TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

Số 558
Tháng 12 - 2023
ISSN: 2734-9284

VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 60 - XUẤT BẢN TỪ 1964 - DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT Biên tập: (024) 35121607; ĐT Phát hành: (024) 35142649;
ĐT-Fax Hành chính: (024) 35121606 - Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com - Website: viennghiencuusachgd.com

Nhà toán học Italia
Ernesto Cesàro
(1859 – 1906)

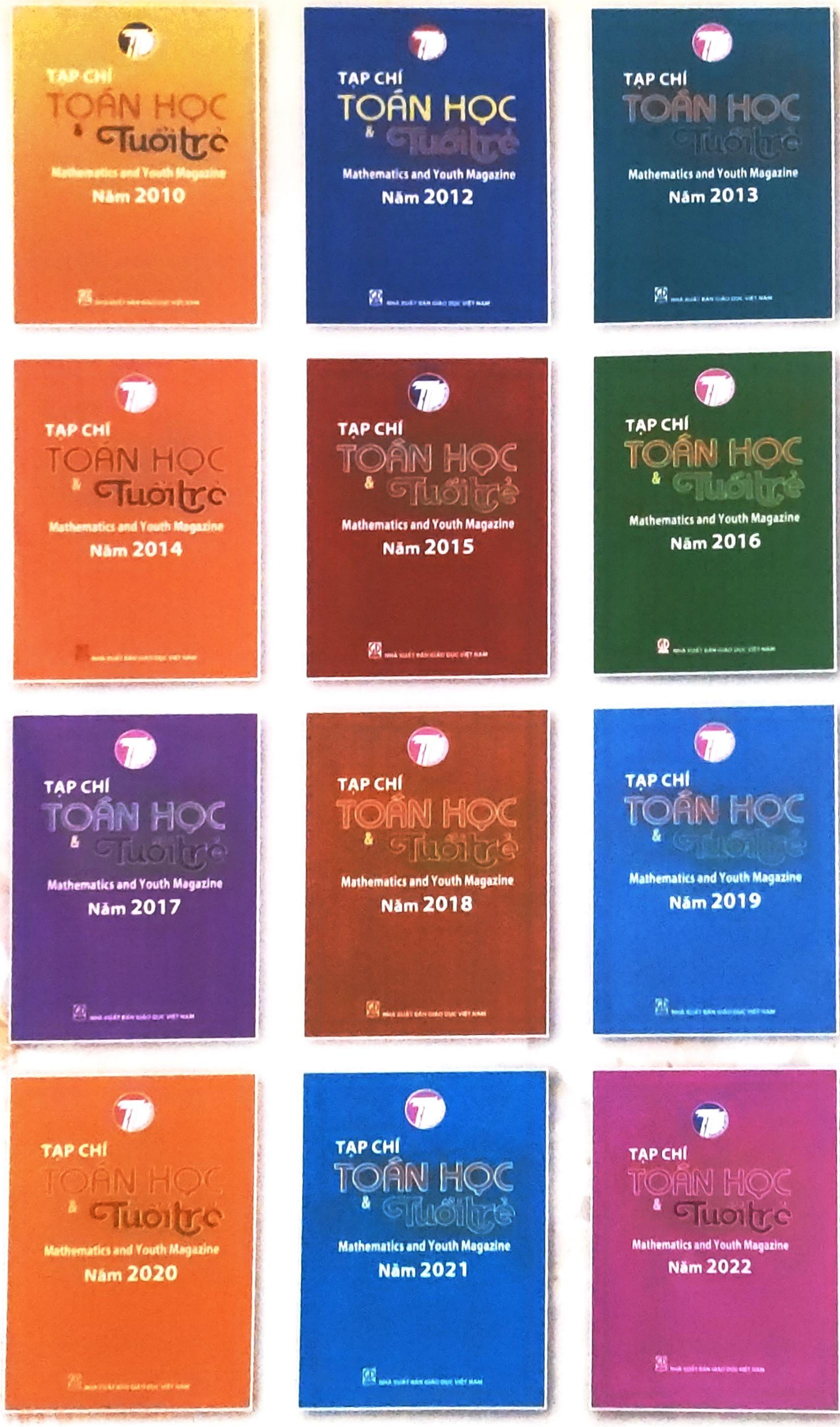
Cảnh đẹp Naples (Italia)

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Bộ đóng tập

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ HÀNG NĂM



Năm 2010
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 99.000 đồng

Năm 2012
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 152.000 đồng

Năm 2013
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 175.000 đồng

Năm 2014
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 185.000 đồng

Năm 2015
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2016
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2017
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2018
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2019
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2020
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 210.000 đồng

Năm 2021
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 240.000 đồng

Năm 2022
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 260.000 đồng

Mọi chi tiết xin liên hệ:
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
Địa chỉ: 187B Giảng Võ, Hà Nội
- Điện thoại: 024.35121606 - 024.35121607
- Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

ỨNG DỤNG CỦA MỘT BÀI TOÁN

NGUYỄN ANH TUẤN
(GV THCS Hòa Hiếu 2, TX. Thái Hòa, Nghệ An)

