TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

Tạp chí Toán học & Văn học trong nhà trường

Số 556
Tháng 10 - 2023
ISSN: 2734-9284

VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 60 - XUẤT BẢN TỪ 1964 - DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT Biên tập: (024) 35121607; ĐT Phát hành: (024) 35142649;
ĐT-Fax Hành chính: (024) 35121606 - Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com - Website: viennghiencuusachgd.com

Johan Jensen (1859-1925)
Nhà toán học Đan Mạch

Cảnh đẹp Copenh

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Bộ đóng tập

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ HÀNG NĂM

Năm 2010
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 99.000 đồng

Năm 2012
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 152.000 đồng

Năm 2013
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 175.000 đồng

Năm 2014
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 185.000 đồng

Năm 2015
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2016
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2017
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2018
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2019
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2020
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 210.000 đồng

Năm 2021
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 240.000 đồng

Năm 2022
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 260.000 đồng

Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
Địa chỉ: 187B Giảng Võ, Hà Nội
• Điện thoại: 024.35121606 - 024.35121607
• Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC ĐỂ GIẢI CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC

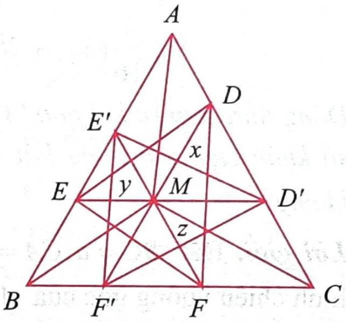
VŨ HỮU CHÍN
(GV THCS Hồng Bàng, TP. Hải Phòng)

Trong các đề thi vào lớp 10 THPT, THPT chuyên, thi HSG lớp 9, nhiều học sinh còn lúng túng khi gặp những bài toán thuộc dạng bài liên quan đến bất đẳng thức hình học. Bài viết này giới thiệu với các em cách giải dạng toán này sử dụng các bất đẳng thức đại số để giải các bài toán bất đẳng thức hình học.

DẠNG 1. BẤT ĐẲNG THỨC LIÊN QUAN ĐẾN CẠNH VÀ DIỆN TÍCH TAM GIÁC

Bài 1.1. *Cho ΔABC đều cạnh bằng a. Với mỗi điểm M nằm trong ΔABC hãy tìm ba điểm D, E, F lần lượt thuộc các cạnh AC, AB, BC sao cho $DE = MA, EF = MB, FD = MC$. Hãy xác định vị trí của M để diện tích ΔDEF đạt giá trị lớn nhất và tính giá trị đó theo a.*

Lời giải.



Đường thẳng đi qua M song song với BC cắt AB, AC lần lượt tại E, D'. Đường thẳng đi qua M song song với AB cắt AC, BC lần lượt tại D, F'. Đường thẳng đi qua M song song với AC cắt BC, AB lần lượt tại F, E'. Theo tính chất hình thang cân ta có:

$DE = MA = D'E', EF = MB = E'F', FD = MC = F'D'$.

Như vậy ta dựng được hai tam giác DEF và $D'E'F'$ cùng thỏa mãn đề bài.

Cách 1. Đặt $MD = x, ME = y, MF = z$. Do tính chất tam giác đều có:

$$x + y + z = DD' + DA + D'C = AC = a.$$

Ta có: $S_{DEF} = S_{MDE} + S_{MEF} + S_{MFD}$

$$= \frac{1}{2}xy.\sin 60^0 + \frac{1}{2}yz.\sin 60^0 + \frac{1}{2}zx.\sin 60^0$$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}(xy + yz + zx)$ (sử dụng kết quả $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin A$, bạn đọc tự chứng minh).

Áp dụng BĐT: $3(xy + yz + zx) \le (x + y + z)^2 = a^2$ ta suy ra $S_{DEF} \le \frac{\sqrt{3}}{12}a^2$. Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z \Leftrightarrow M$ là trọng tâm ΔABC đều. Do đó $\max S_{DEF} = \frac{\sqrt{3}}{12}a^2$ khi M là trọng tâm ΔABC.

Cách 2. Ta có: $S_{DEF} = S_{ABC} - (S_{ADE} + S_{BEF} + S_{CFD})$

$$\Rightarrow \frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = 1 - \left(\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} + \frac{S_{BEF}}{S_{ABC}} + \frac{S_{CFD}}{S_{ABC}}\right)$$

$$= 1 - \left(\frac{AD.AE}{a^2} + \frac{BE.BF}{a^2} + \frac{CF.CD}{a^2}\right);$$

$$= \frac{a^2 - y(a - z) - z(a - x) - x(a - y)}{a^2};$$

$= \frac{xy + yz + zx}{(x + y + z)^2} \le \frac{1}{3}$ (áp dụng BĐT $(x + y + z)^2 \ge 3(xy + yz + zx), \forall x, y, z$)

$\Rightarrow S_{DEF} \le \frac{1}{3}S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{12}a^2$. Vậy $\max S_{DEF} = \frac{\sqrt{3}}{12}a^2$ khi M là trọng tâm ΔABC.

Cách 3. Ta có: $S_{ABC} - S_{MDD'} - S_{MEE'} - S_{MFF'}$

$$= S_{ADME'} + S_{BEMF'} + S_{CFMD'}$$

$$= 2S_{MDE} + 2S_{MEF} + 2S_{MDF} = 2S_{DEF}$$

$$\Rightarrow S_{DEF} = \frac{1}{2}(S_{ABC} - S_{MDD'} - S_{MEE'} - S_{MFF'}).$$

$$S_{DEF} = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{x^2\sqrt{3}}{4} - \frac{y^2\sqrt{3}}{4} - \frac{z^2\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{8}\left[a^2-\left(x^2+y^2+z^2\right)\right].$$

Áp dụng BĐT $x^2+y^2+z^2\ge\frac{(x+y+z)^2}{3}$, $\forall x,y,z$ ta có :

$$S_{DEF}\le\frac{\sqrt{3}}{8}\left[a^2-\frac{(x+y+z)^2}{3}\right]=\frac{\sqrt{3}}{8}\left[a^2-\frac{a^2}{3}\right]$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{12}a^2.$$

Nhận xét. Ta đã giải bài toán theo thứ tự các bước: Lập biểu thức S_{DEF} theo các biến; sử dụng các bất đẳng thức đại số đối với 3 biến hợp lí; xét dấu "=" của bất đẳng thức để tìm giá trị lớn nhất của S_{DEF}.

Bài 1.2. *Cho ΔABC có a,b,c là độ dài ba cạnh và S là diện tích tam giác. Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}\ge\frac{3\sqrt[4]{3}}{2\sqrt{S}}.$$

Lời giải. Cách 1. Đặt $x=a+b-c; y=b+c-a;$ $z=c+a-b$. Ta có : $x,y,z>0$

$$\text{và}\quad a+b+c=x+y+z,$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{1}{4}\sqrt{xyz(x+y+z)};$$

$p=\frac{a+b+c}{2}$. Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$xy+yz+zx\ge3\sqrt[3]{(xyz)^2};\ x+y+z\ge3\sqrt[3]{xyz}.$$

Suy ra:

$$(xy+yz+zx).\sqrt[4]{x+y+z}\ge3.\sqrt[3]{(xyz)^2}.\sqrt[4]{3}.\sqrt[4]{\sqrt[3]{xyz}}$$

$$\Leftrightarrow(xy+yz+zx).\sqrt[4]{x+y+z}\ge3\sqrt[4]{3}.\sqrt[4]{(xyz)^3}$$

$$\Leftrightarrow\frac{xy+yz+zx}{xyz}\ge\frac{3\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{xyz(x+y+z)}}=\frac{3\sqrt[4]{3}}{2\sqrt{S}}.$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{3\sqrt[4]{3}}{2\sqrt{S}}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}\ge\frac{3\sqrt[4]{3}}{2\sqrt{S}}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c$.

Cách 2. Áp dụng BĐT: Với $x,y,z>0$ thì

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{9}{x+y+z},$$

ta có: $\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\ge\frac{9}{p}$ với $p=\frac{a+b+c}{2}$

$$\Rightarrow4.\left(\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\right)\ge3.\left(\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}+\frac{3}{p}\right).$$

Áp dụng BĐT Cauchy với 4 số dương, ta có:

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}+\frac{3}{p}$$

$$\ge4.\sqrt[4]{\frac{3}{p(p-a)(p-b)(p-c)}}=\frac{4\sqrt[4]{3}}{\sqrt{S}}$$

$$\Rightarrow4.\left(\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\right)\ge3.\frac{4\sqrt[4]{3}}{\sqrt{S}}.$$

Do đó: $\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}\ge\frac{3\sqrt[4]{3}}{2\sqrt{S}}$.

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c$.

Nhận xét. Trong quá trình làm bài ta cần vận dụng linh hoạt các BĐT đại số. Trong cách 1 ta sử dụng BĐT Cauchy với 3 số dương, trong cách 2 ta sử dụng BĐT Cauchy với 4 số dương.

Bài 1.3. *Cho ΔABC với độ dài các cạnh là a,b,c và diện tích S. Chứng minh rằng:*

$$S\le\frac{1}{16}\left(3a^2+2b^2+2c^2\right).$$

Đẳng thức xảy ra khi nào? Có thể tìm được các hệ số khác của a,b,c để bất đẳng thức vẫn xảy ra không?

Lời giải. Đặt $BC=a, CA=b, AB=c$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BC. Ta có:

$$3a^2+2b^2+2c^2=3a^2+2\left(HC^2+HA^2\right)+2\left(HB^2+HA^2\right)$$

$$=3a^2+2\left(HC^2+HB^2\right)+4HA^2$$

$$\ge3a^2+(HC+HB)^2+4HA^2$$

(áp dụng BĐT $2\left(x^2+y^2\right)\ge(x+y)^2$, $\forall x,y$)

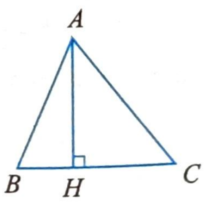
$$\ge3a^2+a^2+4HA^2=4\left(a^2+HA^2\right)$$

$$\ge8a.HA=16S$$

(áp dụng BĐT $x^2+y^2\ge2xy$, $\forall x,y$).

Vậy $S\le\frac{1}{16}\left(3a^2+2b^2+2c^2\right)$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi



$$\begin{cases} HB = HC \\ H \in [BC] \\ HA = a \end{cases} \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ cân tại } A \text{ và đường cao}$$

$$HA = a \Leftrightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{\sqrt{5}} = \frac{c}{\sqrt{5}}.$$

Để giải quyết câu hỏi cuối cùng của bài toán, ta phát biểu và giải bài toán sau:

Bài toán. *Cho ΔABC với độ dài các cạnh là a,b,c và diện tích S. Với ba số x,y,z thỏa mãn điều kiện $\sqrt{y+z},\sqrt{z+x},\sqrt{x+y}$ có nghĩa và là độ dài ba cạnh của một tam giác nào đó, chứng minh rằng: $S \le \frac{1}{4\sqrt{xy+yz+zx}}.(xa^2+yb^2+zc^2)$.*

Khi nào xảy ra đẳng thức?

Lời giải. • *Nhận xét*: *Nếu $\sqrt{y+z},\sqrt{z+x},\sqrt{x+y}$ có nghĩa và là độ dài ba cạnh của một tam giác thì $xy+yz+zx>0$.*

Chứng minh: + Nếu $x,y,z>0$ thì có $xy+yz+zx>0$.

+ Nếu trong ba số x,y,z có một số không dương. Giả sử $x \le 0$, do $\sqrt{y+z},\sqrt{z+x},\sqrt{x+y}$ là 3 cạnh của một tam giác nên: $\sqrt{z+x}+\sqrt{x+y}>\sqrt{y+z}$

$$\Leftrightarrow 2x+z+y+2\sqrt{(z+x)(x+y)}>y+z$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(z+x)(x+y)}>-x \ (\text{do } x\le 0)$$

$$\Leftrightarrow x^2+yz+zx+xy>x^2 \Leftrightarrow yz+zx+xy>0.$$

Nhận xét được chứng minh.

Ta có: $y+z>0, z+x>0, x+y>0$, nên trong ba số x,y,z có ít nhất hai số dương. Không mất tính tổng quát, giả sử $y,z>0$ và $y+z=\max\{y+z,z+x,x+y\}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BC thì $HB+HC\ge BC$. Ta có:

$$xa^2+yb^2+zc^2 = x.BC^2+y\left(HC^2+HA^2\right)+z\left(HB^2+HA^2\right)$$

$$= x.BC^2+(y+z)HA^2+\left(yHC^2+zHB^2\right) \ (1).$$

Áp dụng BĐT Bunyakovsky, ta có:

$$yHC^2+zHB^2 = \frac{yz}{y+z}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right)^2\right]\times$$

$$\times\left[\left(\sqrt{y}.HC\right)^2+\left(\sqrt{z}.HB\right)^2\right]$$

$$\ge \frac{yz}{y+z}(HC+HB)^2 \ge \frac{yz}{y+z}BC^2$$

Thay vào (1) và áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$xa^2+yb^2+zc^2 \ge \left(x+\frac{yz}{y+z}\right).BC^2+(y+z)AH^2$$

$$= \frac{xy+yz+zx}{y+z}.BC^2+(y+z)AH^2$$

$$\ge 2\sqrt{xy+yz+zx}.BC.AH$$

$$= 4\sqrt{xy+yz+zx}.S$$

$$\Rightarrow S \le \frac{1}{4\sqrt{xy+yz+zx}}.\left(xa^2+yb^2+zc^2\right).$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ $yHC = zHB$; H thuộc đoạn BC; $\sqrt{\frac{xy+yz+zx}{y+z}}.BC = \sqrt{y+z}.AH$

$$\Leftrightarrow HC = \frac{z}{y+z}BC;\ HB = \frac{y}{y+z}BC;\ HA = \frac{\sqrt{xy+yz+zx}}{y+z}BC \ (2)$$

$$\Rightarrow HC^2+HA^2 = \frac{x+z}{y+z}BC^2; HB^2+HA^2 = \frac{x+y}{y+z}BC^2 \ (3).$$

Mà $y+z=\max\{y+z,z+x,x+y\}$, nên từ (3) suy ra (2). Vậy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$AC^2 = \frac{x+z}{y+z}BC^2; AB^2 = \frac{x+y}{y+z}BC^2$$

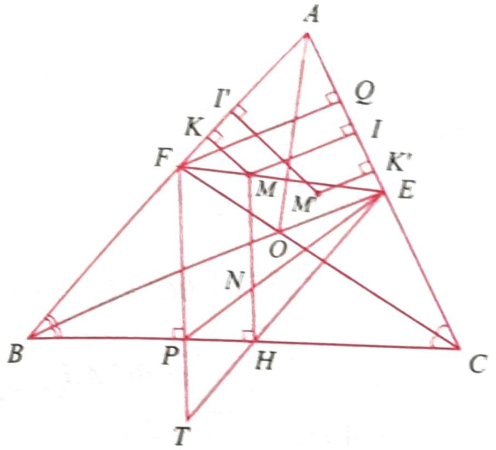
$$\Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{y+z}} = \frac{b}{\sqrt{z+x}} = \frac{c}{\sqrt{x+y}}.$$

Nhận xét. Trong bài toán trên ta tìm được các hệ số khác của a,b,c để BĐT vẫn đúng và đây là bài toán tổng quát của bài toán đã cho. Khi giải bài toán tổng quát ta đã sử dụng BĐT Bunyakovsky. Tương tự, ta có thể sử dụng BĐT Bunyakovsky để giải bài toán sau:

Bài 1.4 (TH&TT, T4/261). *Cho ΔABC có các đường phân giác trong BE, CF. Lấy điểm M trên đoạn thẳng EF. Gọi S_A, S_B, S_C thứ tự là diện tích các tam giác MBC, MCA, MAB. Chứng minh rằng: $\frac{\sqrt{S_B}+\sqrt{S_C}}{\sqrt{S_A}} \le \sqrt{\frac{AC+AB}{BC}}$.*

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải. Đặt $BC=a, CA=b, AB=c$. Kẻ $MH\perp BC$,



$MI\perp CA, MK\perp AB, (H\in BC, I\in CA, K\in AB)$.

Kẻ $FP\perp BC, FQ\perp CA, (P\in BC, Q\in CA)$; EP cắt MH tại N. Có $MH\parallel FP, MI\parallel FQ$.

Suy ra $\dfrac{MN}{FP}=\dfrac{EM}{EF}=\dfrac{MI}{FQ}$. Do CF là đường phân giác, nên $FP=FQ$. Suy ra $MN=MI$ (1).

Chứng minh tương tự từ E kẻ các đường vuông góc đến BC, BA, ta có $NH=MK$ (2).

Từ (1) và (2), suy ra:

$$MI+MK=MN+NH=MH \quad (3).$$

Áp dụng BĐT Bunyakovsky ta có:

$$\sqrt{2S_B}+\sqrt{2S_C}=\sqrt{b.MI}+\sqrt{c.MK}\le\sqrt{(b+c)(MI+MK)}$$

$$\Rightarrow\sqrt{2S_B}+\sqrt{2S_C}\le\sqrt{(b+c)MH}$$

$$\Rightarrow\sqrt{2S_B}+\sqrt{2S_C}\le\sqrt{(b+c)\frac{MH.a}{a}}=\sqrt{\frac{b+c}{a}}.\sqrt{2S_A}$$

$\Rightarrow\dfrac{\sqrt{S_B}+\sqrt{S_C}}{\sqrt{S_A}}\le\sqrt{\dfrac{b+c}{a}}$. Đẳng thức xảy ra khi $\dfrac{MI}{MK}=\dfrac{b}{c}\Leftrightarrow MI.c=MK.b$. Lấy điểm M' đối xứng với M qua đường phân giác AO, $O=BE\cap CF$. Kẻ $M'I', M'K'$ lần lượt vuông góc AB, AC $(I'\in AB, K'\in AC)$ thì

$$M'I'=MI, M'K'=MK$$

$$\Rightarrow S_{M'AB}=\frac{1}{2}M'I'.c=\frac{1}{2}MI.c=\frac{1}{2}MK.b=\frac{1}{2}M'K'.b=S_{M'AC}.$$

Suy ra M' nằm trên đường trung tuyến xuất phát từ A của ΔABC. Vậy đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của EF và tia Ax, với tia Ax là đường đối xứng qua đường phân giác AD của đường trung tuyến qua A của ΔABC.

Bài 1.5. *Cho ΔABC và điểm M nằm trong tam giác. Các điểm A_1, B_1, C_1 thứ tự thuộc các cạnh BC, CA, AB và thỏa mãn $A_1B_1\parallel AM$, $B_1C_1\parallel BM, C_1A_1\parallel CM$. Chứng minh rằng:*

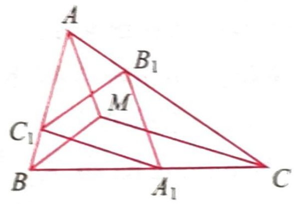
$$S_{A_1B_1C_1}\le\frac{1}{3}S_{ABC}.$$

(Kí hiệu S_{ABC} là diện tích tam giác ΔABC).

Lời giải. Từ $B_1C_1\parallel BM$ nên $S_{BB_1C_1}=S_{MB_1C_1}$. Do đó: $\dfrac{AB_1}{AC}=\dfrac{S_{AB_1B}}{S_{ACB}}=\dfrac{S_{AB_1C_1}+S_{BB_1C_1}}{S_{ABC}}$

$$=\frac{S_{AB_1C_1}+S_{MB_1C_1}}{S_{ABC}}=\frac{S_{AB_1MC_1}}{S_{ABC}} \quad (1).$$

Tương tự ta có:



$$\frac{BC_1}{BA}=\frac{S_{BC_1MA_1}}{S_{ABC}},$$

$$\frac{CA_1}{CB}=\frac{S_{CA_1MB_1}}{S_{ABC}} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{AB_1}{AC}+\dfrac{BC_1}{BA}+\dfrac{CA_1}{CB}=1$ (*).

Lại có:

$$\frac{S_{MB_1C_1}}{S_{ABC}}=\frac{S_{BB_1C_1}}{S_{ABC}}=\frac{S_{BB_1C_1}}{S_{BB_1A}}.\frac{S_{BB_1A}}{S_{ABC}}=\frac{BC_1}{BA}.\frac{AB_1}{AC} \quad (3).$$

Tương tự có:

$$\frac{S_{MC_1A_1}}{S_{ABC}}=\frac{CA_1}{CB}.\frac{BC_1}{BA};\frac{S_{MA_1B_1}}{S_{ABC}}=\frac{AB_1}{AC}.\frac{CA_1}{CB} \quad (4).$$

Từ (3) và (4) suy ra:

$$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}}=\frac{BC_1}{BA}.\frac{AB_1}{AC}+\frac{CA_1}{CB}.\frac{BC_1}{BA}+\frac{AB_1}{AC}.\frac{CA_1}{CB}.$$

Áp dụng BĐT $ab+bc+ca\le\frac{1}{3}(a+b+c)^2$ ta có:

$$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}}\le\frac{1}{3}\left(\frac{AB_1}{AC}+\frac{BC_1}{BA}+\frac{CA_1}{CB}\right)^2=\frac{1}{3} \text{ (theo(*))}$$

$\Rightarrow S_{A_1B_1C_1}\le\dfrac{1}{3}S_{ABC}$. Dấu "=" xảy ra

$$\Leftrightarrow\frac{AB_1}{AC}=\frac{BC_1}{BA}=\frac{CA_1}{CB}$$

$\Leftrightarrow M$ là trọng tâm ΔABC.

Bài 1.6. *Gọi a,b,c là độ dài ba cạnh của tam giác và $0 \le t \le 1$. Chứng minh rằng:*

$$\sqrt{\frac{a}{b+c-ta}}+\sqrt{\frac{b}{c+a-tb}}+\sqrt{\frac{c}{a+b-tc}} \ge 2\sqrt{t+1}.$$

Lời giải. Từ $0 \le t \le 1$, suy ra:

$$b+c-ta \ge b+c-a > 0.$$

Tương tự ta có: $a+b-tc>0, a+c-tb>0$. Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$\sqrt{\frac{b+c-ta}{a}.(t+1)} \le \frac{1}{2}\left[\frac{b+c-ta}{a}+(t+1)\right]=\frac{a+b+c}{2a}.$$

Suy ra $\sqrt{\frac{a}{b+c-ta}} \ge \frac{2a\sqrt{t+1}}{a+b+c}$. Chứng minh tương tự có:

$$\sqrt{\frac{b}{a+c-tb}} \ge \frac{2b\sqrt{t+1}}{a+b+c}; \sqrt{\frac{c}{a+b-tc}} \ge \frac{2c\sqrt{t+1}}{a+b+c}.$$

Cộng theo vế các BĐT ta được:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c-ta}}+\sqrt{\frac{b}{c+a-tb}}+\sqrt{\frac{c}{a+b-tc}} \ge 2\sqrt{t+1}.$$

Dấu ‘‘=’’ xảy ra khi:

$$\frac{b+c-ta}{a}=1+t; \frac{a+b-tc}{c}=1+t; \frac{a+c-tb}{b}=1+t$$

$\Leftrightarrow a=b=c, t=\frac{1}{2}$. Khi đó ΔABC đều.

Bài 1.7. *Cho ΔABC có góc không nhọn với $AB=c, BC=a, CA=b$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$.*

Lời giải. Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $\widehat{C} \ge 90^0$, khi đó:

$$c^2 \ge a^2+b^2 \ge 2ab \Rightarrow c \ge \sqrt{2ab}$$

(dấu “=” xảy ra khi ΔABC vuông cân tại C).

Ta có:

$$P=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$$

$$=\frac{2abc+a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b}{abc}.$$

$$=2+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a+b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\right).$$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \ge 2$;

$$\frac{a+b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b} \ge 3\sqrt[3]{\frac{(a+b)cc}{cab}}=3\sqrt[3]{\frac{(a+b)c}{ab}}$$

$$\ge 3\sqrt[3]{\frac{2\sqrt{ab}.\sqrt{2ab}}{ab}}=3\sqrt{2} \text{ (do } c \ge \sqrt{2ab}).$$

Do đó $P \ge 2+2+3\sqrt{2}=4+3\sqrt{2}$.

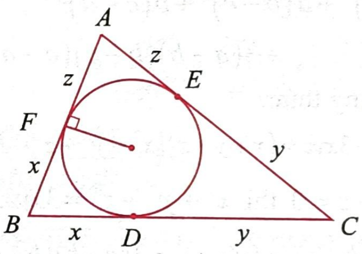
Dấu “=” xảy ra khi $\begin{cases} a=b; c=2\sqrt{ab} \\ \frac{a+b}{c}=\frac{c}{a}=\frac{c}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông cân tại C. Vậy $\min P=4+3\sqrt{2}$ khi ΔABC vuông cân tại C.

Nhận xét. Từ $c \ge \sqrt{2ab}$, dự đoán ΔABC vuông cân tại C, nên chúng ta tách biểu thức P phù hợp để áp dụng BĐT Cauchy.

Bài 1.8. *Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:*

$$2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right) \ge \frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+3.$$

Lời giải.



Ta có: $2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right) \ge \frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+3$ (1)

$$\Leftrightarrow 2\left(a^2c+b^2a+c^2b\right) \ge a^2b+b^2c+c^2a+3abc$$

$$\Leftrightarrow a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a) \ge ac(b-a)+ab(c-b)+bc(a-c)$$

$$\Leftrightarrow a(a-b)(c-b)+b(a-c)(b-c)+c(b-a)(c-a) \ge 0 \text{ (2)}.$$

Do a,b,c là độ dài 3 cạnh của tam giác, nên tồn tại $x,y,z>0$ sao cho $a=x+y, b=y+z, c=z+x$.

Do đó BĐT(2) tương đương với

$$(x+y)(x-y)(x-z)+(y+z)(y-z)(y-x) + (z+x)(z-x)(z-y) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-y^2)(x-z)+(y^2-z^2)(y-x)+(z^2-x^2)(z-y)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow x^3-2x^2z+xz^2+y^3-2xy^2+x^2y+z^3-2yz^2+y^2z\ge 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-z)^2+y(y-x)^2+z(z-y)^2\ge 0,$$

BĐT cuối luôn đúng. Do đó BĐT(1) đúng. Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z\Leftrightarrow a=b=c$.

Nhận xét. Với mỗi tam giác có một đường tròn nội tiếp, để giải bài toán trên ta sử dụng phương pháp đổi biến.

Bài 1.9. *Với a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:*

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{3(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}\ge 9.$$

Lời giải.

$$\text{BĐT}\Leftrightarrow\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}-2\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}-2\right)+\frac{3(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{(b-c)^2}{bc}+\frac{(c-a)^2}{ca}+\frac{3(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow c(a-b)^2+a(b-c)^2+b(c-a)^2+3(a-b)(b-c)(c-a)\ge 0\quad (*).$$

Từ hằng đẳng thức:

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

nếu $x+y+z=0$ thì $x^3+y^3+z^3=3xyz$. Do đó:

$$(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=3(a-b)(b-c)(c-a).$$

Suy ra: $(*)\Leftrightarrow c(a-b)^2+a(b-c)^2+b(c-a)^2+(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3\ge 0$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2(c+a-b)+(b-c)^2(a+b-c)+(c-a)^2(b+c-a)\ge 0.$$

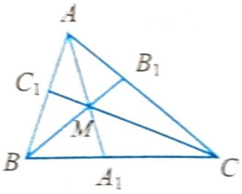
BĐT trên luôn đúng với a,b,c là ba cạnh của một tam giác. Vậy BĐT được chứng minh.
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

DẠNG 2. BẤT ĐẲNG THỨC HÌNH HỌC LIÊN QUAN CÁC ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUY

Bài 2.1. *Cho điểm M nằm trong ΔABC. Qua M vẽ các đường thẳng AM, BM, CM cắt các cạnh tam giác tương ứng tại các điểm A_1, B_1, C_1. Chứng minh rằng:*

$$\text{a) } \frac{AM}{A_1M}+\frac{BM}{B_1M}+\frac{CM}{C_1M}\ge 6;\ \text{b) } \frac{AM}{A_1M}\cdot\frac{BM}{B_1M}\cdot\frac{CM}{C_1M}\ge 8.$$

Lời giải.



a) Kí hiệu $S_1=S_{MBC}$, $S_2=S_{MAC}, S_3=S_{MAB}$.

