từ giả thiết ta có:  $\begin{cases} a=1 \\ 3a+b=3 \\ 2b+c=-4 \\ d+c=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=-4 \\ d=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = x^3 - 4x + 8 \\ f'(x) = 3x^2 - 4 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}.$

Phương trình hoành độ giao điểm của hàm số  $y = f(x), y = f'(x)$  là:

$$f(x) = f'(x) \Leftrightarrow x^3 - 4x + 8 = 3x^2 - 4 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Khi đó, diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = f(x)$  và  $y = f'(x)$  bằng:

$$S = \int_{-2}^3 |x^3 - 3x^2 - 4x + 12| dx = \int_{-2}^2 (x^3 - 3x^2 - 4x + 12) dx + \int_2^3 (-x^3 + 3x^2 + 4x - 12) dx = \frac{131}{4}.$$

**Câu 112:** Cho hàm số  $f(x)$  xác định và có đạo hàm trên  $(0; +\infty)$  thỏa mãn  $f(1) = \frac{4}{e}$  và

$$(x+1)f(x) + xf'(x) = (2x+1)e^{-x} \text{ với mọi } x > 0. \text{ Tính } \int_1^2 e^x f(x) dx.$$

- A.  $4 - \ln 4$ .      B.  $\frac{5}{2} - 2\ln 2$ .      C.  $4 + \ln 4$ .      D.  $\frac{5}{2} + 2\ln 2$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\text{Ta có } (x+1)f(x) + xf'(x) = (2x+1)e^{-x} \Leftrightarrow (x+1)e^x f(x) + e^x xf'(x) = 2x+1$$

$$\Leftrightarrow [xe^x f(x)]' = 2x+1 \Rightarrow \int [xe^x f(x)]' dx = \int (2x+1) dx \Leftrightarrow xe^x f(x) = x^2 + x + C.$$

$$\text{Vì } f(1) = \frac{4}{e} \text{ nên } C = ef(1) - 2 = 2. \text{ Suy ra } e^x f(x) = x + 1 + \frac{2}{x}.$$

$$\text{Khi đó } \int_1^2 e^x f(x) dx = \int_1^2 \left( x + 1 + \frac{2}{x} \right) dx = \left( \frac{x^2}{2} + x + 2\ln|x| \right) \Big|_1^2 = \frac{5}{2} + 2\ln 2.$$

**Câu 113:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm cấp hai liên tục trên  $\mathbb{R}$  và thỏa mãn  $f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(x) = f(x) + (3x+4)e^{2x}$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Giá trị của  $f(1)$  bằng

- A.  $e^2$ .      B.  $2e^4$ .      C.  $2e^2$ .      D.  $e^4$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có:

$$f''(x) = f(x) + (3x+4)e^{2x} \Leftrightarrow f''(x) - f(x) = (3x+4)e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f''(x) - f(x)}{e^x} = (3x+4)e^x \Leftrightarrow \frac{f''(x)e^x - f(x)e^x}{e^{2x}} = (3x+4)e^x$$

$$\Leftrightarrow \frac{f''(x)e^x - f'(x)e^x}{e^{2x}} + \frac{f'(x)e^x - f(x)e^x}{e^{2x}} = (3x+4)e^x$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{f'(x)}{e^x} \right)' + \left( \frac{f(x)}{e^x} \right)' = (3x+4)e^x$$

Lấy nguyên hàm hai vế ta được:

$$\frac{f'(x)}{e^x} + \frac{f(x)}{e^x} = \int (3x+4)e^x dx = (3x+1)e^x + C$$

$$\text{Khi: } x=0 \Rightarrow C=0$$

$$\text{Suy ra: } \frac{f'(x)}{e^x} + \frac{f(x)}{e^x} = (3x+1)e^x \Leftrightarrow f'(x) + f(x) = (3x+1)e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x)e^x + f(x)e^x = (3x+1)e^{3x} \Leftrightarrow [f(x)e^x]' = (3x+1)e^{3x}$$

$$\Rightarrow f(x)e^x = \int (3x+1)e^{3x} dx = xe^{3x} + C_1$$

$$\text{Lại có: } x=0 \Rightarrow C_1=0$$

Vậy:  $f(x) = xe^{2x} \Rightarrow f(1) = e^2$ .

**Câu 114:** Cho hàm số  $y = f(x)$  thỏa mãn  $f(0) = -\frac{5}{4}$  và  $f'(x) = x^4 f^2(x)$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Giá trị của  $f(2)$  bằng

A.  $-\frac{1}{4}$ .

B.  $-\frac{3}{4}$ .

C.  $-\frac{5}{36}$ .

D.  $-1$ .

Lời giải

Chọn C.

Ta có:  $f'(x) = x^4 f^2(x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = x^4$ .

Lấy nguyên hàm 2 vế:  $\int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int x^4 dx \Rightarrow -\frac{1}{f(x)} = \frac{x^5}{5} + C$ .

Theo giả thiết  $f(0) = -\frac{5}{4}$  suy ra  $C = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{1}{f(x)} = \frac{x^5 + 4}{5} \Rightarrow f(2) = \frac{5}{36}$ .

**Câu 115:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm, liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ , đồng thời thỏa mãn  $f'(x) = e^x \cdot [f(x)]^2, \forall x \in \mathbb{R}$ . Biết  $f(0) = -1$ , khi đó  $f(-1)$  bằng

A.  $e$ .

B.  $-1$ .

C.  $-e$ .

D.  $-\frac{1}{e}$ .

Lời giải

Chọn C

Ta có  $f'(x) = e^x \cdot [f(x)]^2 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = e^x \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} = e^x + C$ .

Mặt khác  $f(0) = -1$  suy ra  $C = 0$ .

Do đó  $f(x) = -e^{-x}$  nên  $f(-1) = -e$ .

**Câu 116:** Cho hàm số  $f(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e (b, c, d, e \in \mathbb{R})$  đạt cực trị tại  $x_1, x_2, x_3 (x_1 < x_2 < x_3)$  và có  $f(x_1) = 1, f(x_2) = 16, f(x_3) = 9$ . Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số

$g(x) = \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$  và trục hoành bằng

A.  $6$ .

B.  $4$ .

C.  $8$ .

D.  $2$ .

Lời giải

Chọn C

Do hàm số  $f(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e (b, c, d, e \in \mathbb{R})$  đạt cực trị tại  $x_1, x_2, x_3 (x_1 < x_2 < x_3)$  nên  $f'(x) = 4x^3 + 3bx^2 + 2cx + d$  có 3 nghiệm  $x_1, x_2, x_3 (x_1 < x_2 < x_3)$ .

Vì vậy  $g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = x_2; (x_1 < x_2 < x_3) \\ x = x_3 \end{cases}$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $g(x) = \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$  và trục hoành được tính bởi:

$$S = \int_{x_1}^{x_3} \left| \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} \right| dx = \left| \int_{x_1}^{x_2} \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx \right| + \left| \int_{x_2}^{x_3} \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx \right| = \left| 2\sqrt{f(x)} \right|_{x_1}^{x_2} + \left| 2\sqrt{f(x)} \right|_{x_2}^{x_3} = 6 + 2 = 8.$$

**Câu 117:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Biết  $f(x) > 0, f(0) = 0$  và thỏa mãn

$$f'(x) \sqrt{x^2 + 1} = 2x\sqrt{f(x) + 1}. \text{ Khi đó } \int_0^{2\sqrt{2}} f'(x) \sqrt{x^2 + 1} dx \text{ bằng}$$

A. 3.

B. 8.

C. -1.

D. 6.

Lời giải

**Chọn B.**

$$\text{Ta có } f'(x) \sqrt{x^2 + 1} = 2x\sqrt{f(x) + 1} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x) + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{f(x) + 1} = \sqrt{x^2 + 1} + C$$

Mà  $f(0) = 0$  nên  $C = 0$ . Suy ra  $f(x) = x^2$ .

$$\text{Khi đó } \int_0^{2\sqrt{2}} f'(x) \sqrt{x^2 + 1} dx = f(x) \Big|_0^{2\sqrt{2}} = x^2 \Big|_0^{2\sqrt{2}} = 8.$$

**Câu 118:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $f(1) = 1$  và

$$f(4x) - x^3 f(x^4) = 3x^2 + 2x + 1 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}. \text{ Khi đó } \int_1^4 x f'(x) dx \text{ bằng}$$

A.  $I = 15$ .

B.  $I = -1$ .

C.  $I = 14$ .

D.  $I = 6$ .

Lời giải

**Chọn A.**

$$\text{Ta có: } f(4x) - x^3 f(x^4) = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow 4f(4x) - 4x^3 f(x^4) = 12x^2 + 8x + 4 (*)$$

$$\Rightarrow 4 \int_0^1 f(4x) dx - 4 \int_0^1 x^3 f(x^4) dx = \int_0^1 (12x^2 + 8x + 4) dx = 12.$$

$$\text{Đặt } 4x = t \Rightarrow 4dx = dt. \text{ Đổi cận: } \begin{cases} x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=1 \Rightarrow t=4 \end{cases}$$

$$\text{Nên: } 4 \int_0^1 f(4x) dx = \int_0^4 f(t) dt = \int_0^4 f(x) dx$$

$$\text{Đặt } x^4 = u \Rightarrow 4x^3 dx = du. \text{ Đổi cận: } \begin{cases} x=0 \Rightarrow u=0 \\ x=1 \Rightarrow u=1 \end{cases}$$

$$\text{Nên: } 4 \int_0^1 x^3 f(x^4) dx = \int_0^1 f(u) du.$$

$$\text{Suy ra: } \int_0^4 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx = \int_1^4 f(x) dx = 12.$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = x \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}.$$

$$\Rightarrow \int_1^4 x \cdot f'(x) dx = x f(x) \Big|_1^4 - \int_1^4 f(x) dx = 4f(4) - f(1) - 12 = 4f(4) - 1 - 12 = 4f(4) - 13.$$

$$\text{Chọn } x=1 \Rightarrow 4f(4) - 4f(1) = 24 \Leftrightarrow 4f(4) = 28.$$

$$\text{Vậy } \int_1^4 x f'(x) dx = 28 - 13 = 15.$$

**Câu 119:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[1; 2]$  và  $f(1) + f(2) = 0$ . Biết

$$\int_1^2 (f(x))^2 dx = \frac{1}{2}, \int_1^2 f'(x) \cos(\pi x) dx = \frac{\pi}{2}. \text{ Tính } \int_1^2 f(x) dx.$$

A.  $\pi$ .

B.  $\frac{1}{\pi}$ .

C.  $\frac{2}{\pi}$ .

D.  $-\frac{2}{\pi}$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\text{Đặt } I = \int_1^2 f'(x) \cos(\pi x) dx = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \cos(\pi x) \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\pi \sin \pi x dx \\ v = f(x) \end{cases} \Rightarrow I = f(x) \cos(\pi x) \Big|_1^2 + \pi \int_1^2 f(x) \sin \pi x dx$$

$$\Rightarrow I = f(2) \cos 2\pi - f(1) \cos \pi + \pi \int_1^2 f(x) \sin \pi x dx \Rightarrow \int_1^2 f(x) \sin \pi x dx = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Ta có } \int_1^2 \sin^2 \pi x dx = \frac{1}{2} \int_1^2 (1 - \cos 2\pi x) dx = \frac{1}{2} \left( x - \frac{\sin 2\pi x}{2\pi} \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Do đó } \int_1^2 (f(x))^2 dx - 2 \int_1^2 f(x) \sin(\pi x) dx + \int_1^2 (\sin \pi x)^2 dx = 0$$

$$\int_1^2 \left[ f^2(x) - 2f(x) \sin \pi x + (\sin \pi x)^2 \right] dx = 0 \Leftrightarrow \int_1^2 \left[ f(x) - \sin \pi x \right]^2 dx = 0 \Rightarrow f(x) = \sin \pi x.$$

$$\text{Do đó } \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \sin \pi x dx = \left[ -\frac{1}{\pi} \cos \pi x \right]_1^2 = -\frac{2}{\pi}.$$

**Câu 120:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm xác định trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $f(0) = 2\sqrt{2}$ ,  $f(x) > 0$  và

$$f(x) \cdot f'(x) = (2x+1) \sqrt{1+f^2(x)}, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Giá trị } f(2) \text{ là}$$

A.  $5\sqrt{4}$ .

B.  $4\sqrt{5}$ .

C.  $3\sqrt{5}$ .

D. 9.

**Lời giải**

$$\text{Ta có } f(x) \cdot f'(x) = (2x+1) \sqrt{1+f^2(x)}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x) \cdot f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}} = 2x+1, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{2f(x) \cdot f'(x)}{2\sqrt{1+f^2(x)}} = 2x+1, \forall x \in \mathbb{R}$$



$$\Rightarrow \int \frac{2f(x) \cdot f'(x)}{2\sqrt{1+f^2(x)}} dx = \int (2x+1) dx \Rightarrow \sqrt{1+f^2(x)} = x^2 + x + C.$$

$$\text{Cho } x=0 \text{ ta được: } C = \sqrt{1+f^2(0)} = \sqrt{1+(2\sqrt{2})^2} = 3.$$

$$\text{Do đó } \sqrt{1+f^2(x)} = x^2 + x + 3.$$

$$\text{Lại cho } x=2 \text{ ta được: } \sqrt{1+f^2(2)} = 4+2+3=9 \Rightarrow 1+f^2(2)=81 \Rightarrow f^2(2)=80$$

$$\Rightarrow f(2)=4\sqrt{5} \text{ (do } f(x)>0).$$

$$\text{Vậy } f(2)=4\sqrt{5}.$$

**Câu 121:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn

$$f(1)=1; f(3x)-x^2 f(x^3)=4x^3+2x+1, (\forall x \in \mathbb{R}). \text{ Khi đó } \int_1^3 xf'(x) dx \text{ bằng:}$$

**A. 14**

**B. -1**

**C. 5**

**D. 6**

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\text{Ta có } f(1)=1; f(3)=8.$$

Lấy tích phân hai vế trên đoạn  $[0;1]$  ta được

$$\int_0^1 (f(3x)-x^2 f(x^3)) dx = \int_0^1 (4x^3+2x+1) dx \Leftrightarrow \int_0^1 f(3x) dx - \int_0^1 x^2 f(x^3) dx = 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \int_0^1 f(3x) d(3x) - \frac{1}{3} \int_0^1 f(x^3) d(x^3) = 3$$

$$\Leftrightarrow \int_0^3 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx = 9$$

$$\Leftrightarrow \int_1^3 f(x) dx = 9$$

$$\text{Do đó } \int_1^3 xf'(x) dx = \int_1^3 x d(f(x)) = (xf(x)) \Big|_1^3 - \int_1^3 f(x) dx = 3f(3) - 1f(1) - 9 = 3 \cdot 8 - 1 - 9 = 14.$$

**Câu 122:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $(0;+\infty)$  thỏa mãn

$$(x+2)f(x) = xf'(x) - x^3, \forall x \in (0;+\infty) \text{ và } f(1)=e. \text{ Giá trị của } f(2) \text{ là}$$

**A.  $4e^2+4e-2$ .**

**B.  $4e^2+4e-4$ .**

**C.  $4e^2+2e-2$ .**

**D.  $4e^2+2e-4$ .**

**Lời giải**

**Chọn B**

$$(x+2)f(x) = xf'(x) - x^3, \forall x \in (0;+\infty) \Leftrightarrow x^2 f'(x) - 2xf(x) - x^2 f(x) = x^4, \forall x \in (0;+\infty)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 f'(x) - 2xf(x)}{x^4} - \frac{f(x)}{x^2} = 1, \forall x \in (0;+\infty)$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{f(x)}{x^2} \right)' - \frac{f(x)}{x^2} = 1, \forall x \in (0;+\infty) \Leftrightarrow \left( \frac{f(x)}{x^2} \right)' e^{-x} - \frac{f(x)}{x^2} e^{-x} = e^{-x}, \forall x \in (0;+\infty)$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{f(x)}{x^2} e^{-x} \right)' = e^{-x}, \forall x \in (0; +\infty) \Rightarrow \frac{f(x)}{x^2} e^{-x} = -e^{-x} + C, \forall x \in (0; +\infty).$$

Do  $f(1) = e$ , suy ra  $C = 1 + e^{-1}$ .

Vậy  $f(x) = x^2(-1 + e^x + e^{x-1})$ ,  $\forall x \in (0; +\infty)$ . Suy ra:  $f(2) = 4e^2 + 4e - 4$ .

**Câu 123:** Cho hàm số  $y = f(x)$  thỏa mãn  $f(0) = 0, f(x) + f'(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$ . Giá trị của  $f(\ln 2)$  bằng

A. 2.

B.  $\frac{1}{2}$ .

C.  $\frac{1}{\ln 2}$ .

D.  $\ln 2$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có  $f(x) + f'(x) = 1 \Leftrightarrow e^x \cdot f(x) + e^x \cdot f'(x) = e^x \Leftrightarrow (e^x \cdot f(x))' = e^x$ .

Lấy tích phân hai vế cận chạy từ  $0 \rightarrow \ln 2$  ta được:

$$\int_0^{\ln 2} (e^x \cdot f(x))' dx = \int_0^{\ln 2} e^x dx = 1 \Leftrightarrow 2f(\ln 2) - f(0) = 1 \Rightarrow f(\ln 2) = \frac{1}{2}.$$

**Câu 124:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  và thỏa mãn các điều kiện  $f(0) = -2$ ,  $(x^2 + 1)f'(x) + xf(x) = -x, \forall x \in \mathbb{R}$ . Gọi  $(H)$  là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $g(x) = \frac{1}{1 + f(x)}$ , hai trục tọa độ và đường thẳng  $x = 3$ . Quay  $(H)$  quanh trục  $Ox$  ta được khối tròn xoay có thể tích bằng  $V$  (đơn vị thể tích). Khẳng định nào sau đây đúng?

A.  $V \in (11; 13)$ .

B.  $V \in (5; 9)$ .

C.  $V \in (15; 20)$ .

D.  $V \in (35; 38)$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

Hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$ , ta có

$$(x^2 + 1)f'(x) + xf(x) = -x \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1}f'(x) + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}f(x) = -\frac{x}{x^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2 + 1}f(x))' = (-\sqrt{x^2 + 1})' \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1}f(x) = -\sqrt{x^2 + 1} + C.$$

Vì  $f(0) = -2$  nên  $C = -1$ . Suy ra  $f(x) = -1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ .

Khi đó  $g(x) = \frac{1}{1 + f(x)} = -\sqrt{x^2 + 1}$ .

Thể tích khối tròn xoay là  $V = \pi \int_0^3 g^2(x) dx = \pi \int_0^3 (-\sqrt{x^2 + 1})^2 dx = 12\pi$ .

Vậy  $V = 12\pi \approx 37,699 \in (35; 38)$ .

**Câu 125:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $f'(x) + xf(x) = \frac{2x}{e^{x^2}}$ ,

$\forall x \in \mathbb{R}$  và  $f(0) = -2$ . Tính  $f(-2)$ .

- A.**  $f(-2) = \frac{-2}{e^4}$ .      **B.**  $f(-2) = \frac{2}{e^4}$ .      **C.**  $f(-2) = 2$ .      **D.**  $f(-2) = e^2$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\text{Ta có } f'(x) + xf(x) = \frac{2x}{e^{x^2}} \Leftrightarrow e^{\frac{x^2}{2}} f'(x) + e^{\frac{x^2}{2}} xf(x) = \frac{2x}{e^{\frac{x^2}{2}}} \Leftrightarrow \left[ e^{\frac{x^2}{2}} f(x) \right]' = \frac{2x}{e^{\frac{x^2}{2}}}$$

$$\Rightarrow \int_{-2}^0 \left[ e^{\frac{x^2}{2}} f(x) \right]' dx = \int_{-2}^0 \frac{2x}{e^{\frac{x^2}{2}}} dx \Leftrightarrow e^{\frac{x^2}{2}} f(x) \Big|_{-2}^0 = 2 \int_{-2}^0 \frac{d\left(\frac{x^2}{2}\right)}{e^{\frac{x^2}{2}}} dx = \frac{-2}{e^{\frac{x^2}{2}}} \Big|_{-2}^0$$

$$\Leftrightarrow f(0) - e^2 f(-2) = -2 \left( 1 - \frac{1}{e^2} \right) \Leftrightarrow -e^2 f(-2) = \frac{2}{e^2} \Leftrightarrow f(-2) = \frac{-2}{e^4}.$$

**Câu 126:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm trên đoạn  $[1; e]$  và thỏa mãn  $f(1) = 0$  ;

$[f'(x) - 1]x = f(x), \forall x \in [1; e]$ . Tích phân  $\int_1^e f(x) dx$  bằng

- A.**  $\frac{e^2 - 1}{4}$ .      **B.**  $\frac{e^2 + 1}{2}$ .      **C.**  $\frac{e^2 + 1}{4}$ .      **D.**  $\frac{e^2 - 1}{2}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

$$[f'(x) - 1]x = f(x) \Leftrightarrow f'(x)x - f(x) = x \Rightarrow \frac{1}{x} f'(x) + \frac{-1}{x^2} f(x) = \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \left[ \frac{1}{x} f(x) \right]' = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{x} f(x) = \ln x + C \text{ do } x \in [1; e], \text{ mà } f(1) = 0 \Rightarrow f(x) = x \ln x.$$

$$\int_1^e f(x) dx = \int_1^e x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} dx = \frac{e^2}{2} - \left( \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{e^2 + 1}{4}.$$

**Câu 127:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\left[ \frac{1}{3}; 3 \right]$  thỏa mãn  $f(x) + x \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = x^3 - x, \forall x \in \left[ \frac{1}{3}; 3 \right]$ .

Tích phân  $I = \int_{\frac{1}{3}}^3 \frac{f(x)}{x^2 + x} dx$  bằng

- A.**  $\frac{2}{3}$ .      **B.**  $\frac{16}{9}$ .      **C.**  $\frac{8}{9}$ .      **D.**  $\frac{3}{4}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\text{Ta có } f(x) + x \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = x^3 - x \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x^2 + x} + \frac{1}{x+1} \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = x - 1.$$

$$\text{Suy ra } \int_{\frac{1}{3}}^3 \frac{f(x)}{x^2+x} dx + \int_{\frac{1}{3}}^3 \frac{1}{x+1} \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) dx = \int_{\frac{1}{3}}^3 (x-1) dx. \quad (*)$$

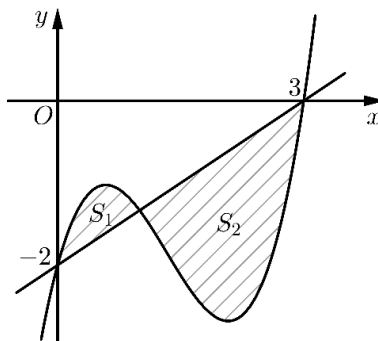
$$\text{Đặt } t = \frac{1}{x} \text{ suy ra } dx = -\frac{1}{t^2} dt \text{ và } x = \frac{1}{t} \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} = \frac{t}{t+1}.$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x = \frac{1}{3} \Rightarrow t = 3 \\ x = 3 \Rightarrow t = \frac{1}{3} \end{cases}. \text{ Khi đó}$$

$$\int_{\frac{1}{3}}^3 \frac{1}{x+1} \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) dx = -\int_3^{\frac{1}{3}} \frac{t}{t+1} \cdot f(t) \cdot \frac{1}{t^2} dt = \int_{\frac{1}{3}}^3 \frac{f(t)}{t^2+t} dt = I.$$

$$\text{Do đó } (*) \Leftrightarrow 2I = \frac{16}{9} \Leftrightarrow I = \frac{8}{9}.$$

**Câu 128:** Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$ . Đường thẳng  $y = ax + b$  tạo với đường  $y = f(x)$  hai miền phẳng có diện tích là  $S_1, S_2$  (hình vẽ bên).