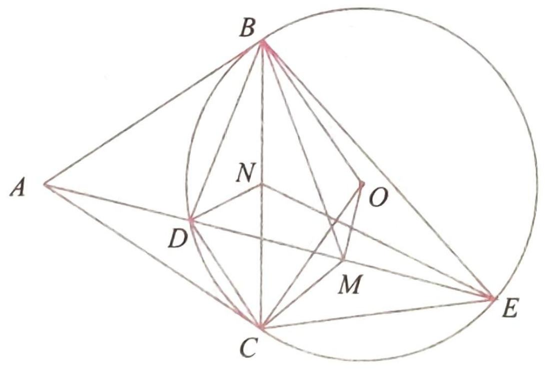
Khi giải một bài toán, thông thường chúng ta hay gặp những dấu hiệu quen thuộc, từ những dấu hiệu đó hãy cố gắng liên hệ với những bài toán đã giải, những định lý, tính chất đã được chứng minh h oặc ta đã biết cách giải và hãy sử dụng những kết quả quen thuộc đã biết đó để giải bài toán mà ta đang xét. Bây giờ chúng ta cùng xét một bài toán khá quen thuộc sau đây:

Bài toán 1. *Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến AB, AC và cát tuyến ADE với đường tròn (B,C là các tiếp điểm; DE không đi qua tâm O và AD < AE). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DE, BC. Chứng minh rằng:*

a) BC đối xứng với BM qua đường phân giác của $\widehat{DBE}$; CB đối xứng với CM qua đường phân giác của $\widehat{DCE}$.

b) DN đối xứng với DE qua đường phân giác của $\widehat{BDC}$; EN đối xứng với ED qua đường phân giác của $\widehat{BEC}$.

Lời giải (h.1).



Hình 1

Xét trường hợp điểm O nằm bên trong góc $\widehat{BAE}$ (trường hợp còn lại chứng minh tương tự).

a) Ta có $\widehat{ABO}=\widehat{ACO}=\widehat{AMO}=90^\circ$ suy ra năm điểm A, B, O, M, C cùng thuộc một đường tròn $\Rightarrow \widehat{AMB}=\widehat{ACB}=\widehat{ABC}=\widehat{AMC}$

$$\Rightarrow \widehat{AMB}=\widehat{AMC}=\frac{\widehat{BMC}}{2}=\frac{\widehat{BOC}}{2}=\widehat{BEC}.$$

Theo tính chất góc ngoài của tam giác BME ta có: $\widehat{MBE}=\widehat{AMB}-\widehat{AEB}=\widehat{BEC}-\widehat{AEB}$

$$=\frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BC}-\frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BD}=\frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{CD}=\widehat{DBC}.$$

Do đó BC đối xứng với BM qua đường phân giác của $\widehat{DBE}$. Vì $\widehat{MBE}=\widehat{DBC}$ nên

$$\Delta BCD\backsim\Delta BEM\,(\text{g.g})\Rightarrow\frac{CD}{ME}=\frac{BC}{BE}$$

$$\Rightarrow\frac{CD}{2ME}=\frac{\frac{BC}{2}}{BE}\Rightarrow\frac{CD}{DE}=\frac{BN}{BE}$$

$\Rightarrow \Delta CDE\backsim\Delta NBE\,(\text{c.g.c})\Rightarrow\widehat{DEC}=\widehat{BEN}\Rightarrow EN$ và ED đối xứng với nhau qua đường phân giác của $\widehat{BEC}$.

b) Do BC, BM đối xứng với nhau qua đường phân giác của $\widehat{DBE}$ nên $\widehat{DBM}=\widehat{EBC}$ $\Rightarrow\Delta BDM\backsim\Delta BCE\,(\text{g.g})$

$$\Rightarrow\frac{BD}{BC}=\frac{DM}{CE}\Rightarrow\frac{BD}{\frac{BC}{2}}=\frac{2DM}{CE}\Rightarrow\frac{BD}{BN}=\frac{DE}{CE}$$

$\Rightarrow\Delta DBN\backsim\Delta DEC\,(\text{c.g.c})\Rightarrow\widehat{BDN}=\widehat{EDC}$

$\Rightarrow DN$ và DE đối xứng với nhau qua đường phân giác của $\widehat{BDC}$.

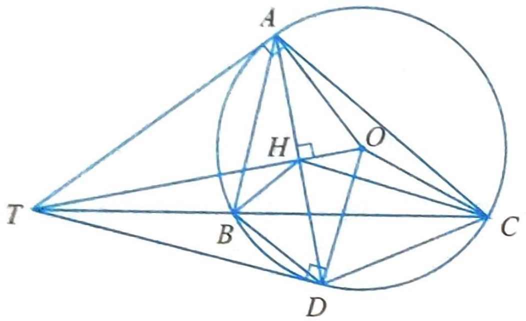
Tương tự ta có EN đối xứng với ED qua đường phân giác của $\widehat{BEC}$.

Bài toán 1 là bài toán khá quen thuộc với nhiều bạn học sinh và có nhiều ứng dụng. Chúng ta sẽ dùng bài toán này để giải một số bài toán sau:

Bài toán 2. *Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) $(AB < AC)$. Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt đường thẳng BC tại điểm T. Kẻ $AH \perp OT$ $(H \in OT)$, chứng minh rằng*

$$\frac{BH}{CH} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$

Lời giải (h.2).