Ta có:

$$\frac{AA_1}{A_1M}=\frac{S_{ABC}}{S_{MBC}}=\frac{S_1+S_2+S_3}{S_1}.$$

$$\Rightarrow\frac{AA_1-A_1M}{A_1M}=\frac{S_2+S_3}{S_1}\Rightarrow\frac{AM}{A_1M}=\frac{S_2}{S_1}+\frac{S_3}{S_1}.$$

Tương tự có: $\dfrac{BM}{B_1M}=\dfrac{S_3}{S_2}+\dfrac{S_1}{S_2};\dfrac{CM}{C_1M}=\dfrac{S_1}{S_3}+\dfrac{S_2}{S_3}.$

Do đó: $\dfrac{AM}{A_1M}+\dfrac{BM}{B_1M}+\dfrac{CM}{C_1M}$

$$=\left(\frac{S_2}{S_1}+\frac{S_1}{S_2}\right)+\left(\frac{S_2}{S_3}+\frac{S_3}{S_2}\right)+\left(\frac{S_3}{S_1}+\frac{S_1}{S_3}\right).$$

Áp dụng BĐT $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\ge 2$, với $x,y>0$ ta có:

$$\frac{AM}{A_1M}+\frac{BM}{B_1M}+\frac{CM}{C_1M}\ge 2+2+2=6.$$

Dấu "=" xảy ra khi $S_1=S_2=S_3\Leftrightarrow M$ là trọng tâm ΔABC.

b) Từ phần a) ta có:

$$\frac{AM}{A_1M}\cdot\frac{BM}{B_1M}\cdot\frac{CM}{C_1M}=\frac{S_2+S_3}{S_1}\cdot\frac{S_3+S_1}{S_2}\cdot\frac{S_1+S_2}{S_3}$$

Áp dụng BĐT $x+y\ge 2\sqrt{xy}$, với $x,y>0$ ta có:

$$\frac{AM}{A_1M}\cdot\frac{BM}{B_1M}\cdot\frac{CM}{C_1M}\ge\frac{2\sqrt{S_2S_3}}{S_1}\cdot\frac{2\sqrt{S_3S_1}}{S_2}\cdot\frac{2\sqrt{S_1S_2}}{S_3}=8.$$

Dấu "=" xảy ra khi $S_1=S_2=S_3\Leftrightarrow M$ là trọng tâm ΔABC.

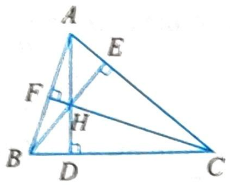
Nhận xét. Từ bài toán trên ta tìm được giá trị nhỏ nhất của tổng và tích các tỉ số $\dfrac{AM}{A_1M};\dfrac{BM}{B_1M};\dfrac{CM}{C_1M}$.

Bài 2.2. *Xét các ΔABC có góc ba góc nhọn với H là trực tâm của tam giác. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{HA}{BC}+\dfrac{HB}{CA}+\dfrac{HC}{AB}$.*

Lời giải. Đặt $BC = a, CA = b, AB = c,$

$$AH = x,\ BH = y, CH = z.$$

Ta có: $\Delta AFC \sim \Delta HEC$ (g.g)



nên $\dfrac{HC}{AC} = \dfrac{CE}{CF}$. Suy ra:

$$\frac{HC.HB}{AC.AB} = \frac{CE.HB}{CF.AB} = \frac{S_{HBC}}{S_{ABC}}.$$

Tương tự có: $\dfrac{HB.HA}{AC.BC} = \dfrac{S_{HAB}}{S_{ABC}}; \dfrac{HA.HC}{AB.BC} = \dfrac{S_{HAC}}{S_{ABC}}.$

Do đó: $\dfrac{xy}{ab} + \dfrac{yz}{bc} + \dfrac{xz}{ac} = \dfrac{HB.HA}{AC.BC} + \dfrac{HB.HC}{AC.AB} + \dfrac{HA.HC}{AB.BC}$

$$= \frac{S_{HBC} + S_{HAB} + S_{HAC}}{S_{ABC}} = 1.$$

Áp dụng BĐT

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)^2 \geq 3\left(\frac{xy}{ab} + \frac{yz}{bc} + \frac{xz}{ac}\right) = 3$$

$\Rightarrow \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} \geq \sqrt{3}$ hay $P = \dfrac{HA}{BC} + \dfrac{HB}{CA} + \dfrac{HC}{AB} \geq \sqrt{3}.$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{HA}{BC} = \frac{HB}{CA} = \frac{HC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \frac{S_{HBC}}{S_{ABC}} = \frac{S_{HAB}}{S_{ABC}} = \frac{S_{HAC}}{S_{ABC}} = \frac{1}{3}$$

$\Leftrightarrow$ H là trọng tâm ΔABC $\Leftrightarrow$ AD, BE, CF là các đường trung tuyến của ΔABC $\Leftrightarrow$ ΔABC đều.

Vậy $\min P = \dfrac{HA}{BC} + \dfrac{HB}{CA} + \dfrac{HC}{AB} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Bài 2.3. *Cho ΔABC và hai điểm M, N nằm bên trong tam giác. Các tia AM và AN cắt BC lần lượt tại A_1, A_2. Các tia BM và BN cắt AC lần lượt tại B_1, B_2. Các tia CM và CN cắt AB lần lượt tại C_1, C_2. Gọi D, E, F lần lượt là giao điểm của AA_1 và B_1C_1, BB_1 và C_1A_1, CC_1 và A_1B_1. Gọi P, Q, R lần lượt là giao điểm của AA_2 và BB_1, BB_2 và CC_1, CC_2 và AA_1. Chứng minh rằng:*

a) $\dfrac{AM}{MD} + \dfrac{BM}{ME} + \dfrac{CM}{MF} \geq 12.$

b) $\dfrac{AP}{PA_2} + \dfrac{BQ}{QB_2} + \dfrac{CR}{RC_2} \geq 6.$

Lời giải. a) Vẽ đường thẳng đi qua A song song với B_1C_1 cắt tia BB_1 tại H, cắt tia CC_1 tại K.

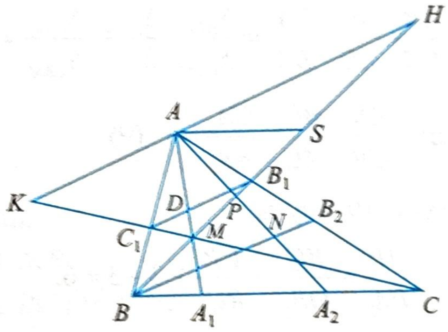
Áp dụng định lí Thalès ta có:

$$\frac{AM}{MD} = \frac{MK}{MC_1} = \frac{KH}{B_1C_1} = \frac{KA}{B_1C_1} + \frac{AH}{B_1C_1} = \frac{AC}{CB_1} + \frac{AB}{BC_1}$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{MD} = 2 + \frac{AB_1}{CB_1} + \frac{AC_1}{BC_1} \quad (1).$$

Tương tự có: $\dfrac{BM}{ME} = 2 + \dfrac{BA_1}{CA_1} + \dfrac{BC_1}{AC_1}$ (2);

$$\frac{CM}{MF} = 2 + \frac{CA_1}{BA_1} + \frac{CB_1}{AB_1} \quad (3).$$



Từ (1), (2) và (3) suy ra:

$$\frac{AM}{MD} + \frac{BM}{ME} + \frac{CM}{MF} = 6 + \left(\frac{AB_1}{CB_1} + \frac{CB_1}{AB_1}\right)$$

$$+\left(\frac{AC_1}{BC_1} + \frac{BC_1}{AC_1}\right) + \left(\frac{BA_1}{CA_1} + \frac{CA_1}{BA_1}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{MD} + \frac{BM}{ME} + \frac{CM}{MF} \geq 12$$

(áp dụng BĐT $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \geq 2$, với $x, y > 0$).

Đẳng thức xảy ra khi

$$\frac{AB_1}{CB_1} = \frac{CB_1}{AB_1}, \frac{AC_1}{BC_1} = \frac{BC_1}{AC_1}, \frac{BA_1}{CA_1} + \frac{CA_1}{BA_1}$$

$\Leftrightarrow AB_1 = CB_1, AC_1 = BC_1, BA_1 = CA_1.$

$\Leftrightarrow$ M là trọng tâm ΔABC.

b) Vẽ đường thẳng đi qua A song song BC cắt tia BB_1 tại S. Áp dụng định lí Thalès ta có:

$$\frac{AP}{PA_2} = \frac{AS}{BA_2} = \frac{AS}{BC}.\frac{BC}{BA_2} = \frac{AB_1}{CB_1}.\left(\frac{BA_2 + CA_2}{BA_2}\right)$$

$$= \frac{AB_1}{CB_1} + \frac{AB_1}{CB_1}.\frac{CA_2}{BA_2} \quad (4).$$

Tương tự có: $\dfrac{BQ}{QB_2} = \dfrac{BC_1}{AC_1} + \dfrac{BC_1}{AC_1}.\dfrac{AB_2}{CB_2}$ (5);

$$\frac{CR}{RC_2}=\frac{CA_1}{BA_1}+\frac{CA_1}{BA_1}.\frac{BC_2}{AC_2} \quad (6).$$

Cộng theo vế (4), (5) và (6) ta có:

$$\frac{AP}{PA_2}+\frac{BQ}{QB_2}+\frac{CR}{RC_2}=\left(\frac{AB_1}{CB_1}+\frac{BC_1}{AC_1}+\frac{CA_1}{BA_1}\right)$$

$$+\left(\frac{AB_1}{CB_1}.\frac{CA_2}{BA_2}+\frac{BC_1}{AC_1}.\frac{AB_2}{CB_2}+\frac{CA_1}{BA_1}.\frac{BC_2}{AC_2}\right)$$

$$\geq 3\sqrt[3]{\frac{AB_1}{CB_1}.\frac{BC_1}{AC_1}.\frac{CA_1}{BA_1}}+3\sqrt[3]{\frac{AB_1.BC_1.CA_1}{CB_1.AC_1.BA_1}.\frac{AB_2.BC_2.CA_2}{CB_2.AC_2.BA_2}} \quad (7)$$

(áp dụng BĐT Cauchy).

Lại có: $\frac{AB_1}{CB_1}.\frac{BC_1}{AC_1}.\frac{CA_1}{BA_1}=\frac{S_{ABM}}{S_{CBM}}.\frac{S_{CBM}}{S_{CAM}}.\frac{S_{CAM}}{S_{ABM}}=1$ (8).

Tương tự: $\frac{AB_2}{CB_2}.\frac{BC_2}{AC_2}.\frac{CA_2}{BA_2}=1$ (9).

Từ (7), (8) và (9) suy ra:

$$\frac{AP}{PA_2}+\frac{BQ}{QB_2}+\frac{CR}{RC_2}\geq 3+3=6.$$

Đẳng thức xảy ra khi: $\frac{AB_1}{CB_1}=\frac{BC_1}{AC_1}=\frac{CA_1}{BA_1}$,

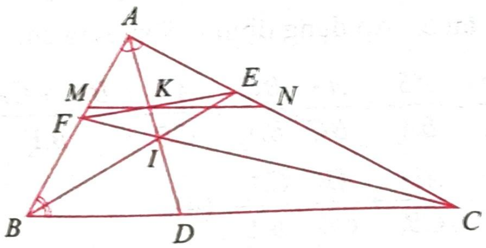
$\frac{AB_2}{CB_2}=\frac{BC_2}{AC_2}=\frac{CA_2}{BA_2}$, đồng thời có (8) và (9). Khi đó M, N đều trùng với trọng tâm ΔABC.

Bài 2.4. *Gọi AD, BE, CF là các đường phân giác trong của ΔABC vuông tại A, AD cắt EF tại K. Đường thẳng đi qua K song song với BC cắt AB, AC lần lượt tại M, N. Chứng minh rằng*

$$MN\geq\frac{2-\sqrt{2}}{2}(AB+AC).$$

Lời giải. Đặt $BC=a, AC=b, AB=c$, ta có:

$a^2=b^2+c^2\geq\frac{1}{2}(b+c)^2\Rightarrow\frac{b+c}{a}\leq\sqrt{2}$ (1).



Do CF là phân giác của ΔABC nên: $\frac{AF}{FB}=\frac{AC}{BC}$

$$\Rightarrow\frac{AF}{AB}=\frac{AC}{BC+AC}\Rightarrow AF=\frac{AB.AC}{BC+AC}=\frac{bc}{a+b}.$$

Tương tự: $AE=\frac{bc}{a+c}$ (2). Ta có:

$$S_{ABC}=S_{ABD}+S_{ACD}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}AB.AC=\frac{1}{2}AB.AD.\sin\widehat{BAD}+\frac{1}{2}AC.AD.\sin\widehat{CAD}$$

$$\Rightarrow bc=(b+c).AD.\sin 45^0\Rightarrow AD=\frac{\sqrt{2}.bc}{b+c}.$$

Tương tự: $AK=\frac{\sqrt{2}.AE.AF}{AE+AF}=\frac{\sqrt{2}.bc}{2a+b+c}$ (do (2)).

Suy ra: $\frac{AK}{AD}=\frac{b+c}{2a+b+c}$. Từ $MN // BC$ nên

$$\frac{MN}{BC}=\frac{AK}{AD}\Rightarrow\frac{MN}{a}=\frac{b+c}{2a+b+c}$$

$$\Rightarrow MN=(b+c).\frac{1}{2+\frac{b+c}{a}}\geq(b+c).\frac{1}{2+\sqrt{2}}$$

(do (1)) $\Rightarrow MN\geq\frac{2-\sqrt{2}}{2}(AB+AC)$. Dấu "=" xảy ra khi $b=c\Leftrightarrow\Delta ABC$ vuông cân tại A.

DẠNG 3. BẤT ĐẲNG THỨC LIÊN QUAN ĐẾN BÁN KÍNH ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP, NỘI TIẾP TRONG TAM GIÁC

Bài 3.1 (TH&TT, T5/283). *Cho ΔABC có diện tích bằng 1 (đơn vị). Gọi R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp ΔABC. Chứng minh rằng: $\frac{2}{R}+\frac{3}{r}\geq 4\sqrt[4]{27}$. Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Lời giải. Gọi a, b, c là các cạnh, $2p=a+b+c$ là chu vi và S là diện tích ΔABC. Ta có công thức:

$$S=pr=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c=\frac{abc}{4R}.$$

Cách 1. Ta có: $\frac{2}{R}+\frac{3}{r}=\frac{8S}{abc}+\frac{3(a+b+c)}{2S}$.

Áp dụng BĐT Cauchy cho 4 số dương ta được:

$$\frac{2}{R}+\frac{3}{r}=\frac{8S}{abc}+\frac{3a}{2S}+\frac{3b}{2S}+\frac{3c}{2S}$$

$$\geq 4\sqrt[4]{\frac{8S}{abc}.\frac{3a}{2S}.\frac{3b}{2S}.\frac{3c}{2S}}$$

$$=4\sqrt[4]{\frac{27}{S^2}}.$$

Vậy $\frac{2}{R}+\frac{3}{r}\geq 4\sqrt[4]{\frac{27}{S^2}}$. Đẳng thức xảy ra khi $\frac{8S}{abc}=\frac{3a}{2S}=\frac{3b}{2S}=\frac{3c}{2S}\Leftrightarrow a=b=c\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Đặc biệt khi $S=1$ thì $\frac{2}{R}+\frac{3}{r}\geq 4\sqrt[4]{27}$. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{2\sqrt[4]{27}}{3}$.

Cách 2. Áp dụng BĐT

$$abc\leq\frac{(a+b+c)^3}{27}=\frac{8p^3}{27}\quad(1)$$

Ta có $\frac{2}{R}+\frac{3}{r}=\frac{8S}{abc}+\frac{3p}{S}$. Kết hợp với (1) $\Rightarrow\frac{2}{R}+\frac{3}{r}\geq\frac{27S}{p^3}+\frac{3p}{S}$.

Áp dụng BĐT Cauchy cho 4 số dương ta có:

$$\frac{2}{R}+\frac{3}{r}\geq\frac{27S}{p^3}+\frac{p}{S}+\frac{p}{S}+\frac{p}{S}\geq 4\sqrt[4]{\frac{27}{S^2}}$$

$$\Rightarrow\frac{2}{R}+\frac{3}{r}\geq 4.\sqrt[4]{27}\ (\text{do } S=1)$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=\frac{2\sqrt[4]{27}}{3}$.

Nhận xét. Khi giải bài toán trên ta đã sử dụng các công thức tính diện tích tam giác và áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 4 số dương.

Bài 3.2 (TH&TT T4/276). *Cho ΔABC với $BC=a,CA=b,AB=c$. Gọi R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp ΔABC. Chứng minh rằng: $\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}\geq 4-\frac{2r}{R}$. Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Lời giải. Đặt $2p=a+b+c$. Ta có công thức

$$S=S_{ABC}=\frac{abc}{4R}=pr=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Suy ra: $\frac{2r}{R}=\frac{8S^2}{pabc}=\frac{8p(p-a)(p-b)(p-c)}{pabc}$

$$=\frac{(2p-2a)(2p-2b)(2p-2c)}{abc}$$

$$\Rightarrow\frac{2r}{R}=\frac{(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{abc}$$

$$=\frac{a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2-a^3-b^3-c^3-2abc}{abc}$$

$$\Rightarrow 4-\frac{2r}{R}=\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}+6-\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right).$$

Áp dụng BĐT $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$ với $x,y>0$ ta có:

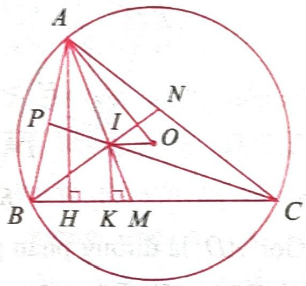
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\geq 6\Rightarrow 4-\frac{2r}{R}\leq\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $\Leftrightarrow a=b=c\Leftrightarrow\Delta ABC$ đều.

Bài 3.3. *Cho ΔABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Gọi I là điểm bất kì nằm trong ΔABC. Các tia AI,BI,CI lần lượt cắt BC,CA,AB tại M,N,P. Chứng minh:*

$$\frac{1}{AM.BN}+\frac{1}{BN.CP}+\frac{1}{CP.AM}\leq\frac{4}{3(R-OI)^2}.$$

Lời giải.



Kẻ $IK\perp BC$, $AH\perp BC$ $(H,K\in BC)$.

Ta có:

$$\frac{IM}{AM}=\frac{IK}{AH}=\frac{S_{IBC}}{S_{ABC}}.$$

Tương tự:

$$\frac{IN}{BN}=\frac{S_{IAC}}{S_{ABC}},\ \frac{IP}{CP}=\frac{S_{IAB}}{S_{ABC}}.$$

Suy ra: $\frac{IM}{AM}+\frac{IN}{BN}+\frac{IP}{CP}=1$

$$\Leftrightarrow\frac{AM-AI}{AM}+\frac{BN-BI}{BN}+\frac{CP-CI}{CP}=1$$

$$\Leftrightarrow\frac{AI}{AM}+\frac{BI}{BN}+\frac{CI}{CP}=2.$$ Ta có:

$$2=\frac{AI}{AM}+\frac{BI}{BN}+\frac{CI}{CP}\geq\frac{OA-OI}{AM}+\frac{OB-OI}{BN}+\frac{OC-OI}{CP}$$

$$\Leftrightarrow 2\geq(R-OI)\left(\frac{1}{AM}+\frac{1}{BN}+\frac{1}{CP}\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{AM}+\frac{1}{BN}+\frac{1}{CP}\leq\frac{2}{R-OI}\ (\text{vì } R>OI).$$

Ta có BĐT: $xy+yz+zx\leq\frac{1}{3}(x+y+z)^2$, dấu "=" xảy ra khi $x=y=z$. Khi đó:

$$\frac{1}{AM.BN}+\frac{1}{BN.CP}+\frac{1}{CP.AM}\leq\frac{1}{3}\left(\frac{1}{AM}+\frac{1}{BN}+\frac{1}{CP}\right)^2$$

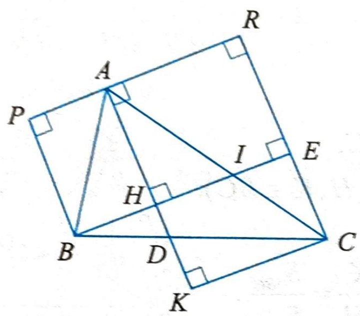
$$\Rightarrow \frac{1}{AM.BN}+\frac{1}{BN.CP}+\frac{1}{CP.AM}\le\frac{1}{3}\left(\frac{2}{R-OI}\right)^2$$
$$=\frac{4}{3(R-OI)^2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi ΔABC đều.

Bài 3.4. *Cho ΔABC. Gọi MN, PR, QS lần lượt là hình chiếu vuông góc của AB, BC, CA trên các đường phân giác ngoài của các góc C, A, B. Gọi S, r thứ tự là diện tích và bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC. Chứng minh rằng:*

$$MN+PR+QS\ge 6\sqrt[3]{Sr}.$$

Lời giải.



Gọi AD là đường phân giác trong của ΔABC. Ta có $PR\perp AD$. Đặt $AB=c, AC=b, BC=a, 2p=a+b+c$. Giả sử $AB\le AC$, từ B kẻ $BE\perp CR, E\in CR$, BE cắt AC tại I. Ta có ΔABI cân tại A nên $AB=AI$. Suy ra $CI=AC-AB=b-c$ (nếu $AB>AC$ thì kẻ $CF\perp BP$).

Áp dụng định lí Pythagore có:

$$PR^2=BE^2=BC^2-CE^2\ge BC^2-CI^2$$
$$\Rightarrow PR^2\ge a^2-(b-c)^2=4(p-b)(p-c)$$
$$\Rightarrow PR\ge 2\sqrt{(p-b)(p-c)}.$$

Chứng minh tương tự có:

$$MN\ge 2\sqrt{(p-a)(p-b)}; QS\ge 2\sqrt{(p-a)(p-c)}.$$

Do đó: $MN+PR+QS\ge 2\Big[\sqrt{(p-a)(p-b)}$
$$+\sqrt{(p-b)(p-c)}+\sqrt{(p-c)(p-a)}\Big].$$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$MN+PR+QS\ge 2.3.\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\Rightarrow MN+PR+QS\ge 6.\sqrt[3]{\frac{S^2}{p}}=6.\sqrt[3]{S.\frac{S}{p}}=6.\sqrt[3]{Sr}.$$

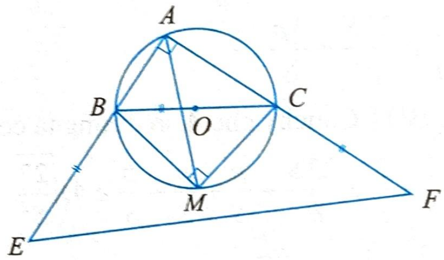
Dấu "=" xảy ra

$\Leftrightarrow (p-a)(p-b)=(p-b)(p-c)=(p-c)(p-a)$

$\Leftrightarrow a=b=c\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Bài 3.5. *Cho ΔABC vuông tại A. Trên tia AB lấy điểm E và trên tia AC lấy điểm F sao cho $BE=CF=BC$. Giả sử M là điểm nằm trên đường tròn đường kính BC. Chứng minh $MA+MB+MC\le EF$. Xác định vị trí điểm M để đẳng thức xảy ra.*

Lời giải.



1) Nếu M thuộc cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A (kể cả M trùng với B hoặc C). Theo định lí Ptolemy cho tứ giác nội tiếp $ABMC$ ta có:

$$MA.BC=MB.AC+MC.AB$$
$$\Rightarrow MA=MB.\frac{AC}{BC}+MC.\frac{AB}{BC}.$$

Suy ra:

$$MA+MB+MC=MB.\left(\frac{AC}{BC}+1\right)+MC.\left(\frac{AB}{BC}+1\right)$$
$$=MB.\frac{AC+BC}{BC}+MC.\frac{AB+BC}{BC}$$
$$=MB.\frac{AC+FC}{BC}+MC.\frac{AB+EB}{BC}=MB.\frac{AF}{BC}+MC.\frac{AE}{BC}$$
$$\le\sqrt{(MB^2+MC^2).\left(\frac{AF^2}{BC^2}+\frac{AE^2}{BC^2}\right)}$$

(áp dụng BĐT Bunyakovsky).

$$\Rightarrow MA+MB+MC\le\sqrt{BC^2.\left(\frac{AF^2}{BC^2}+\frac{AE^2}{BC^2}\right)}$$
$$=\sqrt{AE^2+AF^2}=EF.$$

Đẳng thức xảy ra khi

$$MB:\frac{AF}{BC}=MC:\frac{AE}{BC}\Leftrightarrow\frac{MB}{AF}=\frac{MC}{AE}.$$

Khi đó $\Delta MBC \sim \Delta AFE \Leftrightarrow \widehat{MBC} = \widehat{AFE}.$

2) Nếu M thuộc cung $\overset{\frown}{BC}$ chứa A. Gọi M' là điểm đối xứng với M qua BC. Ta có:

$$MA < M'A, MB = M'B, MC = M'C.$$

Áp dụng trường hợp 1) ta có:

$$MA + MB + MC < M'A + M'B + M'C \le EF.$$

Vậy ta luôn có $MA + MB + MC \le EF$.

Đẳng thức xảy ra khi M thuộc cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A sao cho $\widehat{MBC} = \widehat{AFE}$.

BÀI TẬP

1. Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của ΔABC. Chứng minh rằng:

$$a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \le 3abc.$$

2. Cho ΔABC với $AB \le AC$ và AD là đường phân giác trong của tam giác. Lấy điểm M trên cạnh AB và điểm N trên cạnh AC sao cho $BM.CN = k$ không đổi $(k < AB^2)$. Xác định vị trí của M, N sao cho diện tích của tứ giác $AMDN$ là lớn nhất.

3. Cho ΔABC. Trên các tia đối của tia BA, CA lấy thứ tự các điểm E, F (khác B, C), gọi M là giao điểm BF và CE. Chứng minh rằng:

$$\frac{MB}{MF} + \frac{MC}{ME} \ge 2\sqrt{\frac{AB.AC}{AF.AE}}.$$

4. Cho ΔABC có $\frac{1}{4}.AC < AB < 4.AC$. Một đường thẳng đi qua trọng tâm G của tam giác ΔABC cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại E, F. Xác định vị trí điểm E sao cho $AE + AF$ đạt giá trị nhỏ nhất.

5. Trong ΔABC lấy điểm M bất kì. Đặt $BC = a, CA = b, AB = c$. Gọi h_a, h_b, h_c lần lượt là các khoảng cách từ M đến các đường thẳng BC, CA, AB. Tìm vị trí của điểm M để tích $h_a h_b h_c$ đạt giá trị lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó theo a, b, c.