Biết  $S_1 = \frac{5}{12}$  và  $\int_0^1 (1-2x) f'(3x) dx = -\frac{1}{2}$ , giá trị của  $S_2$  bằng

**A.**  $\frac{8}{3}$ .

**B.**  $\frac{19}{4}$ .

**C.**  $\frac{13}{3}$ .

**D.**  $\frac{13}{6}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-2x) f'(3x) dx &= \int_0^1 (1-2x) d\left[\frac{1}{3} f(3x)\right] = \frac{1}{3} f(3x)(1-2x) \Big|_0^1 + \frac{2}{3} \int_0^1 f(3x) dx \\ &= \frac{-1}{3} f(3) - \frac{1}{3} f(0) + \frac{2}{9} \int_0^3 f(x) dx = \frac{2}{3} + \frac{2}{9} \int_0^3 f(x) dx = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow \int_0^3 f(x) dx = \frac{-21}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{Khi đó } S_2 = \left| \int_0^3 f(x) dx \right| - (S_{OAB} - S_1) = \frac{8}{3} \text{ với } A(0; -2), B(3; 0).$$

#### IV. SỐ PHỨC

**Câu 129:** Cho  $z + \frac{1}{z} = -1$ . Tính  $P = \left| z^{2023} + \frac{1}{z^{2023}} \right|$

**A.**  $P = \sqrt{2}$ .

**B.**  $P = 1$ .

**C.**  $P = 0$ .

**D.**  $P = -1$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

$$z + \frac{1}{z} = -1 \Leftrightarrow z^2 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2 + z + 1) = 0 \Leftrightarrow z^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow z^3 = 1.$$

$$\text{Khi đó } P = \left| z^{2023} + \frac{1}{z^{2023}} \right| = \left| (z^3)^{674} z + \frac{1}{(z^3)^{674} z} \right| = \left| z + \frac{1}{z} \right| = 1.$$

**Câu 130:** Cho số thực  $a > 0$  và các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z + 6 - 8i| = a$ . Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của  $|z|$ . Có bao nhiêu số nguyên  $a$  để  $M < 3m$ ?

**A.** 4.

**B.** Vô số.

**C.** 3.

**D.** 12.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có  $|z + 6 - 8i| = a$ , khi đó tập hợp điểm biểu diễn của số phức  $z$  là đường tròn tâm  $I(-6; 8)$ , bán kính  $R = a$ , với  $OI = 10$ .

Giá trị lớn nhất của  $|z|$  là  $M = OI + a = 10 + a$ .

TH1:  $a \leq 10$ .

Khi đó giá trị nhỏ nhất của  $|z|$  là  $m = OI - a = 10 - a$ .

Để  $M < 3m \Leftrightarrow 10 + a < 3(10 - a) \Leftrightarrow a < 5$ .

TH này có 4 giá trị của  $a$  thỏa mãn,  $a \in \{1, 2, 3, 4\}$ .

TH2:  $a > 10$ .

Khi đó giá trị nhỏ nhất của  $|z|$  là  $m = a - OI = a - 10$ .

Để  $M < 3m \Leftrightarrow 10 + a < 3(a - 10) \Leftrightarrow a > 20$ .

TH này có vô số giá trị của  $a$  thỏa mãn,  $a \in \{\mathbb{N} / a > 20\}$ .

KL: Vậy có vô số giá trị nguyên của  $a$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 131:** Cho số phức  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) thỏa mãn  $z - 4 + 2i = |z|i$ . Giá trị  $S = a + 2b$  bằng

**A.** 9.

**B.** 11.

**C.** 12.

**D.** 10.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có:  $z - 4 + 2i = |z|i \Rightarrow (a - 4) + (b + 2)i = \sqrt{a^2 + b^2}i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - 4 = 0 \\ b + 2 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b + 2 = \sqrt{b^2 + 16} \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow b + 2 = \sqrt{b^2 + 16} \Leftrightarrow \begin{cases} b + 2 > 0 \\ b^2 + 4b + 4 = b^2 + 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b > -2 \\ b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow b = 3$$

Vậy:  $S = a + 2b = 4 + 2 \cdot 3 = 10$ .

**Câu 132:** Trong mặt phẳng tọa độ, tập hợp các điểm biểu diễn các số phức  $z$  thỏa mãn  $|\bar{z} + 1| = |z - i|$  là đường thẳng có phương trình?

**A.**  $y = -x$ .

**B.**  $y = x$ .

**C.**  $y = x + 1$ .

**D.**  $y = -x + 1$ .

### Lời giải

#### Chọn A

Giả sử  $z = x + iy$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) được biểu diễn bởi điểm  $M(x; y)$ .

$$\text{Khi đó } |\bar{z} + 1| = |z - i| \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2} \Leftrightarrow x + y = 0 \Leftrightarrow y = -x.$$

**Câu 133:** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = |z|^2$ . Tìm giá trị lớn nhất của  $|z - 2 + 3i|$ .

A.  $27 + 10\sqrt{2}$ .

B.  $5 + \sqrt{2}$ .

C.  $7 + 5\sqrt{2}$ .

D.  $\sqrt{20 + 5\sqrt{2}}$ .

### Lời giải

#### Chọn B

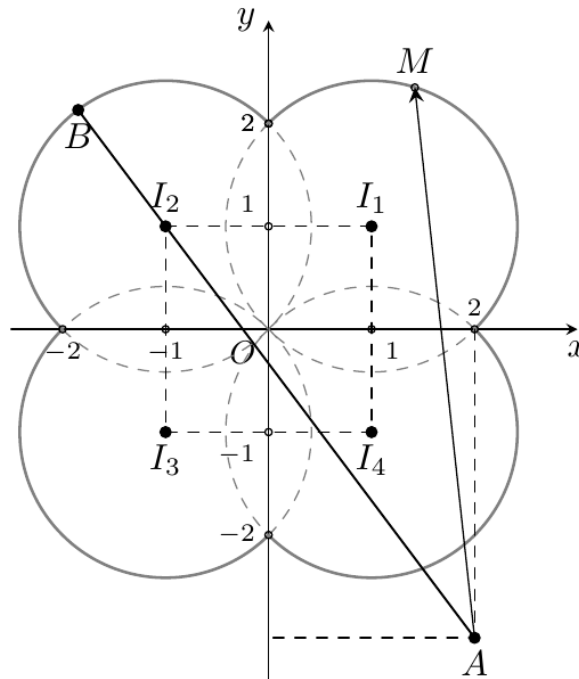
Đặt  $z = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ )  $\Rightarrow M(x; y)$  biểu diễn  $z$ .

Do

$$|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = |z|^2 \Leftrightarrow |z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = |z|^2 \Leftrightarrow 2|x| + 2|y| = x^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow (|x| - 1)^2 + (|y| - 1)^2 = 2$$

Từ đó suy ra: Tập hợp điểm  $M$  biểu diễn  $z$  là 4 phần của 4 đường tròn như hình vẽ:



Mà  $T = |z - 2 + 3i| = |z - (2 - 3i)| = MA$  với  $A(2; -3)$  biểu diễn số phức  $(2 - 3i)$ .

Ta có  $AI_1 = \sqrt{17}$ ;  $AI_2 = 5$ ;  $AI_3 = \sqrt{13}$ ;  $AI_4 = \sqrt{5}$ .

Do đó  $\max T = AI_2 + R = 5 + \sqrt{2}$

**Câu 134:** Xét các số phức  $z, w$  thỏa mãn  $|z - 1| = |z - i|$  và  $|w - 4i| = 1$ . Giá trị nhỏ nhất của  $|z - w|$  bằng

A.  $2\sqrt{2} + 1$ .

B. 2.

C. 3.

D.  $2\sqrt{2} - 1$ .

### Lời giải

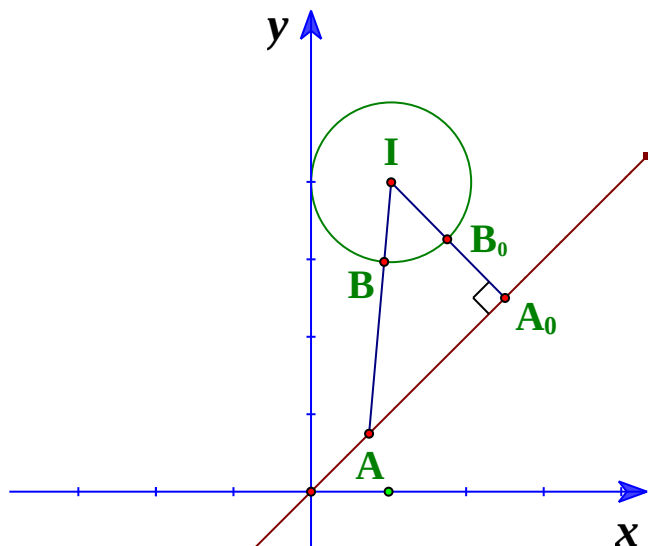
#### Chọn D

Đặt  $z = x + yi$  với  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Ta có:  $|z-1|=|z-i| \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = x^2 + (y-1)^2 \Leftrightarrow x-y=0$  do đó tập hợp các điểm biểu diễn số phức  $z$  là đường thẳng  $d: x-y=0$ .

Lại có:  $|w-4i|=1$  nên tập hợp các điểm biểu diễn số phức  $w$  là đường tròn  $(C)$  có tâm  $I(0;4)$  và bán kính  $R=1$ .

Gọi  $A$  là điểm biểu diễn của số phức  $z$  và  $B$  là điểm biểu diễn của số phức  $w$  khi đó  $|z-w|=AB$  như vậy  $|z-w|$  nhỏ nhất khi  $AB$  nhỏ nhất.



Quan sát hình vẽ, nhận thấy:  $AB$  nhỏ nhất khi  $A$  trùng  $A_0$  và  $B$  trùng với  $B_0$ .

Khi đó:  $IB_0=1$  và  $IA_0=d(I, d)=\frac{|0-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$  do vậy  $AB_{\min}=2\sqrt{2}-1$ .

Vậy giá trị nhỏ nhất của  $|z-w|$  bằng  $2\sqrt{2}-1$ .

**Câu 135:** Cho hai số phức  $z_1, z_2$  thỏa mãn  $|z_1-3-3i|=2$  và  $|z_2-4-2i|=|z_2+2i|$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P=|z_1-z_2|+|z_2-3-2i|+|z_2+3+i|$  bằng

A.  $3\sqrt{5}+2\sqrt{2}+2$ . B.  $3\sqrt{5}+2\sqrt{2}-2$ . C.  $3\sqrt{5}+\sqrt{2}-2$ . D.  $3\sqrt{5}-\sqrt{2}+2$ .

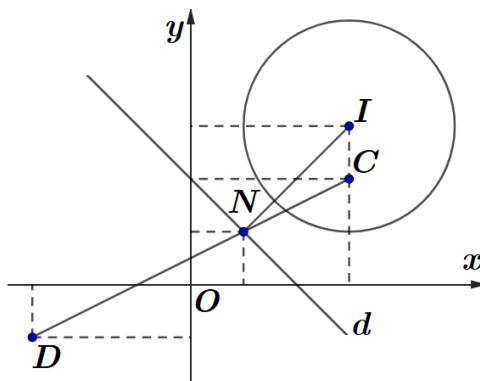
Lời giải

**Chọn B**

Đặt  $M$  là điểm biểu diễn số phức  $z_1$ , khi đó  $M$  thuộc  $(C): \begin{cases} I(3;3) \\ R=2 \end{cases}$ .

Đặt  $N$  là điểm biểu diễn số phức  $z_2$ , khi đó  $N$  thuộc đường trung trực  $d$  của đoạn thẳng  $AB$  với  $A(4;2), B(0;-2) \Rightarrow d: x+y-2=0$ .

Khi đó  $P=|z_1-z_2|+|z_2-3-2i|+|z_2+3+i|=NM+NC+ND$  với  $C(3;2), D(-3;-1)$ .



Ta có  $CD: x - 2y + 1 = 0$ . Gọi  $E = CD \cap d \Rightarrow E(1;1)$ .

Ta có  $\overline{EI} \perp \overline{u_d} \Rightarrow E$  là hình chiếu của  $I$  trên  $d$ .

Vậy  $P = NM + NC + ND = NI + NC + ND - R$  đạt giá trị nhỏ nhất khi  $N \equiv E$ .

$$\Rightarrow P_{\min} = CD + NI - R = 3\sqrt{5} + 2\sqrt{2} - 2.$$

**Câu 136:** Xét số phức  $z$  thỏa mãn  $|z - 1 - i| = 5$ . Khi  $|z - 7 - 9i| + 2|z - 8i|$  đạt giá trị nhỏ nhất,  $|z - 1|$  bằng

A. 1

B.  $6\sqrt{2}$

**C. 6**

D. 7

**Lời giải**

**Chọn C**

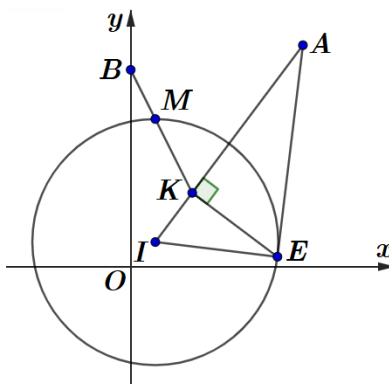
Đặt  $z = x + yi$  và gọi  $M$  là điểm biểu diễn số phức  $z$  trên mặt phẳng phức.

Khi đó bài toán trở thành tìm  $M$  thuộc đường tròn  $(C): \begin{cases} I(1;1) \\ R=5 \end{cases}$  sao cho  $MA + 2MB$  đạt

giá trị nhỏ nhất với  $A(7;9)$ ,  $B(0;8)$ .

Ta có  $\overline{IA} = (6;8) \Rightarrow IA = 10 = 2R$ . Ta cần tìm điểm  $K$  sao cho  $MA = 2MK$ .

Ta có  $IA = 2R$



Kẻ tiếp tuyến  $EA$  của  $(C)$ , khi đó tam giác  $AEI$  vuông tại  $E$ , kẻ đường cao  $EK$  của tam giác  $AEI$ . Khi đó tam giác  $AEI$  đồng dạng với tam giác  $EKI$

$$\Rightarrow \frac{EI}{KI} = \frac{AI}{EI} = 2 \Leftrightarrow KI = \frac{EI}{2} \Rightarrow KI = \frac{1}{4}AI \Rightarrow K\left(\frac{5}{2}; 3\right).$$

Khi đó  $MA + 2MB = 2MK + 2MB \geq 2KB$ .

Đẳng thức xảy ra khi  $M$  là giao điểm của  $BK$  với  $(C)$ .

$$\text{Ta có } BK: \begin{cases} x = t \\ y = 8 - 2t \end{cases} \Rightarrow M(t; 8 - 2t).$$



$$\text{Ta có } M \in (C) \Rightarrow (t-1)^2 + (7-2t)^2 = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \Rightarrow x=1(n) \\ t=5 \Rightarrow x=5(l) \end{cases}$$

$$\Rightarrow M(1;6) \Rightarrow z=1+6i \Rightarrow |z-1|=6.$$

**Câu 137:** Xét các số phức  $z, w$  thỏa mãn  $|z|=3, |iw+1-5i|=4$ . Giá trị nhỏ nhất của  $|z^2+wz-9|$  bằng

**A.**  $3(5-\sqrt{15})$ .

**B.**  $2(\sqrt{5}-2)$ .

**C.**  $3$ .

**D.**  $4$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

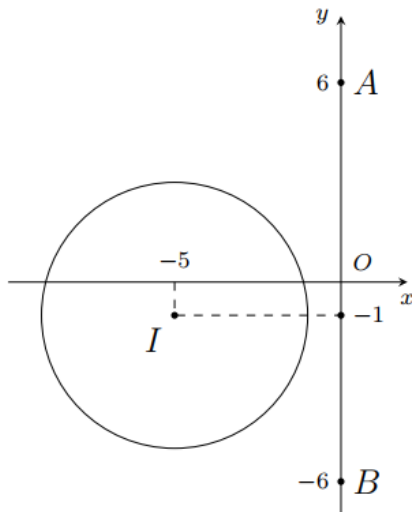
$$\text{Ta có } |iw+1-5i|=4 \Leftrightarrow |-w+5+i|=4.$$

Đặt  $u=-w$  suy ra  $|u+5+i|=4$ . Do đó  $u$  thuộc đường tròn tâm  $I(-5;-1)$  bán kính bằng  $R=4$ .

Giả sử  $z=a+bi$  với  $a, b \in \mathbb{R}$ .

$$\text{Vì } |z|=3 \text{ nên } a^2+b^2=9 \Rightarrow b^2 \leq 9 \Rightarrow -3 \leq b \leq 3.$$

$$\text{Khi đó } T = |z^2+wz-9| = |z^2+wz-z\bar{z}| = |z||z-\bar{z}+w| = 3|u-2bi|.$$



Tập hợp các điểm biểu diễn số phức  $2bi$  là đoạn  $AB$ .

$$\text{Do đó } T_{\min} = 3(d(I, AB) - R) = 3.$$

**Câu 138:** Có bao nhiêu số nguyên  $a$  để tồn tại số phức  $z$  thỏa mãn  $|z+\bar{z}|+|z-\bar{z}|=16$  và  $|iz-4|=a$  ?

**A.**  $10$ .

**B.**  $5$ .

**C.**  $9$ .

**D.**  $6$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\text{Đặt } z = x + yi \ (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow \bar{z} = x - yi.$$

$$\text{Ta có } |z+\bar{z}|+|z-\bar{z}|=16 \Leftrightarrow 2|x|+2|y|=16 \Leftrightarrow |x|+|y|=8$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=8(d_1), & \text{khi } x \geq 0; y \geq 0 \\ x-y=8(d_2), & \text{khi } x \geq 0; y \leq 0 \\ -x-y=8(d_3), & \text{khi } x \leq 0; y \leq 0 \\ -x+y=8(d_4), & \text{khi } x \leq 0; y \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

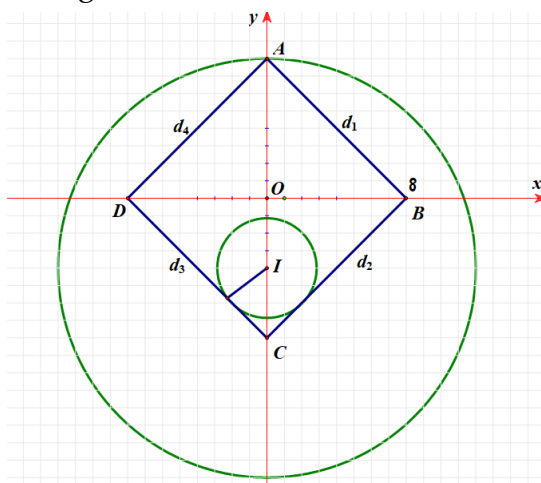
Hay điểm  $M(x; y)$  biểu diễn số phức  $z$  nằm trên các cạnh của hình vuông ABCD như hình.

$$\text{Lại có } |iz-4|=a \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ |-y-4+xi|=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ x^2+(y+4)^2=a^2 \end{cases} \quad (2)$$

TH1: nếu  $a=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-4 \end{cases}$  không thỏa mãn điều kiện (1) (loại).

TH2: Nếu  $a>0$  điểm  $M(x; y)$  biểu diễn số phức  $z$  nằm trên đường tròn tâm  $I(0; -4)$  bán kính  $a$ .

Để tồn tại số phức  $z$  thỏa cả hai điều kiện (1) và (2) thì hình vuông ABCD và đường tròn  $(I; a)$  phải có điểm chung



Do đó  $d(I; d_3) \leq a \leq IA \Leftrightarrow 2\sqrt{2} \leq a \leq 12 \Rightarrow a \in \{3; 4; 5; \dots; 12\}$

Vậy có 10 số nguyên thỏa mãn.

**Câu 139:** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các số phức  $w=2z-5+i$  sao cho số phức  $z$  thỏa mãn  $(z-3+i)(\bar{z}-3-i)=36$ . Xét số phức  $w_1; w_2 \in S$  thỏa mãn  $|w_1-w_2|=2$ . Giá trị lớn nhất của  $P=|w_1-5i|^2-|w_2-5i|^2$  bằng

**A.**  $4\sqrt{37}$ .

**B.**  $5\sqrt{17}$ .

**C.**  $7\sqrt{13}$ .

**D.** 20.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có:  $w=2z-5+i \Leftrightarrow z=\frac{w+5-i}{2}$ . Đặt  $w=x+yi(x, y \in \mathbb{R})$

$$(z-3+i)(\bar{z}-3-i)=36$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{w+5-i}{2} - 3+i \right) \cdot \left( \frac{\bar{w}+5+i}{2} - 3-i \right) = 36$$

$$\Leftrightarrow (w-1+i)(\bar{w}-1-i) = 144$$

$$\Leftrightarrow [(x-1)+(y+1)i] \cdot [(x-1)-(y+1)i] = 144$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = 144.$$

Tập hợp điểm biểu diễn của  $w$  là đường tròn tâm  $I(1;-1)$ , bán kính  $R=12$ .

Gọi  $A, B$  là điểm biểu diễn của số phức  $w_1, w_2, M(0;5)$ .

Ta có:

$$\begin{aligned} P &= MA^2 - MB^2 = (\overline{MI} + \overline{IA})^2 - (\overline{MI} + \overline{IB})^2 \\ &= IA^2 - IB^2 + 2\overline{MI}(\overline{IA} - \overline{IB}) = 2\overline{MI} \cdot \overline{BA} = 2\sqrt{17} \cdot 2 \cos(\overline{MI}, \overline{BA}) \end{aligned}$$

$$P \text{ đạt giá trị lớn nhất} \Leftrightarrow \cos(\overline{BA}, \overline{MI}) = 1.$$

Giá trị lớn nhất của  $P$  là:  $4\sqrt{17}$ .

**Câu 140:** Cho số phức  $z = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) thỏa mãn  $|\bar{z} - 3 - 2i| \leq 5$  và  $\left| \frac{z+4+3i}{z-3+2i} \right| \leq 1$ . Gọi  $M, m$  lần

lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = x^2 + y^2 + 8x + 4y + 7$ . Khi đó  $M + m$  bằng

**A.** 32.

**B.** 36.

**C.** 10.

**D.** 4.

**Lời giải**

**Chọn C**

$$|\bar{z} - 3 - 2i| \leq 5 \quad |\bar{z} - 3 - 2i| \leq 5 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+2)^2 \leq 25.$$

$$\left| \frac{z+4+3i}{z-3+2i} \right| \leq 1 \quad \Leftrightarrow |z+4+3i| \leq |z-3+2i| \quad \Leftrightarrow (x+4)^2 + (y+3)^2 \leq (x-3)^2 + (y+2)^2$$

$$\Leftrightarrow 7x + y + 6 \leq 0.$$

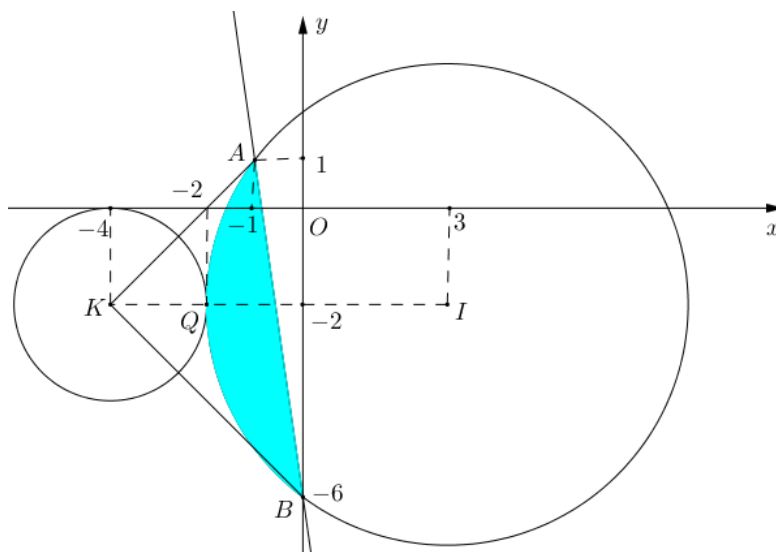
Vậy trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp các điểm  $M$  biểu diễn số phức  $z$  là miền nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y+2)^2 \leq 25 \\ 7x + y + 6 \leq 0 \end{cases} \quad (I)$$

Gọi:  $(C): (x-3)^2 + (y+2)^2 = 25$ ,  $d: 7x + y + 6 = 0$ .