Hình 2

Kéo dài AH cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là D. Tam giác cân OAD có OH là đường cao nên OH cũng là đường phân giác $\Rightarrow \Delta OAT = \Delta ODT$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{ODT} = \widehat{OAT} = 90°$ $\Rightarrow OD \perp OT \Rightarrow TD$ là tiếp tuyến của đường tròn (O). Theo bài toán 1 ta có:

$$\widehat{ACH} = \widehat{BCD} \text{ và } \widehat{ABH} = \widehat{CBD}.$$

Xét ΔCHA và ΔCDB có:

$$\widehat{ACH} = \widehat{BCD} \text{ và } \widehat{HAC} = \widehat{DBC}\left(= \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{CD}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta CHA \backsim \Delta CDB \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{CD}{CH} = \frac{BC}{AC} \quad (1).$$

Tương tự: $\Delta ABH \backsim \Delta CBD$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{BH}{BD} = \frac{AB}{BC} \quad (2).$$

Mặt khác: $\Delta ABT \backsim \Delta CAT$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{BT}{AT} = \dfrac{AB}{BC}$;

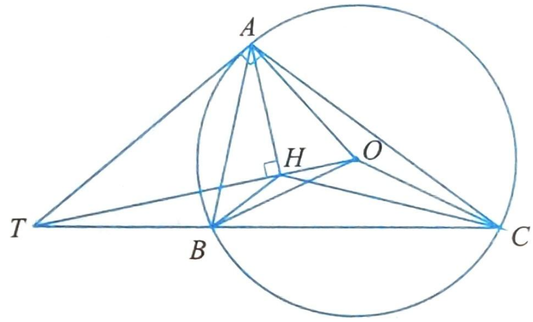
$\Delta DBT \backsim \Delta CDT$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{BT}{DT} = \dfrac{DB}{CD}$. Kết hợp với $DT = AT$ ta suy ra được $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{DB}{CD}$ (3).

Từ (1); (2) và (3) suy ra: $\dfrac{CD}{CH}.\dfrac{BH}{BD} = \dfrac{AB}{BC}.\dfrac{BC}{AC}$

$$\Rightarrow \frac{BH}{CH} = \frac{AB}{AC}.\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}.\frac{AB}{AC} = \frac{AB^2}{AC^2}$$

Ngoài ra ta có thể giải bài toán 2 theo các cách sau:

Cách 2 (h.3).



Hình 3

Ta có: $\Delta ABT \backsim \Delta CAT$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AT}{CT} = \frac{BT}{AT} \Rightarrow AT^2 = TB.TC \quad (1).$$

Mặt khác, theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có $AT^2 = TH.TO$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow TB.TC = TH.TO \Rightarrow BHOC$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{THB} = \widehat{OCB} = \widehat{OBC} = \widehat{OHC}$.

Xét ΔTHB và ΔCHO có: $\widehat{TBH} = \widehat{HOC}$ (do tứ giác $BHOC$ nội tiếp); $\widehat{THB} = \widehat{OHC}$ (theo chứng minh trên) $\Delta THB \backsim \Delta CHO$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{HB}{HO} = \frac{TH}{HC} = \frac{TB}{CO} \Rightarrow \frac{HB}{HO}.\frac{TH}{HC} = \frac{TB^2}{CO^2}$$

$$\Rightarrow \frac{HB}{HC} = \frac{TB^2}{CO^2}.\frac{HO}{TH} \quad (3).$$

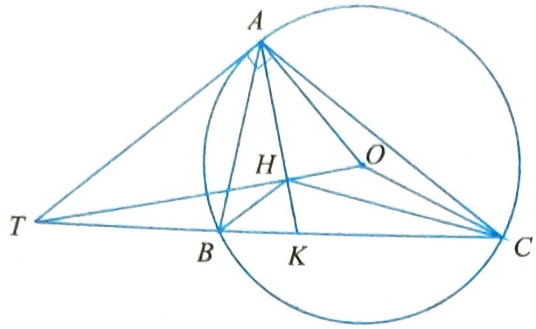
Mặt khác: $\dfrac{HO}{TH} = \dfrac{HO.OT}{TH.OT} = \dfrac{OA^2}{AT^2}$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra:

$$\frac{HB}{HC}=\frac{TB^2}{CO^2}\cdot\frac{OA^2}{AT^2}=\frac{TB^2}{AT^2}=\frac{AB^2}{AC^2}$$

(do $\Delta ABT \backsim \Delta CAT$ nên $\frac{BT}{AT}=\frac{AB}{AC}$).

Cách 3 (h.4)



Hình 4

Kéo dài AH cắt BC tại điểm K, theo cách 2 ta có $\widehat{THB}=\widehat{OHC}$ nên HT là đường phân giác ngoài của tam giác $BHC \Rightarrow \frac{BH}{CH}=\frac{TB}{TC}$ (1).

Ta có: $\Delta ABT \backsim \Delta CAT$ (g.g) $\Rightarrow \frac{BT}{AT}=\frac{AT}{CT}=\frac{AB}{AC}$

$$\Rightarrow \frac{BT}{AT}\cdot\frac{AT}{CT}=\frac{AB^2}{AC^2} \Rightarrow \frac{BT}{CT}=\frac{AB^2}{AC^2} \quad (2).$$

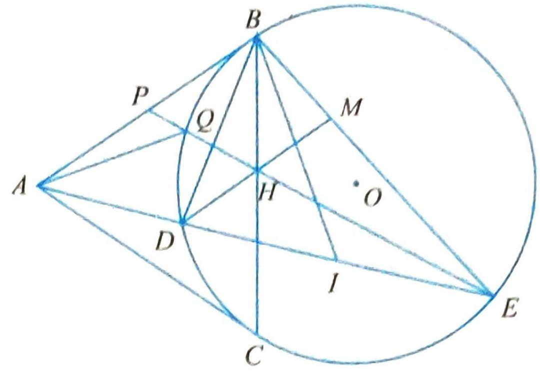
Từ (1) và (2) suy ra $\frac{BH}{CH}=\frac{AB^2}{AC^2}$.