6 (TH&TT, T4/269). Cho tứ giác lồi $ABCD$. Lấy điểm M bất kì trên đường chéo AC. Đường thẳng đi qua M song song với AB cắt BC tại P. Đường thẳng đi qua M song song với CD cắt AD tại Q. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{MP^2 + MQ^2} \le \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{CD^2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

7 (TH&TT, T5/281). Cho ΔABC với $BC = a$, $CA = b, AB = c$. Gọi r và r_a, r_b, r_c lần lượt là bán kính của đường tròn nội tiếp và các đường tròn bàng tiếp góc A, B, C của tam giác ΔABC.

Chứng minh rằng: $\frac{abc}{r} \ge \frac{a^3}{r_a} + \frac{b^3}{r_b} + \frac{c^3}{r_c}$.

8. Một đường thẳng d thay đổi đi qua tâm I của đường tròn $(I;r)$ nội tiếp ΔABC. Đường thẳng d cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M và N.

Chứng minh rằng: $\frac{BM.CN}{AM.AN} \le \frac{BC^2}{4AB.AC}$.

9. Cho đường tròn tâm I nội tiếp ΔABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Đường thẳng đi qua A vuông góc với IA cắt các đường thẳng DE, DF tương ứng tại M, N. Đường thẳng đi qua B vuông góc với IB cắt các đường thẳng EF, ED tương ứng tại P, Q. Đường thẳng đi qua C vuông góc với IC cắt các đường thẳng FD, FE tương ứng tại S, T. Chứng minh rằng: $MN + PQ + ST \ge AB + BC + CA$.

10. Cho đường tròn tâm O, đường kính AB. Gọi C, D là hai điểm lần lượt chia trong, chia ngoài đoạn AB theo tỉ số $k > 1$. Gọi chu vi hai tam giác chung đáy CD, lần lượt có đỉnh M ở trên đường tròn (O), N ở trên dây cung AM là P_1 và P_2.

Chứng minh rằng $P_1 < P_2 < 2.AD$.

11. Cho đường tròn tâm O bán kính R và dây cung $BC < 2R$. Điểm A chuyển động trên cung lớn BC, điểm D chuyển động trên cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$. Hãy xác định vị trí các điểm A và D để tổng $\frac{1}{DA} + \frac{1}{DB} + \frac{1}{DC}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN, TỈNH HÀ TĨNH

NĂM HỌC 2023 - 2024

Câu 1. a) *Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn*

$$4x^2+5y^2-4xy+2(2x+3y)+4\le 0.$$

b) *Cho a, b, c là các số thực khác không thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ca}+\frac{1}{c^2+2ab}=0.$$

Lời giải. a) Ta có:

$$4x^2+5y^2-4xy+2(2x+3y)+4\le 0$$

$$\Leftrightarrow\left[\left(4x^2-4xy+y^2\right)+2(2x-y)+1\right]+\left(4y^2+8y+3\right)\le 0$$

$$\Leftrightarrow\left[(2x-y)^2+2(2x-y)+1\right]+\left(2y+2\right)^2\le 1$$

$$\Leftrightarrow(2x-y+1)^2+4(y+1)^2\le 1$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}(2x-y+1)^2+4(y+1)^2=0\\(2x-y+1)^2+4(y+1)^2=1\end{array}\right.\text{ (vì } x,y\in\mathbb{Z}).$$

Do $4(y+1)^2$ là số chẵn nên $4(y+1)^2=0$.

TH1: $(2x-y+1)^2+4(y+1)^2=0$

$\Leftrightarrow 4(y+1)^2=0$ và $(2x-y+1)^2=0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y+1=0\\2x-y+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-1\\x=-1\end{cases}\text{ (thỏa mãn).}$$

TH2: $(2x-y+1)^2+4(y+1)^2=1$

$\Leftrightarrow 4(y+1)^2=0$ và $(2x-y+1)^2=1$ (vì $x,y\in\mathbb{Z}$).

- $\begin{cases}2x-y+1=1\\4(y+1)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{-1}{2}\\y=-1\end{cases}$ (không thoả mãn).

- $\begin{cases}2x-y+1=-1\\4(y+1)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{-3}{2}\\y=-1\end{cases}$ (không thỏa mãn).

Vậy $x=-1, y=-1$.

b) Với a, b, c là các số thực khác không, ta có:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0\Leftrightarrow ab+bc+ca=0$$

$$\Rightarrow a^2+2bc=a^2+bc+(-ab-ca)=(a-b)(a-c).$$

Tương tự:

$$b^2+2ca=(b-c)(b-a);\ c^2+2ab=(c-a)(c-b).$$

Do đó: $\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ca}+\frac{1}{c^2+2ab}$

$$=\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-c)(b-a)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}$$

$$=\frac{1}{(a-b)(a-c)}-\frac{1}{(b-c)(a-b)}+\frac{1}{(a-c)(b-c)}$$

$$=\frac{b-c-(a-c)+a-b}{(a-b)(a-c)(b-c)}=0.$$

Vậy $\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ca}+\frac{1}{c^2+2ab}=0.$

Câu 2. a) *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases}(x+2)(2-y)=8\\\sqrt{11-4(x-y)}+x^2y^2+1=3xy\end{cases}.$$

b) *Giải phương trình*

$$\sqrt{x^2+3x+11}-\sqrt{x+2}=2x-2.$$

Lời giải. a) ĐK: $11-4(x-y)\ge 0$. Ta có:

$$\begin{cases}(x+2)(2-y)=8 & (1)\\\sqrt{11-4(x-y)}+x^2y^2+1=3xy & (2)\end{cases};$$

$$(x+2)(2-y)=8\Leftrightarrow 2\left(x-y\right)-xy=4$$

$$\Rightarrow 2\left(x-y\right)=4+xy\ \ (3).$$

Thế (3) vào phương trình (2) ta có:

$$\sqrt{11-2(4+xy)}+x^2y^2-3xy+1=0\ \left(\text{với } xy\le\frac{3}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{3-2xy}+x^2y^2-3xy+1=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{3-2xy}-1\right)+x^2y^2-3xy+2=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{2(1-xy)}{\sqrt{3-2xy}+1}+(1-xy)(2-xy)=0$$

$$\Leftrightarrow (1-xy)\left(\frac{2}{\sqrt{3-2xy}+1}+2-xy\right)=0$$

$\Leftrightarrow xy=1$ (do $\frac{2}{\sqrt{3-2xy}+1}+2-xy>0,\ \forall xy\le\frac{3}{2}$).

Kết hợp với (3) ta được:

$$\begin{cases}xy=1\\2(x-y)=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\frac{1}{x}\\2\left(x-\frac{1}{x}\right)=5\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=\frac{1}{x}\\2x^2-5x-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\frac{1}{x}\\x=\frac{5\pm\sqrt{41}}{4}\end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là:

$$(x;\,y)=\left(\frac{5+\sqrt{41}}{4};\frac{-5+\sqrt{41}}{4}\right)$$

và $(x;\,y)=\left(\frac{5-\sqrt{41}}{4};\frac{-5-\sqrt{41}}{4}\right)$.

b) ĐK: $x\ge-2$. Ta có:

$$\sqrt{x^2+3x+11}-\sqrt{x+2}=2x-2\quad(1)$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{(x-1)^2+5(x+2)}-\sqrt{x+2}=2(x-1).$$

Ta thấy $x=-2$ không thỏa mãn PT(1).

Xét $x>-2$. Chia 2vế PT(1) cho $\sqrt{x+2}$ ta được:

$$\sqrt{\frac{(x-1)^2}{x+2}+5}-1=\frac{2(x-1)}{\sqrt{x+2}}.$$

Đặt $t=\frac{x-1}{\sqrt{x+2}}$ ta được PT:

$$\sqrt{t^2+5}-1=2t\Leftrightarrow\sqrt{t^2+5}=2t+1\Leftrightarrow\begin{cases}2t+1\ge0\\t^2+5=(2t+1)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge-\frac{1}{2}\\3t^2+4t-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge-\frac{1}{2}\\\left[\begin{array}{l}t=-2\\t=\frac{2}{3}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow t=\frac{2}{3}.$$

Với $t=\frac{2}{3}$ ta được phương trình:

$$\frac{x-1}{\sqrt{x+2}}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow2\sqrt{x+2}=3(x-1)$$

$$\Leftrightarrow4(x+2)=9(x-1)^2\quad(x\ge1)$$

$$\Leftrightarrow4x+8=9x^2-18x+9$$

$$\Leftrightarrow9x^2-22x+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{11+4\sqrt{7}}{9}\\x=\frac{11-4\sqrt{7}}{9}\end{array}\right..$$

Đối chiếu với điều kiện thì $x=\frac{11+4\sqrt{7}}{9}$ thỏa mãn còn $x=\frac{11-4\sqrt{7}}{9}$ không thỏa mãn. Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{\frac{11+4\sqrt{7}}{9}\right\}$.

Câu 3. *a) Tìm tất cả các số thực x để $p=\frac{5}{x-\sqrt{x}+2}$ là số nguyên.*

b) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n lớn hơn 1 thì $A=n^{2024}+n^{2023}+n^4-n+1$ không phải là số nguyên tố.

Lời giải. a) ĐK: $x\ge0$. Ta có :

$$p=\frac{5}{x-\sqrt{x}+2}=\frac{5}{\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}$$

$$\Rightarrow0<p\le\frac{5}{\frac{7}{4}}=\frac{20}{7}\Rightarrow p\in\{1;\,2\}.$$

- Với $p=1$ ta có:

$$\frac{5}{x-\sqrt{x}+2}=1\Leftrightarrow x-\sqrt{x}-3=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=\frac{1+\sqrt{13}}{2}\\\sqrt{x}=\frac{1-\sqrt{13}}{2}<0\end{array}\right.\Leftrightarrow\sqrt{x}=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

$\Leftrightarrow x=\frac{7+\sqrt{13}}{2}$ (thỏa mãn ĐK);

- Với $p=2$ ta có:

$$\frac{5}{x-\sqrt{x}+2}=2\Leftrightarrow2x-2\sqrt{x}-1=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\\ \sqrt{x}=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}<0\end{array}\right. \Leftrightarrow \sqrt{x}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$ (thỏa mãn ĐK).

Vậy $x\in\left\{\dfrac{2+\sqrt{3}}{2};\dfrac{7+\sqrt{13}}{2}\right\}$.

b) Ta có:

$$\begin{aligned}A&=n^{2024}+n^{2023}+n^4-n+1\\&=\left(n^{2024}-n^2\right)+\left(n^{2023}-n\right)+\left(n^4+n^2+1\right)\\&=\left(n^2+n\right)\left(n^{2022}-1\right)+\left(n^4+n^2+1\right).\end{aligned}$$

Ta có: $\left(n^2+n\right)\left(n^{2022}-1\right)=\left(n^2+n\right)\left[\left(n^3\right)^{674}-1\right]$

$$=\left(n^2+n\right)\left(n-1\right)\left(n^2+n+1\right).B$$

chia hết cho n^2+n+1. Lại có:

$$n^4+n^2+1=n^4+2n^2+1-n^2=\left(n^2+1\right)^2-n^2$$
$$=\left(n^2+n+1\right)\left(n^2-n+1\right)$$

chia hết cho n^2+n+1 $\Rightarrow A\,\vdots\left(n^2+n+1\right)$ với mọi số tự nhiên n lớn hơn 1 (1).

Mà ta có với mọi $n>1$ thì

$$n^4>n;\ n^{2024}>n^2;\ n^{2023}>n$$

$\Rightarrow A>n^2+n+1$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra A không là số nguyên tố.

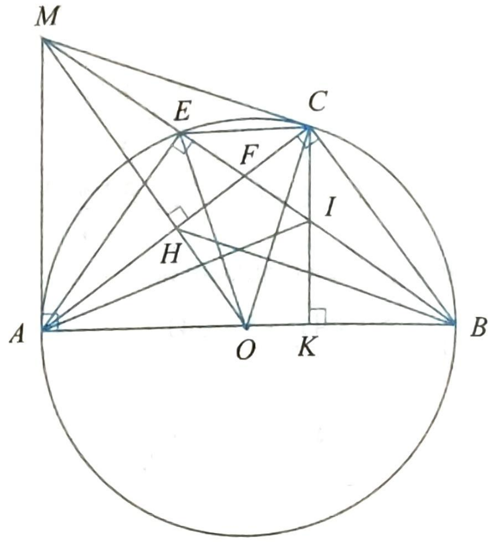
Câu 4. *Cho đường tròn (O) đường kính AB cố định, C là một điểm chạy trên đường tròn (O) không trùng với A và B. Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và C cắt nhau tại điểm M. Đường thẳng MB cắt AC tại F và cắt đường tròn (O) tại E (E khác B).*

a) Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng AC. Chứng minh tam giác OEM đồng dạng với tam giác BHM.

b) Gọi K là hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng AB. Hai đường thẳng MB và CK cắt nhau tại I. Tính tỷ số $\dfrac{FI}{AB}$ khi tổng diện tích hai tam giác IAC và IBC lớn nhất.

c) Chứng minh rằng $\dfrac{1}{BM}+\dfrac{1}{BF}=\dfrac{2}{BE}$.

Lời giải.



Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có $MA=MC$. Mà $OA=OC=R$, suy ra MO là đường trung trực của AC. Do H là trung điểm của AC nên M,H,O thẳng hàng.

Xét ΔMAO vuông tại A có đường cao AH nên:

$$MH.MO=MA^2\ (1).$$

Ta có: $\widehat{AEB}=90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow AE\perp MB$.

ΔMAB vuông tại A có đường cao AE nên:

$$ME.MB=MA^2\ (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra: $ME.MB=MH.MO$

$$\Rightarrow\frac{ME}{MH}=\frac{MO}{MB}.$$

Xét ΔOME và ΔBMH có:

$\widehat{OME}$ chung, $\dfrac{ME}{MH}=\dfrac{MO}{MB}\Rightarrow\Delta OME\sim\Delta BMH$.

b) Ta có: $\widehat{MAO}=\widehat{CKB}=90°$, $\widehat{MOA}=\widehat{CBK}$ (do $MO\,//\,CB$ cùng vuông góc với CA)

$\Rightarrow \Delta MAO \sim \Delta CKB \Rightarrow \dfrac{CK}{BK} = \dfrac{MA}{AO}$.

Lại có: $IK // MA \Rightarrow \dfrac{IK}{BK} = \dfrac{MA}{AB} = \dfrac{MA}{2AO} = \dfrac{CK}{2BK}$

$\Rightarrow IK = \dfrac{CK}{2}$ hay I trung điểm của đoạn thẳng CK

$\Rightarrow S_{\Delta AIC} + S_{\Delta BCI} = \dfrac{1}{2} S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{4} CK.AB$ lớn nhất khi C điểm chính giữa $\overset{\frown}{AB}$ hay K trùng tâm O.

Khi đó tứ giác $AOCM$ là hình vuông

$\Rightarrow \dfrac{FI}{FM} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow FI = \dfrac{1}{6} BM$

$\Rightarrow BM = \dfrac{AB\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \dfrac{FI}{AB} = \dfrac{\sqrt{5}}{12}$.

c) Ta có: $\Delta MEC \sim \Delta MCB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{ME}{MC} = \dfrac{CE}{CB}$;

$\Delta MEA \sim \Delta MAB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{MA}{MB} = \dfrac{EA}{AB}$

$\Rightarrow \dfrac{ME}{MC} \cdot \dfrac{MA}{MB} = \dfrac{CE}{CB} \cdot \dfrac{EA}{AB} \Rightarrow \dfrac{ME}{MB} = \dfrac{CE}{CB} \cdot \dfrac{AE}{AB}$ (1).

$\Delta FEC \sim \Delta FAB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{FE}{FA} = \dfrac{CE}{AB}$;

$\Delta FAE \sim \Delta FBC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{FA}{FB} = \dfrac{AE}{BC}$

$\Rightarrow \dfrac{FE}{FA} \cdot \dfrac{FA}{FB} = \dfrac{CE}{AB} \cdot \dfrac{EA}{CB} \Rightarrow \dfrac{FE}{FB} = \dfrac{CE}{CB} \cdot \dfrac{AE}{AB}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\dfrac{ME}{MB} = \dfrac{FE}{FB} \Rightarrow 1 - \dfrac{EB}{MB} = \dfrac{EB}{FB} - 1$$

$$\Rightarrow 2 = \dfrac{EB}{MB} + \dfrac{EB}{FB} = EB\left(\dfrac{1}{MB} + \dfrac{1}{FB}\right)$$

$$\Rightarrow \dfrac{1}{BM} + \dfrac{1}{BF} = \dfrac{2}{BE}.$$

Câu 5. *Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a > b > c$; $ab + bc + ca > 0$ và $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = \dfrac{1}{a-b} + \dfrac{1}{b-c} + \dfrac{1}{a-c} + \dfrac{5}{2\sqrt{ab+bc+ca}}.$$

Lời giải. Ta có:

$$P = \dfrac{1}{a-b} + \dfrac{1}{b-c} + \dfrac{1}{a-c} + \dfrac{5}{2\sqrt{ab+bc+ca}}$$

$$\geq \dfrac{4}{(a-b)+(b-c)} + \dfrac{1}{a-c} + \dfrac{5}{2\sqrt{ab+bc+ca}}$$

$$= \dfrac{4}{a-c} + \dfrac{1}{a-c} + \dfrac{5}{2\sqrt{ab+bc+ca}}$$

$$= \dfrac{5}{a-c} + \dfrac{5}{2\sqrt{ab+bc+ca}}.$$

Lại có:

$$\dfrac{5}{a-c} + \dfrac{5}{2\sqrt{ab+bc+ca}} \geq 5\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{(a-c)^2 + 4(ab+bc+ca)}}$$

$$= \dfrac{10\sqrt{2}}{\sqrt{(a+c)^2 + 4b(a+c)}}$$

$$\Rightarrow P \geq \dfrac{10\sqrt{2}}{\sqrt{(a+c)(a+c+4b)}}$$

$$= \dfrac{10\sqrt{2}}{\sqrt{(1-b)(1+3b)}}$$

$$\geq \dfrac{10\sqrt{6}}{\sqrt{(3-3b)(1+3b)}}$$

$$\geq \dfrac{10\sqrt{6}}{\dfrac{3-3b+1+3b}{2}}$$

$$= 5\sqrt{6}.$$

Giá trị nhỏ nhất của P bằng $5\sqrt{6}$ khi

$$a = \dfrac{2+\sqrt{6}}{6}, b = \dfrac{1}{3}, c = \dfrac{2-\sqrt{6}}{6}.$$

Câu 6. *Cho x, y, z là các số chính phương. Chứng minh rằng $(x+1)(y+1)(z+1)$ luôn viết được dưới dạng tổng của hai số chính phương.*

Lời giải. Vì x, y, z là các số chính phương nên ta có thể đặt: $x = a^2$; $y = b^2$; $z = c^2$ $(a; b; c \in \mathbb{Z})$.

Khi đó: $(x+1)(y+1)(z+1)$

$$= (a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)$$

$$= (a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1)(c^2+1)$$

(Xem tiếp trang 17)

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG, TỈNH NAM ĐỊNH
NĂM HỌC 2023 – 2024
VÒNG 1

(Thời gian làm bài 120 phút, dành cho mọi thí sinh thi vào trường chuyên)

Câu 1 (*2,0 điểm*).

1) Tính giá trị biểu thức

$$P=\sqrt{2024+2\sqrt{2023}}-\sqrt{2025+2\sqrt{2024}}.$$

2) Tìm tọa độ của điểm M là giao điểm của đường thẳng $y=x+1$ với trục Oy.

3) Tính diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác vuông có cạnh huyền bằng $2\sqrt{2}$ cm.

4) Tính thể tích của hình nón có đường sinh bằng 10 cm và bán kính đáy bằng 6 cm.

Câu 2 (*1,5 điểm*). Cho biểu thức

$$P=\left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}-\frac{1}{\sqrt{x}-1}\right).\frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

(với $x\geq 0$ và $x\neq 1$).

1) Rút gọn biểu thức P.

2) Tìm x để $P=\frac{1}{3}$.

Câu 3 (*2,5 điểm*).

1) Cho phương trình

$$x^2-(2m+1)x+4m-2=0 \quad (1)$$

(với m là tham số).

a) Tìm tất cả giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình (1). Tìm tất cả giá trị của m để x_1, x_2 là độ dài hai cạnh của một hình chữ nhật có độ dài đường chéo bằng $\sqrt{13}$.

2) Giải phương trình

$$6\sqrt{2x+5}+4\sqrt{x+2}=3x+20.$$

Câu 4 (*3,0 điểm*). Cho tam giác ABC nhọn $(AB<AC)$ nội tiếp đường tròn tâm O, AD là đường cao. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của D trên AB, AC.

1) Chứng minh tứ giác $AEDF$ nội tiếp và $AE.AB=AF.AC$.

2) Gọi AP là đường kính của đường tròn (O). Chứng minh AP vuông góc với EF.

3) Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Đường tròn đường kính AH cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là T. Gọi K là trực tâm của tam giác BTC. Chứng minh tam giác HKT vuông tại H.

Câu 5 (*1,0 điểm*). 1) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\sqrt{4x^2+3}-2\sqrt{y}=\sqrt{y^2+3}-2\sqrt{2x}\\ \sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}=2+\sqrt{y+3-x^2}\end{cases}.$$

2) Xét hai số thực dương x, y thỏa mãn $6x+y=2xy$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=3x+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{42}{y}+\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2.$$

VÒNG 2

(Thời gian làm bài 150 phút, dành cho thí sinh thi vào chuyên Toán và chuyên Tin)

Câu 1 (*2,0 điểm*).

a) Cho x, y, z là ba số thực khác 0 thỏa mãn

$$x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1 \text{ và } \frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=0.$$

Chứng minh rằng $x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1.$

b) Cho $f(n)=\dfrac{2}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$ với n là số nguyên dương. Tính giá trị của biểu thức

$$S=f(1)+f(2)+f(3)+...+f(40).$$

Câu 2 (*2,0 điểm*).

a) Giải phương trình $2\left(\sqrt{x-1}+1\right)=x+\sqrt{x+2}.$

b) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}x^2+y^2=xy+x-y+2\\x^3+y^3=y(x+y+4)+x\end{cases}.$$

Câu 3 (*3,0 điểm*).

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O), các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. Gọi M là trung điểm của cạnh BC, N là trung điểm của đoạn AH, đường thẳng EF cắt đường tròn (O) tại P, Q và cắt đường thẳng BC tại S sao cho P nằm giữa S và F. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $AOMN$ là hình bình hành.

b) $AP^2=AQ^2=AE.AC$.

c) Tứ giác $DMEF$ nội tiếp và $\frac{FP}{PS}=\frac{QE}{ES}$.

Câu 4 (*1,5 điểm*).

a) Cho hai số nguyên dương a, b thỏa mãn $a^3 \vdots b; b^3 \vdots a$. Chứng minh $\left(a^4+b^4\right) \vdots ab$.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn

$$x\left(x^2-y\right)+(y-3)\left(x^2+1\right)=0.$$

Câu 5 (*1,5 điểm*).

a) Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $0\le x,y,z\le 4$. Chứng minh rằng:

$$x^2y+y^2z+z^2x+16\ge xy^2+yz^2+zx^2.$$

b) Ban đầu trên bảng viết 2023 số thực. Mỗi lần biến đổi số trên bảng là việc thực hiện như sau: Chọn ra hai số a và b nào đó ở trên bảng, xóa hai số đó đi và viết thêm lên bảng số $\frac{a+b}{4}$. Giả sử ban đầu trên bảng ghi 2023 số 1 và ta thực hiện liên tiếp các biến đổi cho đến khi trên bảng chỉ còn lại một số, chứng minh rằng số đó lớn hơn $\frac{1}{2^{11}}$.

TRẦN XUÂN ĐÁNG

(5/7/136 Phan Đình Phùng, TP. Nam Định)

Giới thiệu

****

HƯỚNG DẪN GIẢI . . . *(Tiếp theo trang 15)*

$$=\left[(a+b)^2+(ab-1)^2\right]\left(c^2+1\right).$$

$$=\left[m^2+n^2\right]\left(c^2+1\right)$$

(với $a+b=m, ab-1=n,\ m,n\in\mathbb{Z}$).

$$=\left(m^2c^2+2mnc+n^2\right)+\left(n^2c^2-2mnc+m^2\right)$$

$$=(mc+n)^2+(nc-m)^2.$$

Vậy $(x+1)(y+1)(z+1)$ luôn viết được dưới dạng tổng của hai số chính phương.

Nhận xét. Bài toán vẫn đúng khi thay 1 bởi số chính phương bất kỳ.

LÊ BÁ HOÀNG

(Phòng GD&ĐT TX. Hồng Lĩnh, Hà Tĩnh)

Giới thiệu

CÁC LỚP THCS

Bài T1/556 (Lớp 6). Cho a và b là các số nguyên dương thay đổi sao cho tổng $A = a^2 + b^2$ chia hết cho 147. Tìm giá trị nhỏ nhất của A.

NGUYỄN TẤN NGỌC

(GV THCS P. Bình Định, An Nhơn, Bình Định)

Bài T2/556 (Lớp 7). Tìm phần nguyên của tích 2014 số hạng sau

$$P=\left(1+\frac{1}{1^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2014^2}\right).$$

VŨ HỒNG PHONG

(GV THPT Tiên Du 1, Bắc Ninh)

Bài T3/556. Đặt

$$M=\left(1+\frac{1}{1}+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2013}+\frac{1}{2015}\right).$$

Chứng minh rằng $43 < M < 51$.

NGÔ QUANG MẠNH

(SV Trường Đại học Chu Văn An, Bắc Ninh)

Bài T4/556. Cho tam giác ABC có $BC < CA < AB$ nội tiếp đường tròn (O). Đường phân giác trong của các góc B và C lần lượt cắt đường tròn (O) tại E và F. Lấy K đối xứng với O qua EF. Đường tròn $(K; KA)$ cắt AB, AC lần lượt tại điểm thứ hai P, Q; CF cắt BQ ở M; BE cắt CP ở N. Chứng minh tứ giác $BMNC$ nội tiếp.

ĐOÀN CÁT NHƠN

(GV THCS P. Bình Định, An Nhơn, Bình Định)

Bài T5/556. Cho a, b, c là ba số thuộc đoạn $[1; 4]$. Chứng minh rằng

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\le\frac{225}{16}.$$

NGUYỄN THANH HẢI

(GV THCS Nam Cường, Nam Trực, Nam Định)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/556. Giải phương trình

$$2\sqrt{x^3-2x^2+5x+5}-\sqrt[3]{2x-2}+x^3-3x^2-4=0.$$

PHẠM VĂN VƯƠNG

(GV THPT Tây Tiền Hải, Thái Bình)

Bài T7/556. Tìm tất cả các số tự nhiên x và số nguyên y thỏa mãn đẳng thức

$$\log_2\frac{x^5+y^{2024}}{2xy^{2024}+2}=x(y^{2024}-x^4)-y^{2024}$$

đồng thời x^3+y^3 là lập phương của một số nguyên.

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)

Bài T8/556. Cho một điểm A nằm trên đường tròn (O). Hai điểm B, C nằm trong (O) sao cho $\widehat{ABC}=90^0$. Một đường thẳng chuyển động qua C cắt (O) tại D, E. Gọi H, K lần lượt là trực tâm của tam giác ABD, ABE. Chứng minh HK luôn đi qua một điểm cố định.

NGUYỄN VĂN LINH

(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T9/556. Cho ba số thực dương a, b, c và n, m là hai số tự nhiên thỏa mãn $n \ge m$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^n}{(b+c)^n}+\frac{b^n}{(c+a)^n}+\frac{c^n}{(a+b)^n}\ge\frac{1}{2^{n-m}}\left[\frac{a^m}{(b+c)^m}+\frac{b^m}{(c+a)^m}+\frac{c^m}{(a+b)^m}\right].$$

NGÔ VĂN THÁI

(Tổ 34, phường Hoàng Diệu, TP. Thái Bình)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/556. Cho dãy số (x_n) xác định bởi

$$\begin{cases}x_1=4, x_2=10\\ x_{n+2}=4x_{n+1}-3x_n, \forall n\ge 1\end{cases}.$$

Tìm tất cả các bộ số nguyên dương $(m; n)$ sao cho $mn|(x_m, x_n)$.