$d$  cắt  $(C)$  tại hai điểm  $A(-1;1), B(0;-6)$ .

Miền nghiệm của hệ  $(I)$  là miền tô màu xanh trên hình vẽ.



Ta có:  $P = (x+4)^2 + (y+2)^2 - 13 \Leftrightarrow (x+4)^2 + (y+2)^2 = 13+P$  ( $P \geq -13$ ) (1).

Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , tập hợp các điểm có tọa độ thỏa mãn (1) là đường tròn  $(C_1)$  tâm  $K(-4; -2)$ , bán kính  $R_1 = \sqrt{13+P}$  (đường tròn  $(C_1)$  suy biến thành điểm  $K(-4; -2)$  khi  $P = -13$ ).

Vậy tập các giá trị của  $P$  phải thỏa mãn  $(C_1)$  và miền nghiệm của hệ (I) có điểm chung. Khi đó ta có:  $2 = KQ < R_1 = \sqrt{13+P} \leq \max\{KA; KB\} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow -9 \leq P \leq 19$ .

Vậy  $M = 19, m = -9$ .

**Câu 141:** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $|z^2 - 2iz| = 2$ . Giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = |iz + 1|$  bằng

A. 2.

B. 3.

**C.  $\sqrt{3}$ .**

D.  $\sqrt{2}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có:  $|z^2 - 2iz| = 2 \Leftrightarrow |-(iz)^2 - 2iz - 1 + 1| = 2 \Leftrightarrow |(iz + 1)^2 - 1| = 2$ .

Đặt  $w = iz + 1$  khi đó  $|w^2 - 1| = 2$  nên tập hợp các điểm biểu diễn của số phức  $w^2$  là đường tròn  $(C)$  tâm  $I(1; 0)$ , bán kính  $R = 2$ .

Xét  $P = |iz + 1| = |w| \Rightarrow P^2 = |w|^2 = |w^2|$

Do đó  $P^2 \leq OI + R = 1 + 2 = 3$  hay  $\max P^2 = 3 \Rightarrow \max P = \sqrt{3}$ .

Vậy  $P = |iz + 1|$  đạt giá trị lớn nhất bằng  $\sqrt{3}$ .

**Câu 142:** Cho các số phức  $z_1, z_2$  thỏa mãn  $|z_1 - 2 + i| = |\bar{z}_1 + 1 - 2i|$  và  $\frac{1 - z_2}{1 + i}$  là số thuần ảo. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = |z_1 - z_2| + |z_1 - 5 + 5i| + |z_2 - 5 + 5i|$ .

**A.  $P_{\min} = \sqrt{58}$ .**

B.  $P_{\min} = 8$ .

C.  $P_{\min} = 2\sqrt{14}$ .

D.  $P_{\min} = \sqrt{57}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Đặt  $z_1 = x_1 + y_1i, (x_1, y_1 \in \mathbb{R}) \Rightarrow M_1 = (x_1; y_1)$ .

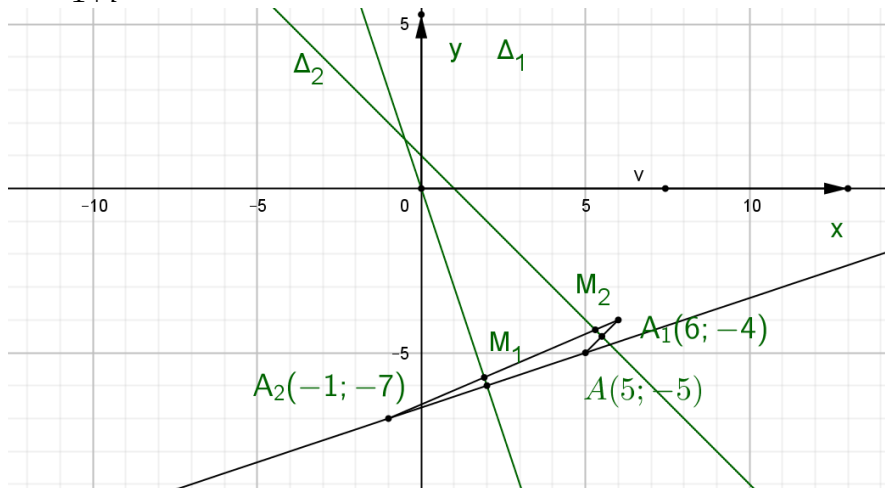
$$\text{Ta có } \begin{cases} z_1 - 2 + i = x_1 - 2 + (y_1 + 1)i \\ \bar{z}_1 + 1 - 2i = x_1 + 1 - (y_1 + 2)i \end{cases} \Rightarrow |z_1 - 2 + i| = |\bar{z}_1 + 1 - 2i| \Rightarrow |z_1 - 2 + i|^2 = |\bar{z}_1 + 1 - 2i|^2$$

$$\Rightarrow (x_1 - 2)^2 + (y_1 + 1)^2 = (x_1 + 1)^2 + (y_1 + 2)^2 \Leftrightarrow 3x_1 + y_1 = 0, (\Delta_1).$$

$$\text{Đặt } z_2 = x_2 + y_2 i, (x_2, y_2 \in \mathbb{R}) \Rightarrow M_2(x_2; y_2).$$

$$\text{Ta có } \frac{1 - z_2}{1 + i} = \frac{(1 - x_2 - y_2 i)(1 - i)}{2} = \frac{1 - x_2 - y_2}{2} + mi, (m \in \mathbb{R}).$$

$$\text{Do } \frac{1 - z_2}{1 + i} \text{ là số thuần ảo } x_2 + y_2 - 1 = 0, (\Delta_2).$$



Gọi  $A_1$  là điểm đối xứng với  $A(5; -5)$  qua  $\Delta_2 \Rightarrow A_1(6; -4)$ .

Gọi  $A_2$  là điểm đối xứng với  $A(5; -5)$  qua  $\Delta_1 \Rightarrow A_2(-1; -7)$ .

$$P = |z_1 - z_2| + |z_1 - 5 + 5i| + |z_2 - 5 + 5i| = M_1 M_2 + AM_1 + AM_2 = M_1 M_2 + A_1 M + A_2 N \geq A_1 A_2 = \sqrt{58}.$$

**Câu 143:** Cho hai số phức  $z_1; z_2$  thỏa mãn  $|z - 2 - i| = 5; |z + 2 + mi| = |z - m + i|, (m \in \mathbb{R})$ . Giá trị nhỏ nhất của  $P = |z_1 - z_2|$  thuộc đoạn nào sau đây?

**A.**  $[4; 5]$ .

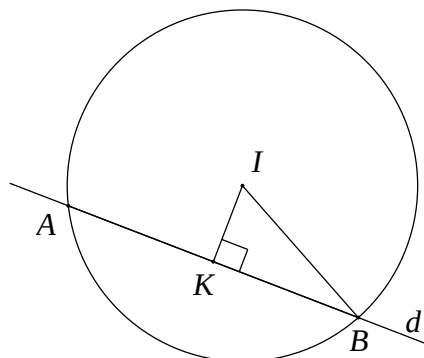
**B.**  $[8; 9]$ .

**C.**  $[5; 6]$ .

**D.**  $[6; 7]$ .

**Lời giải**

**Chọn B**



Đặt  $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$ . Khi đó:

$$|z - 2 - i| = 5 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$$

$$|z + 2 + mi| = |z - m + i| \Leftrightarrow (2m + 4)x + (2m - 2)y + 3 = 0$$

$\Rightarrow z_1, z_2$  vừa thuộc đường tròn  $(C)$  có tâm  $I(2;1)$  và bán kính  $R=5$  vừa thuộc đường thẳng  $d$  có phương trình  $(2m+4)x+(2m-2)y+3=0$  (ở đây,  $d$  không đi qua tâm  $I$  mà luôn đi qua điểm  $K\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$  cố định) và giả sử  $d$  cắt  $(C)$  tại hai điểm  $A, B$ .

Do đó,  $P=|z_1-z_2|=AB$ . Vậy  $P$  có giá trị nhỏ nhất khi  $d \perp IK$ . Khi đó,

$$AB=2KB=2\sqrt{R^2-IK^2}=\sqrt{74} \Rightarrow \text{giá trị nhỏ nhất của } P=|z_1-z_2| \text{ thuộc đoạn } [8;9].$$

**Câu 144:** Cho các số phức  $u, v, w$  thỏa mãn các điều kiện  $|u+4-2i|=2, |3v-1+i|=|2v+1-i|$  và  $|w|=\left|\overline{w}+2+2i\right|$ . Tìm  $|w|$  khi  $S=|u-w|+|v-w|$  đạt giá trị nhỏ nhất.

A.  $|w|=\frac{\sqrt{13}}{2}$

B.  $|w|=\frac{\sqrt{10}}{2}$

C.  $|w|=\frac{\sqrt{17}}{2}$

D.  $|w|=\frac{\sqrt{5}}{2}$

**Lời giải**

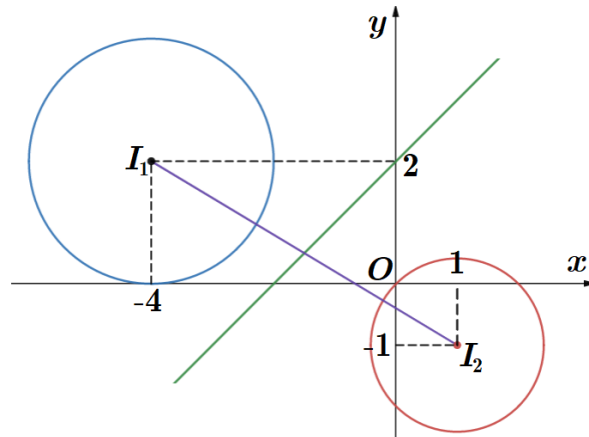
**Chọn D**

Gọi  $M, N, P$  lần lượt là điểm biểu diễn các số phức  $u, v, w$  trên mặt phẳng phức. Ta có  $|u+4-2i|=2$  nên  $M$  thuộc  $(C_1)$  có  $I_1(-4;2), R_1=2$ .

$$\text{Đặt } v=x+yi, \text{ khi đó } |3v-1+i|=|2v+1-i| \Leftrightarrow |(3x-1)+(3y+1)i| = |(2x+1)+(2y-1)i| \\ \Leftrightarrow (3x-1)^2 + (3y+1)^2 = (2x+1)^2 + (2y-1)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0.$$

Khi đó,  $N$  thuộc  $(C_2)$  có  $I_2(1;-1), R_2=\sqrt{2}$ .

Ta có  $|w|=\left|\overline{w}+2+2i\right| \Leftrightarrow |w|=|w+2-2i|$ , khi đó  $P$  thuộc đường trung trực  $d$  của đoạn thẳng  $AB$  với  $A(0;0), B(-2;2) \Rightarrow d: x-y+2=0$ .



Do  $(C_1)$  và  $(C_2)$  nằm về hai phía của  $d$  nên  $S=|u-w|+|v-w|=MP+NP \geq MN$ . Đẳng thức xảy ra khi  $P$  là giao điểm của  $I_1I_2$  và  $d$ .

Ta có  $I_1I_2: \begin{cases} x=1+5t \\ y=-1-3t \end{cases} \Rightarrow P(1+5t; -1-3t)$ . Thay tọa độ điểm  $P$  vào  $d$  ta có được

$$(1+5t)-(-1-3t)+2=0 \Leftrightarrow t=-\frac{1}{2} \Rightarrow P\left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow w=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i \Rightarrow |w|=\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

**Câu 145:** Trên tập số phức, cho phương trình:  $z^2-10z+|m-1|=0$  ( $m \in \mathbb{R}$ ). Tìm tất cả các giá trị

nguyên của tham số  $m \in [-10; 90]$  để phương trình đã cho có hai nghiệm phức phân biệt  $z_1, z_2$  thỏa mãn  $|z_1| + |z_2|$  là một số nguyên dương.

A. 42.

B. 40.

C. 36.

D. 38.

Lời giải

**Chọn B**

Xét  $m \in [-10; 90]$ , ta có  $\Delta' = 25 - |m - 1|$ .

TH1:  $\Delta' > 0 \Leftrightarrow |m - 1| < 25 \Leftrightarrow -24 < m < 26$  suy ra  $-10 \leq m < 26$ .

Phương trình có hai nghiệm thực và  $z_1, z_2 = |m - 1| \geq 0$  nên  $|z_1| + |z_2| = |z_1 + z_2| = 10$  luôn là một số nguyên dương.

Suy ra có 36 giá trị  $m$ .

TH2:  $\Delta' < 0 \Leftrightarrow |m - 1| > 25 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 26 \\ m < -24 \end{cases}$  suy ra  $26 < m \leq 90$ .

Phương trình có hai nghiệm phức không thực  $z_1, z_2$  do đó

$|z_1| + |z_2| = 2|z_1| = 2|5 + i\sqrt{|m - 1| - 25}| = 2\sqrt{m - 1}$  là một số nguyên dương nên  $m - 1$  là số chính phương.

Mặt khác  $26 < m \leq 90$  suy ra  $25 < m - 1 \leq 89$ .

Do đó  $m - 1 \in \{36; 49; 64; 81\} \Rightarrow m \in \{37; 50; 65; 82\}$  nên có 4 giá trị  $m$ .

Vậy có 40 giá trị  $m$ .

**Câu 146:** Trên tập hợp số phức, xét phương trình  $z^2 + 2mz + m^2 + 2m = 0$  ( $m$  là tham số thực). Tích của tất cả các giá trị thực của  $m$  để phương trình có hai nghiệm phân biệt  $z_1, z_2$  thỏa mãn  $|z_1| = 2|z_2|$  là

A. 0.

B. -18.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

**Chọn D**

Ta có  $\Delta' = -2m$ .

TH1:  $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m < 0$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt là hai số thực.

$$|z_1| = 2|z_2| \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = -2z_2 \\ z_1 = 2z_2 \end{cases}$$

Theo viet có  $z_1 + z_2 = -2m; z_1 \cdot z_2 = m^2 + 2m$ .

$$\text{Nếu } z_1 = -2z_2 \Rightarrow z_2 = 2m; z_1 = -4m \Rightarrow z_1 \cdot z_2 = -8m^2 = m^2 + 2m \Leftrightarrow 9m^2 + 2m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -\frac{2}{9} \end{cases}$$

$$\text{Do } m < 0 \Rightarrow m = -\frac{2}{9}.$$

$$\text{Nếu } z_1 = 2z_2 \Rightarrow z_2 = \frac{-2m}{3}; z_1 = \frac{-4m}{3} \Rightarrow z_1 \cdot z_2 = \frac{8}{9}m^2 = m^2 + 2m \Leftrightarrow \frac{1}{9}m^2 + 2m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -18 \end{cases}$$

$$\text{Do } m < 0 \Rightarrow m = -18.$$

TH2:  $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m > 0$

Phương trình có hai nghiệm là hai số phức liên hợp nên  $|z_1| = |z_2|$ .

$$|z_1| = 2|z_2| \Leftrightarrow |z_1| = 0 \Leftrightarrow z_1 = 0.$$

Thay vào phương trình ta được  $m^2 + 2m = 0 \Leftrightarrow m = 0; m = -2$  (loại).

$$\text{Vậy } \frac{-2}{9} \cdot (-18) = 4.$$

**Câu 147:** Cho phương trình bậc hai  $z^2 - 2(m+1)z + 2m^2 - 7 = 0, m$  là tham số. Có bao nhiêu giá trị của  $m$  sao cho phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt  $z_1, z_2$  thỏa mãn  $z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = 22$ .

**A. 1.**

**B. 2.**

**C. 3.**

**D. 4.**

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\text{Ta có: } z^2 - 2(m+1)z + 2m^2 - 7 = 0$$

$$\Delta' = (m+1)^2 - 2m^2 + 7 = -m^2 + 2m + 8$$

$$\text{TH1: } \Delta' > 0 \Leftrightarrow -m^2 + 2m + 8 > 0 \Leftrightarrow -2 < m < 4$$

$$\text{Phương trình có 2 nghiệm thực phân biệt } \Rightarrow \overline{z_1} = z_1; \overline{z_2} = z_2$$

$$z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = 22 \Leftrightarrow z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_2 = 22 \Leftrightarrow 2z_1 z_2 = 22$$

$$\Leftrightarrow 2(2m^2 - 7) = 22 \Leftrightarrow m^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \text{ (L)} \\ m = 3 \text{ (TM)} \end{cases}$$

$$\text{TH2: } \Delta' < 0 \Leftrightarrow -m^2 + 2m + 8 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 \\ m > 4 \end{cases}$$

$$\text{Phương trình có hai nghiệm ảo phân biệt } \Rightarrow \overline{z_1} = z_2; \overline{z_2} = z_1$$

$$z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = 22 \Leftrightarrow z_1^2 + z_2^2 = 22 \Leftrightarrow (z_1 + z_2)^2 - 2z_1 z_2 = 22$$

$$\Leftrightarrow 4(m+1)^2 - 2(2m^2 - 7) = 22 \Leftrightarrow 8m + 18 = 22 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2} \text{ (L)}$$

Vậy với  $m = 3$  thì phương trình có hai nghiệm thỏa mãn YCBT.

**Câu 148:** Trên tập hợp số phức, cho phương trình  $z^2 - 2mz + 6m - 5 = 0$  (với  $m$  là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình có hai nghiệm phân biệt  $z_1, z_2$  thỏa mãn  $z_1 \overline{z_1} = z_2 \overline{z_2}$ ?

**A. 5.**

**B. 3.**

**C. 6.**

**D. 4.**

**Lời giải**

**Chọn B**

**Trường hợp 1:** phương trình có

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow (-m)^2 - (6m - 5) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 6m + 5 > 0 \Leftrightarrow m < 1 \vee m > 5.$$

$$\text{Khi đó: } z_1 \overline{z_1} = z_2 \overline{z_2} \Leftrightarrow z_1^2 = z_2^2 \Leftrightarrow (z_1 - z_2) \cdot (z_1 + z_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 - z_2 = 0 \text{ (l)} \\ z_1 + z_2 = 0 \text{ (n)} \end{cases}$$

$$\text{Với } z_1 + z_2 = 0 \Leftrightarrow 2m = 0 \Leftrightarrow m = 0 \text{ (loại).}$$

**Trường hợp 2:** phương trình có

$$\Delta' < 0 \Leftrightarrow (-m)^2 - (6m - 5) < 0 \Leftrightarrow m^2 - 6m + 5 < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 5.$$



Khi đó:  $\overline{z_1 z_1} = \overline{z_2 z_2} \Leftrightarrow |z_1|^2 = |z_2|^2$  (luôn đúng).

Mà  $m \in \mathbb{Z}$  nên  $m \in \{2; 3; 4\}$  do vậy có 3 giá trị nguyên của tham số  $m$  thỏa mãn đề bài.

**Câu 149:** Cho phương trình  $z^2 - 2mz + 7m - 10 = 0$  với  $m$  là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để phương trình có hai nghiệm phức phân biệt  $z_1, z_2$  thỏa mãn:

$$\overline{z_1 z_1} = \overline{z_2 z_2}$$

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

**Lời giải**

**Chọn B**

Để phương trình có hai nghiệm phức

$$\Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow m^2 - 7m + 10 < 0 \Leftrightarrow 2 < m < 5$$

$$\overline{z_1 z_1} = \overline{z_2 z_2} \Leftrightarrow |z_1|^2 = |z_2|^2 \Leftrightarrow \begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ |z_1| = -|z_2| \end{cases}$$

TH1:  $|z_1| = |z_2|$ , suy ra  $m \in \{3; 4\}$ ,

$$\text{TH2: } |z_1| = -|z_2| \Leftrightarrow |z_1| + |z_2| = 0 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2| = 0 \Leftrightarrow z = 0 \Rightarrow m = \frac{10}{7} \text{ (ko tm)}$$

Vậy  $m \in \{3; 4\}$ .

**Câu 150:** Trên tập hợp số phức, xét phương trình  $z^2 + 2mz + 1 = 0$  ( $m$  là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt  $z_1, z_2$  thỏa mãn  $|z_1 + 3| = |z_2 + 3|$ ?

A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 1.

**Lời giải**

**Chọn C**

Xét phương trình (1):  $z^2 + 2mz + 1 = 0$

Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thì có 2 trường hợp:

TH1: Hai nghiệm  $z_1, z_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow m < -1 \vee m > 1$

$$\text{Khi đó: } |z_1 + 3| = |z_2 + 3| \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 + 3 = z_2 + 3 \\ z_1 + 3 = -(z_2 + 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = z_2 \text{ (loại)} \\ z_1 + z_2 = -6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -2m = -6 \Leftrightarrow m = 3. \text{ So điều kiện, nhận } m = 3.$$

TH2: Hai nghiệm  $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \Rightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1$

$$\text{Khi đó: } |z_1 + 3| = |z_2 + 3| \Leftrightarrow \sqrt{(a+3)^2 + b^2} = \sqrt{(a+3)^2 + (-b)^2} \text{ (luôn đúng).}$$

Vì  $m$  nguyên nên nhận  $m = 0$ .

Vậy có 2 giá trị nguyên của  $m$  thỏa mãn đề.

## V. GÓC, KHOẢNG CÁCH

**Câu 151:** Cho hình chóp  $S.ACBD$  có đáy là hình vuông cạnh  $a$ ,  $SA$  vuông góc với đáy,  $SA = a$ . Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $SB$  và  $CD$  là

A.  $2a$ .

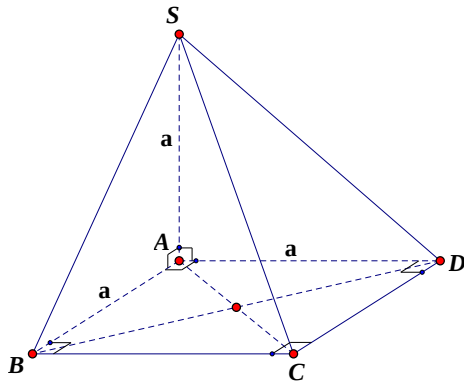
B.  $a\sqrt{3}$ .

C.  $a$ .

D.  $a\sqrt{2}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**



Ta có  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$  nên  $AD = a$  và  $CD \parallel AB$  mà  $AB \parallel (SAB)$ , suy ra  $CD \parallel (SAB)$ .

Do đó  $d(SB, CD) = d(CD, (SAB)) = d(D, (SAB))$

Lại có  $AD \perp AB$  do  $ABCD$  là hình vuông và  $AD \perp SA$  do  $SA \perp (ABCD)$ , suy ra  $AD \perp (SAB)$  hay  $d(D, (SAB)) = AD = a$ . Vậy  $d(SB, CD) = a$ .