Bài toán 3. *Từ điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến AB, AC và cát tuyến ADE với đường tròn đó (B, C là các tiếp điểm; DE không đi qua tâm O và $AD < AE$). Từ D vẽ đường thẳng vuông góc với OB, đường thẳng này cắt BC tại H. Tia EH cắt AB tại P và cắt đường tròn (O) tại điểm Q. Chứng minh $\widehat{PAQ}=\widehat{PEA}$.*

Lời giải (h.5).

Kéo dài DH cắt BE tại M và gọi I là trung điểm của DE. Vì $DH \perp OB$ nên $DH \,//\, AB$

$$\Rightarrow \widehat{BDH}=\widehat{ABD}=\frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BD}=\widehat{BEI}.$$



Hình 5

Mà $\widehat{DBC}=\widehat{EBI}$ (theo bài toán 1). Do đó $\Delta BDH \backsim \Delta BEI\,(\text{g.g}) \Rightarrow \frac{DH}{EI}=\frac{BH}{BI}$ (1).

Ta có $DH \,//\, AB \Rightarrow \widehat{MHB}=\widehat{ABH}=\frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BC}$.

Mặt khác: $\widehat{BID}=\widehat{IBE}+\widehat{IEB}=\widehat{DBC}+\widehat{IEB}$

$$=\frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{DC}+\frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{DB}=\frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BC}.$$

Do đó $\widehat{MHB}=\widehat{BID}$. Xét ΔBDI và ΔBMH có: $\widehat{DBI}=\widehat{MBH}$ (do $\widehat{DBC}=\widehat{EBI}$) và $\widehat{MHB}=\widehat{BID}$

$$\Rightarrow \Delta BDI \backsim \Delta BMH\,(\text{g.g}) \Rightarrow \frac{MH}{DI}=\frac{BH}{BI} \quad (2).$$

Từ (1); (2) và kết hợp với $DI=EI$ suy ra $DH=MH$.

Vì $DM \,//\, AB \Rightarrow \frac{DH}{AP}=\frac{EH}{EP}=\frac{HM}{BP} \Rightarrow AP=BP$

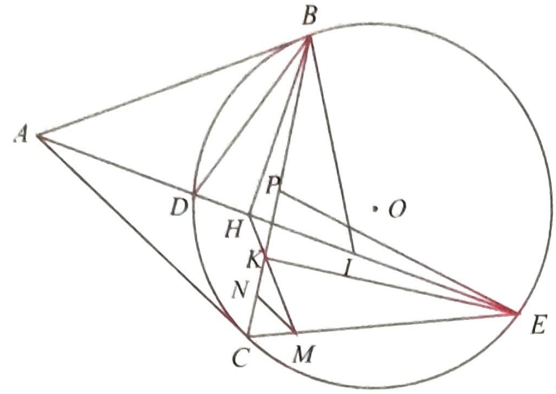
(do $DH=MH$) $\Rightarrow AP^2=PB^2=PQ.PE$

$$\Rightarrow \frac{AP}{PQ}=\frac{PE}{AP} \Rightarrow \Delta APQ \backsim \Delta EPA\,(\text{c.g.c})$$

$$\Rightarrow \widehat{PAQ}=\widehat{PEA}.$$

Bài toán 4. *Từ một điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Trên cung nhỏ BC lấy điểm D sao cho $BD > CD$, tia AD cắt đường tròn (O) tại điểm E (E khác D). Kẻ BH vuông góc với DE tại H và kẻ EK vuông góc với BC tại K. Đường thẳng HK cắt đường thẳng CE tại M. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác BEM đi qua trung điểm của đoạn thẳng CK.*

Hướng dẫn (h.6)



Hình 6

Cách 1. Gọi N, I lần lượt là trung điểm của CK và DE. Ta cần chứng minh $BNMC$ là tứ giác nội tiếp $\Leftrightarrow \widehat{CMN}=\widehat{CBE} \Leftrightarrow \widehat{CMN}=\widehat{DBI}$ (do $\widehat{DBI}=\widehat{CBE}$) $\Leftrightarrow \Delta CMN \backsim \Delta DBI \Leftrightarrow \dfrac{CM}{CN}=\dfrac{DB}{DI}$

$\Leftrightarrow \dfrac{CM}{CK}=\dfrac{DB}{DE} \Leftrightarrow \Delta CMK \backsim \Delta DBE$

$\Leftrightarrow \widehat{CKM}=\widehat{DEB} \Leftrightarrow BHKE$ là tứ giác nội tiếp (điều này đúng).

Cách 2. Gọi N, P lần lượt là trung điểm của CK và CB. Ta cần chứng minh $BNMC$ là tứ giác nội tiếp

$\Leftrightarrow CM.CE=CN.CB \Leftrightarrow CM.CE=CK.CP$

$\Leftrightarrow \dfrac{CM}{CK}=\dfrac{CP}{CE} \Leftrightarrow \Delta MCK \backsim \Delta PCE$

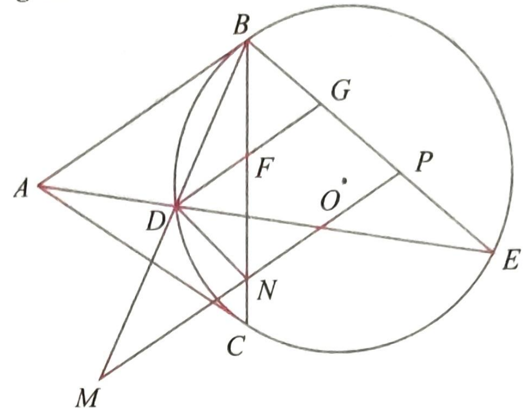
$\Leftrightarrow \widehat{CKM}=\widehat{CEP} \Leftrightarrow \widehat{HKB}=\widehat{DEB}$

(do $\widehat{CEP}=\widehat{DEB}$)

$\Leftrightarrow BHKE$ là tứ giác nội tiếp (điều này đúng).