NGUYỄN TUẤN NGỌC

(GV THPT chuyên Tiền Giang)

Bài T11/556. Cho hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ là tập số thực) thỏa mãn các tính chất sau:

i) $f(0) = 1$; ii) $f(x)\le 1, \forall x\in\mathbb{R}$;

iii) $f\left(x+\frac{11}{24}\right)+f(x)=f\left(x+\frac{1}{8}\right)+f\left(x+\frac{1}{3}\right)$.

Đặt $F(x)=\sum_{n=0}^{2024} f(x+n)$. Hãy tính $F(2024)$.

VŨ THÁI LUÂN

(Viện Công nghệ Thông tin, Hà Nội)

Bài T12/556. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) $(AB < AC)$, H là trực tâm tam giác. Gọi M là trung điểm của BC, đoạn AM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC tại N. Gọi X là điểm đối xứng với A qua BC và AO cắt lại đường tròn ngoại tiếp tam giác BOC tại T. Gọi U là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác AON với đường tròn ngoại tiếp tam giác AXT. Chứng minh AU song song với BC.

TRẦN ĐẠI LỘ

(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Điện Biên)

Bài L1/556. Một con lắc lò xo gồm lò xo có độ cứng k = 160 N/m và vật nặng có khối lượng m = 400 g, đặt trên mặt phẳng nằm ngang. Hệ số ma sát trượt giữa vật và mặt phẳng nằm ngang là $\mu = 0{,}0005$. Lấy $g = 10$ m/s^2. Kéo vật lệch khỏi vị trí cân bằng một đoạn 5 cm (theo phương của trục lò xo). Tại $t = 0$, buông nhẹ để vật dao động, xem rằng tần số dao động không đổi. Tính thời gian kể từ lúc vật bắt đầu dao động cho đến khi vật dừng hẳn.

VIỆT CƯƠNG (*Hà Nội*)

Bài L2/556. Nhà máy điện gió được coi là thân thiện với môi trường hơn nhiều so với các nhà máy nhiệt điện, thủy điện. Gió làm quay cánh quạt của các cột điện gió, từ đó làm quay rôto của máy phát điện và tạo ra điện năng. Máy phát điện gió thường sử dụng là loại máy phát điện xoay chiều một pha. Nối hai cực của một máy phát điện gió với hai đầu đoạn mạch mắc nối tiếp gồm điện trở thuần R, cuộn cảm thuần L và tụ điện C. Khi rôto quay với tốc độ 1200 (vòng/phút) thì điện áp hiệu dụng giữa hai đầu điện trở đạt giá trị cực đại. Khi rôto của máy phát quay với tốc độ 900 (vòng/phút) thì điện áp hiệu dụng giữa hai đầu điện trở có giá trị bằng U. Để điện áp hiệu dụng giữa hai đầu điện trở cũng có giá trị bằng U thì rôto của máy phát quay với tốc độ bằng bao nhiêu?

THANH LÂM (*Hà Nội*)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/556 (For 6th grade). Let a and b be positive integers so that $A := a^2 + b^2$ is divisible by 147. Find the minimum value of A.

Problem T2/556 (For 7th grade). Find the integral part of the product $P = \left(1+\frac{1}{1^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2014^2}\right)$.

Problem T3/556. Let

$$M = \left(1+\frac{1}{1}+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2013}+\frac{1}{2015}\right).$$

Show that $43 < M < 51$.

Problem T4/556. Given a triangle ABC, inscribed a circle (O), with $BC < CA < AB$. The internal angle bisectors at B and C intersect (O) respectively at E and F. Let K be the reflection of O in EF. The circle $(K; KA)$ intersects AB, AC respectively at the second points P, Q. Assume that CF intersects BQ at M and BE intersects CP at N. Show that $BMNC$ is a cyclic quadrilateral.

Problem T5/556. Given numbers a, b, c in the interval $[1; 4]$. Show that

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \le \frac{225}{16}.$$

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/556. Solve the equation

$$2\sqrt{x^3-2x^2+5x+5}-\sqrt[3]{2x-2}+x^3-3x^2-4=0.$$

Problem T7/556. Find all natural numbers x and integers y satisfying the conditions

$$\log_2\frac{x^5+y^{2024}}{2xy^{2024}+2} = x\left(y^{2024}-x^4\right)-y^{2024}$$

and x^3+y^3 is a cube of some integer.

Problem T8/556. Let A be a point on the circle (O). Two points B, C lie inside (O) so that $\widehat{ABC} = 90^0$. A moving line through C intersects (O) at D, E. Let H, K respectively be the orthocenters of ABD, ABE. Show that HK always passes through a fixed point.

Problem T9/556. Given three positive numbers a, b, c and two natural numbers n, m with $n \ge m$. Prove that

$$\frac{a^n}{(b+c)^n}+\frac{b^n}{(c+a)^n}+\frac{c^n}{(a+b)^n} \ge \frac{1}{2^{n-m}}\left[\frac{a^m}{(b+c)^m}+\frac{b^m}{(c+a)^m}+\frac{c^m}{(a+b)^m}\right].$$

(Xem tiếp theo trang 34)

CÁC LỚP THCS

Bài T1/552. *Tìm các số nguyên tố p sao cho $5^p + 4p^4$ là số chính phương.*

Lời giải. Giả sử $5^p + 4p^4 = a^2$ thì có

$$5^p = a^2 - 4p^4 \Leftrightarrow 5^p = (a + 2p^2)(a - 2p^2).$$

Xét hai trường hợp:

1) Với $a - 2p^2 > 1$ thì $a + 2p^2$ và $a - 2p^2$ đều là lũy thừa của 5, tức là

$$a + 2p^2 = 5^m \text{ và } a - 2p^2 = 5^n \text{ với } m > n \geq 1.$$

Trừ theo từng vế hai đẳng thức trên được:

$$4p^2 = 5^m - 5^n \Leftrightarrow 4p^2 = 5^n(5^{m-n} - 1).$$

Do 4 và 5 nguyên tố cùng nhau nên 5 là ước số của p^2, do đó 5 là ước số của p mà p là số nguyên tố nên $p = 5$. Lúc đó:

$$5^p + 4p^4 = 5^5 + 4.5^4 = 5^4(5 + 4) = 5^4.3^2 = 75^2$$

là số chính phương.

2) Với $a - 2p^2 = 1$ thì $a + 2p^2 = 5^p$. Trừ theo từng vế hai đẳng thức trên được:

$$4p^2 = 5^p - 1 \Leftrightarrow 5^p - 4p^2 = 1.$$

Xét $4^p - 4p^2 = 4(4^{p-1} - p^2)$

$$= 4(2^{p-1} + p)(2^{p-1} - p).$$

Ta sẽ chứng tỏ rằng $2^{p-1} \geq p$ với bất kì số nguyên dương $p > 1$. Với $p = 2$ thì $2^{2-1} = 2$, khẳng định đúng. Với $p \geq 3$ thì

$2^{p-1} - 1 = (2-1)(2^{p-2} + 2^{p-3} + ... + 2 + 1) > p - 1$

(vì tổng $2^{p-2} + 2^{p-3} + ... + 2 + 1$ có $p - 1$ số hạng mà ngoài số hạng 1 thì các số hạng còn lại đều lớn hơn 1, do đó khẳng định đúng). Như vậy:

$$5^p - 4p^2 > 4^p - 4p^2 > 1$$

với bất kì số nguyên dương $p > 1$.

Vậy số nguyên tố thỏa mãn đề toán là $p = 5$.

Nhận xét. Có thể chứng minh trường hợp $4p^2 = 5^p - 1$ không xảy ra bằng các cách sau:

1) Chứng minh quy nạp theo p rằng $4p^2 + 1 < 5^p$ với bất kì số nguyên dương $p > 1$.

2) Biến đổi $4p^2 = 5^p - 1 \Leftrightarrow 4p^2 - 4 = 5^p - 5$. Định lí Fermat nhỏ khẳng định rằng với số nguyên tố p và số nguyên dương a tùy ý thì

$$a^p - a = a(a^{p-1} - 1)$$

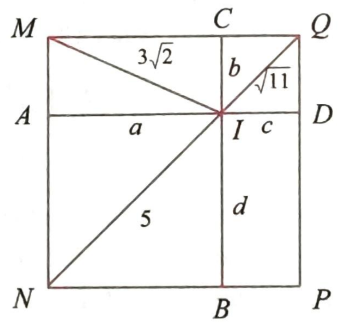
chia hết cho p.

Sử dụng Định lí Fermat nhỏ ta thấy $5^p - 5$ chia hết cho số nguyên tố p nên từ $4p^2 - 4 = 5^p - 5$ thì $4p^2 - 4$ cũng chia hết cho số nguyên tố p, do đó 4 chia hết cho p, nhưng số nguyên tố $p = 2$ không thỏa mãn đẳng thức $4p^2 - 4 = 5^p - 5$.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/552. *Cho I là một điểm trong hình vuông MNPQ, biết rằng $IM = 3\sqrt{2}$ cm, $IN = 5$ cm, $IQ = \sqrt{11}$ cm. Tính số đo góc $\widehat{MNI}$.*

Lời giải. (Của các bạn gửi bài)



Gọi a, b, c và d là khoảng cách từ I xuống 4 cạnh hình vuông $MNPQ$ (xem hình vẽ). Theo định lý Pythagore cho tam giác vuông, ta có:

$$a^2 + b^2 = \left(3\sqrt{2}\right)^2 = 18 \quad (1);$$

$$c^2 + b^2 = \left(\sqrt{11}\right)^2 = 11 \quad (2);$$

$$a^2 + d^2 = (5)^2 = 25 \quad (3).$$

Đem (1) trừ (2) và (3) trừ (1), ta có:

$$a^2 - c^2 = 18 - 11 = 7 \quad \text{và} \quad d^2 - b^2 = 25 - 18 = 7.$$

Lưu ý là $a + c = b + d$ (*) bằng cạnh hình vuông và từ $a^2 - c^2 = d^2 - b^2 = 7$, suy ra:

$$a - c = d - b \quad (**).$$

Đẳng thức (*) và (**) cho ta $a = d, b = c$. Vậy $AIBN$ là hình vuông, do đó $\widehat{MNI} = 45^2$.

Nhận xét. Chỉ có 2 bạn sau đây có lời giải đúng:

TP. Hồ Chí Minh: *Nguyễn Trịnh Phương Minh*, 6/14, THCS Lê Quý Đôn; **Cần Thơ:** *Dương Ngũ Kim Lân*, 6A6 THCS Đoàn Thị Điểm, Ninh Kiều.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T3/552. *Cho đa thức bậc ba $f(x)$ với hệ số của x^3 là một số nguyên dương. Biết $f(5)-f(3)=2022$. Chứng minh rằng $f(7)-f(1)$ là hợp số.*

Lời giải. Đặt $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ với $a\in\mathbb{N}^*$, ta có:

$$f(5)-f(3)=(5^3-3^3)a+(5^2-3^2)b+(5-3)c+(d-d)=98a+16b+2c.$$

Do $f(5)-f(3)=2022$ nên

$$98a+16b+2c=2022.$$

Suy ra $16b+2c=2022-98a$. Lại có:

$$\begin{aligned}f(7)-f(1)&=(7^3-1^3)a+(7^2-1^2)b+(7-1)c\\&\quad+(d-d)=342a+48b+6c\\&=342a+3(16a+2c)\\&=342a+3(2022-98a)\\&=48a+6066=6(8a+1011).\end{aligned}$$

Do $a\in\mathbb{N}^*$ nên $8a+1011$ là số tự nhiên lớn hơn 1. Suy ra $f(7)-f(1)$ là số tự nhiên lớn hơn 1 và chia hết cho 6. Vì vậy $f(7)-f(1)$ là số tự nhiên lớn hơn 1 và có ít nhất 3 ước số là 2, 3, 6 nên $f(7)-f(1)$ là số hợp số.

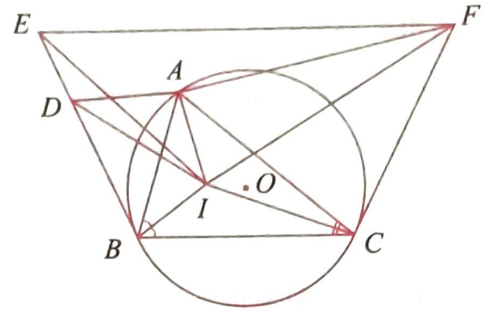
Nhận xét. Bài này các bạn tham gia gửi bài đều cho lời giải tương tự như trên. Tuy nhiên, một vài bạn lập luận $f(7)-f(1)$ là số lớn hơn 1 và chia hết cho 3 nên $f(7)-f(1)$ là hợp số, như vậy chưa chính xác. Tuyên dương các bạn sau có lời giải lập luận chặt chẽ và ngắn gọn.

Phú Thọ: *Hà Phương Anh*, 9A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông; **Nghệ An:** *Nguyễn Tất Han*, 7C, *Đinh A Na*, 8A, *Nguyễn Băng Tâm*, 8C, THCS Lý Nhất Quang, Đô Lương; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Chánh Thiện*, 8/14, THCS Lê Quý Đôn.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T4/552. *Trên đường tròn (O) cho hai điểm B, C cố định và điểm A thay đổi. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Trên tiếp tuyến của (O) tại B lấy hai điểm D, E sao cho BD = BA, BE = CA và A, D, E nằm cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng BC. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IDE luôn thuộc một đường thẳng cố định.*

Lời giải.



Trên tiếp tuyến của đường tròn (*O*) tại *C* lấy điểm *F* sao cho *CF* = *CA* (*F* và *A* nằm cùng một nửa mặt phẳng bờ *BC*). Dễ chứng minh được *EFCB* là hình thang cân, nên trung trực của *BC* và trung trực của *EF* trùng nhau. Ta có:

$$\widehat{BDA}=90^\circ-\frac{\widehat{ABD}}{2}=90^\circ-\frac{\widehat{ACB}}{2}.$$

Hơn nữa, $\widehat{AIB}=90^\circ+\frac{\widehat{ACB}}{2}$ (kết quả quen thuộc).

Suy ra $\widehat{BDA}+\widehat{AIB}=180^0$. Vậy tứ giác *ADBI* nội tiếp. Tương tự ta có tứ giác *AICF* nội tiếp. Ta có:

$$\widehat{BDI}=\widehat{BAI}=\frac{\widehat{BAC}}{2}=\widehat{IAC}=\widehat{IFC}.$$

Từ đó, theo tính chất góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung, ta có: $\widehat{EFC}=180^\circ-\widehat{BCF}=180^0-\frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BAC}$

$=180^0-\frac{1}{2}(360^0-\text{sđ}\overset{\frown}{BC})=\frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BC}=\widehat{BAC}$, do đó:

$$\widehat{EFI}=\widehat{EFC}-\widehat{IFC}=\widehat{BAC}-\frac{\widehat{BAC}}{2}=\frac{\widehat{BAC}}{2}=\widehat{BDI}.$$

Vậy tứ giác *EFID* nội tiếp, do đó tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác *DEI* thuộc trung trực của *BC* cố định.

Nhận xét. Không có bạn nào giải đúng bài toán trên.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/552. *Giải phương trình*

$$x^3+6x^2+12x=16\sqrt[3]{x+3}.$$

Lời giải. ĐK: $x\in\mathbb{R}$. Phương trình tương đương với $(x+2)^3-8=8\sqrt[3]{8(x+2)+8}$.

Đặt $a = x+2; b = \sqrt[3]{8(x+2)+8} \Rightarrow b = \sqrt[3]{8a+8}$.

Ta được hệ: $\begin{cases} a^3 - 8 = 8b & (1) \\ b^3 - 8 = 8a & (2) \end{cases}$.

Trừ theo vế của (1) cho (2) ta có:

$$a^3 - b^3 = 8(b-a)$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(a^2+ab+b^2+8) = 0 \Leftrightarrow a = b$$

(vì $a^2+ab+b^2+8 = \left(a+\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} + 8 > 0$).

Ta được:

$$x^3 + 6x^2 + 4x - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 4x^2 + 2x^2 + 8x - 4x - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+4)(x^2+2x-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+4=0 \\ x^2+2x-4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x=-1\pm\sqrt{5} \end{array}\right.$$

(thỏa mãn ĐK). Vậy phương trình có tập hợp nghiệm là $S = \{-4; -1-\sqrt{5}; -1+\sqrt{5}\}$.

Nhận xét. 1) Với $a = b$ thay vào (1), ta được:

$$a^3 - 8a - 8 = 0 \Leftrightarrow a^3 + 8 - 8(a+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+2)(a^2-2a-4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-2 \\ a=1\pm\sqrt{5} \end{array}\right..$$

Từ đó suy ra x.

2) Hệ $\begin{cases} a^3 - 8 = 8b & (1) \\ b^3 - 8 = 8a & (2) \end{cases}$ có dạng tổng quát $\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ f(y,x) = 0 \end{cases}$. Cách giải thường gặp là trừ theo vế các phương trình, đưa về dạng tích:

$$(x-y).g(x,y) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-y=0 \\ g(x,y)=0 \end{array}\right..$$

Các bạn sau đây có bài giải tốt:
Nghệ An: *Nguyễn Văn Lâm, Nguyễn Trọng Bảo, Bùi Thị Thùy Linh, Thái Bá Nhân*, 9A, *Phạm Xuân Hoàng, Đinh A Na*, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Cần Thơ:** *Dương Ngũ Kim Lân*, 6A6, THCS Đoàn Thị Điểm, quận Ninh Kiều; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Chánh Thiện*, 8/14, THCS Lê Quý Đôn, quận 3; **Phú Thọ:** *Hà Phương Anh*, 9A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T6/552. *Cho các số a, b, c dương thỏa mãn*

$$\begin{cases} a+b+c = \frac{1+2\sqrt{2}}{3} \\ a \le \frac{1}{3} \end{cases}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$F = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Lời giải. Nhận xét. *Với x, y dương ta luôn có:*

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \ge \frac{8}{(x+y)^2} \quad (1).$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y$.

Thật vậy, theo BĐT Cauchy ta có:

$$(x+y)^2 \ge 4xy; \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \ge \frac{2}{xy}.$$

Suy ra: $(x+y)^2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right) \ge 8 \Rightarrow$ có (1).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y$.

Áp dụng (1) ta có:

$$F \ge \frac{1}{a^2} + \frac{8}{(b+c)^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\left(\frac{b+c}{2\sqrt{2}}\right)^2} \ge \frac{8}{\left(a+\frac{b+c}{2\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$= \frac{8.8}{\left(2\sqrt{2}a+b+c\right)^2} = \frac{8.8}{\left((2\sqrt{2}-1)a+\frac{1+2\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \frac{64}{g(a)^2}$$

với $g(a) = (2\sqrt{2}-1)a + \frac{1+2\sqrt{2}}{3}$.

Từ giả thiết $0 < a \le \frac{1}{3}$ suy ra:

$$0 < g(0) < g(a) \le g\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow \frac{1}{g^2(a)} \ge \frac{1}{g^2\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{9}{32}.$$

Do đó: $F \ge 64.\frac{9}{32} = 18$.

$$F = 18 \Leftrightarrow \begin{cases} b = c \\ a = \frac{b+c}{2\sqrt{2}} \\ a+b+c = \frac{1+2\sqrt{2}}{3} \\ a = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = c = \frac{\sqrt{2}}{3} \\ a = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

Vậy min$F$ = 18.

Nhận xét. Đa số các bạn tham gia giải bài này có kết quả đúng với cách giải tương tự như trên. Một số bạn mắc sai lầm khi giải như sau: Sử dụng BĐT Bunyakovsky và BĐT Schwarz ta có:

$$F=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2\ge\frac{1}{3}\left(\frac{(1+1+1)^2}{a+b+c}\right)^2$$

$$=\frac{27}{(a+b+c)^2}=\frac{27}{\left(\frac{1+2\sqrt{2}}{3}\right)^2}=\frac{243}{9+4\sqrt{2}}.$$

Vậy $\min F=\frac{243}{9+4\sqrt{2}}$ khi $a=b=c=\frac{1+2\sqrt{2}}{9}$.

Sai lầm trong lập luận trên là $a=\frac{1+2\sqrt{2}}{9}$ $(\approx 0,43)$ đã vi phạm giả thiết $a\le\frac{1}{3}$.

Tuyên dương các bạn sau có lời giải đúng:

Phú Thọ: *Hà Phương Anh*, 9A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông; **Nghệ An:** *Ngô Văn Trường*, 10A1, THPT Hoàng Mai, TX. Hoàng Mai; **Quảng Bình:** *Nguyễn Thanh Hải*, 12 Toán 1, *Phạm Thị Mỹ Hạnh*, 12 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Thừa Thiên Huế:** *Phan Quốc Thắng*, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Đà Nẵng:** *Tô Đông Hải*, 11A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bình Định:** *Phan Trung Trực*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bạc Liêu:** *Đỗ Văn Dương*, 11CA, THPT Trần Văn Bảy, Phước Long; **Vĩnh Long:** *Nguyễn Tuấn Kiệt*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Sóc Trăng:** *Tiết Trọng Khiêm*, 11A2, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Chánh Thiện*, 8/14, THCS Lê Quý Đôn, quận 3; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Đỗ Tiến Dũng*, 9A, THCS Huỳnh Tịnh Của, Long Điền.

TRẦN HỮU NAM

Bài T7/552. *Tìm m để hệ phương trình sau đây có bốn nghiệm phân biệt*

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2+2x+1}\\ \quad+\sqrt{\left(2x^2-2y^2-3x+8\right)^2+\left(4xy-3y\right)^2}=m \quad (1).\\ \left(3x+4y\right)^2+\left(4x-3y\right)^2=100 \quad (2)\end{cases}$$

Lời giải. (Của tác giả và tất cả các bạn) Ta có:

$$(2)\Leftrightarrow 25\left(x^2+y^2\right)=100\Leftrightarrow y^2=4-x^2$$

$\Rightarrow y=\pm\sqrt{4-x^2}$ (2') với $-2\le x\le 2$.

Thay vào PT(1) ta được:

$$\sqrt{2x+5}+\sqrt{\left(4x^2-3x\right)^2+\left(4x-3\right)^2\left(4-x^2\right)}=m$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{2x+5}+\sqrt{\left(4x-3\right)^2x^2+\left(4x-3\right)^2\left(4-x^2\right)}=m$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{2x+5}+2\left|4x-3\right|=m \quad (1').$$

Để (2') có nghiệm thì $-2\le x\le 2$. Với $x=\pm 2$ thì $y_1=y_2=0$. Với mỗi $-2<x<2$ ta có hai nghiệm phân biệt $y_{1,2}=\pm\sqrt{4-x^2}$. Như vậy, để hệ (1)-(2) có 4 nghiệm thì (1') phải có hai nghiệm thuộc khoảng $-2<x<2$. Xét hàm số

$$f(x)=\sqrt{2x+5}+2\left|4x-3\right|$$

$$=\begin{cases}\sqrt{2x+5}+2(4x-3) \text{ khi } \frac{3}{4}\le x\le 2\\ \sqrt{2x+5}-2(4x-3) \text{ khi } -2\le x\le\frac{3}{4}\end{cases};$$

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2x+5}}+8>0 \text{ khi } \frac{3}{4}<x\le 2\\ \frac{1}{\sqrt{2x+5}}-8<0 \text{ khi } -2\le x<\frac{3}{4}\end{cases}.$$

Chứng tỏ $f(x)$ nghịch biến khi $-2\le x\le\frac{3}{4}$ và đồng biến khi $\frac{3}{4}\le x\le 2$. Tại $x=\frac{3}{4}$ thì $f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{\sqrt{26}}{2}$. Kí hiệu $f'(x_0)^+\left(f'(x_0)^-\right)$ là đạo hàm một phía của $f(x)$ khi $x\to x_0$ từ bên phải (từ bên trái), ta có:

$$f'\left(\frac{3}{4}\right)^+=\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}+5}}+8\ne\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}+5}}-8=f'\left(\frac{3}{4}\right)^-$$

nên hàm số không có đạo hàm tại $x_0=\frac{3}{4}$.

Ta có $f(-2)=23$; $f(2)=13$.

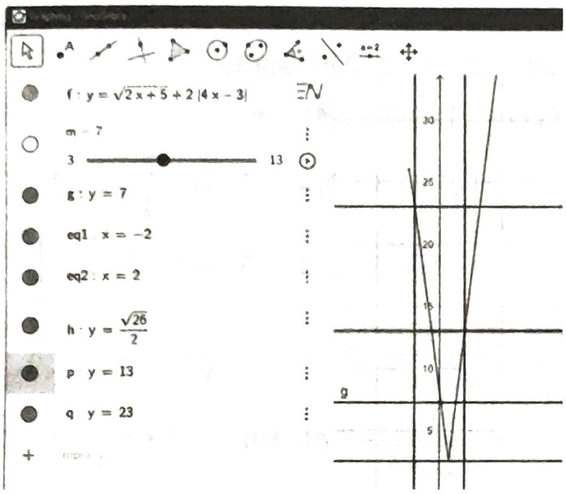
Vậy với $\frac{\sqrt{26}}{2}<m<13$ thì (1') có hai nghiệm:

$$-2<x_1<\frac{3}{4}<x_2<2.$$

Khi ấy hệ (1)-(2) có 4 nghiệm phân biệt.

Đáp số: $\frac{\sqrt{26}}{2} < m < 13$.

Nhận xét. PT(1') có thể dễ dàng giải bằng phương pháp đồ thị như sau. Sử dụng *GeoGebra* ta vẽ được đồ thị của hàm $f(x)=\sqrt{2x+5}+2|4x-3|$, các đường $y=m,\ x=\pm 2$. Khi đó ta dễ dàng biện luận số nghiệm của hệ (1)-(2) theo m (khi nào hệ vô nghiệm, có duy nhất nghiệm, có hai nghiệm phân biệt,...) mà không cần tính toán và biện luận phức tạp (hình dưới).



Các bạn sau đây đã gửi bài giải và có lời giải tốt:

Bình Định: *Phan Trung Trực*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Quảng Bình:** *Nguyễn Thanh Hải*, 12 Toán 1, *Phạm Thị Mỹ Hạnh*, 12 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Vĩnh Long:** *Nguyễn Tuấn Kiệt*, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

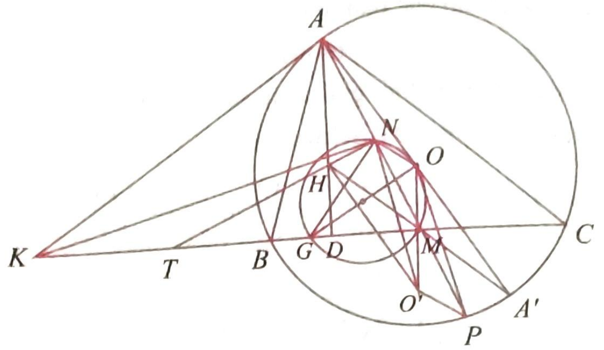
TẠ DUY PHƯỢNG

Bài T8/552. *Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), trực tâm H, trung tuyến AM (M thuộc cạnh BC). Đường thẳng qua H vuông góc với AM cắt AM tại N, cắt BC tại T. Đường tròn ngoại tiếp tam giác OMN cắt lại BC tại G (G khác M). Gọi K là điểm đối xứng với G qua T. Chứng minh rằng KA = KN.*

Lời giải. (Theo bạn *Nguyễn Tấn Nguyên Chương*, 11 Toán 1, THPT chuyên Lương Văn Chánh, TP. Tuy Hoà, **Phú Yên**).