**Câu 152:** Cho hình tứ diện  $OABC$  có đáy  $OBC$  là tam giác vuông tại  $O$ ,  $OB = a$ ,  $OC = a\sqrt{3}$ . Cạnh  $OA$  vuông góc với mặt phẳng  $(OBC)$ ,  $OA = a\sqrt{3}$ , gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Tính khoảng cách  $h$  giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $OM$ .

**A.**  $h = \frac{a\sqrt{3}}{15}$ .

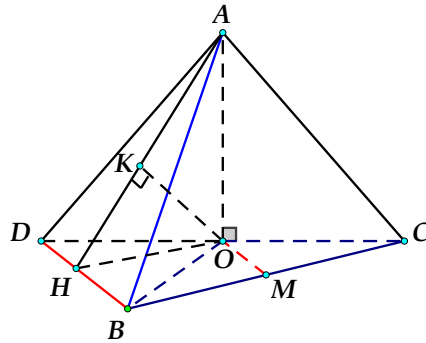
**B.**  $h = \frac{a\sqrt{5}}{5}$ .

**C.**  $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

**D.**  $h = \frac{a\sqrt{15}}{5}$ .

**Lời giải**

**Chọn D**



Dựng  $D$  sao cho  $BD \parallel OM$  và  $OM$  là đường trung bình của tam giác  $BCD$ . Khi đó ta có  $OM \parallel (ABD) \Rightarrow d(AB, OM) = d(OM, (ABD)) = d(O, (ABD))$ .

Kẻ  $OH \perp BD$ . Lại có  $BD \perp OA$  (do  $\begin{cases} OA \perp (OBC) \\ BD \subset (OBC) \end{cases}$ ) suy ra  $BD \perp (AOH)$ .

Suy ra  $(AOH) \perp (ABD)$  theo giao tuyến  $AH$ .

Trong  $(AHO)$ , kẻ  $OK \perp AH$  suy ra  $OK \perp (ABD) \Leftrightarrow OK = d(O, (ABD))$ .

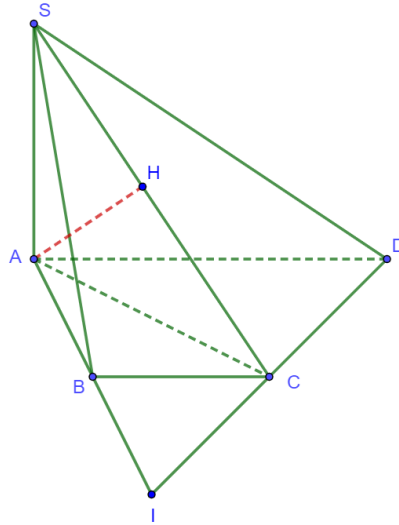
Trong  $\Delta AHO$ :  $\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OH^2} + \frac{1}{OA^2} = \frac{1}{OD^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OA^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{a^2}$

Suy ra  $OK = \frac{a\sqrt{15}}{5}$  hay  $d(AB, OM) = \frac{a\sqrt{15}}{5}$ .

- Câu 153:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thang vuông tại  $A$  và  $B$ ,  $SA \perp (ABCD)$ ,  $SA = AB = BC = a$ ,  $AD = 2a$ . Khoảng cách từ điểm  $B$  đến  $(SCD)$  bằng
- A.  $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ .      B.  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ .      C.  $\frac{a\sqrt{5}}{5}$ .      D.  $\frac{a\sqrt{6}}{6}$ .

Lời giải

Chọn D



Gọi  $I$  là giao điểm của  $AB$  và  $CD$ . Xét tam giác  $IAD$  có:  $\begin{cases} BC // AD \\ BC = \frac{AD}{2} \end{cases} \Rightarrow BC$  là đường

trung bình tam giác  $IAD$  nên:  $\frac{BI}{AI} = \frac{1}{2} \Rightarrow d(B, (SCD)) = \frac{1}{2} d(A, (SCD))$

Hạ  $AH \perp SC$ . Dễ dàng chứng minh  $AC \perp CD$  mà  $SA \perp CD \Rightarrow CD \perp (SAC) \Rightarrow CD \perp AH$ .

Nên  $AH \perp (SCD) \Rightarrow d(A, (SCD)) = AH$

Ta có:  $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$  và

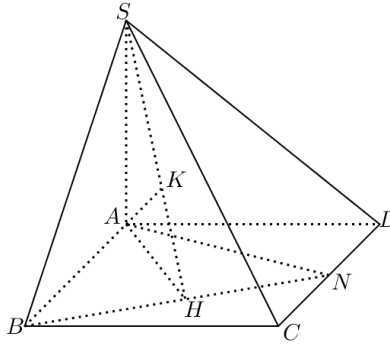
$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow d(B, (SCD)) = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

- Câu 154:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật với  $AB = a$ ,  $AD = 2a$ ,  $SA \perp (ABCD)$  và  $SA = a$ . Gọi  $N$  là trung điểm của  $CD$ . Tính khoảng cách từ  $A$  đến mặt phẳng  $(SBN)$

- A.  $\frac{a\sqrt{33}}{33}$ .      B.  $\frac{4a\sqrt{33}}{33}$ .      C.  $\frac{a\sqrt{33}}{11}$ .      D.  $\frac{2a\sqrt{33}}{33}$ .

Lời giải

Chọn B



Gọi  $H, K$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $A$  lên  $BN$  và  $SH$ .

Khi đó  $BN \perp AH, BN \perp SA \Rightarrow BN \perp AK$ , suy ra  $AK \perp (SBN)$  hay  $d(A, (SBN)) = AK$ .

$$\text{Ta có } BN = \sqrt{(2a)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{17}}{2}, S_{\triangle ABN} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = a^2 \Rightarrow AH = \frac{2S_{\triangle ABN}}{BN} = \frac{4a}{\sqrt{17}}.$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{17}{16a^2} = \frac{33}{16a^2} \Rightarrow AK = \frac{4a\sqrt{33}}{33}.$$

**Câu 155:** Cho hình chóp  $S.ABCD$ . Có đáy là hình vuông  $ABCD$  cạnh  $2a, SA \perp (ABCD)$  và  $SB = a\sqrt{5}$ . Gọi  $M; N$  lần lượt là trung điểm của  $AB; AD$ . Tính cosin góc giữa hai đường thẳng  $SM$  và  $BN$

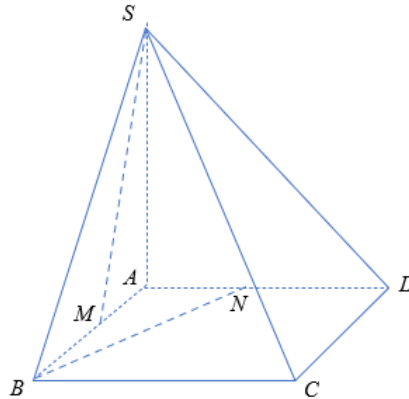
**A.**  $\frac{\sqrt{10}}{5}$ .

**B.**  $\frac{1}{\sqrt{10}}$ .

**C.**  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ .

**D.**  $\frac{\sqrt{5}}{5}$ .

**Lời giải**



$$\text{Ta có } SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = a; SM = SN = MN = a\sqrt{2}; BN = \sqrt{AB^2 + AN^2} = a\sqrt{5}$$

$$\begin{aligned} \cos(SM; BN) &= \left| \cos(\overrightarrow{SM}; \overrightarrow{BN}) \right| = \frac{|\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{BN}|}{SM \cdot BN} = \frac{|\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{SN} - \overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{SB}|}{SM \cdot BN} \\ &= \frac{\left| \frac{SM^2 + SN^2 - MN^2}{2} - \frac{SM^2 + SB^2 - BM^2}{2} \right|}{SM \cdot BN} = \frac{\left| a^2 - \frac{2a^2 + 5a^2 - a^2}{2} \right|}{a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5} \end{aligned}$$

## VI. THỂ TÍCH ĐA DIỆN

**Câu 156:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác cân ở  $B$ ;  $ABC = 120^\circ$ ;  $AC = a\sqrt{3}$ . Các cạnh bên  $SA = SB = SC$ ;  $SB$  tạo với mặt đáy một góc  $60^\circ$ . Tính thể tích khối chóp  $S.ABC$ .

A.  $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ .

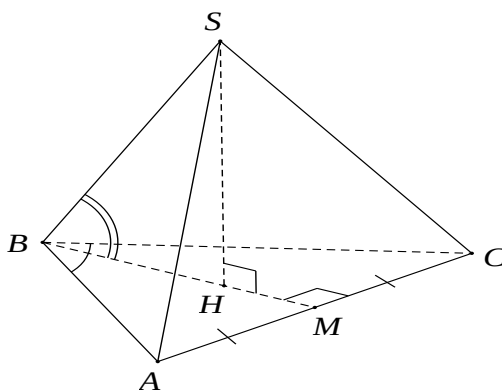
B.  $\frac{a^3}{4}$ .

C.  $\frac{3a^3}{4}$ .

D.  $a^3\sqrt{3}$ .

Lời giải

Chọn B



$SA = SB = SC \Rightarrow$  chân đường cao  $H$  kẻ từ đỉnh  $S$  của hình chóp  $S.ABC$  chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  (với  $H \in BM$ ,  $M$  là trung điểm của  $AC$ ).

Khi đó,  $SH \perp (ABC) \Rightarrow (SB, (ABC)) = (SB, HB) = SBH = 60^\circ$ .

Ta có  $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos ABC \Rightarrow AB = BC = a$ .

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin ABC = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin 120^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

$$\Rightarrow BH = \frac{AC}{2 \sin ABC} = a \Rightarrow SH = BH \cdot \tan SBH = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta ABC} \cdot SH = \frac{a^3}{4}.$$

**Câu 157:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy là tam giác vuông tại  $A$  và  $AB = \sqrt{3}$ ,  $AC = \sqrt{7}$ ,  $SA = 1$ . Hai mặt bên  $(SAB)$  và  $(SAC)$  lần lượt tạo với mặt đáy các góc bằng  $45^\circ$  và  $60^\circ$ . Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A.  $\frac{1}{2}$ .

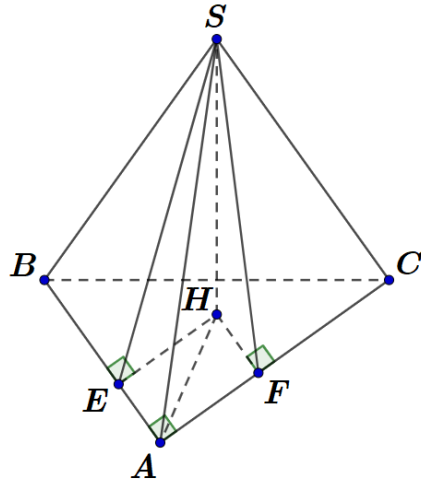
B.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

C.  $\frac{7}{6}$ .

D.  $\frac{7\sqrt{7}}{6}$ .

Lời giải (Đặt ẩn)

Chọn A



Gọi  $H$  là hình chiếu của  $S$  trên  $(ABC) \Rightarrow SH \perp (ABC)$ . Kẻ  $HE \perp AB, E \in AB$  và  $HF \perp AC, F \in AC$ . Đặt  $HS = x$

Ta có  $((SAB), (ABC)) = HES = 45^\circ (SHE = 90^\circ)$

$\Rightarrow \triangle SHE$  vuông cân  $\Rightarrow EH = SH = x$ .

Ta có  $((SAC), (ABC)) = (SF, FS) = HFS = 60^\circ (SHF = 90^\circ)$

$\triangle SHF$  vuông nên  $HF = \frac{HS}{\tan SHF} = \frac{HS}{\tan 60^\circ} = \frac{HS}{\sqrt{3}} = \frac{x}{\sqrt{3}}$ .

Mà tứ giác  $HEAF$  là hình chữ nhật  $AH = EF^2 = \sqrt{HE^2 + HF^2} = \frac{2x\sqrt{3}}{3}$ .

Ta có tam giác  $SHA$  vuông tại  $H$   $SA^2 = SH^2 + HA^2 = \frac{7}{3}x^2 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{21}}{7} SA = \frac{\sqrt{21}}{7}$ .

Vậy  $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABC} = \frac{1}{6} SH \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{6} \frac{\sqrt{21}}{7} \sqrt{3} \sqrt{7} = \frac{1}{2}$ .

**Câu 158:** Tính thể tích của khối tứ diện đều biết chiều cao tứ diện bằng  $a$ .

**A.**  $\frac{\sqrt{3}}{8} a^3$ .

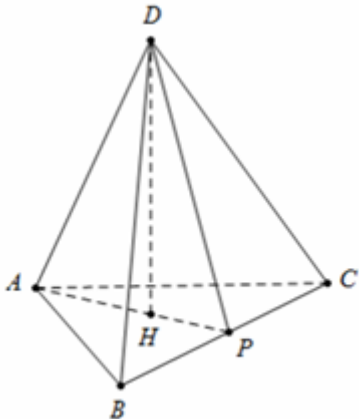
**B.**  $\frac{\sqrt{3}}{3} a^3$

**C.**  $\frac{\sqrt{6}}{2} a^3$ .

**D.**  $\frac{\sqrt{6}}{3} a^3$ .

**Lời giải**

**Chọn A**



Xét tứ diện đều  $ABCD$  cạnh  $AB = x$ ,  $P$  là trung điểm  $BC$ , đường cao  $DH = a$

$AP = \frac{x\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = \frac{x\sqrt{3}}{3}$ . Áp dụng định lí Pi-ta-go trong tam giác  $ADH$  ta có:

$$DH^2 + HA^2 = DA^2 \Rightarrow a^2 + \frac{x^2}{3} = x^2 \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Do đó:  $S_{\Delta ABC} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{8}$

Vậy  $V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot DH \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ .

**Câu 159:** Cho lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$  có đáy là tam giác vuông tại  $A$ ,  $AB=2$ ;  $AC=\sqrt{3}$ . Góc  $CAA'=90^\circ$ ,  $BAA'=120^\circ$ . Gọi  $M$  là trung điểm cạnh  $BB'$ . Biết  $CM$  vuông góc với  $A'B$ , tính thể tích khối lăng trụ đã cho.

**A.**  $V = \frac{1+\sqrt{33}}{8}$ .

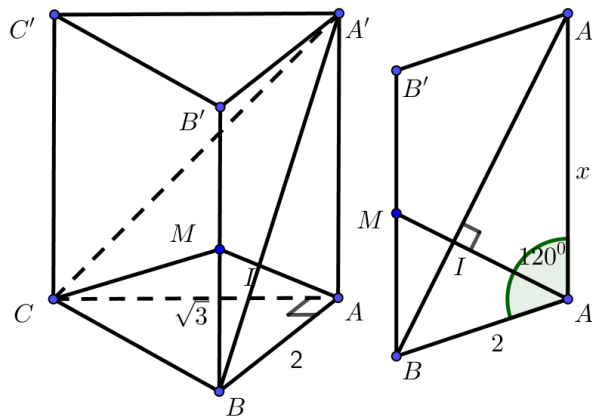
**B.**  $V = \frac{1+\sqrt{33}}{4}$ .

**C.**  $V = \frac{3(1+\sqrt{33})}{4}$ .

**D.**  $V = \frac{3(1+\sqrt{33})}{8}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**



Đặt  $A'A = x$  ( $x > 0$ ). Ta có  $\begin{cases} CA \perp AB \\ CA \perp AA' \end{cases} \Rightarrow CA \perp (ABB'A') \Rightarrow CA \perp A'B$

Lại có  $A'B \perp CM$  nên  $A'B \perp (CMA) \Rightarrow A'B \perp AM$ .

Xét tam giác  $BAA'$  có  $AB=2$ ,  $AA'=x$  và  $BAA'=120^\circ$ . Theo Định lý hàm số cos ta có

$$A'B = \sqrt{x^2 + 2^2 - 2 \cdot x \cdot 2 \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{x^2 + 2x + 4} \Rightarrow IA' = \frac{2}{3} A'B = \frac{2}{3} \sqrt{x^2 + 2x + 4}$$

Xét tam giác  $ABM$  có  $AB=2$ ,  $BM = \frac{x}{2}$  và  $MBA=60^\circ$ . Theo Định lý hàm số cos ta có

$$AM = \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 2^2 - 2 \cdot \frac{x}{2} \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{\frac{x^2}{4} - x + 4} \Rightarrow IA = \frac{2}{3} AM = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{x^2}{4} - x + 4}$$

Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông  $A'IA$  có

$$IA'^2 + IA^2 = A'A^2 \Leftrightarrow \frac{4}{9}(x^2 + 2x + 4) + \frac{4}{9}\left(\frac{x^2}{4} - x + 4\right) = x^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{9}x^2 - \frac{4}{9}x - \frac{32}{9} = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{33}}{2} \text{ (Do } x > 0 \text{)}$$

Xét tứ diện  $C.ABA'$  có  $CA \perp (ABA')$  nên

$$V_{C.ABA'} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABA'} \cdot CA = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} AB \cdot AA' \cdot \sin 120^\circ \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left( \frac{1 + \sqrt{33}}{2} \right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{1 + \sqrt{33}}{4}$$

$$\text{Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = 3 \cdot V_{C.ABA'} = \frac{3(1 + \sqrt{33})}{4}.$$

**Câu 160:** Cho hình chóp đều  $S.ABCD$  có cạnh đáy bằng  $a$ . Gọi  $M$  là trung điểm  $BC$ . Biết rằng góc giữa đường thẳng  $DM$  với mặt bên  $(SAB)$  là góc  $\alpha$  thỏa mãn  $\tan \alpha = \frac{\sqrt{26}}{13}$ . Tính thể tích khối chóp  $S.ABCD$ .

**A.**  $\frac{a^3 \sqrt{2}}{6}$ .

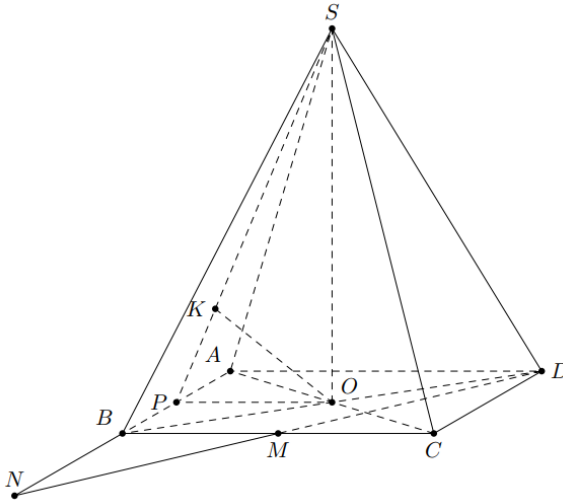
**B.**  $\frac{4a^3}{9}$ .

**C.**  $\frac{a^3 \sqrt{3}}{3}$ .

**D.**  $\frac{a^3 \sqrt{6}}{3}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**



Gọi  $N$  là điểm đối xứng với  $A$  qua  $B$ ;  $P$  là trung điểm của  $AB$ ;  $K$  là hình chiếu của  $O$  lên cạnh  $SP$ .

Khi đó  $DN = a\sqrt{5}$ ;  $OP = \frac{a}{2}$ .

Ta có  $\tan \alpha = \frac{\sqrt{26}}{13}$  nên  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{30}}{15}$ .

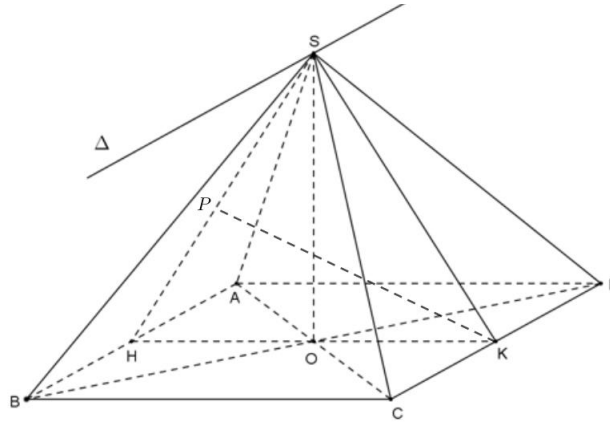
Do đó  $d(D, (SAB)) = DN \cdot \sin \alpha = \frac{a\sqrt{6}}{3}$  nên  $OK = d(O, (SAB)) = \frac{1}{2} d(D, (SAB)) = \frac{a\sqrt{6}}{6}$ .

Mặt khác  $\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OP^2}$  suy ra  $SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

Thể tích khối chóp  $S.ABCD$  là  $V = \frac{1}{3} \cdot AB^2 \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{6}$ .







Gọi  $O$  là tâm của hình vuông  $ABCD$ .

Do  $S.ABCD$  là hình chóp đều nên  $SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp AB$ .

Ta có:  $S$  là một điểm chung của hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SCD)$ .

$AB \subset (SAB); CD \subset (SCD); AB \parallel CD$ .

Suy ra hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SCD)$  cắt nhau theo giao tuyến là đường thẳng  $\Delta$  đi qua  $S$ , song song với  $AB$  và  $CD$ .

Gọi  $H; K$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD \Rightarrow HK$  đi qua  $O$  và  $HK \perp AB$ .

Ta có:  $\begin{cases} SO \perp AB \\ HK \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHK) \Rightarrow \Delta \perp (SHK) \text{ (Do } \Delta \parallel AB \text{)}.$

$\Rightarrow ((SAB); (SCD)) = (SH; SK) = 60^\circ \Rightarrow SH \perp SK \Rightarrow$  Tam giác  $SHK$  là tam giác đều.

Kẻ  $KP$  vuông góc  $SH$  tại  $P$ .

Do  $CD \parallel AB \subset (SAB) \Rightarrow CD \parallel (SAB)$  nên  $d(CD; AB) = d(CD; (SAB)) = d(K; (SAB)) = a$

Khi đó ta có:  $\begin{cases} KP \perp SH \\ KP \perp AB \end{cases} \Rightarrow KP \perp (SAB) \Rightarrow d(K; (SAB)) = KP = a \Rightarrow SO = a$  và

$HK = \frac{2a}{\sqrt{3}}$  (Do tam giác  $SHK$  là tam giác đều)

Suy ra  $S_{ABCD} = HK^2 = \frac{4a^2}{3}$ .

Vậy thể tích khối chóp  $S.ABCD$  là:  $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SO \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} a \cdot \frac{4a^2}{3} = \frac{4}{9} a^3$ .

**Câu 163:** Cho hình chóp  $SABC$ , đáy là tam giác  $ABC$  vuông tại  $B$ , có  $AB = a\sqrt{3}; BC = a$ . Tam giác  $SAC$  cân tại  $S$  và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy,  $mp(SBC)$  tạo với đáy một góc  $60^\circ$ . Thể tích khối chóp  $SABC$  là

**A.**  $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ .

**B.**  $\frac{a^3}{4}$ .

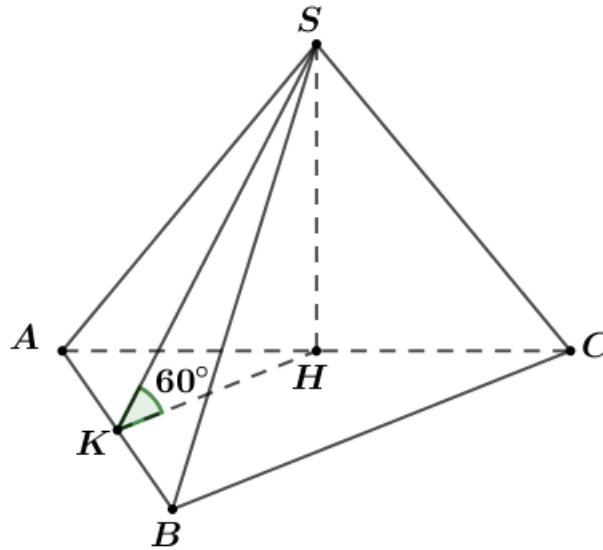
**C.**  $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ .

**D.**  $2a^3$ .

**Lời giải**

Theo giả thiết, trong tam giác  $SAC$  kẻ đường cao  $SH \perp AC \Rightarrow SH \perp (ABC)$ .

Khi đó  $V_{SABC} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{\Delta ABC}$ .



Ta có  $S_{ABC} = \frac{1}{2} a\sqrt{3}.a = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ .

Trong tam giác  $ABC$  kẻ  $HK \perp AB \Rightarrow SKH = 60^\circ; HK = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$ .

Xét tam giác  $SKH$ , ta có  $SH = \tan 60^\circ \cdot HK = \sqrt{3} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

Vậy  $V_{SABC} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{4}$ .

**Câu 164:** Cho khối chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông cạnh  $a$ , tam giác  $SAB$  vuông cân tại  $S$ , tam giác  $SCD$  có  $SC = SD = \frac{a\sqrt{13}}{4}$ . Thể tích khối chóp đã cho bằng

A.  $\frac{3\sqrt{7}}{16}a^3$ .

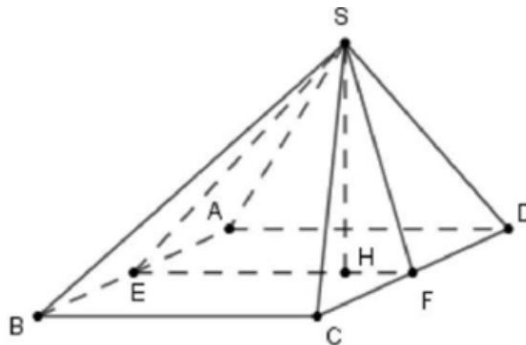
B.  $\frac{\sqrt{13}}{24}a^3$ .

C.  $\frac{3\sqrt{15}}{64}a^3$ .

D.  $\frac{\sqrt{15}}{32}a^3$ .

Lời giải

Chọn D.



Gọi  $E, F$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $AB, CD$ . Kẻ  $SH \perp FE$  tại  $H$ .

Khi đó ta có:  $\left. \begin{matrix} AB \perp SE \\ AB \perp FE \end{matrix} \right\} \Rightarrow AB \perp SFE \Rightarrow SB \perp SH$ .

Mà  $SH \perp FE \Rightarrow SH \perp ABCD$  tại  $H$ .

Ta có  $\triangle SAB$  vuông cân tại  $S$ ;  $AB = a \Rightarrow SE = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}a$ .

$$\triangle SDF \text{ vuông ở } F \Rightarrow SF = \sqrt{SD^2 - FD^2} = \frac{3a}{4}.$$

$$\text{Xét tam giác } SFE \text{ có: } SE = \frac{a}{2}; FE = a; SF = \frac{3}{4}a \Rightarrow p_{\triangle SFE} = \frac{9}{8}a$$

$$\Rightarrow S_{\triangle SFE} = \sqrt{p \cdot p - SF \cdot p - SE \cdot p - FE} = \frac{3a^2\sqrt{15}}{64}.$$

$$\text{Mà } S_{\triangle SFE} = \frac{1}{2}SH.FE = \frac{1}{2}SH.a \Rightarrow \frac{3a^2\sqrt{15}}{64} = \frac{1}{2}SH.a \Rightarrow SH = \frac{3a\sqrt{15}}{32}.$$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SH = \frac{1}{3}.a^2.\frac{3a\sqrt{15}}{32} = \frac{a^3\sqrt{15}}{32}.$$

**Câu 165:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật. Mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua các điểm  $A; B$  và trung điểm  $M$  của  $SC$ . Mặt phẳng  $(\alpha)$  chia hình chóp đã cho thành hai phần có thể tích lần lượt  $V_1; V_2$  với  $V_1 < V_2$ . Tỷ số  $\frac{V_1}{V_2}$  bằng

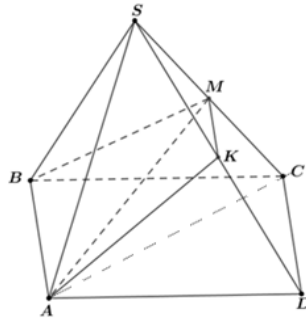
**A.**  $\frac{1}{4}$ .

**B.**  $\frac{3}{5}$ .

**C.**  $\frac{3}{8}$ .

**D.**  $\frac{5}{8}$ .

**Lời giải**



Qua  $M$  kẻ đường thẳng song song với  $CD$  cắt  $SD$  tại  $K$ , khi đó mặt phẳng  $(\alpha)$  cắt khối chóp theo thiết diện  $ABMK$ .

Ta có

$$V_{SABC} = V_{SADC}; V_1 = V_{SABM} + V_{SAMK}; V_2 = V_{SABC} - V_{SABM} + V_{SACD} - V_{SAMK} = 2V_{SABC} - (V_{SABM} + V_{SAMK}).$$

$$\frac{V_{SAMK}}{V_{SACD}} = \frac{SA.SM.SK}{SA.SC.SD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{SAMK} = \frac{1}{4}V_{SACD} = \frac{1}{4}V_{SABC}.$$

$$\frac{V_{SABM}}{V_{SABC}} = \frac{SA.SM.SB}{SA.SC.SB} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{SABM} = \frac{1}{2}V_{SABC}.$$

$$V_1 = V_{SABM} + V_{SAMK} = \frac{1}{2}V_{SABC} + \frac{1}{4}V_{SABC} = \frac{3}{4}V_{SABC}.$$

$$V_2 = 2V_{SABC} - (V_{SABM} + V_{SAMK}) = 2V_{SABC} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)V_{SABC} = \frac{5}{4}V_{SABC}.$$

Khi đó  $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{3}{4}V_{SABC}}{\frac{5}{4}V_{SABC}} = \frac{3}{5}$ .

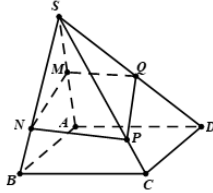
**Cách khác:** Dùng công thức tỉ số

Cho khối chóp  $S.ABCD$  có  $ABCD$  là hình bình hành.

$(MNPQ)$  là một mặt phẳng cắt các cạnh hình chóp như hình vẽ.

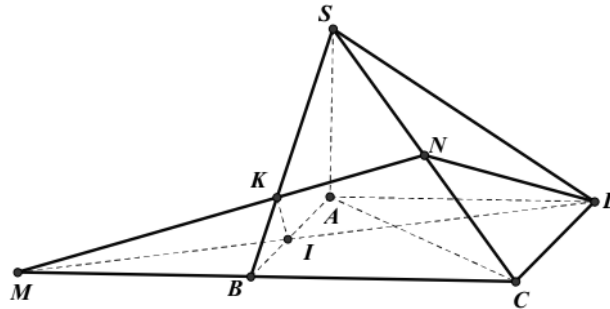
Đặt  $\frac{SM}{SA} = x; \frac{SN}{SB} = y; \frac{SP}{SC} = z; \frac{SQ}{SD} = t$

Khi đó:  $\frac{V_{SMNPQ}}{V_{SABCD}} = \frac{xyzt}{4} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \right)$  và  $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{y} + \frac{1}{t}$



$x=1; y=1; z=\frac{1}{2}; t=\frac{1}{2}$ . Vậy  $\frac{V_1}{V} = \frac{3}{8}$  nên  $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{5}$

**Câu 166:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Gọi  $M$  là điểm đối xứng của  $C$  qua  $B$  và  $N$  là trung điểm của  $SC$ . Mặt phẳng  $(MND)$  chia khối chóp  $S.ABCD$  thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh  $S$  có thể tích  $V_1$ , khối đa diện còn lại có thể tích  $V_2$  (tham khảo hình vẽ bên).



Tính tỉ số  $\frac{V_1}{V_2}$ .

A.  $\frac{V_1}{V_2} = \frac{12}{7}$ .

B.  $\frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{3}$ .

C.  $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{5}$ .

D.  $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{5}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có:  $K = MN \cap SB \Rightarrow \frac{BK}{BS} = \frac{1}{3}$ .

Đặt  $V = V_{S.ABCD} \Rightarrow V_{S.BCD} = V_{S.ABC} = \frac{V}{2}$ .

$\frac{V_{C.DMN}}{V_{C.DBS}} = \frac{CD}{CD} \cdot \frac{CM}{CB} \cdot \frac{CN}{CS} = 1 \Rightarrow V_{C.DMN} = \frac{V}{2}$ .

$\frac{V_{B.MKI}}{V_{B.CSA}} = \frac{BM}{BC} \cdot \frac{BK}{BS} \cdot \frac{BI}{BA} = \frac{1}{6} \Rightarrow V_{B.MKI} = \frac{V}{12} \Rightarrow V_2 = V_{C.DMN} - V_{B.MKI} = \frac{V}{2} - \frac{V}{12} = \frac{5V}{12} \Rightarrow V_1 = \frac{7V}{12}$ .

Vậy  $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{5}$ .

**Câu 167:** Cho lăng trụ đều  $ABC.A'B'C'$  có cạnh đáy bằng  $a$ , góc giữa đường thẳng  $AB'$  và mặt phẳng  $(BCC'B')$  bằng  $30^\circ$ . Tính thể tích khối lăng trụ  $ABC.A'B'C'$ .

A.  $\frac{a^3}{4}$ .

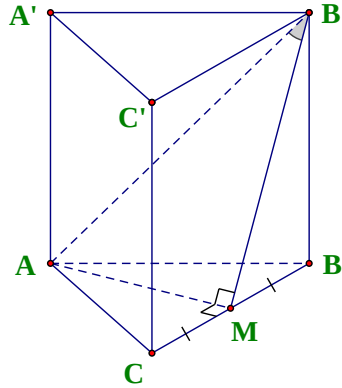
B.  $\frac{\sqrt{6}a^3}{12}$ .

C.  $\frac{\sqrt{6}a^3}{4}$ .

D.  $\frac{3a^3}{4}$ .

Lời giải

Chọn C



Gọi  $M$  là trung điểm  $BC$  suy ra  $AM \perp BC$ .

Khi đó  $\begin{cases} AM \perp BC \\ AM \perp BB' \end{cases}$  nên  $AM \perp (BCC'B')$  do đó  $(AB', (BCC'B')) = (AB', MB') = \angle AB'M$ .

Theo đề bài, ta có  $\angle AB'M = 30^\circ$ ,  $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$  nên  $BM = \frac{AM}{\tan 30^\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{2} : \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3a}{2}$ .

Ta có  $BB' = \sqrt{B'A^2 - BM^2} = \sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a\sqrt{2}$ .

**Câu 168:** Cho lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có đáy  $ABC$  vuông cân tại  $A$  và  $AB = AC = a$ . Biết diện tích tam giác  $A'BC$  bằng  $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ . Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

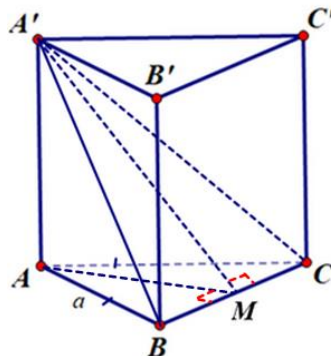
A.  $V = 2a^3$ .

B.  $V = a^3$ .

C.  $V = 3a^3$ .

D.  $V = \frac{a^3}{2}$ .

Lời giải



Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $BC$

$$BC = a\sqrt{2}; AM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Ta có:  $\Delta A'AB = \Delta A'AC$  (c.g.c)  $\Rightarrow A'B = A'C \Rightarrow \Delta A'BC$  cân tại  $A' \Rightarrow A'M \perp BC$

$$\text{Do đó } S_{\Delta A'AC} = \frac{1}{2} A'M \cdot BC \Rightarrow \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} A'M \cdot a\sqrt{2} \Rightarrow A'M = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{Tam giác } \Delta A'AM \text{ vuông tại } A \text{ nên } A'A = \sqrt{A'M^2 - AM^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = a$$

$$\text{Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{\Delta ABC} = a \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{a^3}{2}.$$

**Câu 1:** Cho lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông tại  $B$ ,  $AB = BC' = \sqrt{3}a$ ,  $\angle ACB = 60^\circ$ . Lấy hai điểm  $M, N$  lần lượt trên hai cạnh  $AB'$  và  $A'C$  sao cho  $\overrightarrow{MB'} = 2\overrightarrow{AM}$ ,  $\overrightarrow{A'C} = 3\overrightarrow{A'N}$ . Thể tích khối đa diện  $BMNC'C$  bằng

**A.**  $\frac{2\sqrt{6}}{27}a^3$ .

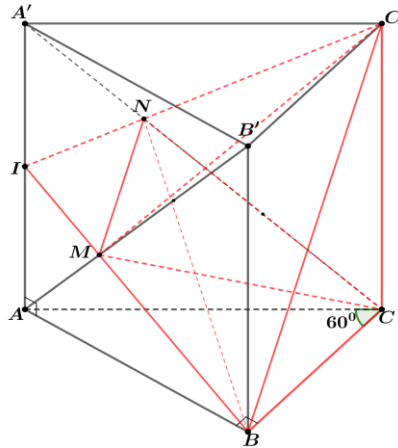
**B.**  $\frac{4}{9}a^3$ .

**C.**  $\frac{4\sqrt{6}}{27}a^3$ .

**D.**  $\frac{8\sqrt{3}}{27}a^3$ .

**Lời giải**

**Chọn C.**



Gọi  $I = BM \cap C'N$  và có  $MN \parallel BC$ .

$$\text{Ta có: } BC = \frac{AB}{\tan 60^\circ} = a, CC' = \sqrt{2}a \text{ và } V_{LT} = \frac{\sqrt{6}}{2}a^3.$$

$$+ V_{C.BIC'} = V_{A.BCC'} = \frac{1}{3}V_{LT} = \frac{\sqrt{6}}{6}a^3.$$

$$+ V_{C.MNI} = \frac{2}{3}V_{C.IA'M} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}BC \cdot S_{\Delta IMA} = \frac{\sqrt{6}}{54}a^3.$$

$$\text{Vậy } V_{C.BC'NM} = V_{C.BIC'} - V_{C.MNI} = \frac{4\sqrt{6}}{27}a^3.$$

**Câu 169:** Thể tích khối lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  là  $V_{ABC.A'B'C'} = BB' \cdot S_{\Delta ABC} = a\sqrt{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{6}}{4}$ . Cho khối lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có thể tích bằng 2022. Mặt phẳng  $(P)$  cắt các cạnh  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  lần lượt tại  $M, N, P$  sao cho  $MA = MA'$ ,  $NB = 2NB'$ ,  $PC = 3PC'$ . Tính thể tích khối đa diện  $ABC.MNP$ .

A. 1348.

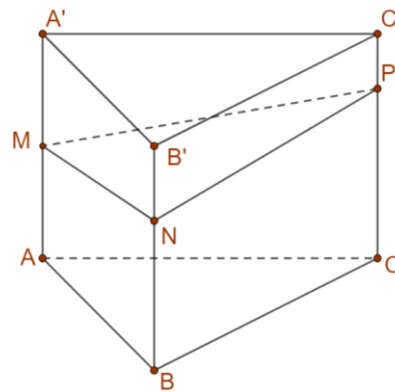
B.  $\frac{7751}{6}$ .

C.  $\frac{13480}{9}$ .

D.  $\frac{10784}{9}$ .

Lời giải

Chọn B



Ta có  $\frac{MA}{AA'} = \frac{1}{2}; \frac{NB}{BB'} = \frac{2}{3}; \frac{PC}{CC'} = \frac{3}{4}$  suy ra  $\frac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{\frac{MA}{AA'} + \frac{NB}{BB'} + \frac{PC}{CC'}}{3} = \frac{23}{36}$ .

Vậy  $V_{ABC.MNP} = \frac{23}{36} \cdot 2022 = \frac{7751}{6}$ .

**Câu 170:** Cho tứ diện  $OABC$  có  $OA, OB, OC$  đôi một vuông góc với nhau và  $OA = OB = 1$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$ . Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $OM$  và  $AC$  bằng  $\frac{2}{3}$ .

Thể tích của khối tứ diện  $OABC$  bằng

A.  $\frac{1}{3}$ .

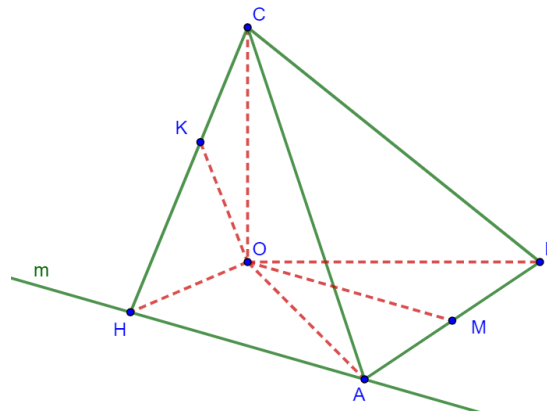
B.  $\frac{1}{6}$ .

C.  $\frac{\sqrt{2}}{3}$ .

D.  $\frac{2}{3}$ .

Lời giải

Chọn A



Kẻ  $Am \parallel OM, OH \perp Am (H \in Am), OK \perp CH (K \in CH)$  nên  $d(OM, AC) = d(OM, (CAH))$

Ta có:  $OC \perp (OAB) \Rightarrow OC \perp AH, OH \perp AH \Rightarrow AH \perp (OCH) \Rightarrow AH \perp OK$

Mà  $d(OM, AC) = d(OM, (CAH)) = d(O, (CAH)) = OK = \frac{2}{3}$ .

Vì tam giác  $OAB$  cân tại  $O$  nên  $OM \perp AB, OM = AM = \frac{AB}{2}$ .

Vì  $OH \perp Am \Rightarrow OH \perp OM$  và  $OM \perp AB, AH \parallel OM \Rightarrow AH \perp AM$



Nên  $OHAM$  là hình vuông ( hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau)

$$\text{Khi đó: } OH = AM = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Do: } \frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OH^2} + \frac{1}{OC^2} \Rightarrow OC = 2 \Rightarrow V_{O.ABC} = \frac{1}{6}.OA.OB.OC = \frac{1}{3}$$

**Cách khác:** Dùng toạ độ

**Câu 171:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành tâm  $O$ . Gọi  $I$  là điểm thuộc  $SO$  sao cho  $SI = \frac{1}{3}SO$ . Mặt phẳng  $(\alpha)$  thay đổi đi qua  $B$  và  $I$  cắt các cạnh  $SA, SC, SD$  lần lượt tại  $M, N, P$ . Gọi  $m, n$  lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của tỉ số  $\frac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}}$ . Tính  $\frac{m}{n}$ ?

A.  $\frac{7}{5}$ .

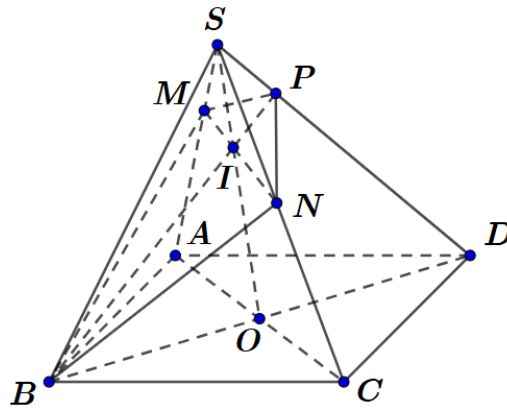
B.  $\frac{8}{5}$ .

C.  $\frac{9}{5}$ .

D. 2.

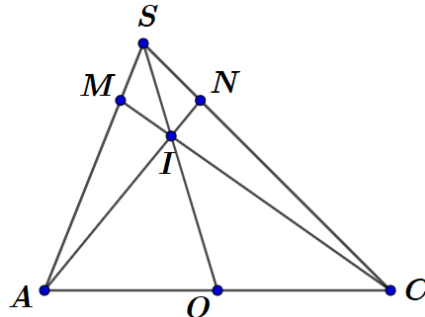
**Lời giải**

**Chọn C**



Áp dụng định lý Menelaus ta có  $\frac{PS}{PD} \frac{IO}{IS} \frac{BD}{BO} = 1 \Leftrightarrow \frac{PS}{PD} \frac{2}{1} \frac{2}{1} = 1 \Leftrightarrow \frac{PS}{PD} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{SD}{SP} = 5$ .

Đặt  $x = \frac{SA}{SM}$ ,  $y = \frac{SB}{SB} = 1$ ,  $z = \frac{SC}{SN}$ ,  $t = \frac{SD}{SP} = 5$  với  $x + z = y + t = 6 \Rightarrow z = 6 - x$



Khi  $N \equiv C$ , Áp dụng định lý Menelaus ta có

$$\frac{MS}{MA} \frac{IO}{IS} \frac{CA}{CO} = 1 \Leftrightarrow \frac{MS}{MA} = \frac{IS}{IO} \frac{CO}{CA} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{MS}{MA} = \frac{1}{4}.$$

$$\Rightarrow 1 \leq \frac{SA}{SM} \leq 5 \Rightarrow 1 \leq x \leq 5, \text{ khi đó ta có } \frac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{x + y + z + t}{4xyzt} = \frac{3}{5x(6-x)} \text{ với } 1 \leq x \leq 5.$$

Ta có  $x(6-x) = -(x-3)^2 + 9$  mà  $1 \leq x \leq 5 \Rightarrow 5 \leq x(6-x) \leq 9 \Rightarrow \frac{1}{15} \leq \frac{3}{5x(6-x)} \leq \frac{3}{25}$ .

$\Rightarrow m = \frac{3}{25}$  và  $n = \frac{1}{15} \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{9}{5}$ .

**Câu 172:** Cho khối chóp tứ giác  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Gọi  $M$  là trung điểm của  $SC$ , mặt phẳng  $(P)$  chứa  $AM$  và song song  $BD$  chia khối chóp thành hai khối đa diện. Đặt  $V_1$  là thể tích khối đa diện có chứa đỉnh  $S$  và  $V_2$  là thể tích khối đa diện có chứa đáy  $ABCD$ . Tỉ số  $\frac{V_2}{V_1}$  là

**A.**  $\frac{V_2}{V_1} = 3$ .

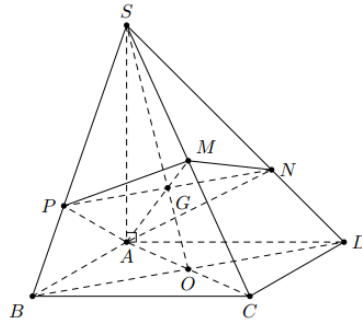
**B.**  $\frac{V_2}{V_1} = 2$ .

**C.**  $\frac{V_2}{V_1} = 1$ .

**D.**  $\frac{V_2}{V_1} = \frac{3}{2}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**



Gọi  $O$  là tâm của hình bình hành  $ABCD$ .

Khi đó  $SO$  cắt  $AM$  tại  $G$ . Suy ra  $G$  là trọng tâm tam giác  $SAC$ .

Do đó  $\frac{SG}{SO} = \frac{2}{3}$ .