Bài toán 5. *Từ một điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến AB, AC và cát tuyến ADE với đường tròn đó (B, D là các tiếp điểm; $AD<AE$ và điểm O nằm bên trong $\widehat{BAD}$). Trên tia đối của tia DB lấy điểm M sao cho $DB=DM$. Qua điểm M vẽ đường thẳng song song với AB nó cắt đường thẳng BC tại điểm N. Chứng minh $DN\,//\,BE$.*

Lời giải. Cách 1 (h.7)



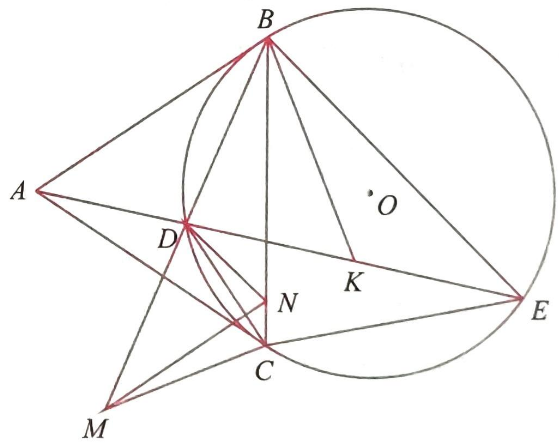
Hình 7

Qua D kẻ đường thẳng song song với AB, đường thẳng này cắt BC và BE lần lượt tại F và G. Khi đó theo cách giải bài toán 3 ta có $DF=FG$. Kéo dài MN cắt BE tại P. Vì $DG\,//\,MP$ nên ta có:

$\dfrac{DF}{MN}=\dfrac{BF}{BN}=\dfrac{GF}{PN} \Rightarrow MN=PN$ (do $DF=FG$).

Khi đó DN là đường trung bình của tam giác $BPM \Rightarrow DN\,//\,BE$.

Cách 2 (h.8)



Hình 8

Gọi K là trung điểm của DE, theo bài toán 1 ta có $\widehat{DBC}=\widehat{EBK} \Rightarrow \Delta BCD \backsim \Delta BEK$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{BD}{CD}=\frac{KB}{KE} \Rightarrow \frac{MD}{CD}=\frac{KB}{KD}.$$

Mặt khác: $\widehat{BKD}=\widehat{KBE}+\widehat{KEB}=\widehat{CBD}+\widehat{KEB}$

$=\frac{1}{2}sđ\overset{\frown}{CD}+\frac{1}{2}sđ\overset{\frown}{BD}=\frac{1}{2}sđ\overset{\frown}{BC}=\widehat{BEC}=\widehat{MDC}.$

Từ đó suy ra:

$\Delta MDC \backsim \Delta BKD$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{DMC}=\widehat{KBD}$ (1).

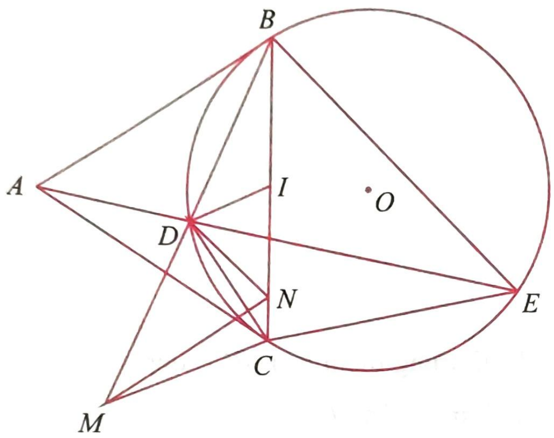
Vì $MN // AB \Rightarrow \widehat{BMN}=\widehat{ABM}=\frac{1}{2}sđ\overset{\frown}{BD}=\widehat{DCB}$

$\Rightarrow DMCN$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{DMC}=\widehat{DNB}$ (2).

Vì $\widehat{DBC}=\widehat{EBK}$ (bài toán 1) $\Rightarrow \widehat{KBD}=\widehat{EBC}$ (3).

Từ (1);(2) và (3) suy ra $\widehat{DNB}=\widehat{EBC}\Rightarrow DN // BE$.

Cách 3 (h.9)



Hình 9

Gọi I là trung điểm của BC, khi đó DI là đường trung bình của $\Delta BCM \Rightarrow DI // CM$ $\Rightarrow \widehat{BDI}=\widehat{BMC}$ (1).

Mặt khác: $DMCN$ là tứ giác nội tiếp (đã chứng minh ở cách 2) nên $\widehat{DNB}=\widehat{BMC}$ (2).

Theo bài toán 1 ta có:

$$\widehat{BDI}=\widehat{CDE}=\frac{1}{2}sđ\overset{\frown}{CE}=\widehat{EBC} \quad (3).$$

Từ (1); (2) và (3) suy ra $\widehat{DNB}=\widehat{EBC}\Rightarrow DN // BE$.

Bài toán 6. *Cho tam giác ABC có ba góc nhọn $(AB < AC)$, nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt đường thẳng BC tại điểm S. Gọi I là chân đường vuông góc kẻ từ điểm O đến đường thẳng BC.*

a) Chứng minh tứ giác SAOI là tứ giác nội tiếp.