Gọi O' là điểm đối xứng với O qua BC.

Vì $\Delta NTM \sim \Delta NAH$ (g.g) nên $\frac{NM}{NT}=\frac{NH}{NA}$.



Ta có $\widehat{ONG}=\widehat{OMG}=90^\circ \Rightarrow \widehat{ONM}=\widehat{GNT}$ và $\widehat{OMN}=\widehat{NTG}$ nên $\Delta NOM \sim \Delta NGT$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{NO}{NG}=\frac{NM}{NT}=\frac{NH}{NA}$. Lại có $\frac{OM}{OO'}=\frac{GT}{GK}=\frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Delta NO'O \sim \Delta NKG \Rightarrow \frac{NO'}{NK}=\frac{NO}{NG}$.

Như vậy $\frac{NO}{NG}=\frac{NM}{NT}=\frac{NH}{NA}=\frac{NO'}{NK}$ (*).

Xét phép vị tự quay $S_N^{\frac{NO}{NG},90^\circ}$ (hợp của phép vị tự tâm N tỉ số $\frac{NO}{NG}$ và phép quay tâm N góc quay 90^0). Khi đó từ (*) ta thấy:

$$S_N^{\frac{NO}{NG},90^\circ}: O\mapsto G, M\mapsto T, O'\mapsto K, H\mapsto A.$$

Do đó $S_N^{\frac{NO}{NG},90^\circ}: HO'\mapsto AK \Rightarrow HO'\perp AK$, mà $HO'//AO$ nên $AO\perp AK$.

Giả sử AM cắt đường tròn (O) tại P, AO cắt đường tròn (O) tại A'. Tứ giác $BHAC'$ là hình bình hành, suy ra H, M, A' thẳng hàng và $HM=A'M$. Kết hợp với $A'P//HN$ thu được tứ giác $HNA'P$ là hình bình hành $\Rightarrow NM=MP$ $\Rightarrow NOPO'$ là hình bình hành. Từ đó $\widehat{KNT}=\widehat{O'NM}=\widehat{OPM}=\widehat{OAP}\Rightarrow \widehat{KAN}=\widehat{KNA}$.

Vậy tam giác KAN cân tại $K \Rightarrow KN=KA$.

Nhận xét. Số bài giải gửi về Toà soạn không nhiều. Ngoài bạn *Chương*, các bạn sau cũng có lời giải đúng: **Điện Biên**: *Trần Anh Quân*, 10A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Hà Tĩnh**: *Lê Hữu Mạnh Tiến*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh, TP. Hà Tĩnh; **Quảng Bình**: *Đoàn Ngọc Duy*, 12 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới; **Thừa Thiên Huế**: *Phan Quốc Thắng*, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế; **Đà Nẵng**: *Tô Đông Hải*, 11A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đà Nẵng; **Bình Định**: *Phan Trung Trực*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/552. *Cho đa thức* $P(x)\in\mathbb{Z}[x]$ *thỏa mãn* $P^2(x)-x-1$ *chia hết cho* x^{100}. *Tìm hệ số của* x^{99} *trong khai triển của đa thức* $(P(x)+1)^{100}$.

Lời giải. Từ đề bài, suy ra tồn tại đa thức $Q(x)\in\mathbb{R}[x]$ sao cho $P^2(x)-1=x^{100}Q(x)+x$. Suy ra $P(x)+1$ hoặc $P(x)-1$ chia hết cho x. Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1. Nếu $P(x)+1$ chia hết cho x thì $P(x)+1=xH(x)$, trong đó $H(x)\in\mathbb{R}[x]$. Suy ra $(P(x)+1)^{100}=x^{100}H^{100}(x)$ nên hệ số của x^{99} trong đa thức $(P(x)+1)^{100}$ bằng 0.

Trường hợp 2. Nếu $P(x)-1$ chia hết cho x thì $P(x)-1=x.G(x)$ trong đó $G(x)\in\mathbb{R}[x]$ thì tương tự như trường hợp 1 thì hệ số của x^{99} trong đa thức $(P(x)-1)^{100}$ bằng 0. Suy ra hệ số của x^{99} trong đa thức $(P(x)+1)^{100}$ bằng hệ số của x^{99} trong đa thức

$$Q(x)=(P(x)+1)^{100}+(P(x)-1)^{100}$$
$$=2\sum_{i=0}^{50}C_{100}^{2i}P^{2i}(x).$$

Từ giả thiết, suy ra $P^2(x)\equiv(x+1)\left(\bmod x^{100}\right)$ nên

$$Q(x)\equiv\sum_{i=0}^{50}C_{100}^{2i}(x+1)^i\ \left(\bmod x^{100}\right).$$

Chú ý là

$$\sum_{i=0}^{50}C_{100}^{2i}(x+1)^i=a_{50}x^{50}+a_{49}x^{49}+\ldots+a_1x+a_0$$

nên hệ số của x^{99} trong $Q(x)$ bằng 0. Như vậy, trong mọi trường hợp thì x^{99} trong đa thức $(P(x)+1)^{100}$ bằng 0.

Nhận xét. Vì lí do in ấn nên đề đúng phải là $P(x)\in\mathbb{R}[x]$. Ngoài ra nếu viết

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$$

thì $P^2(x)=\sum_{1\le i<j\le n}a_ia_jx^{i+j}=\sum_{k=0}^{2n}\left(\sum_{i=0}^{k}a_ia_{k-i}\right)x^k.$

Từ đó để $P^2(x)-x-1$ chia hết cho x^{100}, ta có thể chọn: +) $a_0=1$,

+) $a_1a_0+a_0a_1=1$ kéo theo $a_1=\frac{1}{2}$,

+) $a_2a_0+a_1^2+a_0a_2=0$ kéo theo $a_2=-\frac{1}{8}$,

$2a_3a_0+2a_2a_1=0$ hay $a_3=-a_2a_1=\frac{1}{16}$,

....

Cứ như vậy ta sẽ tìm được các hệ số của $P(x)$. Tương tự như cách chứng minh trên, ta có thể chỉ ra nếu đa thức $(P(x)+1)^n$ thoả mãn

$$(P(x)+1)^n\equiv Q(x)\left(\bmod x^n\right),$$

trong đó $Q(x)$ là đa thức bậc không vượt quá $\frac{n}{2}$ thì hệ số của x^m với $m=\frac{n}{2}+1,\ldots,n-1$ đều bằng 0.

Bài toán này không khó, đa số các bạn đều có lời giải đúng và theo cách đã giải ở trên. Đáng tiếc có một bạn giải sai do ngay từ giả thiết suy ra $P(x)-1$ chia hết cho x. Các bạn sau đây có lời giải đúng **Bình Định:** *Phạm Trung Trực*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Quảng Bình:** *Nguyễn Thanh Hải*, 12 Toán 1, *Phạm Thị Mỹ Hạnh*, 12 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Đồng Tháp:** *Trần Hồng Vy*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Thừa Thiên Huế:** *Phan Quốc Thắng*, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế.

NGUYỄN TIẾN LÂM

Bài T10/552. *Với mỗi số nguyên dương n, ta ký hiệu* $\tau(n)$ *và* $\sigma(n)$ *lần lượt là số các ước số dương và tổng các ước số dương của n. Chứng minh với mọi* $n>1$ *ta có*

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sigma(2k-1)}{\tau(2k-1)}<\frac{n(n+1)}{2}<\sum_{k=1}^{n}\frac{\sigma(k^2)}{\tau(k^2)}.$$

Lời giải (Dựa theo lời giải của bạn *Phạm Thị Mỹ Hạnh*, 12 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, Quảng Bình). Đặt $h = \tau(n)$. Giả sử $d_1 < d_2 < \cdots < d_h$ là tất cả ước dương của n.

Bổ đề 1. $\tau(n)\sqrt{n} < \sigma(n)$.

Chứng minh. Ta có $\frac{n}{d_1}, \ldots, \frac{n}{d_h}$ cũng là tất cả ước dương của n. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\sigma^2(n) = \sum_{i=1}^{h} d_i \sum_{i=1}^{h} \frac{n}{d_i} = n\sum_{i=1}^{h} d_i \sum_{i=1}^{h} \frac{1}{d_i} > nh^2 = n\tau^2(n)$$

(không xảy ra dấu bằng vì $d_1 < d_2 < \cdots < d_h$).

Bổ đề 2. $\frac{\sigma(n)}{\tau(n)} \le \frac{n+1}{2}$ (1).

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ n là số nguyên tố.

Chứng minh Với mỗi $i = 1, \ldots, h$ ta có:

$$d_i + \frac{n}{d_i} \le n+1 \quad (2).$$

Thật vậy: $d_i + \frac{n}{d_i} \le n+1 \Leftrightarrow (d_i - 1)(d_i - n) \le 0$ (luôn đúng). Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $d_i = 1$ hoặc $d_i = n$.

Nếu n là số nguyên tố thì n chỉ có hai ước dương là 1 và n. Do đó có dấu "=" ở (1).

Nếu n là hợp số thì n có ít nhất một ước d_i với $1 < d_i < n$. Do (2) ta có:

$$\frac{\sigma(n)}{\tau(n)} = \frac{\sum_{i=1}^{h} d_i + \sum_{i=1}^{h} \frac{n}{d_i}}{2h} = \frac{\sum_{i=1}^{h}\left(d_i + \frac{n}{d_i}\right)}{2h}$$

$$< \frac{h(n+1)}{2h} = \frac{n+1}{2}.$$

Trở lại bài toán: Với $n = 2, 3, 4$ ta có:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma(2k-1)}{\tau(2k-1)} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Với $n > 4$ do trong dãy số lẻ $1, 3, \ldots, 2n-1$ có ít nhất một hợp số (số 9) nên áp dụng bổ đề 2 ta có:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma(2k-1)}{\tau(2k-1)} < \sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{2} = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Áp dụng bổ đề 1 ta có:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma(k^2)}{\tau(k^2)} > \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Nhận xét. 1) Như vậy trong đề bài cần sửa "với $n > 1$" thành "với $n > 4$" hoặc sửa dấu "<" thành dấu "$\le$" trong bất đẳng thức:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma(2k-1)}{\tau(2k-1)} < \frac{n(n+1)}{2}.$$

2) Có ít bạn tham gia giải bài toán này. Các bạn sau đây có lời giải tốt: **Thừa Thiên Huế:** *Phan Quốc Thắng*, 11T1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Vĩnh Long:** *Nguyễn Tuấn Kiệt*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/552. *Tìm tất cả các đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn: $P^2(x^2 + 2x - 3) = 4P(x) - 3, \forall x \in \mathbb{R}$ (1).*

Lời giải. (Theo ý của đa số các bạn).

Nếu $P(x)$ là đa thức hằng, tức $P(x) \equiv c, c \in \mathbb{R}$, thì từ (1) suy ra: $c^2 = 4c - 3 \Leftrightarrow c = 1, c = 3$.

Xét trường hợp $\deg(P) = m$ với $m \ge 1$. Từ (1) suy ra: $P^2(x^2 + 2x - 3) - 4P(x) + 3 = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (2).

Nhận xét rằng vế trái của (2) là đa thức có bậc $4m > 1$ nên nó không thể có vô số nghiệm thực.

Kết luận: Tất cả các đa thức cần tìm là

$P(x) = 1$ và $P(x) = 3$.

Nhận xét. Đây là dạng toán đơn giản về phương trình hàm trong lớp hàm đa thức thực một biến. Các bạn tham gia đều nhận được kết quả đúng:

Hưng Yên: *Trần Hữu Dương*, 12 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Bình Định:** *Phan Trung Trực*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Đà Nẵng:** *Tô Đông Hải*, 11A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Hà Tĩnh:** *Hoàng Bá Hữu*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Vĩnh Long:** *Nguyễn Tuấn Kiệt*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Quảng Bình:** *Nguyễn Thanh Hải*, 11T1, *Phạm Thị Mỹ Hạnh*, 12 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp.

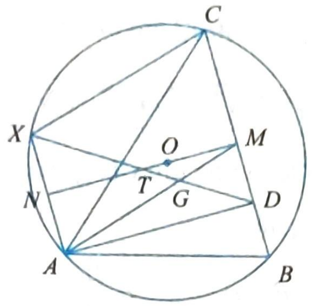
NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T12/552. *Cho tam giác ABC với trọng tâm G; các đường cao AD, BE. Gọi X, Y lần lượt là giao điểm của các tia DG, EG với đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC, XY cắt BC, AC lần lượt tại P, Q. Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác CXQ và CYP. Chứng minh rằng CG vuông góc với O_1O_2.*

Lời giải. (Theo bạn *Nguyễn Tấn Nguyên Chương*, 11T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh, **Phú Yên**). Ta cần có một bổ đề.

Bổ đề. *Cho tam giác ABC, (O) là đường tròn ngoại tiếp, M là trung điểm của BC, D là hình chiếu của A trên BC. X là giao điểm thứ hai của (O) và đường thẳng qua A song song với BC, G là giao điểm của AM và DX. Khi đó G là trọng tâm của tam giác ABC.*

Chứng minh. Gọi N là trung điểm của AX; T là giao điểm của MN và DX.



Dễ thấy $ABCX$ là hình thang cân ($AX \parallel BC$). Do đó $MN \parallel DA$ và $\overline{MN} = \overline{DA}$. Từ đó, chú ý rằng N là trung điểm của AX, suy ra:

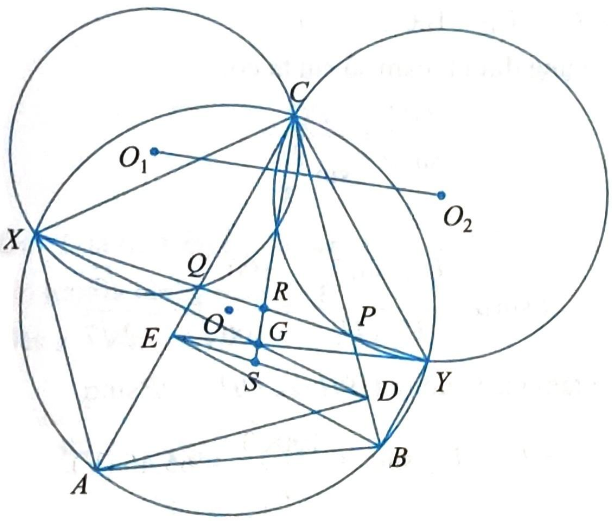
$$\overline{MT} = \overline{TN} = \frac{1}{2}\overline{DA}.$$

Vậy $\dfrac{\overline{GM}}{\overline{GA}} = \dfrac{\overline{TM}}{\overline{DA}} = -\dfrac{\overline{MT}}{\overline{DA}} = -\dfrac{1}{2}$.

Nói cách khác, G là trọng tâm của tam giác ABC.

Trở lại giải bài toán T12/552.

Trong lời giải này, kí hiệu $m\widehat{UV}$ chỉ số đo của cung định hướng $\widehat{UV}$.



Gọi R, S theo thứ tự là giao điểm của CG và PQ, DE. Theo bổ đề trên $AX \parallel BC; BY \parallel AC$.

Do đó: $(PQ, PB) \equiv (XY, BC) \equiv \frac{1}{2}m\widehat{XC} + \frac{1}{2}m\widehat{YB}$

$$\equiv \frac{1}{2}m\widehat{BA} + \frac{1}{2}m\widehat{YB} \pmod{\pi} \equiv \frac{1}{2}m\widehat{YA} \equiv \frac{1}{2}m\widehat{CB}$$

$$\equiv (AC, AB) \equiv (AQ, AB) \pmod{\pi}.$$

Điều đó có nghĩa là A, B, P, Q cùng thuộc một đường tròn. Từ đó, chú ý rằng A, B, D, E cùng thuộc một đường tròn, suy ra $PQ \parallel DE$.

Vậy, theo định lí Thales, ta có $\dfrac{\overline{RP}}{\overline{RQ}} = \dfrac{\overline{SD}}{\overline{SE}} = \dfrac{\overline{RX}}{\overline{RY}}$.

Do đó $P_{R/(O_2)} = \overline{RP}.\overline{RY} = \overline{RQ}.\overline{RX} = P_{R/(O_1)}$.

Kết hợp với $P_{C/(O_2)} = 0 = P_{C/(O_1)}$, suy ra:

$$CG \equiv CR \perp O_1O_2.$$

Nhận xét. 1) Bài toán này không khó, nhưng chỉ có 6 bạn tham gia giải, chỉ có bạn *Nguyễn Tấn Nguyên Chương* có lời giải ngắn gọn như trên.

2) Xin nêu tên năm bạn còn lại: **Quảng Bình:** *Nguyễn Thanh Hải*, 12T1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Quảng Trị:** *Hoàng Công Huy*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Thừa Thiên Huế:** *Phan Quốc Thắng*, 11T1, THPT chuyên Quốc Học Huế; **Bình Định:** *Phan Trung Trực*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Vĩnh Long:** *Nguyễn Tuấn Kiệt*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/552. *Một con lắc đơn dao động điều hoà trong một thang máy chuyển động thẳng đứng lên cao chia thành 3 giai đoạn liên tục. Giai đoạn một, thang máy chuyển động nhanh dần đều từ trạng thái nghỉ được đoạn đường h. Giai đoạn hai, thang máy chuyển động thẳng đều với tốc độ bằng tốc độ cuối giai đoạn một và đi được đoạn đường 2h. Giai đoạn ba thang máy chuyển động chậm dần đều với tốc độ đầu bằng tốc độ chuyển động thẳng đều, đồng thời đi được đoạn đường h rồi dừng lại. Số dao động toàn phần trong giai đoạn một và hai tương ứng là 18 lần và 17 lần. Giai đoạn ba của thang máy thì con lắc thực hiện được số dao động toàn phần bằng bao nhiêu?*

Lời giải.

Giai đoạn 1: Chu kì của con lắc $T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g + a_1}}$

và vận tốc ở cuối giai đoạn: $v^2 = 2a_1h$;

thời gian chuyển động của thang máy: $t_1 = \sqrt{\dfrac{2h}{a_1}}$.

Giai đoạn 2: Chu kì của con lắc $T_2 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ và thời gian chuyển động của thang máy:

$$t_2 = \frac{2h}{v} = \sqrt{\frac{2h}{a_1}} = t_1.$$

Giai đoạn 3: Chu kì của con lắc $T_3 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g-a_3}}$ và $a_3 = \dfrac{v^2}{2h} = a_1$; thời gian chuyển động của thang máy: $t_3 = \sqrt{\dfrac{2h}{a_3}} = \sqrt{\dfrac{2h}{a_1}} = t_1$.

– Số dao động toàn phần: $N_1 = \dfrac{t_1}{T_1}$; $N_2 = \dfrac{t_1}{T_2}$;

$$N_3 = \frac{t_1}{T_3};\ \frac{N_2}{N_1} = \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{g}{g+a_1}} = \frac{17}{18},$$

suy ra: $\dfrac{a_1}{g} = \left(\dfrac{18}{17}\right)^2 - 1 = \dfrac{35}{289}$;

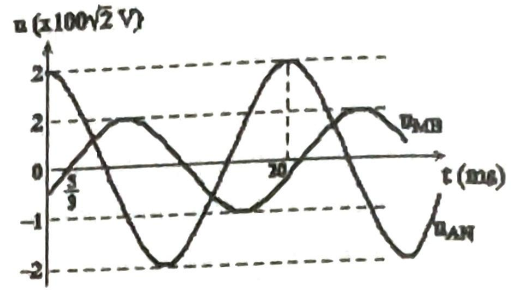
$$\frac{N_3}{N_1} = \frac{T_1}{T_3} = \sqrt{\frac{g-a_1}{g+a_1}} = \sqrt{\frac{1-\frac{a_1}{g}}{1+\frac{a_1}{g}}} = \frac{\sqrt{254}}{18}$$

$\Rightarrow N_3 \approx 16$ lần.

Nhận xét. Chúc mừng các bạn đã có lời giải đúng cho đề ra kì này: *Phạm Văn Anh*, 11 Lý, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp**; *Đỗ Văn Dương*, 11A1, Trung tâm GDNN – GD thường xuyên, quận Ô Môn, **Cần Thơ**.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/552. *Cho đoạn mạch điện xoay chiều AMNB. Trong đó đoạn mạch AM chỉ chứa cuộn cảm thuần có độ tự cảm L, đoạn mạch MN chỉ chứa điện trở thuần R và đoạn mạch NB chỉ chứa tụ điện có điện dung C. Đặt điện áp $u = U\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$ (trong đó U, ω, φ xác định) vào hai đầu đoạn mạch. Khi đó điện áp tức thời hai đầu đoạn mạch AN là u_{AN} và MB là u_{MB} được biểu thị ở hình dưới. Tính điện áp hiệu dụng hai đầu đoạn mạch MN.*



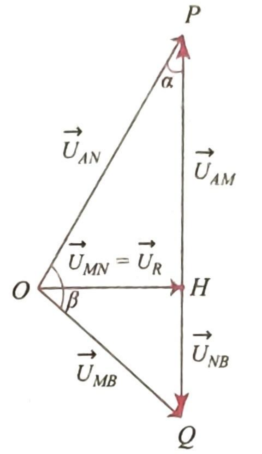
Lời giải. Từ đồ thị điện áp ta có :

$U_{AN} = 200\sqrt{2}\cos\omega t$ (V),

$U_{MB} = 100\sqrt{2}\cos\left(\omega t - \dfrac{2\pi}{3}\right)$ (V).

Độ lệch pha giữa U_{AN} và U_{MB} là:

$$\beta = \varphi_{U_{AN}/U_{MB}} = \frac{2\pi}{3}.$$



Giản đồ vectơ điện áp như hình vẽ.

Xét tam giác OPQ. Áp dụng định lí hàm côsin ta có:

$$PQ^2 = OQ^2 + OP^2 - 2.OQ.OP\cos\frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow (U_L + U_C)^2 = U_{AN}^2 + U_{MB}^2 - 2U_{AN}U_{MB}\cos\frac{2\pi}{3}$$

$$= 100^2 + 4.100^2 + 2.100^2 = 7.100^2$$

$\Rightarrow U_L + U_C = 100\sqrt{7}$ (V).

Áp dụng định lí hàm số sin ta có:

$$\frac{OQ}{\sin\alpha} = \frac{PQ}{\sin\frac{2\pi}{3}}$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{U_{MB}\sin\frac{2\pi}{3}}{U_L + U_C} = \frac{100.\frac{\sqrt{3}}{2}}{100\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}.$$

Xét tam giác vuông OPH có: $OH = OP\sin\alpha$

$$\Rightarrow U_R = U_{AN}\sin\alpha = \frac{100\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \approx 65{,}46 \text{ (V)}.$$

Nhận xét. Chúc mừng bạn *Phạm Văn Anh*, 11 Lý, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp** đã có lời giải đúng cho đề ra kì này.

NGUYỄN XUÂN QUANG

DIỄN ĐÀN DẠY HỌC TOÁN

THEO CHƯƠNG TRÌNH VÀ SGK MỚI

PHÁT TRIỂN TƯ DUY VÀ LẬP LUẬN TOÁN HỌC CHO HỌC SINH THPT THÔNG QUA KHAI THÁC ỨNG DỤNG VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

NGUYỄN VĂN HẬU - TRẦN ĐÌNH HOÀNG - NGUYỄN VIẾT CƯỜNG
(GV THPT Nguyễn Trường Tộ, Hưng Nguyên, Nghệ An)

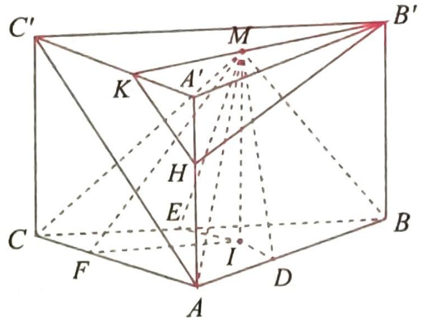
(Kỳ 2)

2.2. Khai thác phương pháp vectơ để giải bài toán cực trị và bất đẳng thức trong hình học không gian

2.2.1. Giải bài toán cực trị và bất đẳng thức trong hình học không gian nhờ đánh độ dài của vectơ

Thí dụ 1. *Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB=6; BC=12; AA'=AC=6\sqrt{3}$. Gọi M là điểm nằm trong tam giác $A'B'C'$. Góc giữa các mặt phẳng $(MAB),(MBC),(MCA)$ với mặt phẳng (ABC) lần lượt là α,β,γ. Đặt $P=\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{2}{\sin\beta}+\frac{\sqrt{3}}{\sin\varphi}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của P. Khi đó tính côsin góc giữa 2 đường thẳng $B'M$, AC'.*

Lời giải.



Gọi I là hình chiếu của M trên (ABC); D,E,F lần lượt là hình chiếu của I trên AB,BC,CA.

Đặt $x=ID,\ y=IE, z=IF$. Khi đó ta có:

$$P=\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{2}{\sin\beta}+\frac{\sqrt{3}}{\sin\varphi}$$
$$=\frac{1}{\sin\widehat{MDI}}+\frac{2}{\sin\widehat{MEI}}+\frac{\sqrt{3}}{\sin\widehat{MFI}}$$
$$=\frac{MD+2ME+\sqrt{3}MF}{MI}$$
$$=\frac{1}{6\sqrt{3}}\left(\sqrt{x^2+108}+2\sqrt{y^2+108}+\sqrt{3}\sqrt{z^2+108}\right).$$

Từ giả thiết ta có tam giác ABC vuông tại A và

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.AC=18\sqrt{3}.$$

Mặt khác: $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta IAB}+S_{\Delta IBC}+S_{\Delta IAC}$

$$=3x+6y+3\sqrt{3}z=18\sqrt{3}$$

$\Rightarrow x+2y+\sqrt{3}z=6\sqrt{3}$. Xét

$$\vec{u}=\left(\sqrt{108};x\right),\vec{v}=\left(2\sqrt{108};2y\right),\vec{w}=\left(\sqrt{3}\sqrt{108};z\sqrt{3}\right)$$
$$\Rightarrow \vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\left(\left(3+\sqrt{3}\right)6\sqrt{3};\ 6\sqrt{3}\right).$$

Khi đó: $P=\frac{1}{6\sqrt{3}}\left(\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|+\left|\vec{w}\right|\right)$

$$\ge\frac{1}{6\sqrt{3}}\left|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}\right|$$
$$=\frac{1}{6\sqrt{3}}\left(6\sqrt{3}\sqrt{13+6\sqrt{3}}\right)=\sqrt{13+6\sqrt{3}}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$ nghĩa là I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC hay M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $A'B'C'$. Vậy $\min P=\sqrt{13+6\sqrt{3}}$ khi M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $A'B'C'$.

- *Tính côsin góc giữa hai đường thẳng $B'M$ và AC'.*

Gọi K là chân đường phân giác trong của tam giác $A'B'C'$ kẻ từ B', từ K kẻ đường thẳng song song với AC' cắt AA' tại H, khi đó:

$$\varphi=(\widehat{B'M,AC'})=(\widehat{B'K,KH})\Rightarrow\cos\varphi=\left|\cos\widehat{B'KH}\right|.$$

Ta tính được: $\cos\widehat{B'KH}=\frac{B'K^2+KH^2-B'H^2}{2B'K.KH}$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\Rightarrow\cos\varphi=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Thí dụ 2. *Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng 1. Hai điểm M, N lần lượt thay đổi* *trên các đoạn AB_1 và BC_1 sao cho MN luôn tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc $60°$. Tìm giá trị bé nhất của độ dài đoạn thẳng MN.*

Lời giải.