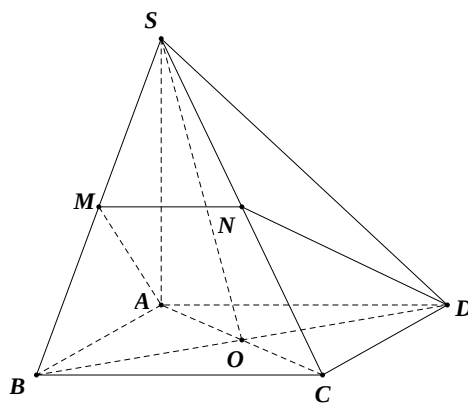
Trong mặt phẳng  $(SBD)$ , qua  $G$  kẻ  $d$  song song  $BD$  cắt  $SD$ ,  $SB$  tại hai điểm  $N$ ,  $P$ .

Khi đó ta có  $\frac{SP}{SB} = \frac{SN}{SD} = \frac{2}{3}$ .

Suy ra  $\frac{V_1}{V_{S.ABCD}} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}}{4} \cdot \left( \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + 1 + 2 \right) = \frac{1}{3}$ .

**Câu 173:** (VD) Cho khối lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có  $AB = 3a$ ,  $AC = 4a$ ,  $BC = 5a$ , khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $B'C'$  bằng  $2a$ . Gọi  $M$ ,  $N$  lần lượt là trung điểm của  $A'B'$  và  $A'C'$ , (tham khảo hình vẽ dưới đây). Thể tích  $V$  của khối chóp  $A.BCNM$  là

Chon C



Góc giữa  $(SBD)$  và  $(ABCD)$  bằng  $SOA$ . Vậy  $SOA = 60^\circ$ .

Ta có:  $SA = SO \cdot \tan SOA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ . Suy ra  $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{1}{2} a^2 = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$ .

$$\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{S.AMN} = \frac{a^3\sqrt{6}}{48}.$$

$$\frac{V_{S.AND}}{V_{S.ACD}} = \frac{SN}{SC} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{S.AND} = \frac{a^3\sqrt{6}}{24}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ADNM} = V_{S.AMN} + V_{S.AND} = \frac{a^3\sqrt{6}}{16}.$$

**Câu 175:** Cho lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có thể tích là  $V$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là các điểm nằm trên các cạnh  $AA', BB', CC'$  sao cho  $\frac{AM}{AA'} = \frac{1}{3}, \frac{BN}{BB'} = x, \frac{CP}{CC'} = y$ . Biết thể tích khối đa diện  $ABC.MNP$  bằng  $\frac{2V}{3}$ . Giá trị lớn nhất của  $xy$  bằng

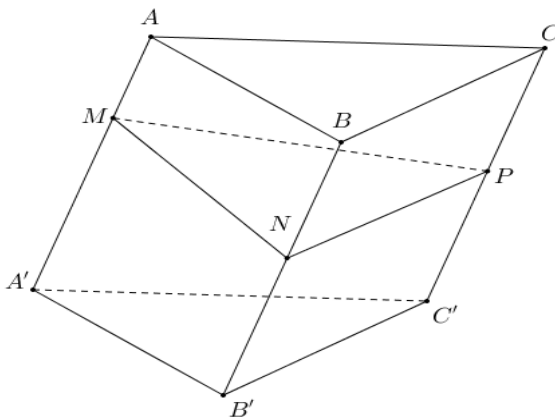
**A.**  $\frac{17}{21}$ .

**B.**  $\frac{25}{36}$ .

**C.**  $\frac{5}{24}$ .

**D.**  $\frac{9}{16}$ .

**Lời giải**



Áp dụng công thức tính nhanh, ta có  $\frac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{\frac{AM}{AA'} + \frac{BN}{BB'} + \frac{CP}{CC'}}{3} = \frac{\frac{1}{3} + x + y}{3} = \frac{\frac{2V}{3}}{V} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow \frac{1}{3} + x + y = 2 \Rightarrow x + y = \frac{5}{3}$ . Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^2}{4} = \frac{25}{36}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của  $xy$  bằng  $\frac{25}{36}$ .

Hoặc có thể rút  $y = \frac{5}{3} - x$  và khảo sát hàm số.

**Câu 176:** Cho hình lăng trụ tam giác đều  $ABC.A'B'C'$  có cạnh đáy bằng  $a$ . Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $A'C$  bằng  $\frac{a\sqrt{15}}{5}$ . Thể tích  $V$  của khối lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  là

**A.**  $V = \frac{3a^3}{2}$ .

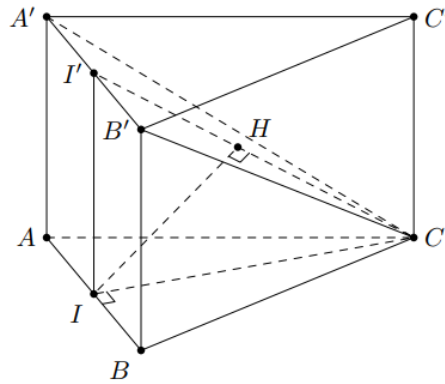
**B.**  $V = \frac{3a^3}{4}$ .

**C.**  $V = \frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$ .

**D.**  $V = \frac{3a^3}{8}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**



Gọi  $I, I'$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $A'B'$  suy ra  $IC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

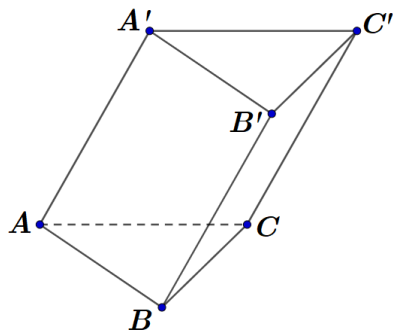
Gọi  $H$  là hình chiếu của  $I$  lên cạnh  $I'C$  suy ra  $d(I, (A'B'C)) = IH$ .

Ta có  $AB \parallel A'B'$  nên  $d(AB, A'C) = d(AB, (A'B'C)) = d(I, (A'B'C)) = IH = \frac{a\sqrt{15}}{5}$ .

Khi đó  $\frac{1}{IH^2} = \frac{1}{IC^2} + \frac{1}{II'^2} \Leftrightarrow II' = a\sqrt{3}$ .

Thể tích  $V$  của khối lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  là  $V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{3} = \frac{3a^3}{4}$ .

**Câu 177:** Cho lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có đáy là tam giác đều cạnh  $a$ , hình chiếu vuông góc của  $A$  lên  $(ABC)$  trùng với trọng tâm của tam giác  $ABC$ . Một mặt phẳng  $(P)$  chứa  $BC$  và vuông góc với  $AA'$  cắt hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  theo một thiết diện có diện tích bằng  $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$ . Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng



A.  $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ .

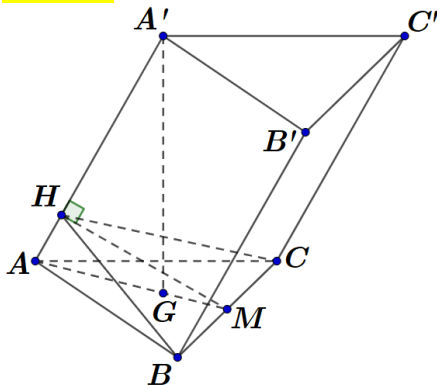
B.  $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$ .

C.  $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ .

D.  $\frac{a^3\sqrt{3}}{10}$ .

Lời giải

Chọn C



Gọi  $M$  là trung điểm  $BC \Rightarrow (AA'M)$  là mặt phẳng trung trực của  $BC \Rightarrow BC \perp (AA'M)$ .

Kẻ  $MH \perp AA' \Rightarrow AA' \perp (HBC) \Rightarrow (HBC) \equiv (P)$ .

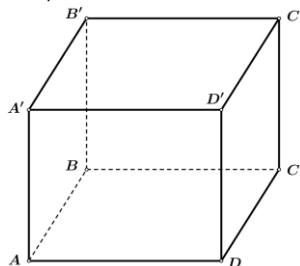
Khi đó thiết diện tạo bởi  $(P)$  và lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  là tam giác  $HBC$ .

$$\text{Ta có } S_{HBC} = \frac{1}{2} HM \cdot BC = \frac{a^2\sqrt{3}}{8} \Leftrightarrow HM = \frac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow d(G, AA') = \frac{2}{3} d(M, AA') = \frac{2}{3} HM = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Xét tam giác  $A'GA$  vuông tại  $G$ , ta có:

$$\frac{1}{d^2(G, AA')} = \frac{1}{GA^2} + \frac{1}{GA'^2} \Leftrightarrow \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3}\right)^2} + \frac{1}{GA'^2} \Leftrightarrow GA' = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}.$$

**Câu 178:** Cho khối hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $AB = a, AD = 2a$ , diện tích tam giác  $C'BD$  bằng  $\sqrt{6}a^2$  (tham khảo hình vẽ)



Thể tích của khối hộp chữ nhật đã cho bằng



$$\text{Ta có } A'O.BD = DI.A'B \Leftrightarrow DI = \frac{A'O.BD}{A'B} = \frac{\sqrt{x^2+2}.x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Dễ thấy  $DA \perp (ABB'A'); (ABB'A') \cap (A'BD) = A'B$ .

$$\text{Ta có } \sin \alpha = \frac{d(D; (ABB'A'))}{d(D; A'B)} = \frac{DA}{DI} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow x \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+2}.x} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x^2+2} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow x = \sqrt{3} \text{ nên } S_{ABCD} = 3 \Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = 3.$$

**Câu 180:** Cho hình lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$  có chiều cao bằng 10 và diện tích đáy bằng 12. Gọi  $M, N$  lần lượt các điểm nằm trên cạnh  $CB, CA$  và  $P, Q, R$  lần lượt là giao hai đường chéo của mỗi hình bình hành  $ABB'A'; BCC'B'; CAA'C'$ . Thể tích khối đa diện lồi  $ABMNRQP$  bằng

A. 34.

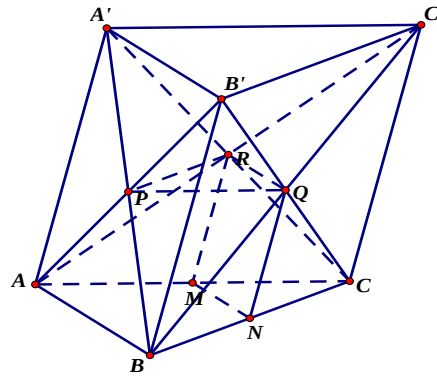
B. 70.

C. 68.

D. 35.

Lời giải

Chọn D.



$$V_{ABC.A'B'C'} = 10.12 = 120$$

$$V_{C'.ABC} = \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}; V_{A.BC'B'} = \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}$$

$$\text{Khối đa diện cần tìm } V = V_{C.ABQR} + V_{Q.APR} + V_{Q.ABP} - V_{C.MNQR}$$

$$\text{Ta có } V_{C.ABQR} = \frac{3}{4}V_{C'.ABC} = \frac{1}{4}V_{ABC.A'B'C'}$$

$$\text{Ta có } V_{Q.APR} = \frac{1}{8}V_{ABC'B'} = \frac{1}{24}V_{ABC.A'B'C'}$$

$$\text{Ta có } V_{Q.ABP} = \frac{1}{4}V_{ABC'B'} = \frac{1}{12}V_{ABC.A'B'C'}$$

$$V_{C.MNQR} = 2V_{C.MNQ} = 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot V_{C.ABC'} = 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3}V = 10$$

$$\text{Vậy thể tích khối cần tìm } V = \frac{1}{4}V_{ABC.A'B'C'} + \frac{1}{24}V_{ABC.A'B'C'} + \frac{1}{12}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{3}{8}.120 - 10 = 35.$$

## VII. KHỐI TRÒN XOAY

**Câu 181:** Cho hình nón có chiều cao và bán kính đáy đều bằng 1. Mặt phẳng  $(P)$  qua đỉnh của hình nón và cắt đáy theo dây cung có độ dài bằng 1. Khoảng cách từ tâm của đáy tới



mặt phẳng  $(P)$  bằng

A.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

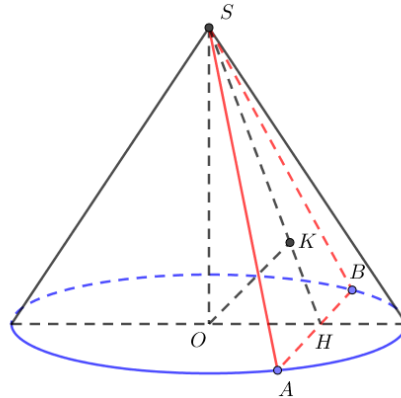
B.  $\frac{\sqrt{7}}{7}$ .

C.  $\frac{\sqrt{21}}{7}$ .

D.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Lời giải

Chọn C



Gọi thiết diện qua đỉnh là tam giác vuông cân  $SAB$  và gọi  $H$  là trung điểm  $AB$ .

Kẻ  $OK \perp SH \Rightarrow d(O, (SAB)) = OK$

Ta có  $SO = 1$ ;  $OA = 1$ ;  $AB = 1 \Rightarrow HA = \frac{1}{2}$ .

Trong tam giác  $AHO$  có  $OH = \sqrt{OA^2 - HA^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Trong tam giác  $SOH$  có  $\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OH^2} = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3} \Rightarrow OK^2 = \frac{3}{7} \Rightarrow OK = \frac{\sqrt{21}}{7}$ .

Vậy  $d(O, (SAB)) = \frac{\sqrt{21}}{7}$ .

**Câu 182:** Cho hình nón  $(N)$  có đường sinh tạo với đáy một góc  $60^\circ$ . Mặt phẳng qua trục của  $(N)$  cắt  $(N)$  theo thiết diện là một tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1. Tính thể tích  $V$  của khối nón giới hạn bởi  $(N)$ .

A.  $V = 3\sqrt{3}\pi$ .

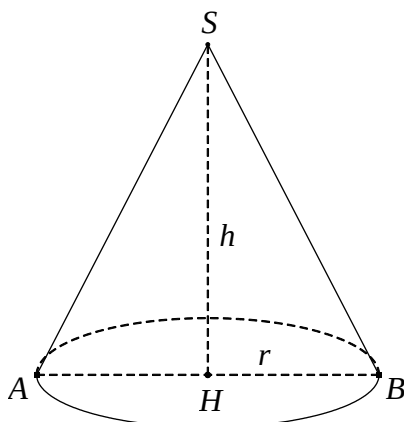
B.  $V = 9\sqrt{3}\pi$ .

C.  $V = 3\pi$ .

D.  $V = 9\pi$ .

Lời giải

Chọn C



Thiết diện qua trục của  $(N)$  là  $\Delta SAB$

Vì  $\Delta SAB$  cân tại  $S$ ,  $SAB = 60^\circ$  (gt)  $\Rightarrow \Delta SAB$  đều  $\Rightarrow l = 2R$  ( $R$  là bán kính nón)

Gọi  $r$  là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đều  $SAB$

$$\text{Có } r = \frac{S_{\Delta SAB}}{p} = \frac{\frac{l^2 \sqrt{3}}{4}}{\frac{3l}{2}} = \frac{l\sqrt{3}}{6} = 1 \Leftrightarrow l = 2\sqrt{3}$$

$$\text{Ta được chiều cao của nón } h = l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3.$$

$$\text{Vậy } V_{(N)} = \frac{1}{3} \pi R^2 h = 3\pi.$$

**Câu 183:** Cho hình nón có chiều cao và bán kính đáy đều bằng  $a$ . Mặt phẳng  $(P)$  đi qua đỉnh của hình nón và cắt đường tròn đáy theo một dây cung có độ dài bằng  $a$ . Khoảng cách từ tâm của đáy tới mặt phẳng  $(P)$  bằng

**A.**  $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ .

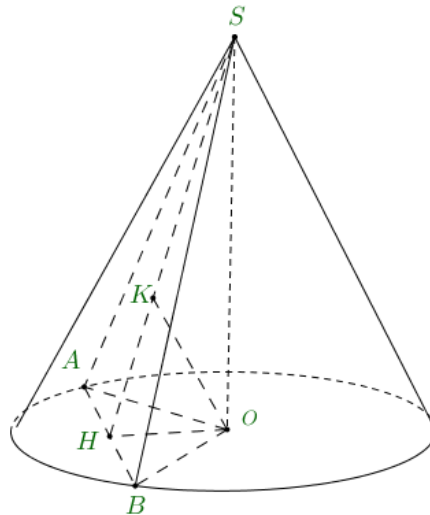
**B.**  $\frac{\sqrt{3}}{3}a$ .

**C.**  $\frac{\sqrt{7}}{7}a$ .

**D.**  $\frac{\sqrt{21}}{7}a$ .

**Lời giải**

**Chọn D**



Giả sử hình nón đã cho có đỉnh là  $S$ , tâm của đáy là  $O$  và  $(P)$  cắt đường tròn đáy theo dây cung  $AB$ .

Gọi  $H$  là trung điểm của đoạn  $AB$  và  $K$  là hình chiếu của  $O$  trên  $SH$ .

Ta có:  $AB \perp SO, OH \Rightarrow AB \perp (SOH) \Rightarrow AB \perp OK$ , mà

$OK \perp SH \Rightarrow OK \perp (SAB) \Rightarrow d(O, (P)) = OK$ .

Xét tam giác vuông  $SOH$  có  $OH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$  (do tam giác  $OAB$  đều có cạnh bằng  $a$ ),

$$SO = a.$$

$$\text{Suy ra: } OK = \frac{OS \cdot OH}{\sqrt{OS^2 + OH^2}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

$$\text{Vậy } d(O, (P)) = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

**Câu 184:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật  $AB = a; AD = a\sqrt{3}$ ,  $SA$  vuông góc với đáy. Gọi  $M, K$  theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của  $A$  trên  $SB, SD$ . Điểm  $E$  là giao điểm của  $SC$  và  $(AMK)$ . Hình nón  $(N)$  có đường tròn đáy ngoại tiếp tam giác  $MKE$  và có đỉnh thuộc mặt phẳng  $(ABCD)$ . Khi hình nón  $(N)$  có thể tích lớn nhất thì  $SA$  bằng

A.  $a\sqrt{3}$ .

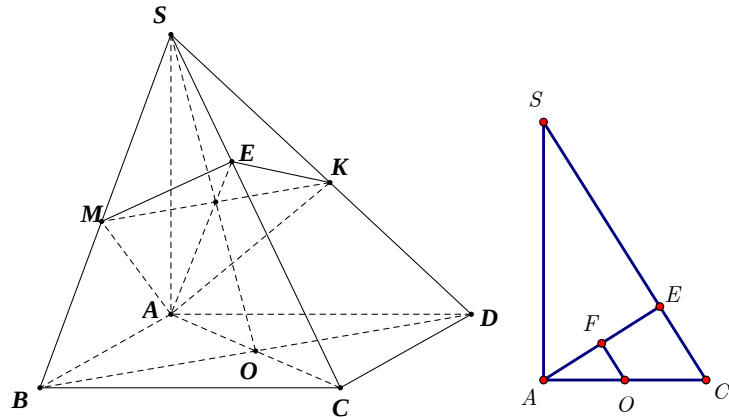
B.  $a$ .

C.  $2a\sqrt{3}$ .

D.  $2a\sqrt{2}$ .

Lời giải

Chọn D



Ta có  $SC \perp (AMEK)$ .

Lại có  $AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp ME$ .

Suy ra tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $MEK$  là trung điểm  $F$  của  $AE$ .

Gọi  $O$  là tâm  $ABCD$ . Suy ra  $OF \parallel SC \Rightarrow OF \perp (MEK)$ .

Vậy thể tích hình nón có đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác  $MKE$  và đỉnh thuộc mặt phẳng  $ABCD$  bằng

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot \left( \frac{AE}{2} \right)^2 \cdot OF = \frac{1}{12} \pi \cdot AE^2 \cdot OF = \frac{1}{24} \pi \cdot AE^2 \cdot OE. \text{ Vậy } V_{\max} \Leftrightarrow AE^2 \cdot OE_{\max}.$$

$$\text{Ta có: } AE^2 + OE^2 = AC^2 = AB^2 + AD^2 = 4a^2.$$

$$\text{Suy ra } 4a^2 = \frac{AE^2}{2} + \frac{AE^2}{2} + OE^2 \geq 3\sqrt{\frac{1}{4} AE^4 OE^2}.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \frac{AE^2}{2} = \frac{4}{3} a^2 \Leftrightarrow AE^2 = \frac{8a^2}{3} \Rightarrow \frac{1}{AE^2} = \frac{3}{8a^2}.$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AE^2} \Rightarrow AS = 2\sqrt{2}a.$$

**Câu 185:** Cho khối nón  $(N)$  có bán kính đáy  $r = 4a$  và chiều cao lớn hơn bán kính đáy. Mặt phẳng  $(P)$  đi qua đỉnh nón và tạo với đáy nón một góc  $60^\circ$  cắt khối nón  $(N)$  theo thiết diện là một tam giác có diện tích bằng  $8\sqrt{3}a^2$ . Thể tích của khối nón  $(N)$  bằng

A.  $64\pi a^3$ .

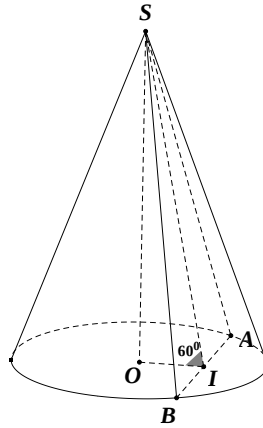
B.  $96\pi a^3$ .

C.  $32\pi a^3$ .

D.  $192\pi a^3$ .

Lời giải

Chọn C



Gọi thiết diện là tam giác  $SAB$  và  $I$  là trung điểm của đoạn  $AB$ .

Ta có  $OI \perp AB$  và  $SI \perp AB$  nên  $SIO = 60^\circ$ .

$$\text{Gọi } SO = h (h > 4a) \text{ ta có } OI = \frac{SO}{\tan 60^\circ} = \frac{h\sqrt{3}}{3} \Rightarrow AB = 2AI = 2\sqrt{OB^2 - OI^2} = 2\sqrt{16a^2 - \frac{3h^2}{9}}$$

$$\text{và } SI = \frac{SO}{\sin 60^\circ} = \frac{2h\sqrt{3}}{3}.$$

Do đó

$$\begin{aligned} S_{SAB} &= \frac{1}{2} SI \cdot AB \Leftrightarrow 8\sqrt{3}a^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2h\sqrt{3}}{3} \cdot 2\sqrt{16a^2 - \frac{3h^2}{9}} \Leftrightarrow 12a^2 = h \cdot \sqrt{16a^2 - \frac{3h^2}{9}} \\ \Leftrightarrow 144a^4 &= h^2 \left( 16a^2 - \frac{3h^2}{9} \right) \Leftrightarrow \frac{1}{3}h^4 - 16a^2h^2 + 144a^4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} h^2 = 36a^2 \\ h^2 = 12a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = 6a (\text{nhan}) \\ h = 2\sqrt{3}a (\text{loại}) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } V_{(N)} = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \pi \cdot (4a)^2 \cdot 6a = 32\pi a^3.$$

**Câu 186:** Cho hình trụ có chiều cao bằng  $a\sqrt{2}$ . Trên đường tròn đáy thứ nhất của hình trụ lấy hai điểm  $A, B$ ; trên đường tròn đáy thứ hai của hình trụ lấy hai điểm  $C, D$  sao cho  $ABCD$  là hình vuông và mặt phẳng  $(ABCD)$  tạo với đáy của hình trụ góc  $45^\circ$ . Thể tích khối trụ đã cho bằng:

**A.**  $\frac{3\sqrt{2}\pi a^3}{2}$ .

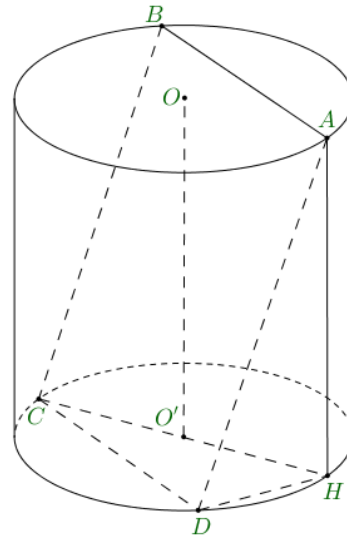
**B.**  $6\sqrt{2}\pi a^3$ .