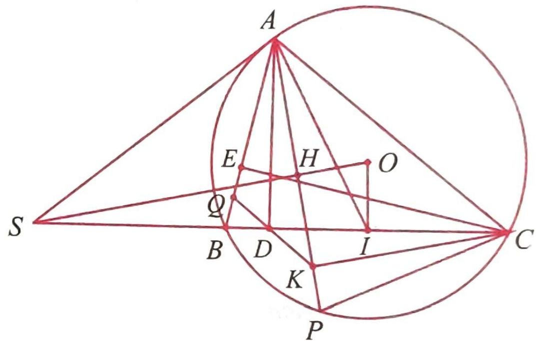
b) Gọi H, D lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ điểm A đến các đường thẳng SO và SC. Chứng minh $\widehat{OAH}=\widehat{IAD}$.

c) Vẽ đường cao CE của tam giác ABC. Gọi Q là trung điểm của đoạn thẳng BE. Đường thẳng QD cắt đường thẳng AH tại điểm K. Chứng minh $BQ.BA = BD.BI$ và đường thẳng CK song song với đường thẳng SO.

(Đề tuyển sinh vào lớp 10 THPT TP. Hà Nội, năm học 2023-2024)

Câu a) và câu b) của đề thi tương đối đơn giản. Sau đây tác giả chỉ nêu lời giải của câu c) bằng cách sử dụng bài toán 1.

Lời giải (h.10).



Hình 10

Ta có : $\Delta BDA \backsim \Delta BEC$ (g.g) $\Rightarrow \frac{BD}{BE}=\frac{BA}{BC}$

$\Rightarrow \frac{BD}{BQ}=\frac{BA}{BI}$ (do $BE = 2BQ$ và $BC = 2BI$)

$\Rightarrow BQ.BA = BD.BI$.

Từ $\frac{BD}{BQ}=\frac{BA}{BI}\Rightarrow \Delta DBQ \backsim \Delta ABI$ (c.g.c)

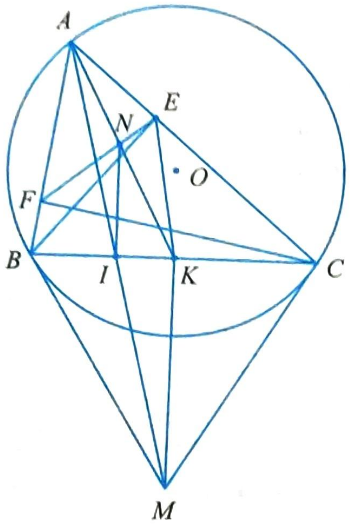
$\Rightarrow \widehat{BDQ}=\widehat{BAI}\Rightarrow \widehat{KDC}=\widehat{BAI}$ (1).

Kéo dài AH cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là P, khi đó ta dễ dàng chứng minh được SP là tiếp tuyến của đường tròn (O). Theo bài toán 1 ta có $\widehat{BAI}=\widehat{CAP}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{KDC}=\widehat{CAP}\Rightarrow ADKC$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AKC}=\widehat{ADC}=90^\circ \Rightarrow AK \perp CK$ $\Rightarrow SO // CK$.

Bài toán 7. *Cho tam giác nhọn ABC (AB < AC), nội tiếp đường tròn (O) có các đường cao BE và CF. Tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) cắt nhau tại M; AM cắt BC tại I. Gọi K là trung điểm của BC; N là giao điểm của AK và EF. Chứng minh rằng $NI \perp BC$.*

Lời giải (h.11).



Hình 11

Ta có $\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90° \Rightarrow BFEC$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{AEF}$.

Mặt khác: $\widehat{CAK} = \widehat{BAM}$ (theo bài toán 1).

Do đó $\Delta ABI \backsim \Delta AEN$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AN}{AI} = \dfrac{AE}{AB}$ (1).

Ta lại có: $\widehat{AEK} = 180° - \widehat{KEC} = 180° - \widehat{KCE}$

$$= 180^o - \widehat{ACB} = \frac{360° - \text{sđ}\,\overset{\frown}{AB}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{ACB} = \widehat{ABM}.$$

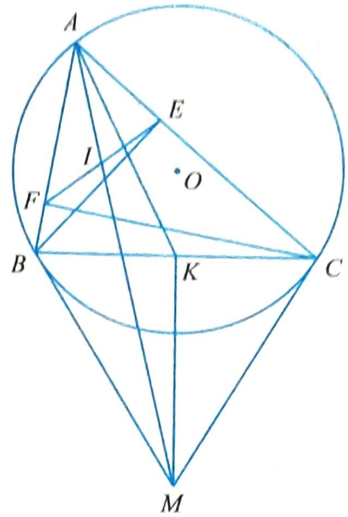
Do đó $\Delta AEK \backsim \Delta ABM\,(g.g) \Rightarrow \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AK}{AM}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{AN}{AI} = \frac{AK}{AM} \Rightarrow NI \,//\, KM \Rightarrow NI \perp BC.$$

Bài toán 8. *Cho đường tròn (O) và dây cung BC cố định không đi qua tâm O. Gọi A là điểm di động trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC nhọn. BE, CF là các đường cao của tam giác ABC và I là trung điểm của EF. Chứng minh rằng AI luôn đi qua một điểm cố định.*

Lời giải (h.12).



Hình 12

Gọi K là trung điểm của BC; tiếp tuyến tại B, C của đường tròn (O) cắt nhau tại M. Vì đường tròn (O) và dây cung BC cố định nên điểm M cố định. Theo bài toán 1 ta có $\widehat{CAK} = \widehat{BAM}$ (1).