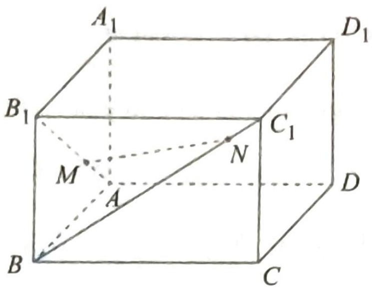
Đặt

$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB_1}$;

$\overrightarrow{BN} = y\overrightarrow{BC_1}$

với $0 \le x, y \le 1$.

Ta có:



$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{BC_1} - x\overrightarrow{AB_1}$$
$$= (1-x)\overrightarrow{AB} + (y-x)\overrightarrow{AA_1} + y\overrightarrow{AD}.$$

Vậy $MN^2 = (1-x)^2 + (y-x)^2 + y^2$ và $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AA_1} = y - x$. Vì MN tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc $60°$ nên $\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AA_1}\right) = 30°$ hoặc $\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AA_1}\right) = 150°$. Do đó:

$$|y-x| = \sqrt{(1-x)^2 + (y-x)^2 + y^2}\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\Leftrightarrow (y-x)^2 = 3\left((1-x)^2 + y^2\right).$$

Mà $3\left((1-x)^2 + y^2\right) \ge 3\dfrac{(y-x+1)^2}{2}$ nên

$$(y-x)^2 \ge 3\frac{(y-x+1)^2}{2} \Leftrightarrow -3-\sqrt{6} \le (y-x) \le -3+\sqrt{6}$$
$$\Rightarrow 3-\sqrt{6} \le |y-x| \le 3+\sqrt{6}.$$

Suy ra: $MN^2 = \dfrac{4}{3}(y-x)^2 \ge \dfrac{4}{3}\left(3-\sqrt{6}\right)^2$.

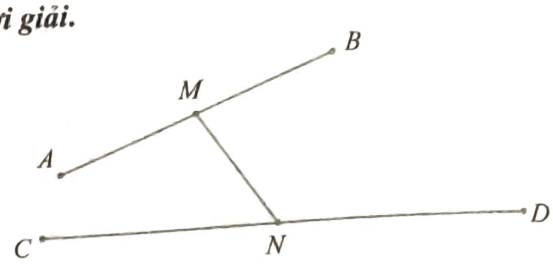
Dấu bằng xảy ra khi

$$\begin{cases} 1-x = y \\ y-x = 3-\sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{6}-2}{2} \\ y = \dfrac{4-\sqrt{6}}{2} \end{cases}.$$

Vậy $\min MN = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\left(3-\sqrt{6}\right) = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$.

Thí dụ 3. *Trong không gian cho hai điểm M, N cố định, $MN = 2023$ và hai đoạn thẳng AB, CD thay đổi sao cho M, N luôn là trung điểm của AB và CD. Tìm giá trị nhỏ nhất của $AC + BD$.*

Lời giải.



Vì M, N luôn là trung điểm của AB và CD nên ta luôn có:

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{ND}$$
$$= 2\overrightarrow{MN} + \left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}\right) + \left(\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND}\right) = 2\overrightarrow{MN}.$$

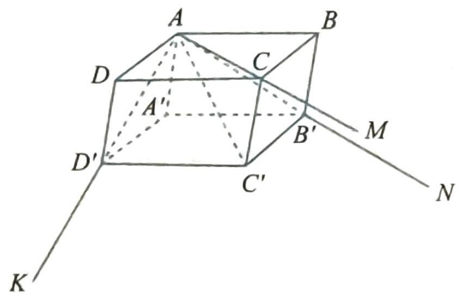
Suy ra: $AC + BD = \left|\overrightarrow{AC}\right| + \left|\overrightarrow{BD}\right| \ge \left|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right| = \left|2\overrightarrow{MN}\right|$
$= 2MN = 4046.$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A \equiv C$ hoặc $B \equiv D$ hoặc $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$ cùng hướng.

Vậy $\min(AC + BD) = 2MN = 4046$.

Thí dụ 4. *Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi M, N, K lần lượt là điểm đối xứng của A qua C, B', D'. Chứng minh $C'A < C'M + C'N + C'K$.*

Lời giải.



Đặt $\overrightarrow{C'B'} = \vec{a}, \overrightarrow{C'D'} = \vec{b}, \overrightarrow{C'C} = \vec{c}$. Khi đó ta có:

$\overrightarrow{C'A} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ (quy tắc hình hộp);

$\overrightarrow{C'M} = \overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{CM} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$;

$\overrightarrow{C'N} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}, \overrightarrow{C'K} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.

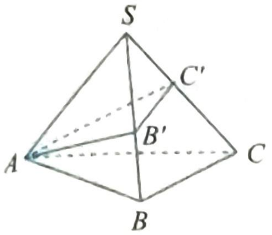
Do đó: $\overrightarrow{C'M} + \overrightarrow{C'N} + \overrightarrow{C'K} + \overrightarrow{C'A} = \vec{0}$

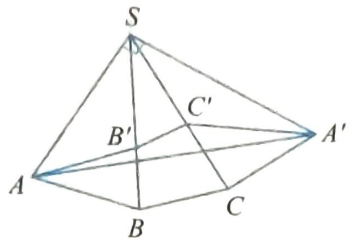
$$\Rightarrow \left|-\overrightarrow{C'A}\right| = \left|\overrightarrow{C'M} + \overrightarrow{C'N} + \overrightarrow{C'K}\right|$$
$$\Rightarrow \left|-\overrightarrow{C'A}\right| \le \left|\overrightarrow{C'M}\right| + \left|\overrightarrow{C'N}\right| + \left|\overrightarrow{C'K}\right|$$
$$\Rightarrow C'A \le C'M + C'N + C'K.$$

Vì các vectơ $\overrightarrow{C'M}, \overrightarrow{C'N}, \overrightarrow{C'K}$ không cùng hướng nên đẳng thức không xảy ra ở bất đẳng thức trên, vì vậy: $C'A < C'M + C'N + C'K$.

Thí dụ 5. *Cho hình chóp* $S.ABC$ *có* $SA=SB=SC=a$ *và* $\widehat{ASB}=\widehat{BSC}=\widehat{CSA}=30^\circ$. *Tìm trên* SB *điểm* B' *và trên* SC *điểm* C' *sao cho tam giác* $AB'C'$ *có chu vi nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó.*

Lời giải.





Khai triển mặt bên của hình chóp $S.ABC$ trên một mặt phẳng ta được ngũ giác $SACBA'$ với

$$SA=SB=SC=SA'=a;\ \widehat{A'SC}=\widehat{CSB}=\widehat{BSA}=30^\circ.$$

Suy ra tam giác $A'SA$ vuông cân tại đỉnh S.

Khi đó chu vi tam giác $AB'C'$ được tính bằng:

$$P(\Delta AB'C')=AB'+B'C'+C'A'=\left|\overrightarrow{AB'}\right|+\left|\overrightarrow{B'C'}\right|+\left|\overrightarrow{C'A'}\right|$$
$$\geq\left|\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{C'A'}\right|=\left|\overrightarrow{AA'}\right|=AA'.$$

Đẳng thức xảy ra khi B' và C' là giao điểm của SB, SC với AA'. Khi đó ta có tam giác SAA' vuông cân tại đỉnh S và $SA=SA'=a$, do đó $AA'=a\sqrt{2}$. Xét tam giác SAB' có $SA=a$, $\widehat{B'SA}=30^\circ$, $\widehat{SAB'}=45^\circ\Rightarrow\widehat{SB'A}=105^\circ$.

Theo định lý hàm số sin ta có:

$$\frac{SA}{\sin\widehat{SB'A}}=\frac{SB'}{\sin\widehat{SAB'}}\Rightarrow SB'=\frac{SA}{\sin\widehat{SB'A}}.\sin\widehat{SAB'}$$
$$=\frac{a}{\sin105^\circ}.\sin45^\circ=\frac{2a}{\sqrt{3}+1}=a\left(\sqrt{3}-1\right).$$

Tương tự ta tính được $SC'=a\left(\sqrt{3}-1\right)$.

Vậy $\min P\left(\Delta AB'C'\right)=a\sqrt{2}\Leftrightarrow B'\in SB, C'\in SC$ sao cho $SB'=SC'=a\left(\sqrt{3}-1\right)$.

2.2.2. Giải bài toán cực trị và bất đẳng thức trong hình học không gian thông qua đánh giá tích vô hướng

Thí dụ 1. (Trích đề học sinh giỏi Tỉnh Nghệ An năm học 2022-2023) *Cho tứ diện* $ABCD$ *có* $AB=10, AC=AD=20$. *Biết rằng*

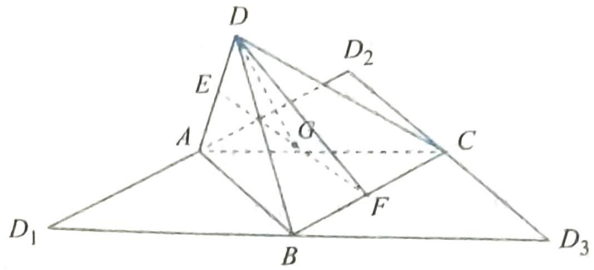
$$\widehat{BAC}+\widehat{CAD}+\widehat{DAB}=\widehat{ABC}+\widehat{CBD}+\widehat{DBA}$$
$$=\widehat{ACB}+\widehat{BCD}+\widehat{DCA}=180^\circ.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=MA+MB+MC+MD$$

khi M *thay đổi trong không gian.*

Lời giải.



Trải tứ diện $ABCD$ trên mặt phẳng (ABC) ta được tam giác $D_1D_2D_3$.

Vì tổng các góc tại các đỉnh A,B,C của tứ diện $ABCD$ bằng 180° nên bộ ba điểm A,D_1,D_2; B,D_1,D_3; C,D_2,D_3 thẳng hàng và ba điểm A,B,C lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng D_1D_2, D_1D_3, D_2D_3. Do đó theo tính chất của đường trung bình trong tam giác và tính chất của phép trải mặt phẳng ta có:

$$BC=\frac{D_1D_2}{2}=20, CD=\frac{D_2D_3}{2}=10, BD=\frac{D_1D_3}{2}=20.$$

Suy ra tứ diện $ABCD$ có $AB=CD=10$, $AD=BC=20, AC=BD=20$. Do đó tứ diện $ABCD$ là tứ diện gần đều.

Gọi E,F,G lần lượt là trung điểm của AD,BC và EF. Ta có G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$. Dùng công thức tính độ dài đường trung tuyến ta tính được: $GA=GB=GC=GD=\dfrac{15\sqrt{2}}{2}$. Ta có:

$$P=MA+MB+MC+MD$$
$$=\frac{MA.GA+MB.GB+MC.GC+MD.GD}{GA}$$
$$\geq\frac{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{GD}}{GA}$$
$$=\frac{\overrightarrow{MG}.\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}\right)+4.GA^2}{GA}$$
$$=4GA=30\sqrt{2}.$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow M$ trùng với điểm G.

Vậy $\min P=30\sqrt{2}$ khi M trùng với điểm G.

Thí dụ 2. *Cho tứ diện ABCD với $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $DA = a'$, $DB = b'$, $DC = c'$. Gọi mặt cầu $(O;R)$ là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện. Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2+a'^2+b'^2+c'^2 \le 16R^2$.*

Lời giải. Giả sử M, N là các điểm bất kỳ thuộc mặt cầu (O,R), ta có:

$$MN^2 = (\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM})^2 = 2R^2 - 2\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$$

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON} = 2R^2 - MN^2.$$

Gọi G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$ thì ta có:

$$4\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}.$$

Suy ra: $16OG^2 = (\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})^2$

$$=4R^2+\left(2R^2-c^2\right)+\left(2R^2-b^2\right)+\left(2R^2-a^2\right)$$
$$+\left(2R^2-a'^2\right)+\left(2R^2-b'^2\right)+\left(2R^2-c'^2\right)$$
$$=16R^2-a^2-b^2-c^2-a'^2-b'^2-c'^2.$$

Vì $OG^2 \ge 0$ nên suy ra:

$$a^2+b^2+c^2+a'^2+b'^2+c'^2 \le 16R^2.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow O \equiv G \Leftrightarrow ABCD$ là tứ diện gần đều.

Thí dụ 3. *Cho tứ diện ABCD có $AB = 2a$, tam giác BCD vuông tại C, $BD = 2a, BC = a$. Gọi I là trung điểm của BD. Gọi M là điểm thuộc cạnh BC. Đặt $BM = x$ $(0 < x < a)$. Xét mặt phẳng (α) đi qua M song song với AB và CI, cắt các cạnh BD, AI, AC theo thứ tự tại N, E, F.*

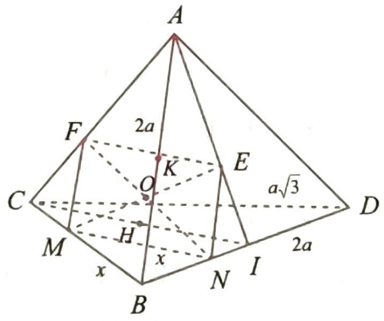
a) *Tìm x để $ME^2 + NF^2$ nhỏ nhất.*

b) *Gọi O là giao điểm của ME và NF. Xác định vị trí của điểm O để tổng*

$$T = OA^2+OB^2+OC^2+OD^2$$

nhỏ nhất.

Lời giải.



a) Dễ thấy $MN // CI // EF$ và $MF // AB // NE$ nên $MNEF$ là hình bình hành. Ta có $\dfrac{MN}{CI} = \dfrac{x}{a}$ nên $MN = x$. Tương tự $MF = 2(a-x)$. Lại có:

$$\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MF},\ \overrightarrow{NF} = \overrightarrow{NM}+\overrightarrow{NE},$$ suy ra:

$$ME^2+NF^2 = (\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MF})^2+(\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{NE})^2$$
$$=2\left(MN^2+MF^2\right)+2MN\cdot MF\cdot\cos\widehat{NMF}$$
$$-2MN\cdot MF\cdot\cos\widehat{NMF}$$
$$=2\left[x^2+4(a-x)^2\right]=\frac{2}{5}\left[(5x-4a)^2+4a^2\right]\geqslant\frac{8a^2}{5}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = \dfrac{4a}{5}$.

Vậy $\min\left(ME^2+NF^2\right) = \dfrac{8a^2}{5}$.

b) Gọi G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$ thì ta có: $OA^2+OB^2+OC^2+OD^2$

$$=(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA})^2+(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GB})^2+(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GC})^2+(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GD})^2$$
$$=4OG^2+GA^2+GB^2+GC^2+GD^2.$$

Do đó T đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow OG$ đạt giá trị nhỏ nhất. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của CI, AB thì H, K cố định. Ta chứng minh O thuộc HK. Thật vậy, vì O là trung điểm của ME nên $\overrightarrow{HO}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{HM}+\overrightarrow{HE}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{HI}+\overrightarrow{IE}\right)$

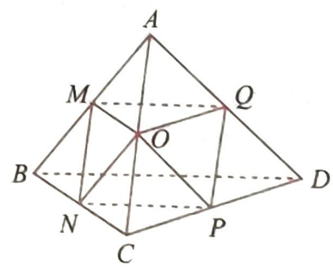
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{a-x}{a}\cdot\overrightarrow{CB}+\frac{a-x}{a}\cdot\overrightarrow{IA}\right)=\frac{x-a}{2a}\left(\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AI}\right).$$

Tương tự: $\overrightarrow{KO}=\dfrac{x}{2a}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AI}\right)$. Suy ra O thuộc HK, vì vậy OG nhỏ nhất khi và chỉ khi O là hình chiếu của G trên HK. Vậy T nhỏ nhất khi và chỉ khi O là hình chiếu của G trên HK.

Thí dụ 4. *Cho tứ diện ABCD. Chứng minh rằng:*

$$(AB+CD)^2+(AD+BC)^2 > (AC+BD)^2.$$

Lời giải. Gọi M, N, P, Q, O lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, AD, AC. Ta có tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành và điểm O không nằm trên mp$(MNPQ)$. Từ đó, ta có:



$(AB+CD)^2+(AD+BC)^2$

$=(2ON+2OQ)^2+(2OP+2OM)^2$

$>4NQ^2+4MP^2$ (1).

Ta lại có:

$$4NQ^2+4MP^2=4\left(\left(\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{MQ}\right)^2+\left(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}\right)^2\right)$$

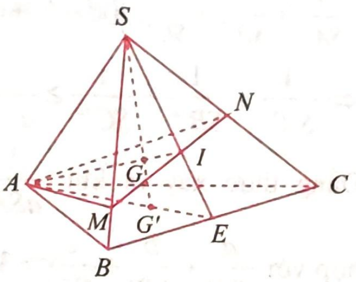
$=4(2MN^2+2MQ^2)=2(AC^2+BD^2)\geq(AC+BD)^2$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

2.2.3. Giải bài toán cực trị và bất đẳng thức trong hình học không gian nhờ khai thác tính chất thẳng hàng và đồng phẳng

Thí dụ 1. *Cho tứ diện SABC có G là trọng tâm tứ diện, mặt phẳng quay quanh AG cắt các cạnh SB, SC lần lượt tại M, N. Tìm giá trị nhỏ nhất của tỉ số* $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}}$.

Lời giải.



Đặt $\dfrac{SB}{SM}=x$, $\dfrac{SC}{SN}=y$ với $x>0$, $y>0$.

Ta có: $\overrightarrow{SI}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{SE}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}\right)$

$=\dfrac{1}{3}\left(x.\overrightarrow{SM}+y.\overrightarrow{SN}\right)=\dfrac{x}{3}.\overrightarrow{SM}+\dfrac{y}{3}.\overrightarrow{SN}.$

Do I, M, N thẳng hàng nên

$\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{3}=1\Leftrightarrow x+y=3.$ Ta có:

$$\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}}=\frac{SA}{SA}.\frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SC}=\frac{1}{xy}\geq\frac{1}{\frac{(x+y)^2}{4}}=\frac{4}{9}.$$

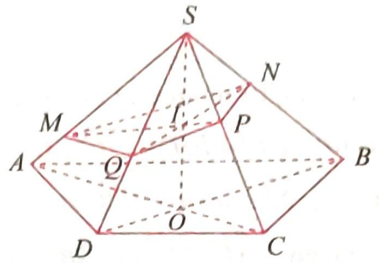
Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=\dfrac{3}{2}\Rightarrow MN//BC$.

Vậy tỉ số nhỏ nhất là $\dfrac{4}{9}$.

Thí dụ 2. *Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang cân, AB song song với CD, $AB=2CD$, các cạnh bên hình chóp có độ dài bằng 1. Gọi $O=AC\cap BD$, I là trung điểm của SO. Mặt phẳng (α) thay đổi đi qua I và cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P, Q. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$T=\frac{1}{SM^2}+\frac{1}{SN^2}+\frac{1}{SP^2}+\frac{1}{SQ^2}.$$

Lời giải.



Đặt $x=\dfrac{SA}{SM}; y=\dfrac{SC}{SP}$. Ta có:

$$\overrightarrow{SI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{SO}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SA}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SA})\right)$$

$$=\frac{1}{6}\overrightarrow{SA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{SC}=\frac{x}{6}\overrightarrow{SM}+\frac{y}{3}\overrightarrow{SP}.$$

Vì I, M, P thẳng hàng nên ta có

$$1=\frac{x}{6}+\frac{y}{3}\Leftrightarrow x+2y=6$$

$$\Leftrightarrow\frac{SA}{SM}+2\frac{SC}{SP}=6\Leftrightarrow\frac{1}{SM}+\frac{2}{SP}=6$$

Chứng minh tương tự $\dfrac{1}{SN}+\dfrac{2}{SQ}=6$.

Ta có: $\dfrac{1}{SM}+\dfrac{1}{SN}+\dfrac{2}{SP}+\dfrac{2}{SQ}=12$

$$\Rightarrow 12^2=\left(\frac{1}{SM}+\frac{1}{SN}+\frac{2}{SP}+\frac{2}{SQ}\right)^2$$

$$\leq\left(1^2+1^2+2^2+2^2\right)\left(\frac{1}{SM^2}+\frac{1}{SN^2}+\frac{1}{SP^2}+\frac{1}{SQ^2}\right)=10T$$

$\Rightarrow T\geq\dfrac{144}{10}=\dfrac{72}{5}$. Vậy $\min T=\dfrac{72}{5}$, đạt được khi

$$\frac{1}{SM}=\frac{1}{SN}=\frac{1}{2SP}=\frac{1}{2SQ}=3$$

$$\Leftrightarrow SM=SN=\frac{1}{3}; SP=SQ=\frac{1}{6}.$$

Thí dụ 3. *Cho hình chóp SABC có $SA=BC$, $SB=CA$, $SC=AB$. Một mặt phẳng đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, cắt các tia SA, SB, SC theo thứ tự tại M, N, P. Chứng minh rằng: $SM+SN+SP\geq SA+SB+SC$.*

Lời giải. Đặt

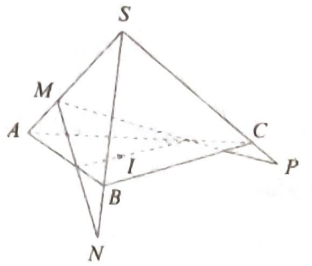
$SA = BC = a,$

$SB = CA = b,$

$SC = AB = c,$

$SM = x,$

$SN = y,\ SP = z.$



Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, ta có hệ thức vectơ: $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$$\Rightarrow (a+b+c)\cdot\overrightarrow{SI} = a\overrightarrow{SA} + b\overrightarrow{SB} + c\overrightarrow{SC} \quad (1).$$

Từ giả thiết ta có $\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{SA};\ \overrightarrow{SN}, \overrightarrow{SB}$ và $\overrightarrow{SP}, \overrightarrow{SC}$ cùng hướng nên:

$$\overrightarrow{SA} = \frac{SA}{SM}\overrightarrow{SM},\ \overrightarrow{SB} = \frac{SB}{SN}\overrightarrow{SN},\ \overrightarrow{SC} = \frac{SC}{SP}\overrightarrow{SP}.$$

Khi đó (1) trở thành:

$$(a+b+c)\overrightarrow{SI} = a\frac{SA}{SM}\overrightarrow{SM} + b\frac{SB}{SN}\overrightarrow{SN} + c\frac{SC}{SP}\overrightarrow{SP}$$

Do đó: $(a+b+c)\overrightarrow{SI} = \dfrac{a^2}{x}\overrightarrow{SM} + \dfrac{b^2}{y}\overrightarrow{SN} + \dfrac{c^2}{z}\overrightarrow{SP}.$

Do 4 điểm M, N, P, I đồng phẳng nên ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} = a+b+c \quad (2).$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\frac{a^2}{x} + x \ge 2a,\ \frac{b^2}{y} + y \ge 2b,\ \frac{c^2}{z} + z \ge 2z.$$

Vì vậy: $\dfrac{a^2}{x} + \dfrac{b^2}{y} + \dfrac{c^2}{z} + x + y + z \ge 2(a+b+c)$ (3).

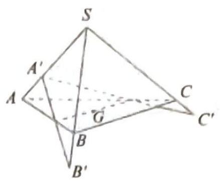
Từ (2) và (3) ta có đpcm.

Thí dụ 4. *Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = a,\ SB = b,\ SC = c$. Một mặt phẳng (α) luôn đi qua trọng tâm của tam giác ABC, cắt các tia SA, SB, SC lần lượt tại A', B', C'. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\dfrac{1}{SA'^2} + \dfrac{1}{SB'^2} + \dfrac{1}{SC'^2}$.*

Lời giải. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.

Ta có: $3\overrightarrow{SG} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = \dfrac{SA}{SA'}\overrightarrow{SA'} + \dfrac{SB}{SB'}\overrightarrow{SB'} + \dfrac{SC}{SC'}\overrightarrow{SC'}.$

Mà G, A', B', C' đồng phẳng nên



$$\frac{SA}{SA'} + \frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} = 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{SA'} + \frac{b}{SB'} + \frac{c}{SC'} = 3.$$

Theo BĐT Bunyakovsky ta có:

$$\left(\frac{1}{SA'^2} + \frac{1}{SB'^2} + \frac{1}{SC'^2}\right)\left(a^2+b^2+c^2\right) \ge \left(\frac{a}{SA'} + \frac{b}{SB'} + \frac{c}{SC'}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{SA'^2} + \frac{1}{SB'^2} + \frac{1}{SC'^2} \ge \frac{9}{a^2+b^2+c^2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $\dfrac{1}{aSA'} = \dfrac{1}{bSB'} = \dfrac{1}{cSC'}$ kết hợp với $\dfrac{a}{SA'} + \dfrac{b}{SB'} + \dfrac{c}{SC'} = 3$ ta được:

$$SA' = \frac{a^2+b^2+c^2}{3a}, SB' = \frac{a^2+b^2+c^2}{3b}, SC' = \frac{a^2+b^2+c^2}{3c}.$$

Vậy $\min\left(\dfrac{1}{SA'^2} + \dfrac{1}{SB'^2} + \dfrac{1}{SC'^2}\right) = \dfrac{9}{a^2+b^2+c^2}.$

(Kỳ sau đăng tiếp)

PROBLEMS . . . *(Tiếp theo trang 19)*

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/556. Give the sequence (x_n) determined as follows $\begin{cases} x_1 = 4, x_2 = 10 \\ x_{n+2} = 4x_{n+1} - 3x_n, \forall n \ge 1 \end{cases}$.

Find all pairs of positive integers $(m; n)$ so that $mn \mid (x_m, x_n)$.

Problem T11/556. Consider the function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ which satisfies

i) $f(0) = 1$; ii) $f(x) \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$;

iii) $f\left(x + \dfrac{11}{24}\right) + f(x) = f\left(x + \dfrac{1}{8}\right) + f\left(x + \dfrac{1}{3}\right)$.

Let $F(x) = \sum_{n=0}^{2024} f(x+n)$. Compute $F(2024)$.

Problem T12/556. Given an acute angle ABC inscribed in a circle (O) with $AB < AC$ and let H be its orthocenter. Let M be the midpoint of BC. The line segment AM intersects the circumcircle of BHC at N. Assume that X is the reflection point of A in BC and AO intersects the circumcircle of BOC again at T. Let U be the second intersection between the circumcircle of AON and the circumcircle of AXT. Show that AU is parallel to BC.

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN
(College of Science – Vietnam national University, Hanoi)

TIẾP TỤC KHAI THÁC ỨNG DỤNG CỦA BẤT ĐẲNG THỨC JENSEN

CAO MINH QUANG
(GV THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long)

Bất đẳng thức Jensen có nhiều ứng dụng trong giải các bài toán bất đẳng thức sơ cấp với nhiều biến số. Trong bài viết này, chúng tôi xin trình bày một số bài toán bất đẳng thức được giải bằng cách áp dụng bất đẳng thức Jensen một cách tinh tế. Bài viết cũng trình bày một tính chất thú vị từ sự kết hợp hợp giữa tính đơn điệu, và lồi lõm của hàm số trong việc chứng minh bất đẳng thức.