**C.**  $3\sqrt{2}\pi a^3$ .

**D.**  $\frac{3\sqrt{2}\pi a^3}{8}$ .

Lời giải

Chọn A



Giả sử tâm của đáy thứ nhất và đáy thứ hai của hình trụ lần lượt là  $O$  và  $O'$ .

Gọi  $H$  là hình chiếu của  $A$  trên đường tròn đáy thứ hai của hình trụ.

Ta có:  $CD \perp AD, AH \Rightarrow CD \perp DH$ , tức là  $CH$  là đường kính đáy thứ hai của hình trụ.

$$CD \perp (ADH);$$

$$(ADH) \cap (ABCD) = AD;$$

$$(ADH) \cap (CDH) = DH \Rightarrow ((ABCD), (CDH)) = ADH = 45^\circ \Rightarrow \triangle ADH \text{ vuông cân tại } H \text{ có}$$

$$AH = DH = OO' = a\sqrt{2}, AD = AH\sqrt{2} = OO'\sqrt{2} = 2a \Rightarrow CD = 2a$$

$$\Rightarrow CH = \sqrt{(CD)^2 + (DH)^2} = a\sqrt{6}.$$

$$\text{Vậy thể tích khối trụ bằng: } \pi \left( \frac{CH}{2} \right)^2 \cdot OO' = \frac{3\pi a^3 \sqrt{2}}{2}.$$

**Câu 187:** Cho hình trụ (T) có bán kính đáy  $r = \sqrt{6}$  và chiều cao gấp đôi bán kính đáy. Gọi  $O$  và  $O'$  lần lượt là tâm của hai đáy trụ. Trên đường tròn tâm  $O$  lấy điểm  $A$ , trên đường tròn tâm  $O'$  lấy điểm  $B$  sao cho thể tích của tứ diện  $OO'AB$  lớn nhất. Tính  $AB$ ?

A.  $\sqrt{30}$ .

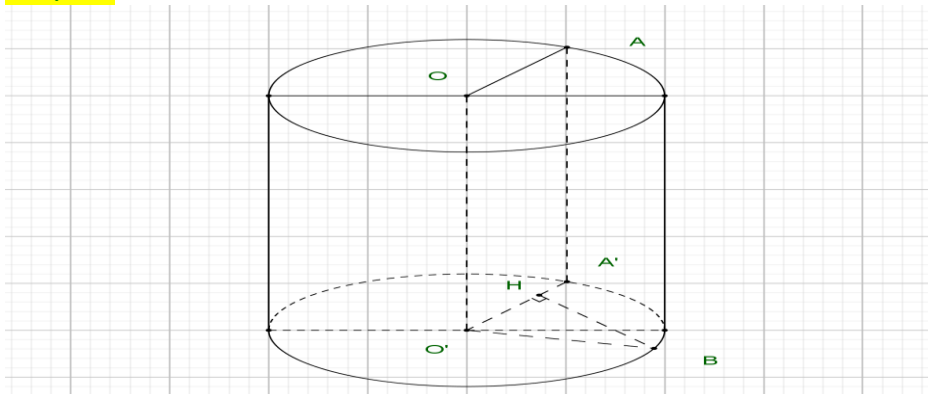
B. 6.

C. 5.

D.  $4\sqrt{3}$ .

Lời giải

Chọn B



Gọi  $A'$  là hình chiếu vuông góc của  $A$  xuống mặt đáy ( $O'$ ).

Ta có  $OO'A'A$  là hình chữ nhật.

$$\text{Ta có } S_{OO'A} = \frac{1}{2} S_{OO'A'A} = \frac{1}{2} \cdot OO' \cdot AA' = \frac{1}{2} \sqrt{6} \cdot 2\sqrt{6} = 6.$$

Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của điểm  $B$  lên đường thẳng  $O'A$ .

$$\text{ta có } \begin{cases} BH \perp O'A' \\ BH \perp OO' \end{cases} \Rightarrow BH \perp (OO'A).$$

Thể tích của khối tứ diện  $OO'AB$  là  $V = \frac{1}{3}BH.S_{OO'A} = 2BH \leq 2OB = 2\sqrt{6}$ .

Khi đó tam giác  $O'A'B$  vuông tại  $O'$ .

$$\Rightarrow A'B = r\sqrt{2} = 2\sqrt{3} \Rightarrow A'B = \sqrt{AA'^2 + A'O'^2} = \sqrt{24+12} = 6.$$

**Câu 188:** Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn  $(O)$  và  $(O')$ , thiết diện qua trục của hình trụ là hình vuông. Gọi  $A$  và  $B$  là hai điểm lần lượt nằm trên hai đường tròn  $(O')$  và  $(O)$ .

Biết  $AB = 2a$  và khoảng cách giữa  $AB$  và  $OO'$  bằng  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ . Tính diện tích xung quanh của hình trụ.

**A.**  $\frac{a\sqrt{2}}{4}$ .

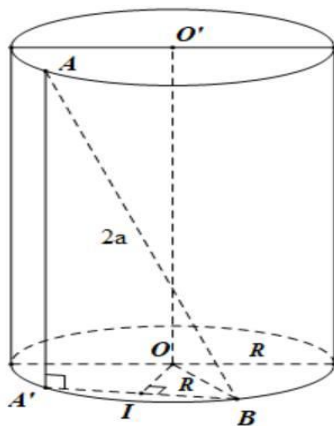
**B.**  $\frac{a\sqrt{14}}{2}$ .

**C.**  $\frac{a\sqrt{14}}{4}$ .

**D.**  $\frac{a\sqrt{14}}{3}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**



Dựng  $AA' \parallel OO'$  ( $A' \in (O)$ ), gọi  $I$  là trung điểm  $A'B$ ,  $R$  là bán kính đáy.

Suy ra: khoảng cách giữa  $AB$  và  $OO'$  là  $OI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

$$\text{Và: } IB = \sqrt{OB^2 - OI^2} = \sqrt{R^2 - \frac{3a^2}{4}} \Rightarrow A'B = 2IB = \sqrt{4R^2 - 3a^2}.$$

Thiết diện qua trục là hình vuông nên  $AA' = 2R$ .

$$\text{Ta có: } AA'^2 + A'B^2 = AB^2 \Leftrightarrow 4R^2 + 4R^2 - 3a^2 = 4a^2 \Leftrightarrow R = \frac{a\sqrt{14}}{4}.$$

**Câu 189:** Cho hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$  song song với nhau và cùng cắt khối cầu tâm  $O$  bán kính  $4\sqrt{3}$  thành hai hình tròn có cùng bán kính. Xét hình nón có đỉnh trùng với tâm của một trong hai hình tròn này và có đáy là hình tròn còn lại. Khi diện tích xung quanh của hình nón là lớn nhất, khoảng cách  $h$  giữa hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$  bằng:

**A.**  $h = 4\sqrt{6}$ .

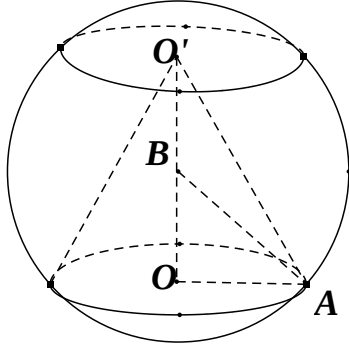
**B.**  $h = 8\sqrt{3}$ .

**C.**  $h = 4\sqrt{3}$ .

**D.**  $h = 8$ .

**Lời giải**

**Chọn D**



$$d((P), (Q)) = OO' = h; AB = R.$$

$$\Delta OAB \text{ vuông tại } O \text{ nên } OA = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}}.$$

$$\Delta OAO' \text{ vuông tại } O \text{ nên } O'A = \sqrt{O'O^2 + OA^2} = \sqrt{h^2 + R^2 - \frac{h^2}{4}} = \sqrt{R^2 + \frac{3h^2}{4}}.$$

$$\text{Diện tích xung quanh của hình nón: } S = \pi \cdot OA \cdot O'A = \pi \cdot \sqrt{\left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right) \cdot \left(R^2 + \frac{3h^2}{4}\right)}.$$

$$\text{Đặt } x = \frac{h^2}{4}, x > 0.$$

$$\text{Xét } f(x) = \pi \cdot \sqrt{\left(R^2 - x\right) \cdot \left(R^2 + 3x\right)} = \pi \cdot \sqrt{R^4 + 2R^2x - 3x^2} \text{ với } x \in (0; R^2].$$

$$f'(x) = \pi \cdot \frac{2R^2 - 6x}{2\sqrt{\left(R^2 - x\right) \cdot \left(R^2 + 3x\right)}}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2R^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{R^2}{3}.$$

| $x$     | 0 | $\frac{R^2}{3}$               | $R^2$ |
|---------|---|-------------------------------|-------|
| $f'(x)$ | + | 0                             | -     |
| $f(x)$  |   | $f\left(\frac{R^2}{3}\right)$ |       |

Diện tích xung quanh của hình nón đạt giá trị lớn nhất khi  $f(x)$  đạt giá trị lớn nhất

$$\text{trên } (0; R^2]. \text{ Khi đó } x = \frac{R^2}{3} \Leftrightarrow \frac{h^2}{4} = \frac{R^2}{3} \Leftrightarrow h^2 = \frac{4R^2}{3} \Rightarrow h = \frac{2R\sqrt{3}}{3} = \frac{2(4\sqrt{3})\sqrt{3}}{3} = 8.$$

**Câu 190:** (VDC) Cho hình chóp  $S.ABC$  có cạnh bên  $SA$  vuông góc với đáy,  $SA = 2\sqrt{6}a$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là hình chiếu của  $A$  trên các cạnh  $SB$  và  $SC$ . Biết góc giữa hai mặt phẳng  $(AMN)$  và  $(ABC)$  bằng  $60^\circ$ , tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp đa diện  $ABCMN$ ?

**A.**  $S = 36\pi a^2$ .

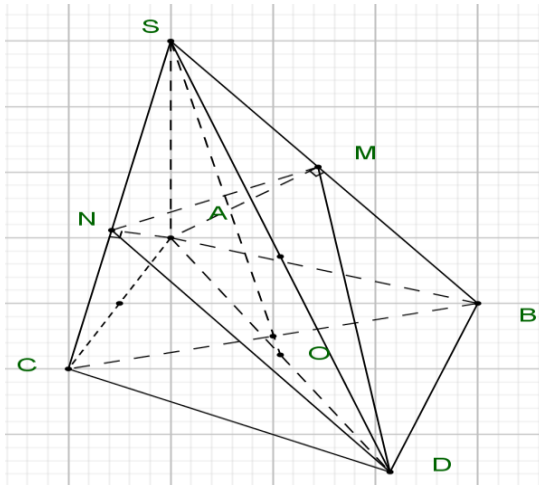
**B.**  $S = 72\pi a^2$ .

**C.**  $S = 24\pi a^2$ .

**D.**  $S = 8\pi a^2$ .

**Lời giải**

**Chọn D**



Gọi  $O$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .  $D$  là điểm đối xứng với  $A$  qua  $O$ .

$$\text{Ta có } \begin{cases} BD \perp AB \\ DB \perp SA \end{cases} \Rightarrow DB \perp (SAB) \Rightarrow DB \perp AM, (Do AM \subset (SAB))$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} AM \perp SB \\ AM \perp DB \end{cases} \Rightarrow AM \perp (SDB) \Rightarrow AM \perp SD \quad (1)$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} DC \perp AC \\ DC \perp SA \end{cases} \Rightarrow DC \perp (SAC) \Rightarrow DC \perp AN \quad (2), (Do AN \subset (SAC))$$

$$\begin{cases} AN \perp SC \\ AN \perp DC \end{cases} \Rightarrow AN \perp (SCD) \Rightarrow AN \perp SD \quad (2).$$

$$\text{Từ } (1), (2) \Rightarrow SD \perp (AMN).$$

$$\text{Do } \begin{cases} SA \perp (ABCD) \\ SD \perp (AMN) \end{cases} \Rightarrow ((AMN), (ABC)) = (SA, SD) = 60^\circ.$$

$$\text{Tam giác } SAD \text{ vuông tại } A \Rightarrow \tan ASD = \frac{SA}{AD} \Rightarrow AD = \frac{2\sqrt{6}a}{\tan 60^\circ} = 2\sqrt{2}a.$$

$$\begin{cases} AM \perp (SDB) \\ DM \subset (SDB) \end{cases} \Rightarrow AM \perp MD \quad (3).$$

$$\begin{cases} AN \perp (SCD) \\ DN \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow AN \perp ND \quad (4)$$

Do đó ta có  $AND = AMD = ACD = ABD = 90^\circ \Rightarrow O$  là tâm mặt cầu ngoại tiếp đa diện

$$ABCMN \Rightarrow R = \frac{AD}{2} = \sqrt{2}a.$$

$$\text{Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện là } S_1 = 4\pi R^2 = 4\pi (\sqrt{2}a)^2 = 8\pi a^2.$$

**Câu 191:** Cho hình nón có đỉnh  $S$  có bán kính đáy bằng  $a$  và góc ở đỉnh bằng  $120^\circ$ . Thiết diện tạo bởi một mặt phẳng đi qua đỉnh  $S$  và hình nón là một tam giác có diện tích lớn nhất bằng:

**A.**  $\frac{2}{3}a^2$

**B.**  $\frac{1}{3}a^2$

**C.**  $\frac{4}{3}a^2$

**D.**  $\frac{2}{\sqrt{3}}a^2$



### Lời giải

#### Chọn A

$$\text{Ta có } AB^2 = SA^2 + SB^2 - 2SA \cdot SB \cos ASB \Leftrightarrow SA = \sqrt{\frac{AB^2}{2 - 2 \cos ASB}} = \sqrt{\frac{(2a)^2}{2 - 2 \cos 120^\circ}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Ta có diện tích thiết diện là } S' = \frac{1}{2} l^2 \sin \alpha \leq \frac{1}{2} l^2 = \frac{1}{2} SA^2 = \frac{2}{3} a^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi  $\sin \alpha = 1$  hay  $\alpha = A'SB' = 90^\circ$ .

**Câu 192:** Cho lăng trụ đều  $ABC.A'B'C'$  có cạnh đáy bằng 1, chiều cao bằng 2. Thể tích khối cầu ngoại tiếp lăng trụ đã cho bằng:

**A.**  $\frac{32\sqrt{3}\pi}{27}$ .

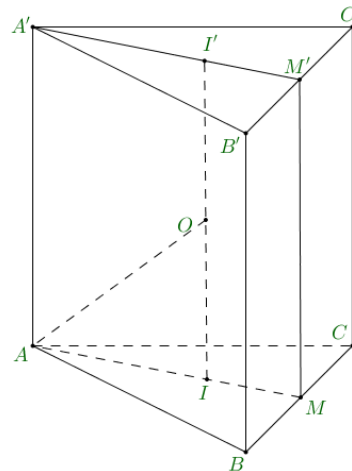
**B.**  $\frac{16\pi}{3}$ .

**C.**  $\frac{16\pi}{9}$ .

**D.**  $\frac{32\sqrt{3}\pi}{9}$ .

### Lời giải

#### Chọn A



Gọi  $I, I'$  lần lượt là trọng tâm tam giác  $ABC, A'B'C'$ ,  $O$  là trung điểm của  $II'$ . Khi đó  $O$  là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ.

$$\text{Ta có } AI = \frac{2}{3} AM = \frac{\sqrt{3}}{3}, OI = 1.$$

$$\text{Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ } R = OA = \sqrt{OI^2 + AI^2} = \sqrt{(1)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Thể tích khối cầu ngoại tiếp lăng trụ } V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{32\pi}{9\sqrt{3}} = \frac{32\pi\sqrt{3}}{27}.$$

**Câu 193:** Cho hai khối cầu có tổng diện tích bằng  $80\pi$  tiếp xúc ngoài nhau và cùng tiếp xúc với mặt

phẳng  $(P)$  lần lượt tại hai điểm  $A, B$ . Tính tổng thể tích của hai khối cầu đó biết

$$AB = 4\sqrt{2}.$$

**A.**  $24\sqrt{2}\pi$ .

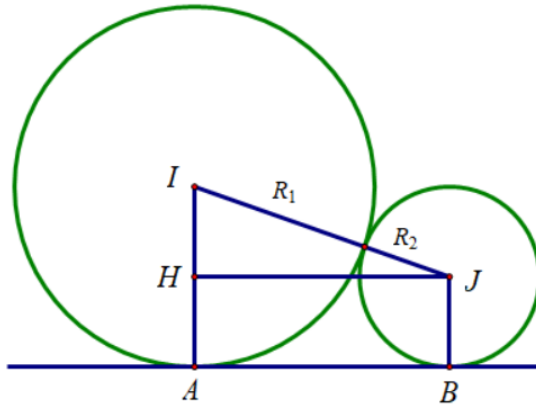
**B.**  $96\sqrt{2}\pi$ .

**C.**  $96\pi$ .

**D.**  $192\pi$ .

### Lời giải

#### Chọn C



Gọi  $R_1, R_2$  là bán kính ( $R_1 > R_2$ );  $I, J$  là tâm của các mặt cầu (như hình vẽ).

Gọi  $H$  là hình chiếu của  $J$  lên  $IA$ .

Theo bài ra, ta có hệ:

$$\begin{cases} (R_1 + R_2)^2 = IH^2 + HJ^2 \\ 4\pi(R_1^2 + R_2^2) = 80\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (R_1 + R_2)^2 = (R_1 - R_2)^2 + AB^2 \\ R_1^2 + R_2^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_1 \cdot R_2 = 8 \\ R_1 + R_2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_1 = 4 \\ R_2 = 2 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } V = \frac{4}{3}\pi(R_1^3 + R_2^3) = \frac{4}{3}\pi \cdot 72 = 96\pi.$$

**Câu 194:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông cân tại  $B$  với  $AB = BC = a\sqrt{3}$ , góc  $SAB = SCB = 90^\circ$  và khoảng cách từ  $A$  đến mặt phẳng  $(SBC)$  bằng  $a\sqrt{2}$ . Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $S.ABC$ .

**A.**  $16\pi a^2$ .

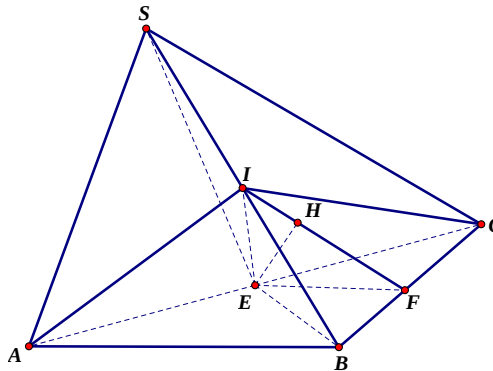
**B.**  $2\pi a^2$ .

**C.**  $8\pi a^2$ .

**D.**  $12\pi a^2$ .

**Lời giải**

**Chọn D**



Gọi  $I$  là trung điểm  $SB$

Ta có: +  $IS = IA = IB$  ( $\triangle SAB$  vuông tại  $A$ )

+  $IS = IC = IB$  ( $\triangle SCB$  vuông tại  $C$ )

$\Rightarrow IS = IB = IA = IC = R \Rightarrow I$  là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $S.ABC$ .

Gọi  $E$  là trung điểm  $AC$ , mà  $\triangle ABC$  vuông tại  $B$

Nên  $IE$  là trục đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ .

$\Rightarrow IE \perp (ABC)$  tại  $E$ .

$$\text{Ta có: } AE \cap (SBC) = C \Rightarrow \frac{d[E, (SBC)]}{d[A, (SBC)]} = \frac{EC}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow d[E, (SBC)] = \frac{1}{2} d[A, (SBC)] = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow EH = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \text{ Ta có: } \frac{1}{EI^2} = \frac{1}{EH^2} - \frac{1}{EF^2} \Rightarrow EI = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

$$EB = \left(a\sqrt{3}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow IB = \frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot \sqrt{2} = a\sqrt{3}$$

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $S.ABC$ :  $S_{(I;IB)} = 4\pi R^2 = 12\pi a^2$ .

## VIII. HÌNH HỌC TOẠ ĐỘ

**Câu 195:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(P): -2x + 2y + z - 3 = 0$  và đường thẳng

$d: \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{2}$ . Đường thẳng  $\Delta$  nằm trong mặt phẳng  $(P)$  cắt và vuông góc với đường thẳng  $d$  có phương trình là

**A.**  $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{7} = \frac{z-3}{-8}$ .

**B.**  $\frac{x+2}{-3} = \frac{y-8}{7} = \frac{z-11}{8}$ .

**C.**  $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{7} = \frac{z-3}{8}$ .

**D.**  $\frac{x+2}{-3} = \frac{y+6}{-7} = \frac{z-11}{8}$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

Đường thẳng  $\Delta$  nằm trong mặt phẳng  $(P)$  cắt và vuông góc với đường thẳng  $d$  có vector chỉ phương của đường thẳng  $\Delta$  là  $\vec{u} = [\vec{n}_p, \vec{u}_d]$

Với  $\vec{n}_p = (-2; 2; 1), \vec{u}_d = (3; 1; 2) \Rightarrow \vec{u} = [\vec{n}_p, \vec{u}_d] = (3; 7; -8)$

Tọa độ giao điểm của  $(P)$  và  $d$  là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} -2x + 2y + z - 3 = 0 \\ \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2(1+3t) + 2(1+t) + (3+2t) - 3 = 0 \\ \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{2} = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ x = 1 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

Vậy phương trình đường thẳng  $\Delta$  đi qua điểm  $(1; 1; 3)$  và có VTCP  $\vec{u} = (3; 7; -8)$  dạng:

$\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{7} = \frac{z-3}{-8}$  qua điểm  $(-2; -6; 11) \rightarrow$  **Chọn D**

**Câu 196:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(P)$  có phương trình  $(P) 3x - 4y - 20 = 0$  và hai mặt cầu  $(S_1): (x-7)^2 + (y+7)^2 + (z-5)^2 = 24$ ;  $(S_2): (x-3)^2 + (y+5)^2 + (z-1)^2 = \frac{3}{2}$ . Gọi  $A, M, N$  lần lượt là các điểm thuộc  $(P); (S_1); (S_2)$ . Giá trị nhỏ nhất của  $d = AM + AN$  là

**A.**  $\frac{4\sqrt{6}}{5}$ .

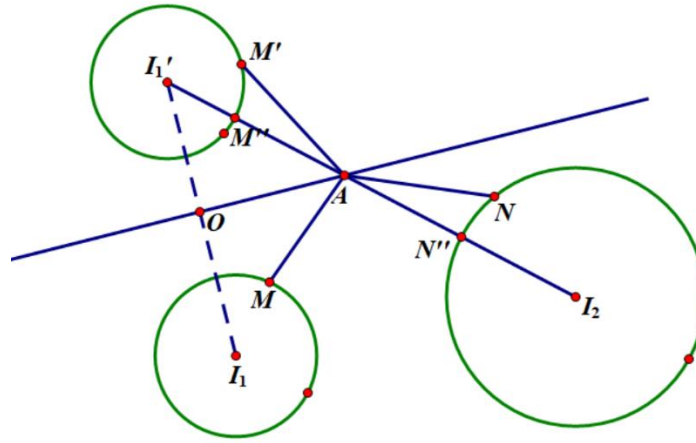
**B.**  $\frac{11\sqrt{6}}{10}$ .