Mặt khác: $\Delta ABC \backsim \Delta AEF$ (g.g)

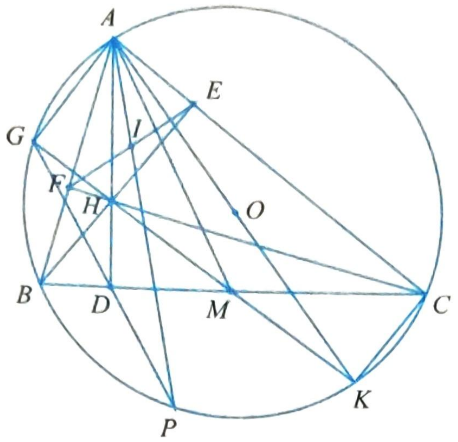
$$\Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{AF}{EF} \Rightarrow \frac{AC}{KC} = \frac{AF}{IF}$$

$$\Rightarrow \Delta ACK \backsim \Delta AFI\,(\text{c.g.c}) \Rightarrow \widehat{CAK} = \widehat{FAI} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BAM} = \widehat{FAI}$. Do đó ba điểm A, I, M thẳng hàng. Vậy AI luôn đi qua điểm cố định M được xác định như trên.

Bài toán 9. *Cho tam giác ABCcó ba góc nhọn (AB < AC) trực tâm H, nội tiếp đường tròn (O) với ba đường cao AD, BE và CF. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng EF. Đường thẳng AI cắt đường tròn (O) tại điểm P khác A, đường thẳng PD cắt đường tròn (O) tại điểm G khác P. Chứng minh rằng đường thẳng GH đi qua trung điểm của đoạn thẳng BC.*

Lời giải (h.13).



Hình 13

Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC, ta có: $\widehat{CAM} = \widehat{FAI}$ (theo bài 8) $\Rightarrow \widehat{BAP} = \widehat{CAM}$ và $\widehat{BAM} = \widehat{CAP}$. Ta có:

$$\widehat{BDG} = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{BG} + \text{sđ}\overset{\frown}{PC}\right) = \widehat{GAB} + \widehat{CAP}$$

$$= \widehat{GAB} + \widehat{BAM} = \widehat{GAM}$$

$\Rightarrow$ tứ giác $AGDM$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AGM} = \widehat{ADM} = 90°$.

Vẽ đường kính AK của đường tròn (O), ta có $\widehat{AGK} = 90°$. Từ đó suy ra ba điểm G, M, K thẳng hàng (1).

Ta dễ dàng chứng minh được tứ giác $BHCK$ là hình hành nên ba điểm H, M, K thẳng hàng (2).

Từ (1) và (2) suy ra bốn điểm G, H, M, K thẳng hàng. Vậy đường thẳng GH đi qua trung điểm của đoạn thẳng BC.

Bài toán 10. *Cho tam giác ABC có ba góc nhọn $(AB < AC)$ trực tâm H, nội tiếp đường tròn (O) với ba đường cao AD, BE và CF. Đường thẳng EF cắt đường thẳng AD tại điểm Q. Gọi M và I lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC và AH. Đường thẳng IM cắt đường thẳng EF tại điểm K.*

a) Chứng minh tam giác AEK đồng dạng với tam giác ABM.

b) Đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại điểm S, đường thẳng SI cắt đường thẳng MQ tại điểm T. Chứng minh bốn điểm A, T, H và M cùng nằm trên một đường tròn.

c) Tia TH cắt đường tròn (O) tại điểm P. Chứng minh ba điểm A, K và P là ba điểm thẳng hàng.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10, THPT chuyên toán, TP. Hà Nội, năm học 2023-2024)

Hướng dẫn (h.14).

b) Ta có $IM \perp EF$ (tính chất của đường nối tâm) và $ID \perp SC$ nên Q là trực tâm của tam giác ISM $\Rightarrow MT \perp IS$. Kéo dài SH cắt AM tại N $\Rightarrow SN \perp AM$ (kết quả quen thuộc).

Mặt khác: $IH^2 = IE^2 = IK.IM = IT.IS$

$$\Rightarrow \frac{IH}{IT} = \frac{IS}{IH} \Rightarrow \Delta HIT \backsim \Delta SIH \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{THI} = \widehat{HSI} \text{ (1).}$$

Ta có tứ giác $STNM$ nội tiếp nên

$$\widehat{TSN} = \widehat{TMN} \text{ (2).}$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{THI} = \widehat{TMN} \Rightarrow ATHM$ là tứ giác nội tiếp.

c) Gọi L là giao điểm của tia SA và đường tròn (O); G là giao điểm thứ hai của AM với đường tròn (O); P' là giao điểm thứ hai của LD với đường tròn (O). Ta có $SL.SA = SB.SC = SE.SF$ nên $ALFE$ là tứ giác nội tiếp. Mà $AFHE$ là tứ giác nội tiếp nên năm điểm A, L, F, H, E cùng thộc một đường tròn $\Rightarrow \widehat{ALH} = \widehat{AFH} = 90°$ (1).

Mặt khác bốn điểm D, M, E, F thuộc đường tròn Euler của ΔABC nên ta có:

$$SD.SM = SE.SF = SB.SC = SL.SA.$$

Do đó $ALDM$ là tứ giác nội tiếp, cho nên:

$$\widehat{ALM} = \widehat{ADM} = 90° \text{ (2).}$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{ALM} = \widehat{ALH}$ nên ba điểm L, H, M thẳng hàng.