1. BẤT ĐẲNG THỨC JENSEN

• *Cho $f(x)$ là hàm lồi trên $(a;b)$. Giả sử $x_i \in (a;b)$, $\alpha_i > 0, i = 1...n$ và $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Khi đó:*

$$f(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i) \le \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i).$$

Đẳng thức xảy ra khi $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

• *Cho $f(x)$ là hàm lõm trên $(a;b)$. Giả sử $x_i \in (a;b)$, $\alpha_i > 0, i = 1...n$ và $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Khi đó:*

$$f(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i) \ge \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i).$$

Đẳng thức xảy ra khi $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

Hệ quả. *• Cho $f(x)$ là hàm lồi trên $(a;b)$. Giả sử $x_i \in (a;b)$, $\alpha_i > 0, i = 1,...,n$. Khi đó*

$$f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}\right) \le \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}.$$

Cho $f(x)$ là hàm lõm trên $(a;b)$. Giả sử $x_i \in (a;b)$, $\alpha_i > 0, i = 1...n$. Khi đó

$$f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}\right) \ge \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}.$$

Một điểm cần lưu ý, để sử dụng được bất đẳng thức Jensen trong giải bài toán bất đẳng thức, ta cần chuyển đổi (hoặc đánh giá) để một vế nào đó của bài toán về dạng $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$. Từ đây, chỉ cần khảo sát các tính chất của hàm số f với điều kiện ràng buộc của các biến. Trên thực tế, ta thường áp dụng cho bài toán bất đẳng thức ba biến. Cụ thể, ta đưa bài toán về dạng:

$$f(a) + f(b) + f(c) \le 3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$$

hoặc $f(a) + f(b) + f(c) \ge 3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$.

Sau đây là một số bài toán minh họa

Bài toán 1. *Cho a, b, c là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \le \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Lời giải. Ta phát biểu lại bài toán dưới dạng

$$f(a) + f(b) + f(c) \le \frac{3}{\sqrt{10}}$$

trong đó $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \forall x \in (0;1)$.

Đạo hàm cấp một và đạo hàm cấp hai của hàm số này lần lượt là: $f'(x) = \frac{1}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3}$,

$$f''(x)=-\frac{3x}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^5}<0,\forall x\in(0;1).$$

Do đó f là một hàm lõm. Sử dụng bất đẳng thức Jensen, ta có:

$$f(a)+f(b)+f(c)\le 3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right),$$

hay $\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\le 3.\frac{\frac{a+b+c}{3}}{\sqrt{1+\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2}}$

$$=\frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Bài toán 2. *Cho x,y,z là các số thực không âm và thỏa mãn điều kiện $x+y+z=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:*

$$P=\sqrt{x^3+1}+\sqrt{y^3+1}+\frac{5}{2}\sqrt{z+1}.$$

Lời giải. Ý tưởng chính của bài toán này là đánh giá đại lượng $\sqrt{x^3+1}+\sqrt{y^3+1}$ qua đại lượng chứa $x+y$. Từ đó đưa về hàm một biến (theo z) để tiếp tục khảo sát và tìm giá trị nhỏ nhất.

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t^3+1}$, $t\in[0;2]$. Đạo hàm cấp hai của hàm số này là:

$$f''(t)=\frac{3(t^4+4t)}{4\left(\sqrt{t^3+1}\right)^3}\ge 0,\forall t\in[0;2].$$

Vậy hàm số $f(t)$ lồi trên [0; 2]. Sử dụng bất đẳng thức Jensen, ta có:

$$\sqrt{x^3+1}+\sqrt{y^3+1}\ge 2\sqrt{\left(\frac{x+y}{2}\right)^3+1}=2\sqrt{\left(\frac{2-z}{2}\right)^3+1}.$$

Suy ra $P\ge 2\sqrt{\left(\frac{2-z}{2}\right)^3+1}+\frac{5}{2}\sqrt{z+1}$. Xét hàm số

$g(z)=2\sqrt{\left(\frac{2-z}{2}\right)^3+1}+\frac{5}{2}\sqrt{z+1}$ với $z\in[0;2]$.

Ta có:

$$g'(z)=-\frac{3(2-z)^2}{2\sqrt{2(2-z)^3+16}}+\frac{5}{4\sqrt{z+1}}>0,\forall z\in[0;2].$$

(BĐT luôn đúng vì nó tương đương với

$$(2-z)^3\left[18(2-z)^2-54(2-z)+50\right]$$
$$+25\left[8-(2-z)^3\right]>0,\forall z\in[0;2]).$$

Do đó g là hàm đồng biến trên $[0;2]$. Suy ra:

$$P\ge g(0)=\frac{5+4\sqrt{2}}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $z=0$ và $x=y=1$. Vậy $\min P=\frac{5+4\sqrt{2}}{2}$.

Bài toán 3 [Crux problem 3114]. *Cho a,b,c là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=2$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{4a+1}+\frac{1}{4b+1}+\frac{1}{4c+1}\ge 1.$$

Lời giải. Phát biểu của bài toán không thể hiện đại lượng $a+b+c$. Ta có thể khắc phục điều này không quá khó thông qua phép đổi biến. Cụ thể, đặt $x=\frac{1}{a+1},y=\frac{1}{b+1},z=\frac{1}{c+1}$ thì $x+y+z=2$.

Hơn nữa, $a=\frac{1-x}{x},b=\frac{1-y}{y},c=\frac{1-z}{z}$. Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại dưới dạng

$$\frac{x}{4-3x}+\frac{y}{4-3y}+\frac{z}{4-3z}\ge 1,$$

trong đó $x+y+z=2$ và $x,y,z\in(0,1)$.

Xét hàm $f(t)=\frac{t}{4-3t},t\in(0,1)$. Đạo hàm cấp một và đạo hàm cấp hai của hàm số lần lượt là:

$$f'(t)=\frac{4}{(4-3t)^2},f''(t)=\frac{24}{(4-3t)^3}>0,\forall t\in(0;1).$$

Như vậy $f(t)$ là hàm lồi trên $(0,1)$. Sử dụng bất đẳng thức Jensen, ta có:

$$f(x)+f(y)+f(z)\ge 3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)=3f\left(\frac{2}{3}\right)=1$$

hay $\dfrac{x}{4-3x}+\dfrac{y}{4-3y}+\dfrac{z}{4-3z}\ge 1$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\dfrac{2}{3}$ hay $a=b=c=\dfrac{1}{2}$.

Nhận xét.

1) Ngoài lời giải trên, bài toán còn có một lời giải rất đơn giản và đẹp như sau:

Với mọi $t>0$, ta có đánh giá $(2t-1)^2\ge 0$. Do đó

$$4t^2-4t+1\ge 0 \Leftrightarrow 3(t+1)\ge(4t+1)(2-t)$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{4t+1}\ge\frac{1}{t+1}-\frac{1}{3}.$$

Suy ra:

$$\frac{1}{4a+1}+\frac{1}{4b+1}+\frac{1}{4c+1}\ge\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}-1=1.$$

2) Một kết quả tổng quát, do tác giả bài viết này đề xuất như sau:

Cho $x_1,x_2,\dots,x_n>0\,(n\ge 3)$ *và thỏa mãn điều kiện* $\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i+1}\ge 1$. *Chứng minh* $\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{4x_i+1}\ge\dfrac{n}{4n-3}$..

Bài toán 4 [Bosina Hercegovina, 2002]. *Cho* a,b,c *là các số thực thỏa mãn điều kiện* $a^2+b^2+c^2=1$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2}{1+2bc}+\frac{b^2}{1+2ca}+\frac{c^2}{1+2ab}\ge\frac{3}{5}.$$

Lời giải. Bài toán có điều kiện $a^2+b^2+c^2=1$. Tuy nhiên, ở mẫu mỗi số hạng trong vế trái của BĐT chưa xuất hiện đủ các đại lượng a^2,b^2,c^2. Ta cần đánh giá để mỗi số hạng chỉ chứa đại lượng a^2,b^2 hoặc c^2. Ta chú ý, với mọi $x,y\in\mathbb{R}$ ta luôn có $2xy\le x^2+y^2$, và lưu ý $1+2bc\le 1+b^2+c^2$. Do đó:

$$\frac{a^2}{1+2bc}+\frac{b^2}{1+2ca}+\frac{c^2}{1+2ab}\ge\frac{a^2}{1+b^2+c^2}+\frac{b^2}{1+c^2+a^2}+\frac{c^2}{1+a^2+b^2}$$
$$=\frac{a^2}{2-a^2}+\frac{b^2}{2-b^2}+\frac{c^2}{2-c^2}.$$

Ta cần chứng minh $\dfrac{a^2}{2-a^2}+\dfrac{b^2}{2-b^2}+\dfrac{c^2}{2-c^2}\ge\dfrac{3}{5}$, với điều kiện $a^2+b^2+c^2=1$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t}{2-t},t\in[0;1]$. Ta có:

$$f'(t)=\frac{2}{(2-t)^2},\ f''(t)=\frac{4}{(2-t)^3}>0,\forall t\in[0;1].$$

Suy ra $f(t)$ là một hàm lồi trên $[0;1]$. Sử dụng bất đẳng thức Jensen, ta có:

$$f(a^2)+f(b^2)+f(c^2)\ge 3f\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)$$

hay $$\frac{a^2}{2-a^2}+\frac{b^2}{2-b^2}+\frac{c^2}{2-c^2}\ge\frac{3}{5}.$$

Bài toán 5. *Cho* a,b,c,d *là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\left(\frac{2b+c+d}{2a+c+d}\right)^3+\left(\frac{2c+d+a}{2b+d+a}\right)^3+\left(\frac{2d+a+b}{2c+a+b}\right)^3+\left(\frac{2a+b+c}{2d+b+c}\right)^3\ge 4.$$

Lời giải. Bất đẳng thức ở dạng thuần nhất đồng bậc nên ta có thể chuẩn hóa $a+b+c+d=1$.

Đặt $x=a-b,y=b-c,z=c-d,t=d-a$. Khi đó $x+y+z+t=0$. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3+\left(\frac{1-y}{1+y}\right)^3+\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^3+\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^3\ge 4.$$

Xét hàm số $f(u)=\left(\dfrac{1-u}{1+u}\right)^3,u\in(-1;1)$. Ta có:

$$f'(u)=-6.\frac{(1-u)^2}{(1+u)^4}$$

và $$f''(u)=\frac{12(1-u)(3-u)}{(1+u)^5}>0,\forall u\in(-1;1).$$

Suy ra $f(u)$ là hàm lồi trên $(-1,1)$. Sử dụng bất đẳng thức Jensen, ta có:

$$f(x)+f(y)+f(z)+f(t)\ge 4f\left(\frac{x+y+z+t}{4}\right)$$
$$=4f(0)$$

hay $\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3+\left(\frac{1-y}{1+y}\right)^3+\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^3+\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^3\ge 4.$

Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Bài toán 6 [Crux problem 3444]. *Cho a,b,c là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$. Chứng minh*

$$\frac{ab}{3a^2+2b+3}+\frac{bc}{3b^2+2c+3}+\frac{ca}{3c^2+2a+3}\le\frac{1}{12}.$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\frac{ab}{3a^2+2b+3}=\frac{3ab}{(3a-1)^2+6a+(6b+8)}$$

$$\le\frac{3ab}{6a+(6b+8)}=\frac{3ab}{2}\cdot\frac{1}{(3a+2)+(3b+2)}$$

$$\le\frac{3ab}{2}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3a+2}+\frac{1}{3b+2}\right)=\frac{3}{8}\left(\frac{ab}{3a+2}+\frac{ab}{3b+2}\right).$$

Tương tự, ta cũng chứng minh được:

$$\frac{bc}{3b^2+2c+3}\le\frac{3}{8}\cdot\left(\frac{bc}{3b+2}+\frac{bc}{3c+2}\right),$$

$$\frac{ca}{3c^2+2a+3}\le\frac{3}{8}\cdot\left(\frac{ca}{3c+2}+\frac{ca}{3a+2}\right).$$

Cộng các bất đẳng thức trên, ta thu được:

$$\frac{ab}{3a^2+2b+3}+\frac{bc}{3b^2+2c+3}+\frac{ca}{3c^2+2a+3}$$

$$\le\frac{3}{8}\left(\frac{a(b+c)}{3a+2}+\frac{b(c+a)}{3b+2}+\frac{c(a+b)}{3c+2}\right)$$

$$=\frac{3}{8}\left(\frac{a(1-a)}{3a+2}+\frac{b(1-b)}{3b+2}+\frac{c(1-c)}{3c+2}\right)$$

$$=\frac{3}{8}\big(f(a)+f(b)+f(c)\big),$$

trong đó $f(x)=\frac{x(1-x)}{3x+2}$, với $x\in(0,1)$. Xét hàm số $f(x)=\frac{x(1-x)}{3x+2}, x\in(0,1)$, ta có:

$$f'(x)=\frac{-3x^2-4x+2}{(3x+2)^2},$$

$$f''(x)=-\frac{20}{(3x+2)^3}<0,\forall x\in(0,1).$$

Do đó $f(x)$ là một hàm lõm trên $(0,1)$, suy ra:

$$f(a)+f(b)+f(c)\le 3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$$

$$=3f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{9}.$$

Từ đó ta có:

$$\frac{ab}{3a^2+2b+3}+\frac{bc}{3b^2+2c+3}+\frac{ca}{3c^2+2a+3}\le\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{9}$$

$$=\frac{1}{12}.$$

Bài toán 7 [Bencze, Crux problem 3214]. *Cho ABC là một tam giác nhọn. Chứng minh rằng*

a) $\frac{\tan A}{A}+\frac{\tan B}{B}+\frac{\tan C}{C}>\left(\frac{6}{\pi}\right)^2;$

b) $A\cot A+B\cot B+C\cot C<\left(\frac{\pi}{2}\right)^2.$

Lời giải. Trước hết, ta sẽ chứng minh các kết quả quan trọng sau: *Với mọi* $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ *ta có:*

i) $\tan x-x>0;$

ii) $x\tan^2x+x-\tan x>0.$

Chứng minh. i) Xét hàm số $f(x)=\tan x-x$, với $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$. Ta có $f'(x)=\frac{1}{\cos^2x}-1\ge 0$. Do đó $f(x)$ là hàm đồng biến trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$. Suy ra, với $x>0$ thì $f(x)>f(0)$ hay $\tan x-x>0$.

ii) Tiếp theo ta xét hàm số

$$g(x)=x\tan^2x+x-\tan x,\text{ với } x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right).$$

Ta có: $g'(x)=2x\left(\tan^3x+\tan x\right)\ge 0,\ x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right).$

Do đó, $g(x)$ là hàm số đồng biến trên $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$. Suy ra với $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$ thì:

$$g(x)>g(0)\ \text{ hay }\ x\tan^2x+x-\tan x>0.$$

Ta trở lại chứng minh các kết quả của bài toán.

a) Xét hàm số $h(x)=\frac{\tan x}{x}$ với $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Ta có đạo hàm cấp một và đạo hàm cấp hai của hàm số này lần lượt là: $h'(x)=\frac{\frac{x}{\cos^2 x}-\tan x}{x^2}$ và

$$h''(x)=\frac{2x\tan x\left(x\tan^2 x+x-\tan x\right)+2\left(\tan x-x\right)}{x^3}.$$

Từ các kết quả i) và ii) được trình bày phần trên, suy ra được $h''(x)>0$ với mọi $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, tức là $h(x)$ là một hàm lồi trên $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Sử dụng bất đẳng thức Jensen, ta có:

$$h(A)+h(B)+h(C)\ge 3h\left(\frac{A+B+C}{3}\right)$$

hay $\frac{\tan A}{A}+\frac{\tan B}{B}+\frac{\tan C}{C}\ge\frac{9\sqrt{3}}{\pi}>\left(\frac{6}{\pi}\right)^2$.

b) Xét hàm $k(x)=x\cot x$, với $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Ta cũng tính được $k''(x)=-\frac{2(\tan x-x)}{\tan x.\sin^2 x}<0$. Từ đó, sử dụng bất đẳng thức Jensen, ta nhận được

$$k(A)+k(B)+k(C)\le 3k\left(\frac{A+B+C}{3}\right)$$

hay $A\cot A+B\cot B+C\cot C\le\frac{\pi}{\sqrt{3}}<\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$.

Bài toán 8 [Crux problem 4708]. *Cho α,β,γ là các góc của một tam giác. Chứng minh rằng*

$$\frac{\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma}{3}\le\cot\left(\frac{3}{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}}\right).$$

Lời giải. Đặt $s=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}$ và $f(x)=x\cot x$ với $x\in(0;\pi)$. Sử dụng các bất đẳng thức $\cos x\le 1$ và $\sin x\le x$ ta có:

$$f'(x)=\frac{\cos x\sin x-x}{\sin^2 x}\le\frac{\sin x-x}{\sin^2 x}\le 0,\forall x\in(0;\pi)$$

$\Rightarrow f$ nghịch biến trên $(0;\pi)$. Suy ra:

$$f(x)\le\lim_{x\to 0^+}f(x)=1.$$

Ta cũng có:

$$f''(x)=\frac{-2(1-x\cot x)}{\sin^2 x}=\frac{-2(1-f(x))}{\sin^2 x}\le 0,\forall x\in(0;\pi).$$

Do đó f là hàm lõm trên $(0;\pi)$. Theo bất đẳng thức Jensen và từ $\frac{1}{s\alpha}+\frac{1}{s\beta}+\frac{1}{s\gamma}=1$ ta có:

$$\frac{1}{s\alpha}f(\alpha)+\frac{1}{s\beta}f(\beta)+\frac{1}{s\gamma}f(\gamma)\le\left(\frac{1}{s\alpha}.\alpha+\frac{1}{s\beta}.\beta+\frac{1}{s\gamma}.\gamma\right)\times$$
$$\times\cot\left(\frac{1}{s\alpha}.\alpha+\frac{1}{s\beta}.\beta+\frac{1}{s\gamma}.\gamma\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{\cot\alpha+\cot\beta+\cot\lambda}{3}\le\cot\frac{3}{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\alpha=\beta=\gamma\Leftrightarrow$ tam giác đã cho là tam giác đều.

Bài toán 9 [Crux problem 4805]. *Cho a,b,c là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=4abc$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{\sqrt[a]{a}}+\frac{1}{\sqrt[b]{b}}+\frac{1}{\sqrt[c]{c}}\ge 4\sqrt[3]{\frac{4}{3}}.$$

Lời giải. Từ điều kiện $ab+bc+ca=4abc$, ta có $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=4$. Đặt $x=\frac{1}{a},y=\frac{1}{b},z=\frac{1}{c}$ thì

$$x,y,z>0 \text{ và } x+y+z=4.$$

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại dưới dạng $x^x+y^y+z^z\ge 4\sqrt[3]{\frac{4}{3}}$.

Xét hàm số $h=h(t)=t^t$, $t\in(0;4)$. Khi đó $\ln h=\ln\left(t^t\right)=t\ln t$. Lấy đạo hàm hai vế theo biến t ta có: $(\ln h)'=(t\ln t)'$

hay $$\frac{h'}{h}=\ln t+1\Leftrightarrow h'=(\ln t+1)h.$$

Tiếp tục lấy đạo hai vế theo biến t, ta nhận được:

$$h''=(h')'=\left(h(\ln t+1)\right)'$$
$$=h'(\ln t+1)+h.\frac{1}{t}$$
$$=h\left((\ln t+1)^2+\frac{1}{t}\right)>0,\forall t\in(0;4).$$

Điều này chứng tỏ hàm số $h(t)=t^t$ là hàm số lồi trên $(0;4)$. Sử dụng bất đẳng thức Jensen, ta có:

$$f(x)+f(y)+f(z)\geq 3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)$$

hay $x^x+y^y+z^z\geq 3\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^{\frac{x+y+z}{3}}=4\sqrt[3]{\frac{4}{3}}.$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ $x=y=z=\frac{4}{3}$ hay $a=b=c=\frac{3}{4}.$

Bài toán 10 [Crux problem 3182]. *Cho a,b,c là các số thực dương và số thực $p\in(0;1)$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{(b+c)^p}+\frac{b}{(c+a)^p}+\frac{c}{(a+b)^p}\geq\frac{1}{2^p}(a^{1-p}+b^{1-p}+c^{1-p}).$$

Lời giải. Vì bất đẳng thức cần chứng minh ở dạng thuần nhất nên ta có thể chuẩn hóa $a+b+c=1$. Ta viết bất đẳng thức lại dưới dạng:

$$\frac{a}{(1-a)^p}+\frac{b}{(1-b)^p}+\frac{c}{(1-c)^p}\geq\frac{1}{2^p}(a^{1-p}+b^{1-p}+c^{1-p}).$$

Giả sử $a\geq b\geq c$ thì $\frac{1}{1-a}\geq\frac{1}{1-b}\geq\frac{1}{1-c}$. Sử dụng bất đẳng thức Chebyschev và bất đẳng thức Cauchy ta nhận được:

$$\frac{a}{(1-a)^p}+\frac{b}{(1-b)^p}+\frac{c}{(1-c)^p}$$
$$\geq\frac{1}{3}(a+b+c)\left(\frac{1}{(1-a)^p}+\frac{1}{(1-b)^p}+\frac{1}{(1-c)^p}\right)$$
$$\geq\frac{1}{\sqrt[3]{\left((1-a)(1-b)(1-c)\right)^p}}$$
$$\geq\frac{1}{\sqrt[3]{\left((1-a+1-b+1-c)/3\right)^{3p}}}=\frac{3^p}{2^p}.$$

Để hoàn tất, ta chỉ cần chứng minh $a^{1-p}+b^{1-p}+c^{1-p}\leq 3^p$, tức là cần khẳng định hàm số $f(t)=t^{1-p}$ với $t\in(0;1)$ là một hàm lõm. Đạo hàm cấp một và đạo hàm cấp hai của hàm số này lần lượt là:

$$f'(t)=(1-p)t^{-p}\text{ và }f''(t)=-p(1-p)t^{-p-1}.$$

Do đó $f''(t)<0$, với mọi $t\in(0;1)$ nên f là hàm lõm trên $(0;1)$. Bài toán được chứng minh.

Bài toán 11 [IMO 2009]. *Cho a,b,c là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=a+b+c$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{(2a+b+c)^2}+\frac{1}{(a+2b+c)^2}+\frac{1}{(a+b+2c)^2}\leq\frac{3}{16}.$$

Lời giải. Ta đưa bất đẳng thức cần chứng minh về dạng đồng bậc, cụ thể:

$$\frac{(a+b+c)^2}{(2a+b+c)^2}+\frac{(a+b+c)^2}{(a+2b+c)^2}+\frac{(a+b+c)^2}{(a+b+2c)^2}$$
$$\leq\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).(a+b+c).\frac{3}{16}.$$

Chuẩn hóa $a+b+c=1$. Khi đó, ta cần chứng minh: $\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}\leq\frac{3}{16}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$

Xét hàm số $f(x)=\frac{x}{(1+x)^2}$, với $x\in(0;1)$. Đạo hàm cấp một và đạo hàm cấp hai của hàm số là:

$$f'(x)=\frac{1-x}{(1+x)^3}>0\quad\text{và}\quad f''(x)=\frac{2x-4}{(1+x)^4}<0,$$

$\forall x\in(0;1)$. Vậy f là hàm số lõm trên (0; 1).

Sử dụng hệ quả của bất đẳng thức Jensen, ta có:

$$\frac{1}{a}.\frac{a}{(1+a)^2}+\frac{1}{b}.\frac{b}{(1+b)^2}+\frac{1}{c}.\frac{c}{(1+c)^2}$$
$$\leq\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).\frac{y}{(1+y)^2},$$

trong đó $y=\dfrac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$.

Chú ý rằng $0<y=\dfrac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\le\dfrac{a+b+c}{3}=\dfrac{1}{3}$ và

$f(x)=\dfrac{x}{(1+x)^2}$ là hàm số đồng biến trên $(0;1)$.

Do đó

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}\le\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{16}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

Nhận xét. Bất đẳng thức trên có thể chứng minh bằng cách chỉ sử dụng bất đẳng thức Cauchy. Tuy nhiên, việc sử dụng triệt để giả thiết $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=a+b+c$ cần thông qua một số kỹ thuật xử lý và bổ đề tương đối lạ với học sinh. Cách tiếp cận chứng minh bằng bất đẳng thức Jensen có thể sử dụng giả thiết trên gọn hơn. Chú ý cần tránh lỗi khi chuẩn hóa $a+b+c=1$ không dẫn đến kết quả $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$!

2. MỘT HƯỚNG PHÁT TRIỂN

Định lý. *Giả sử (a,b) là một khoảng nào đó có chứa các số thực dương. Khi đó*

1) Nếu hàm f đồng biến và lồi trên (a,b) thì với mọi $x_i\ge 0$, $x_i\in(a,b), i=1,2,...,n$, ta có:

$$f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)\ge nf\left(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\right)\ge nf\left(\frac{n\sqrt[n]{x_1.x_2...x_n}}{n}\right)=nf\left(\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}\right).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1=x_2=...=x_n$.

2) Nếu hàm f nghịch biến và lõm trên (a,b) thì với mọi $x_i\ge 0$, $x_i\in(a,b), i=1,2,...,n$, ta có:

$$f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)\le nf\left(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\right)\le nf\left(\frac{n\sqrt[n]{x_1.x_2...x_n}}{n}\right)=nf\left(\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}\right).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1=x_2=...=x_n$.

Việc chứng minh định lý dựa vào bất đẳng thức Jensen, bất đẳng thức Cauchy và tính chất của hàm đơn điệu.

Tiếp theo là một số bài toán minh họa cho hướng này.

Bài toán 12 [Irish, 2002]. *Cho $a,b,c\in(0,1)$. Chứng minh rằng* $\dfrac{a}{1-a}+\dfrac{b}{1-b}+\dfrac{c}{1-c}\ge\dfrac{3\sqrt[3]{abc}}{1-\sqrt[3]{abc}}$.

Lời giải. Xét hàm $f(t)=\dfrac{t}{1-t}, t\in(0,1)$. Đạo hàm cấp một và đạo hàm cấp hai của hàm số này lần lượt là: $f'(t)=\dfrac{1}{(1-t)^2}, f''(t)=\dfrac{2}{(1-t)^3}$.

Do đó $f(t)$ là hàm số đồng biến và lồi trên $(0;1)$.. Sử dụng định lý trên ta có:

$$f(a)+f(b)+f(c)\ge 3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)\ge 3f\left(\frac{3\sqrt[3]{abc}}{3}\right)=3f\left(\sqrt[3]{abc}\right)$$

hay $\dfrac{a}{1-a}+\dfrac{b}{1-b}+\dfrac{c}{1-c}\ge\dfrac{3\sqrt[3]{abc}}{1-\sqrt[3]{abc}}$.

Bài toán 13. *Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{\sqrt{1+8a}}+\frac{1}{\sqrt{1+8b}}+\frac{1}{\sqrt{1+8c}}\ge 1.$$

Lời giải. Xét hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+8x}}, x\in(0;\sqrt{3})$.

Đạo hàm cấp một và đạo hàm cấp hai của hàm số là: $f'(x)=-\dfrac{4}{\left(\sqrt{1+8x}\right)^3}$,

$$f''(x)=\frac{48}{\left(\sqrt{1+8x}\right)^5}>0,\forall x\in(0;\sqrt{3}).$$

Sử dụng bất đẳng thức Jensen và định lý trên ta có: $\frac{1}{\sqrt{1+8a}}+\frac{1}{\sqrt{1+8b}}+\frac{1}{\sqrt{1+8c}}\ge 3\frac{1}{\sqrt{1+\frac{8(a+b+c)}{3}}}$

$$\ge 3\frac{1}{\sqrt{1+\frac{8\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}{3}}}=1.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$.