**C.**  $\frac{3\sqrt{6}}{5}$ .

**D.**  $\frac{2\sqrt{6}}{5}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**



Gọi  $I_1'$  là đường tròn đối xứng với  $I_1$  qua  $(P)$

$\Rightarrow M'$  đối xứng với  $M$  qua  $(P) \Rightarrow AM = AM'$

$$I_1(7; -7; 5); R_1 = \sqrt{24}; I_2(3; -5; 1); R_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Gọi  $\{M''\} = I_1'I_2 \cap (I_1); \{N''\} = I_1'I_2 \cap (I_2)$

Ta có:  $AM + AN = AM' + AN \geq M'N$

Dấu " $=$ " xảy ra khi  $M', A, N$  thẳng hàng

Ta có:  $d = AM + AN$  nhỏ nhất  $\Leftrightarrow M'N = M''N'' = I_1'I_2 - R_1 - R_2$

Gọi  $O$  là hình chiếu của  $I_1$  xuống  $(P)$

$$\text{Phương trình đường thẳng } OI_1 \text{ có dạng: } \begin{cases} x = 7 + 3t \\ y = -7 - 4t \\ z = 5 \end{cases}$$

Gọi  $O$  là giao điểm của đường thẳng  $OI_1$  và  $(P)$

$$\Rightarrow 3(7 + 3t) - (-7 - 4t) - 20 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-29}{25}$$

$$\Rightarrow O\left(\frac{88}{25}; \frac{-59}{25}; 5\right) \Rightarrow I_1'\left(\frac{1}{25}; \frac{57}{25}; 5\right)$$

$$\Rightarrow I_1'I_2 = \frac{18\sqrt{5}}{5}$$

$$\Rightarrow d = \frac{11\sqrt{6}}{10}$$

**Câu 197:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$  và đường thẳng

$\Delta: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$ . Hai mặt phẳng  $(P), (Q)$  vuông góc với nhau, cùng chứa  $d$  và

cắt  $\Delta$  tại  $M, N$ . Độ dài đoạn thẳng  $MN$  ngắn nhất bằng

A.  $\frac{\sqrt{10}}{10}$ .

B.  $\frac{2\sqrt{10}}{21}$ .

C.  $\frac{\sqrt{5}}{5}$ .

D.  $\frac{\sqrt{42}}{21}$ .

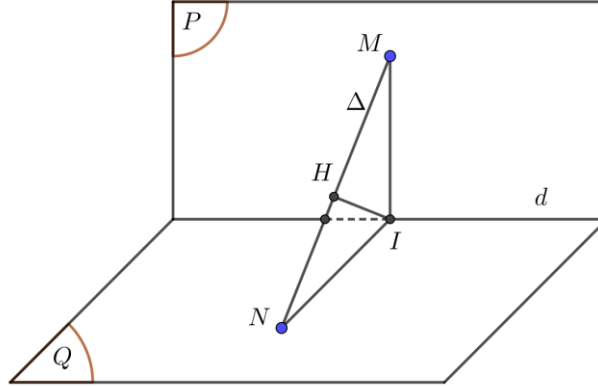
Lời giải

**Chọn D**

Đường thẳng  $d$  đi qua điểm  $A(1;1;0)$  và có một vectơ chỉ phương  $\vec{u}_d = (1;3;2)$ .

Đường thẳng  $\Delta$  đi qua điểm  $B(2,1,1)$  và có một vectơ chỉ phương  $\vec{u}_\Delta = (1;-1;1)$ .

Ta có:  $\vec{u}_d \cdot \vec{u}_\Delta = 0 \Rightarrow d \perp \Delta$ .



Gọi  $I$  là hình chiếu của  $N$  lên  $d$ . Do  $(P) \perp (Q)$  theo giao tuyến  $d$  nên  $NI \perp (P)$ .

Suy ra  $NI \perp MI$  hay  $\triangle MIN$  vuông tại  $I$ .

Gọi  $H$  là trung điểm của  $MN$ , ta có  $MN = 2IH$ .

Do vậy,  $MN$  ngắn nhất khi và chỉ khi  $IH$  ngắn nhất. Điều đó xảy ra khi và chỉ khi  $IH \perp \Delta$ .

Ta có  $\vec{AB}(1;0;1)$  và  $[\vec{u}_d, \vec{u}_\Delta] = (5;1;-4)$  nên

$$\vec{AB} \cdot [\vec{u}_d, \vec{u}_\Delta] = 1.5 + 0.1 - 1.4 = 1 \text{ và } \left\| [\vec{u}_d, \vec{u}_\Delta] \right\| = \sqrt{5^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{42}.$$

$$\text{Khi đó, } \min IH = d(d, \Delta) = \frac{|\vec{AB} \cdot [\vec{u}_d, \vec{u}_\Delta]|}{\left\| [\vec{u}_d, \vec{u}_\Delta] \right\|} = \frac{\sqrt{42}}{42}.$$

$$\text{Vậy } \min MN = \frac{\sqrt{42}}{21}.$$

**Câu 198:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho bốn điểm  $A(2;1;4), B(2;5;4), C\left(-\frac{5}{2};5;-1\right), D(-3;1;-4)$ .

Các điểm  $M, N$  thỏa mãn  $MA^2 + 3MB^2 = 48$  và  $ND^2 = (\vec{NC} + \vec{BC}) \cdot \vec{ND}$ . Tìm độ dài ngắn nhất của đoạn thẳng  $MN$ .

A. 4.

B. 1.

C. 0.

D.  $\frac{2}{3}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

+ Gọi  $M(x; y; z)$

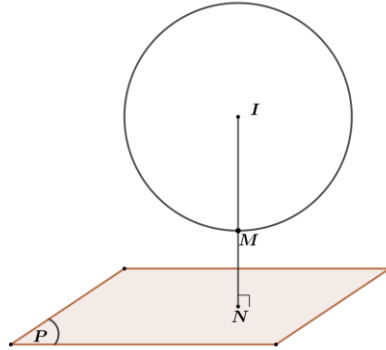
$$\text{Ta có: } MA^2 = (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 \text{ và } 3MB^2 = 3[(x-2)^2 + (y-5)^2 + (z-4)^2].$$

$MA^2 + 3MB^2 = 48 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-4)^2 = 9$ . Suy ra tập hợp điểm  $M$  là mặt cầu  $(S)$  có tâm  $I(2;4;4)$ , bán kính  $R=3$ .

+ Gọi  $N(a; b; c)$

$$\begin{aligned} ND^2 &= (\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{ND} \Leftrightarrow \overrightarrow{ND}^2 = (\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{ND} \Leftrightarrow \overrightarrow{ND} \cdot (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}) = 0 \\ &\Leftrightarrow 4(a+3) - 4(b-1) + 2(c+4) = 0 \Leftrightarrow 2a - 2b + c + 12 = 0. \text{ Suy ra tập hợp điểm } N \text{ là mặt} \\ &\text{phẳng } (P): 2x - 2y + z + 12 = 0. \end{aligned}$$

Suy ra  $d(I, (P)) = 4 > R$ .



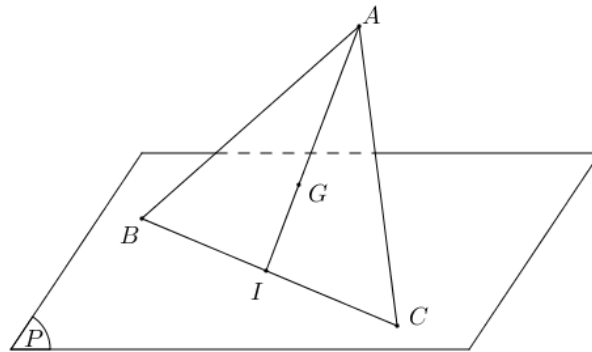
Vậy  $MN_{\min} = d_{(I; (P))} - R = 4 - 3 = 1$  khi  $IN \perp (P)$  và  $M = IN \cap (S)$ .

**Câu 199:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{-1}$  và mặt phẳng  $(P): 2x + y + z - 8 = 0$ . Tam giác  $ABC$  có  $A(-1; 2; 2)$  và trọng tâm  $G$  nằm trên  $d$ . Khi các đỉnh  $B, C$  di động trên  $(P)$  sao cho khoảng cách từ  $A$  tới đường thẳng  $BC$  đạt giá trị lớn nhất, một vectơ chỉ phương của đường thẳng  $BC$  là

**A.**  $(2; 1; 1)$ .      **B.**  $(2; 1; -1)$ .      **C.**  $(1; -2; 0)$ .      **D.**  $(1; 2; 0)$ .

**Lời giải**

**Chọn C**



Gọi  $I$  là trung điểm của  $BC$ .

$$G \in d \Rightarrow G(2a-1; a+2; -a-2).$$

$$G \text{ là trọng tâm tam giác } ABC \text{ nên } \overrightarrow{AI} = \frac{3}{2} \overrightarrow{AG} = \left( 3a; \frac{3}{2}a; -\frac{3}{2}(a+4) \right).$$

$$\text{Suy ra: } I \left( 3a-1; \frac{3}{2}a+2; -\frac{3}{2}a-4 \right).$$

$$A \in (P) \Rightarrow 2(3a-1) + \frac{3}{2}a + 2 - \frac{3}{2}a - 12 = 0 \Leftrightarrow a = 2 \Rightarrow I(5; 5; -7).$$

Vậy đường thẳng  $BC$  luôn đi qua điểm  $I$  cố định. Do đó  $d(A, BC)$  lớn nhất khi  $AI \perp BC$ .

Khi đó  $BC \perp AI, BC \subset (P)$  nên  $BC$  có vectơ chỉ phương là  $[\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{n_{(P)}}] = (12; -24; 0)$ .

**Câu 200:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai đường thẳng  $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2}, d_2: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$ . Đường thẳng  $d$  đi qua điểm  $A(5; -3; 5)$  cắt  $d_1, d_2$  tại hai điểm  $B$  và  $C$ . Độ dài đoạn thẳng  $BC$  bằng

**A.**  $3\sqrt{2}$

**B.**  $\sqrt{19}$

**C.**  $2\sqrt{5}$

**D.**  $2\sqrt{3}$

**Lời giải**

**Chọn B**

Gọi  $B(b+1; -1-b; 2b) \in d_1; C(c; 2c+1; c) \in d_2$ .

$\overrightarrow{AB}(b-4; 2-b; 2b-5); \overrightarrow{AC}(c-5; 2c+4; c-5)$

$$A, B, C \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} b-4 = k(c-5) \\ 2-b = k(2c+4) \\ 2b-5 = k(c-5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b-kc+5k=4 \\ -b-2kc-4k=-2 \\ 2b-kc+5k=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ kc=-\frac{1}{2} \\ k=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$c = -1 \Rightarrow B(2, -2, 2), C(-1, -1, -1) \Rightarrow BC = \sqrt{19}$$

**Câu 201:** Cho khối chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình bình hành  $AB=3, AD=4, \angle BAD=120^\circ$ . Cạnh bên  $SA=2\sqrt{3}$  và vuông góc với mặt phẳng  $(ABCD)$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $SA, SD$  và  $BC$ ,  $\alpha$  là góc giữa hai mặt phẳng  $(SAC)$  và  $(MNP)$ . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

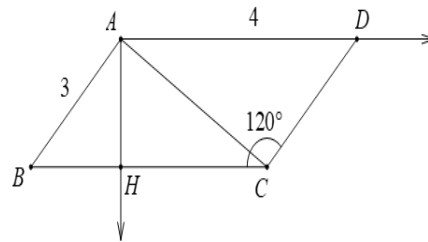
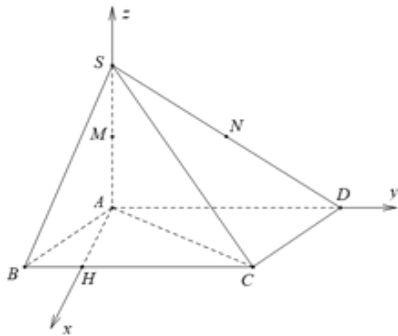
**A.**  $\alpha \in (0^\circ; 30^\circ)$ .

**B.**  $\alpha \in (30^\circ; 45^\circ)$ .

**C.**  $\alpha \in (45^\circ; 60^\circ)$ .

**D.**  $\alpha \in (60^\circ; 90^\circ)$ .

**Lời giải**



Hạ  $AH \perp BC$ , vì tam giác  $ABH$  có  $AB=3$ , góc  $BAH=30^\circ$  suy ra:

$$AH = \frac{3\sqrt{3}}{2}; BH = \frac{3}{2} \Rightarrow CH = \frac{5}{2}.$$

Gắn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho  $O \equiv A; H \in Ox; D \in Oy; S \in Oz$ . Suy ra  $A(0;0;0); H\left(\frac{3\sqrt{3}}{2};0;0\right); D(0;4;0); S(0;0;2\sqrt{3});$

$$B\left(\frac{3\sqrt{3}}{2};\frac{-3}{2};0\right); C\left(\frac{3\sqrt{3}}{2};\frac{5}{2};0\right); M(0;0;\sqrt{3}); N(0;2;\sqrt{3}); P\left(\frac{3\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};0\right)$$

$$\text{Khi đó: } \vec{n}_1 = \vec{n}_{(SAC)} = [\vec{SA}; \vec{AC}] = (5\sqrt{3}; -9; 0)$$

$$\vec{n}_2 = \vec{n}_{(MNP)} = [\vec{MP}; \vec{MN}] = (2\sqrt{3}; 0; 3\sqrt{3})$$

$$\text{Suy ra: } \cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|30 + 0 + 0|}{\sqrt{156} \cdot \sqrt{39}} = \frac{5}{13}.$$

Vậy:  $\alpha \in (60^\circ; 90^\circ)$ .

**Câu 202:** Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho đường thẳng  $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{2}$  và mặt cầu  $(S): (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 4$ . Hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$  chứa đường thẳng  $d$  và tiếp xúc với mặt cầu  $(S)$  lần lượt tại các tiếp điểm là  $M$  và  $N$ . Độ dài đoạn thẳng  $MN$  bằng

**A.**  $\frac{2\sqrt{5}}{3}$

**B.** 3

**C.**  $\frac{7}{3}$

**D.**  $\frac{4\sqrt{5}}{3}$

**Lời giải**

**Chọn D**

Mặt cầu  $(S)$  có tâm  $I(3;1;-1)$ , bán kính  $R=2$ .

Đường thẳng  $d$  đi qua điểm  $A(2;-1;1)$  và có một vector chỉ phương là  $\vec{u}_d = (2;1;2)$

Xét mặt phẳng thiết diện đi qua tâm  $I$ , điểm  $M, N$  và cắt  $d$  tại  $H$ .

Khi đó  $d(I, d) = IH$ .

Ta có:  $\vec{IA} = (-1; -2; 2)$ .

$$\vec{u}_d = (2; 1; 2)$$

$$\Rightarrow [\vec{IA}, \vec{u}_d] = (-6; 6; 3)$$

$$\Rightarrow d(I, d) = IH = \frac{||[\vec{IA}, \vec{u}_d]||}{|\vec{u}_d|} = \frac{\sqrt{(-6)^2 + 6^2 + 3^2}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = 3.$$

$$\Rightarrow IH = 3, IM = IN = R = 2 \Rightarrow MH = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{IH^2 - IM^2} = \sqrt{5}.$$

Gọi  $O$  là trung điểm của  $MN$ . Khi đó:

$$MO = \frac{MH \cdot IM}{IH} = \frac{2\sqrt{5}}{3} \Rightarrow MN = 2MO = \frac{4\sqrt{5}}{3}.$$

**Câu 203:** Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho đường thẳng  $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{2}$  và mặt cầu  $(S): (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 4$ . Hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$  chứa đường thẳng  $d$  và tiếp xúc với mặt cầu  $(S)$  lần lượt tại các tiếp điểm là  $M$  và  $N$ . Độ dài



đoạn thẳng  $MN$  bằng

A.  $\frac{2\sqrt{5}}{3}$

B. 3

C.  $\frac{7}{3}$

D.  $\frac{4\sqrt{5}}{3}$

Lời giải

Chọn D

Mặt cầu  $(S)$  có tâm  $I(3;1;-1)$ , bán kính  $R=2$ .

Đường thẳng  $d$  đi qua điểm  $A(2;-1;1)$  và có một vector chỉ phương là  $\vec{u}_d = (2;1;2)$

Xét mặt phẳng thiết diện đi qua tâm  $I$ , điểm  $M, N$  và cắt  $d$  tại  $H$ .

Khi đó  $d(I, d) = IH$ .

Ta có:  $\vec{IA} = (-1; -2; 2)$ .

$$\vec{u}_d = (2; 1; 2)$$

$$\Rightarrow [\vec{IA}, \vec{u}_d] = (-6; 6; 3)$$

$$\Rightarrow d(I, d) = IH = \frac{[\vec{IA}, \vec{u}_d]}{|\vec{u}_d|} = \frac{\sqrt{(-6)^2 + 6^2 + 3^2}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = 3.$$

$$\Rightarrow IH = 3, IM = IN = R = 2 \Rightarrow MH = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{IH^2 - IM^2} = \sqrt{5}.$$

Gọi  $O$  là trung điểm của  $MN$ . Khi đó:

$$MO = \frac{MH \cdot IM}{IH} = \frac{2\sqrt{5}}{3} \Rightarrow MN = 2MO = \frac{4\sqrt{5}}{3}.$$

**Câu 204:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 12$  và mặt phẳng  $(\alpha): x - 2y + 2z + 11 = 0$ . Lấy điểm  $M$  tùy ý trên  $(\alpha)$ . Từ  $M$  kẻ các tiếp tuyến  $MA, MB, MC$  đến mặt cầu  $(S)$ , với  $A, B, C$  là các tiếp tuyến đôi một phân biệt. Khi  $M$  thay đổi thì mặt phẳng  $(ABC)$  luôn đi qua một điểm cố định  $H(a; b; c)$ . Tổng  $a + b + c$  bằng

A. 2.

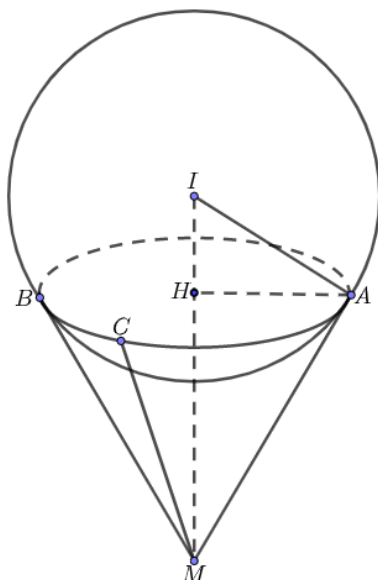
B.  $\frac{7}{2}$ .

C.  $-\frac{3}{4}$ .

D. 0.

Lời giải

Chọn A



Gọi  $M(x_0; y_0; z_0)$ , do  $M \in (\alpha) \Leftrightarrow x_0 - 2y_0 + 2z_0 + 11 = 0$ .

Ta có:  $\overrightarrow{IM} = (x_0 - 1; y_0 - 1; z_0 - 1)$ ,  $(ABC) = (x_0 - 1)(1 - x) + (y_0 - 1)(1 - y) + (z_0 - 1)(1 - z) = 0$

$$IH = d(I, (ABC)) = \frac{|(x_0 - 1)(1 - a) + (y_0 - 1)(1 - b) + (z_0 - 1)(1 - c)|}{\sqrt{(x_0 - 1)^2 + (y_0 - 1)^2 + (z_0 - 1)^2}}$$

$$IA^2 = IH \cdot IM \Leftrightarrow 12 = |x_0(1 - a) + y_0(1 - b) + z_0(1 - c) + a + b + c - 3| \text{ Do } H \text{ là điểm cố định}$$

$$\text{nên: } \begin{cases} 1 - a = k \\ 1 - b = -2k \\ 1 - c = 2k \end{cases} \Leftrightarrow |-12k| = 12 \Leftrightarrow |k| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = -1(L) \end{cases} \text{ (do } I, M \text{ khác phía so với mặt}$$

phẳng  $(ABC)$ ). Suy ra  $H(0; 3; -1)$ .

**Câu 205:** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu  $(S)$  có tâm thuộc mặt phẳng  $(P): x + 2y + z - 7 = 0$  và đi qua hai điểm  $A(1; 2; 1)$ ,  $B(2; 5; 3)$ . Bán kính nhỏ nhất của mặt cầu  $(S)$  bằng:

**A.**  $\frac{\sqrt{470}}{3}$ .

**B.**  $\frac{\sqrt{546}}{3}$ .

**C.**  $\frac{\sqrt{763}}{3}$ .

**D.**  $\frac{\sqrt{345}}{3}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

Gọi  $I$  là tâm mặt cầu  $(S) \Rightarrow I \in (Q)$  là mặt phẳng trung trực của

$$AB: \begin{cases} \text{qua } M\left(\frac{3}{2}; \frac{7}{2}; 2\right) \\ VTPT \overrightarrow{AB} = (1; 3; 2) \end{cases}$$

có dạng:  $x + 3y + 2z - 16 = 0$ .

Vậy  $I \in d$  là giao tuyến của 2 mặt phẳng:  $\begin{cases} x + 3y + 2z - 16 = 0 \\ x + 2y + z - 7 = 0 \end{cases}$

$$+ \text{ cho } x = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = -2 \\ z = 11 \end{cases} \rightarrow C(0; -2; 11) \in d \text{ và cho } x = 1 \Rightarrow \begin{cases} y = -3 \\ z = 12 \end{cases} \rightarrow D(1; -3; 12) \in d.$$

Khi đó  $\overrightarrow{AB} = (-3; -3; -3) = -3(1; 1; 1)$ .

Vậy đường thẳng  $d$  đi qua điểm  $A(1;2;2)$  và nhận  $\vec{u} = (1;1;1)$  làm vec tơ chỉ phương có phương trình là  $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{1}$ .

**Câu 208:** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho điểm  $A(1;2;3)$ ,  $B(0;4;5)$ . Gọi  $M$  là điểm sao cho  $MA=2MB$ . Khoảng cách từ điểm  $M$  đến mặt phẳng  $(P): 2x-2y-z+6=0$  đạt giá trị nhỏ nhất là:

A.  $\frac{14}{9}$ .

B.  $\frac{7}{9}$ .

C.  $\frac{11}{9}$ .

D.  $\frac{17}{9}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Gọi  $M(x;y;z)$

Khi đó  $MA=2MB$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4[x^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2]$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + \frac{2}{3}x - \frac{28}{3}y - \frac{34}{3}z + 50 = 0$$

Suy ra tập hợp các điểm  $M$  thỏa  $MA=2MB$  là mặt cầu  $(S)$  tâm  $I\left(-\frac{1}{3}; \frac{14}{3}; \frac{17}{3}\right)$  và

bán kính  $R=2$ .

Vì  $d(I, (P)) = \frac{29}{9} > R$  nên  $(P)$  không cắt  $(S)$ .

Do đó khoảng cách từ điểm  $M$  đến mặt phẳng  $(P): 2x-2y-z+6=0$  đạt giá trị nhỏ nhất là

$$d_{\min} = d(I, (P)) - R = \frac{29}{9} - 2 = \frac{11}{9}.$$