Bài toán 14. *Cho $x_1,x_2,...,x_n>0$ và $\prod_{i=1}^{n}(3x_i+1)\le 2^n$. Chứng minh rằng $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{6x_i+1}\ge\frac{n}{3}$.*

Lời giải. Đặt $y_i=\frac{1}{3x_i+1}$ thì

$$x_i=\frac{1-y_i}{3y_i}, i=1,2,...,n \text{ và } \prod_{i=1}^{n}y_i\ge\frac{1}{2^n}.$$

Ta sẽ chứng minh $\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{2-y_i}\ge\frac{n}{3}$. Xét hàm $f(u)=\frac{u}{2-u}, u\in(0;1)$, ta có:

$$f'(u)=\frac{2}{(2-u)^2}, f''(x)=\frac{4}{(2-u)^3}.$$

Suy ra $f(u)$ là hàm đồng biến và lồi trên khoảng $(0;1)$. Kết hợp bất đẳng thức Jensen và bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{2-y_i}=\sum_{i=1}^{n}f(y_i)\ge nf\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\Big/n\right)$$

$$\ge nf\left(n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}y_i}\Big/n\right)\ge nf\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{n}{3}.$$

Cuối cùng là một số bài tập dành cho bạn đọc.

BÀI TẬP

1. Cho x,y,z là các số thực dương có tổng bằng 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{x}{\sqrt{1-x}}+\frac{y}{\sqrt{1-y}}+\frac{z}{\sqrt{1-z}}$$

2 [Crux problem 4007]. Cho a,b,c là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=12$. Chứng minh rằng

$$(a^3+4a+8)(b^3+4b+8)(c^3+4c+8)\le 24^3.$$

3. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng $\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\ge\frac{9}{4(a+b+c)}$.

4 [Poland 1996]. Cho $a,b,c\ge-\frac{3}{4}$ và thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a^2+1}+\frac{b}{b^2+1}+\frac{c}{c^2+1}\le\frac{9}{10}.$$

5. Cho $a,b,c\in(0,1)$ và thỏa mãn điều kiện $abc=\frac{1}{8}$. Chứng minh $\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}+\frac{c}{1-c^2}\ge 2$.

6. Cho $n\ge 2$ và $x_1,x_2,...,x_n$ là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2x_i+1}\ge 1$. Chứng minh rằng $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{6x_i+1}\ge\frac{n}{3n-2}$.

7. Cho $n\ge 2$ và $x_1,x_2,...,x_n$ là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện $\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{x_i+2}\le 1$. Chứng minh rằng $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i+1}\ge\frac{n(n-1)}{n}$.

8. Cho a,b,c là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)^b\left(b+\sqrt{1+b^2}\right)^c\left(c+\sqrt{1+c^2}\right)^a.$$

9 [Crux problem 4044]. Cho x,y,z là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện $x+y+z=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x+1}{x^3+1}+\frac{y+1}{y^3+1}+\frac{z+1}{z^3+1}\le\frac{27}{7}.$$

10 [Crux problem 4857]. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=\frac{3}{2}$. Chứng minh rằng $a^ab^b+b^bc^c+c^ca^a\ge\frac{3}{2}$.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN
BÀI SỐ 97

PROBLEM. *Twenty-four volunteers will be allocated to three schools. The rule is that each school will accept at least one volunteer and all the schools will accept different numbers of volunteers. Then there are different ways of allocating volunteers.*

***Solution*:** The answer is 222.

First, we focus on the condition that each school receives at least one volunteer. We can assign one volunteer to each school first and then the problem is reduced to the problem "How many ways we can distribute 21 volunteers to three schools and some school might receive no volunteer?".

We can place 21 stars * on a line and place two bars | in any two spaces. For example, |****|** …. *** means the first school receives no volunteer, the second receives four volunteers and the last receives 17 volunteers. The number of ways is

$$C_{23}^{2}=\frac{23\times 22}{2}=253 \text{ (ways)}.$$

Second, we focus on the condition that all schools will accept different numbers of volunteers.

There is one case that all three schools receive the same number of volunteers which is (8, 8, 8).

And from 1 to 24, there are 10 even numbers, excluding 16 and 24

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 18, 20, 22.

Each of them corresponds to three ways to allocating volunteers. For examples, number 10 will give three ways (5, 5, 14), (5, 14, 5), (14, 5, 5). Therefore there are 30 ways in which exactly two school receive the same number of volunteers. (Can you explain why we exclude number 16 and number 24 from the above list ?).

Thus, there are $253-1-30=222$ (ways).

(Notice: We consider all volunteers are the same and hence we are only interested in the number of volunteers each school will receive).

Remark: The exercise is selected from a China Mathematical Olympiad test.

TỪ VỰNG

allocate : *phân phối, phân phát*
assign : *phân công, ấn định*

NGUYEN PHU HOANG LAN
(*College of Science-Vietnam National University, Hanoi*)

****

BÀI TOÁN 95. *Nếu tổng chiều dài hai đường chéo của một tứ giác hình con diều bằng 100 thì giá trị lớn nhất của diện tích tứ giác hình con diều đó bằng bao nhiêu?*

Lưu ý*: Bài toán này được sưu tầm từ một Kì thi Olimpic Toán học Sigapore.*

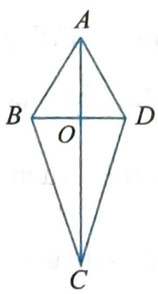
Lời giải. Diện tích tứ giác hình con diều là

$$S=S_{ABD}+S_{CBD}=\frac{1}{2}AO\times BD+\frac{1}{2}CO\times BD$$

$$=\frac{1}{2}(AO+CO)\times BD$$

$$=\frac{1}{2}AC\times BD.$$

Ta có: $(AC+BD)^2 \geq 4AC.BD$.



Nhưng $AC+BD=100$ từ đó giá trị lớn nhất của diện tích hình con diều bằng

$$\frac{1}{2}\times\frac{100^2}{4}=1250.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi

$$AC=BD=50.$$

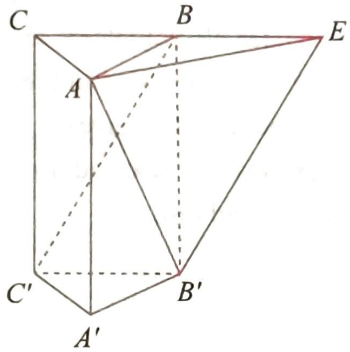
Nhận xét. Kì này bạn *Nguyễn Quốc Hoàng Anh*, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An** và bạn *Cao Minh An*, 7A3, THCS Trần Phú, TP. Pleiku, **Gia Lai** có bài dịch tốt, gửi bài về Toà soạn sớm. Xin hoan nghênh các bạn.

HỒ HẢI (*Hà Nội*)

NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN

BÀI TOÁN 76. *Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a và $AB' \perp BC'$. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.*

Cách 1. *Dựng hình phụ bằng cách lấy E là điểm đối xứng với C qua điểm B.*



Ta có: $AB = \dfrac{1}{2}CE = a$. Khi đó tam giác ACE vuông tại $A \Rightarrow AE = \sqrt{CE^2 - AC^2} = a\sqrt{3}$.

Tứ giác $BEB'C'$ là hình bình hành suy ra $BC' \parallel EB'$. Do $AB' \perp BC'$ nên $AB' \perp B'E$.

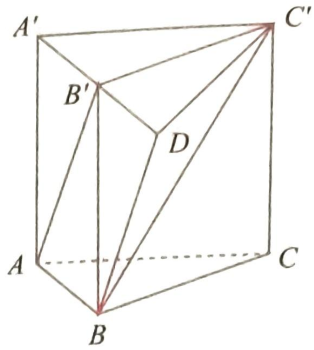
Mặt khác, ta có: $BC' = EB' = AB'$ nên tam giác $AB'E$ vuông cân tại B', $AB' = \dfrac{AE}{\sqrt{2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

Xét tam giác $AA'B'$ vuông tại A' ta có:

$$AA' = \sqrt{AB'^2 - A'B'^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy $V = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{8}$.

Cách 2. *Dựng hình phụ bằng cách lấy D đối xứng với A' qua B'.*



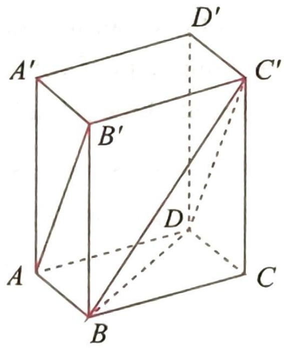
Xét hình chữ nhật bằng nhau $ABB'A'$ và $BCC'B'$, ta có $AB' = BC'$. Mặt khác: $AB = B'D$, $AB \parallel B'D$ nên $AB'DB$ là hình bình hành $\Rightarrow AB' \parallel BD$, suy ra $BC' \perp BD$. Từ đó $\Delta BDC'$ vuông cân tại B. Theo cách dựng điểm D, tam giác $A'C'D$ vuông tại C' nên:

$$DC' = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3},\ BD = \frac{DC'}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

Suy ra $BB' = \sqrt{BD^2 - B'D^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $V = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{8}$.

Cách 3. *Dựng hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.*



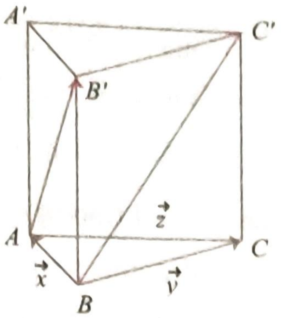
Xét hai hình chữ nhật bằng nhau $ABB'A'$ và $BCC'B'$ ta có $AB' = BC'$. Từ cách dựng ta có $AB' = DC'$, suy ra $BC' = DC'$. Vì tứ giác $AB'C'D$ là hình bình hành nên $AB' \parallel DC'$, suy ra $BC' \perp C'D$. Từ đó $\Delta BDC'$ vuông cân tại C'.

Xét hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng a, $\widehat{ABC} = 60^0$ suy ra $BD = a\sqrt{3}$. Do tam giác BDC' vuông cân tại C' suy ra:

$BC' = \dfrac{BD}{\sqrt{2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Rightarrow CC' = \sqrt{BC'^2 - BC^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $V = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{8}$.

Cách 4. Phương pháp vectơ



Đặt $\overrightarrow{BA} = \vec{x},\ \overrightarrow{BC} = \vec{y},\ \overrightarrow{BB'} = \vec{z}$. Khi đó ta có:

$$\left|\vec{x}\right| = \left|\vec{y}\right| = a,\ \left|\vec{z}\right| = BB' \text{ và } \vec{x}.\vec{z} = 0,\ \vec{y}.\vec{z} = 0,$$

$$\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{BC'} = 0 \Leftrightarrow \left(-\vec{x} + \vec{z}\right)\left(\vec{y} + \vec{z}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\vec{x}.\vec{y} + \vec{z}^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -a^2\cos\left(\vec{x};\vec{y}\right).\vec{y} + BB'^2 = 0 \Leftrightarrow BB'^2 = a^2.\cos 60^0$$

$$\Leftrightarrow BB'^2 = \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow BB' = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy $V = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{8}$.

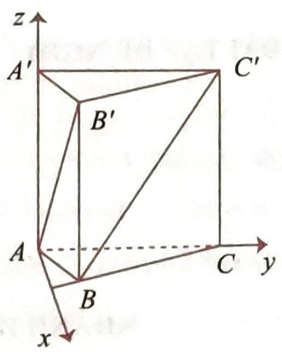
Cách 5. Phương pháp tọa độ

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với $A \equiv O \Rightarrow A(0;0;0)$.

$C \in Oy \Rightarrow C(0;a;0),\ C'(0;a;h),\ h > 0,$

$A' \in Oz \Rightarrow A'(0;0;h)$. Do tam giác ΔABC đều suy ra: $B\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\dfrac{a}{2};0\right),\ B'\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\dfrac{a}{2};h\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{AB'} = \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\dfrac{a}{2};h\right),\ \overrightarrow{BC'} = \left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\dfrac{a}{2};h\right)$.



Do $\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{BC'} = 0$ nên

$$-\frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + h^2 = 0 \Leftrightarrow h = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy $V = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{8}$.

Chú ý. Với mỗi bài toán, tìm ra được lời giải là một niềm vui. Sẽ thú vị hơn nhiều nếu ta tìm ra được nhiều lời giải cho bài toán đó. Trong chương trình toán 12, do tính chất của kỳ thi TN THPT học sinh nhiều khi bỏ quên việc giải bài toán bằng nhiều cách mà chỉ quan tâm đến kết quả cuối cùng, vì tất cả các câu trong đề thi là trắc nghiệm. Qua bài viết nhỏ này tác giả muốn đưa lại niềm vui nho nhỏ của một bài toán hình thể tích với giả thiết cực kỳ ngắn gọn bằng việc giải bằng những cách khác nhau. Tác giả cũng mong muốn rằng độc giả tìm thêm nhiều cách giải khác cho bài toán này.

HOÀNG NGỌC HÙNG

(GV THPT Kỳ Anh, Hà Tĩnh)

Nhận xét. Kỳ này các bạn: *Võ Hoàng Khôi Nguyên*, 10A1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp**; *Nguyễn Minh Thọ*, 214 Điện Biên Phủ, Q.3, *Trần Vĩnh Phú*, chung cư Remax Plaza, 20 Phạm Đình Hổ, phường 1, Q.6, **TP. Hồ Chí Minh**; *Nguyễn Văn Cảnh*, GV THCS Long Hậu, xã Long Hậu, huyện Cần Giuộc, **Long An**; *Nguyễn Thắng*, GV THPT Bùi Thị Xuân, **Bình Định** cũng đóng góp một số cách giải tốt, tương tự như cách giải của bạn *Hoàng Ngọc Hùng*, người đề xuất bài toán. Xin hoan nghênh các bạn.

LÊ MAI *(Hà Nội)*

Mời các bạn gửi lời giải BÀI TOÁN 78 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 30.11.2023.

BÀI TOÁN 78. *Cho tứ diện ABCD có AB = CD = a, AC = BD = b, AD = BC = c (tứ diện gần đều). Tính thể tích tứ diện ABCD.*

TRƯƠNG QUANG AN

(Xã Nghĩa Thắng, huyện Tư Nghĩa, Quảng Ngãi)

BÀI TOÁN 85 (IMO 1990). *Tìm tất cả các số nguyên $n > 1$ sao cho $\frac{2^n+1}{n^2}$ là một số nguyên.*

Lời giải. Vì 2^n+1 là số lẻ và $2^n+1 \vdots n^2$ nên n là số lẻ.

Xét n lẻ, $n \geq 3$. Gọi p là ước nguyên tố nhỏ nhất của n thì $p \geq 3$ và $2^n+1 \vdots p$ hay $2^n \equiv -1 \pmod p$.

Gọi i là số tự nhiên nhỏ nhất sao cho $2^i \equiv -1 \pmod p$. Từ $2^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ suy ra $i < p-1$. Đặt $n = ki + r$ với $0 \leq r \leq i-1$. Ta có:

$$2^n = 2^{ki}.2^r \equiv (-1)^k.2^r \pmod p.$$

Nếu k chẵn thì $2^r \equiv 2^n \equiv -1 \pmod p$. Suy ra $r=0$ và $2 \equiv 0 \pmod p$, trái với điều ở trên là $p \geq 3$.

Vậy k lẻ và $2^r \equiv 1 \pmod p$. Ta chứng tỏ rằng $r = 0$.

Giả sử $r > 0$, đặt $i = r + d$ với $1 \leq d < i$. Ta có:

$2^d \equiv 2^r.2^d \equiv 2^i \equiv -1 \pmod p$. Điều này mâu thuẫn với việc chọn i. Vậy $r = 0$ và $n = ki$ và $n \vdots i$. Vì $i < p$ và p là ước nguyên tố nhỏ nhất của n nên $i = 1$. Suy ra $2+1 \vdots p$. Vậy ta được $p = 3$.

Đặt $n = 3^k.d$ với $k \geq 1$ và $(d; 3) = 1$. Ta sẽ chứng minh $k = 1$. Giả sử $k \geq 2$.

Vì $2^n+1 \vdots n^2$ nên $(3-1)^n + 1 \vdots 3^{2k}$. Suy ra:

$$3^{k+1}.d - \sum_{h=2}^{k+1} (-1)^h.C_n^h 3^h \text{ chia hết cho } 3^{k+2}.$$

Lưu ý rằng số mũ của 3 trong phân tích của $h!$ nhỏ hơn $\frac{h}{2}$; còn số mũ của 3 trong phân tích của $3^h.C_n^h$ lớn hơn $k+\frac{h}{2}$, từ đó $3^h.C_n^h \vdots 3^{k+2}$ với $h \geq 2$.

Suy ra $3^{k+1}.d \vdots 3^{k+2}$, điều này vô lý. Vậy $k = 1$ và $n = 3d$. Ta chứng tỏ rằng $n = 3$. Giả sử $d \neq 1$. Gọi q là ước nguyên tố nhỏ nhất của d. Vì d lẻ và $(d; 3) = 1$ nên $q \geq 5$ và $2^n+1 \vdots q$. Gọi j là số tự nhiên nhỏ nhất mà $2^j \equiv -1 \pmod q$. Theo định lý Fermat bé ta có $j < q-1$.

Lập luận tương tự như phần trên ta được $n \vdots j$.

Vì $n = 3d$, $(3; d) = 1$, $j < q-1$, trong đó q là ước nguyên tố nhỏ nhất của d nên $j = 1$ hoặc $j = 3$.

Do $2^j \equiv -1 \pmod q$ nên suy ra $3 \vdots q$ hoặc $9 \vdots q$. Vậy $q = 3$, điều này mâu thuẫn với $q \geq 5$. Suy ra $d = 1$.

Vậy $n = 3$. Thử lại, với $n = 3$ thì $\frac{2^3+1}{3^2} = 1 \in \mathbb{Z}$.

Kết luận: $n = 3$ là số nguyên cần tìm.

Nhận xét. Một số bạn tìm được $n = 3$ thỏa mãn bài toán nhưng không chứng minh các giá trị còn lại của n không thỏa mãn bài toán nên lời giải không đầy đủ. Hoan nghênh ba bạn: *Phan Đại Hoàng*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, **Nghệ An**, *Võ Hoàng Minh Khôi*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp**, *Trần Sĩ Phương*, 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế** đã giải đúng bài này.

NHƯ HOÀNG

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 30.11.2023.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

BÀI TOÁN 87. *Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng*

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0.$$

Xác định các trường hợp cho ta đẳng thức.

KHÁNH HỮU (*Hà Nội*)

GIẢI ĐÁP: ĐÚNG HAY SAI ?

(Đề đăng trên TH&TT số 552, tháng 6 năm 2023)

Phân tích sai lầm. Lời giải trên bị nhầm lẫn khi cho rằng nghiệm của PT

$$f\left(\frac{1}{4|x-m+1|+3}\right)+f\left(x^2-4x+7\right)=0$$

phải là số dương, trong khi đó $x>0$ chỉ là điều kiện xác định của hàm số *f*, còn PT cần tìm nghiệm xác định với mọi x bởi vì

$$4|x-m+1|+3>0; x^2-4x+7=(x-2)^2+3>0.$$

Sau đây là lời giải đúng. Xét hàm số

$f(x)=\log_3 x+3^x-3^{\frac{1}{x}}$. Điều kiện xác định: $x>0$.

Ta có: $f\left(x^{-1}\right)=f\left(\frac{1}{x}\right)=\log_3\frac{1}{x}+3^{\frac{1}{x}}-3^x$

$$=-\left(\log_3 x+3^x-3^{\frac{1}{x}}\right)=-f(x)$$

và $f'(x)=\frac{1}{x\ln 3}+3^x.\ln 3+\frac{1}{x^2}3^{\frac{1}{x}}\ln 3>0, \forall x\in(0;+\infty)$

suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$. Do đó: $f\left(\frac{1}{4|x-m+1|+3}\right)+f\left(x^2-4x+7\right)=0$

$$\Leftrightarrow f\left(\left(4|x-m+1|+3\right)^{-1}\right)+f\left(x^2-4x+7\right)=0$$

$$\Leftrightarrow -f\left(4|x-m+1|+3\right)+f\left(x^2-4x+7\right)=0$$

$$\Leftrightarrow f\left(4|x-m+1|+3\right)=f\left(x^2-4x+7\right)$$

$$\Leftrightarrow 4|x-m+1|+3=x^2-4x+7$$

$$\Leftrightarrow 4|x-m+1|=(x-2)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2-8x+4m=0 & (1)\\ x^2=4m-8 & (2)\end{array}\right.$$

Để phương trình cần tìm có đúng 3 nghiệm phân biệt thì xảy ra ba trường hợp:

TH1: PT(1) có 1 nghiệm kép, khi đó nghiệm kép đó là 4, còn PT(2) có 2 nghiệm phân biệt khác 4.

Giải hệ: $\begin{cases}16-4m=0\\ \sqrt{4m-8}\neq 4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=4\\ 4m-8\neq 4^2\end{cases}\Leftrightarrow m=4.$

TH2: PT(2) có 1 nghiệm kép, khi đó nghiệm kép đó là 0, còn PT(1) có 2 nghiệm phân biệt khác 0.

Giải hệ: $\begin{cases}4m-8=0\\ 4m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow m=2.$

TH3: Các PT (1), (2) có 2 nghiệm phân biệt và có đúng 1 nghiệm của hai PT giống nhau. Ta giả sử x_0 là một nghiệm chung của hai PT (1), (2). Khi đó: $\begin{cases}{x_0}^2-8x_0+4m=0\\ {x_0}^2=4m-8\end{cases}\Rightarrow 8x_0-4m=4m-8\Leftrightarrow x_0=m-1$

Thay $x=m-1$ vào PT(2), ta có:

$$(m-1)^2=4m-8\Leftrightarrow m^2-6m+9=0\Leftrightarrow m=3.$$

Thử lại $m=3$, PT(1) có hai nghiệm phân biệt $x=2; x=6$ và PT(2) có hai nghiệm phân biệt $x=2; x=-2$. Vì vậy $m=3$ là một giá trị cần tìm.

Kết luận: $m=2; m=3; m=4$ là các giá trị cần tìm.

Nhận xét. Rất tiếc là không có bạn nào phát hiện được sai lầm.

KIHIVI

GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT BẰNG BAO NHIÊU ?

Trong giờ luyện tập thầy giáo cho bài toán: *Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số*

$$y=16^{\sqrt{1-x^2}}-16.4^{\sqrt{1-x^2}}+13.$$

Bạn Hưng lên bảng giải như sau: Gọi D là tập xác định của hàm số, khi đó: $x\in D\Leftrightarrow 1-x^2\geq 0$

$\Leftrightarrow -1\leq x\leq 1\Rightarrow D=[-1;1]$. Đặt $t=4^{\sqrt{1-x^2}}$, khi đó $t=4^{\sqrt{1-x^2}}\geq 4^0=1$. Xét hàm $f(t)=t^2-16t+13$ trên miền $[1;+\infty)$ có: $f'(t)=2t-16=0\Leftrightarrow t=8$.

Bảng biến thiên:

t		1		8		$+\infty$
$f'(t)$			$-$	0	$+$	
$f(t)$		-2	$\searrow$	-57	$\nearrow$	$+\infty$

Khi đó $\min\limits_{[-1;1]} y=\min\limits_{[1;+\infty)} f(t)=-57$.

Trong lớp một số bạn cũng làm ra kết quả như *Hưng*. Sau khi xem lời giải thầy giáo nói kết quả trên chưa đúng. Theo bạn *Hưng* đã làm sai ở đâu và giá trị nhỏ nhất cần tìm bằng bao nhiêu?

NGUYỄN THANH GIANG
(GV THPT chuyên Hưng Yên)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 556 (10.2023)

Tòa soạn : 187B, Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607,
ĐT Phát hành: 024.35142649, 024.35682701
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TRONG SỐ NÀY

Biên tập: LÊ MAI, NHƯ HOÀNG
Trị sự, phát hành: HOÀNG THỊ KIM PHƯỢNG, TRẦN THỊ MINH HIỀN
Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG
Thiết kế, chế bản: MINH HÒA

CÙNG TIẾP BƯỚC EM TỚI TRƯỜNG

HÀNH TRÌNH LAN TỎA HẠNH PHÚC

Năm học mới đã chính thức bắt đầu, các em học sinh trên khắp cả nước đã có đầy đủ sách giáo khoa để sẵn sàng chinh phục những kiến thức mới mẻ, hấp dẫn. Chương trình *"Cùng tiếp bước em tới trường"* với hơn 100.000 bộ sách giáo khoa và *"Tủ sách giáo khoa dùng chung"* của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam (NXBGDVN) với khoảng 1.000 tủ sách đã và đang được trao đi, góp phần lan tỏa niềm vui đến các em học sinh có hoàn cảnh khó khăn trên cả nước.

Luôn đảm bảo sứ mệnh cung ứng đủ SGK phục vụ học sinh (HS) cả nước, hỗ trợ các em HS có hoàn cảnh khó khăn có đủ SGK khi bước vào năm học mới cũng như tạo nguồn tài liệu học tập và giảng dạy cho HS và GV sử dụng chung tại thư viện trường học, năm 2023, NXBGDVN đã triển khai chương trình *Cùng tiếp bước em tới trường* và *Tủ sách giáo khoa dùng chung* tại 63 tỉnh/thành phố.

Là một hoạt động thường niên với mong muốn giúp đỡ các em HS có hoàn cảnh khó khăn trên cả nước, năm học 2023 - 2024, Chương trình *Cùng tiếp bước em tới trường* của NXBGDVN đã trao tặng hơn 100.000 bộ sách tới các em.

Đại diện NXBGDVN cho biết: "Quan tâm, hỗ trợ các em HS có hoàn cảnh khó khăn là điều mà NXBGDVN luôn chú trọng. Mỗi bộ sách được trao đi là tri thức, là tấm lòng của cán bộ nhân viên NXBGDVN. Tấm lòng ấy đang được đón nhận ở khắp mọi miền đất nước".

Đến với tỉnh Đắk Lắk, nơi mà 1/3 số học sinh là các em dân tộc thiểu số, hình ảnh các em dùng hai bàn tay nhỏ bé ôm chặt bộ sách vào lòng đầy trân trọng khiến những người tham gia nhớ mãi. Những trang sách mới trắng tinh còn thơm mùi mực in là món quà giá trị đối với các em học sinh nơi đây.

Tại lễ trao tặng SGK cho HS có hoàn cảnh khó khăn tỉnh Đồng Tháp, bà Ngô Thuý Anh - Trưởng phòng Phòng Giáo dục Mầm non - Tiểu học, Sở GD - ĐT tỉnh Đồng Tháp đánh giá: "Đây là một việc làm nhân văn và ý nghĩa của NXBGDVN. Với sự hỗ trợ này, gia đình cũng sẽ tạo điều kiện nhiều hơn cho các em trong quá trình học tập, giảm nguy cơ học sinh bỏ học. Ngoài ra, đơn vị cũng thực hiện các giải pháp đảm bảo 100% học sinh có đầy đủ sách giáo khoa cho năm học mới, thực hiện theo đúng chỉ đạo của Bộ Giáo dục và Đào tạo, góp phần thực hiện hiệu quả Chương trình Giáo dục phổ thông 2018".

Đại diện NXBGDVN trao biển tặng SGK cho đại diện 12 Phòng GD - ĐT huyện, thành phố tỉnh Đồng Tháp

NXBGDVN mong muốn thông qua chương trình sẽ lan tỏa được thông điệp *"Hãy bảo quản, giữ gìn sách giáo khoa để dành tặng các em học sinh lớp sau"* được in trên mỗi cuốn sách. Các em hãy giữ gìn SGK sạch đẹp, để cuối năm có thể tặng lại cho thư viện của trường hoặc cho các bạn học sinh lớp sau. Hi vọng rằng món quà nhỏ này sẽ là nguồn động viên, góp phần giúp các em có thêm điều kiện để học tập thật tốt.

BAN TRUYỀN THÔNG

(Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam)

Giấy phép XB số 534/GP-BTTTT cấp ngày 19.11.2020; Mã số: 8BT10M23
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 10 năm 2023

Giá: 18.000 đồng
Mười tám nghìn đồng