Vì $ALDM$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{SLD} = \widehat{LAM}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\,\overset{\frown}{LB} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{P'C}\right) = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{LBG} \Rightarrow \overset{\frown}{BG} = \overset{\frown}{CP'}$

$\Rightarrow \overset{\frown}{BP'} = \overset{\frown}{GC} \Rightarrow \widehat{BAP'} = \widehat{CAM}$ (3).

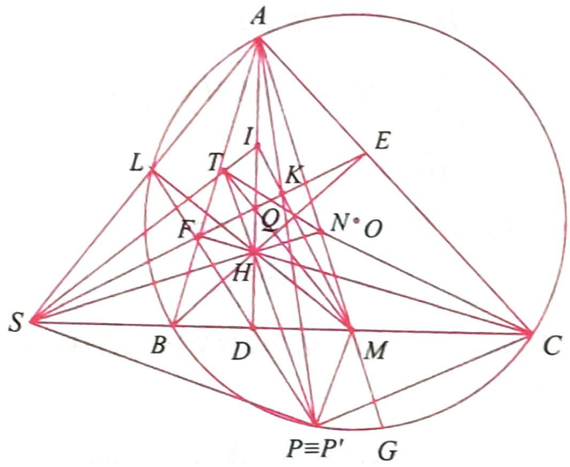
Mặt khác: $\Delta ACB \backsim \Delta AFE$ (g.g) nên

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AF}{EF} \Rightarrow \frac{AC}{MC} = \frac{AF}{KF}$$

$\Rightarrow \Delta ACM \backsim \Delta AFK$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{CAM} = \widehat{FAK}$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{BAP'} = \widehat{FAK}$ nên ba điểm A, K, P' thẳng hàng.



Hình 14

Ta có: $\Delta DBH \backsim \Delta DAC$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{DH}{DC} = \frac{DB}{DA} \Rightarrow DA.DH = DC.DB;$

$\Delta DMH \backsim \Delta DAS$ (g.g) $\Rightarrow \frac{DM}{DA} = \frac{DH}{DS}$

$\Rightarrow DA.DH = DM.DS.$

Từ đó suy ra: $DC.DB = DM.DS = DL.DP'$

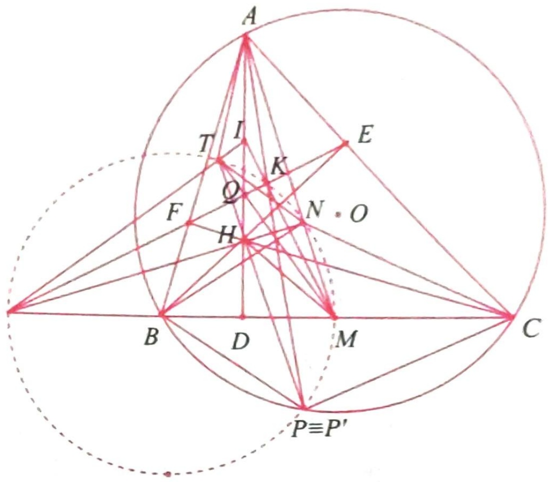
(do $DC.DB = DL.DP'$)

nên $SLMP'$ là tứ giác nội tiếp.

Từ đó suy ra bảy điểm S, P', M, N, K, T, L cùng nằm trên một đường tròn

$\Rightarrow \widehat{MTP'} = \widehat{MLP'} = \widehat{MAD} = \widehat{MTH}$ nên ba điểm T, H, P' thẳng hàng $\Rightarrow P' \equiv P$. Vậy ba điểm A, K và P thẳng hàng.

Cách 2 (h.15)



Hình 15

c) Gọi P' là giao điểm của TH với đường tròn $(STNM)$, ta có:

$\widehat{NTM} = \widehat{NSM} = \widehat{MAD} = \widehat{MTH}$

$\Rightarrow N$ và P' đối xứng với nhau qua BC

$\Rightarrow \widehat{BP'C} = \widehat{BNC}.$

Ta có: $SH.SN = SE.SF = SB.SC$

$\Rightarrow BHNC$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{BP'C} = \widehat{BNC} = \widehat{BHC} = 180° - \widehat{BAC}$

$\Rightarrow \widehat{BP'C} + \widehat{BAC} = 180°$ nên $BACP'$ là tứ giác nội tiếp, suy ra $P \equiv P'$.

Mặt khác: $ME \perp IE \Rightarrow ME$ là tiếp tuyến của đường tròn $(I) \Rightarrow MC^2 = ME^2 = MN.MA$

$\Rightarrow \frac{MC}{MN} = \frac{MA}{MC} \Rightarrow \Delta CMN \backsim \Delta AMC$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{MCN} = \widehat{MCP}$

$= \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{BP} = \widehat{BAP}$ (3).

Ta lại có: $\widehat{MAC} = \widehat{FAK}$ (4) (do $\Delta AMC \backsim \Delta AKF$).

Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{BAP} = \widehat{FAK}$ nên ba điểm A, K và P thẳng hàng.

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN TRẦN PHÚ, HẢI PHÒNG NĂM HỌC 2023 - 2024

Bài 1. a) *Cho biểu thức*

$$A=\left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}+1}+\frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}-\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right):\frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}$$

(*với* $x>0$).

Rút gọn biểu thức A và chứng minh $A\le 2$.

b) *Cho phương trình:*

$$x^2-2(a+1)x+a^2-2a+1=0$$

(*x là ẩn, a là tham số*).

Chứng minh nếu a là số chính phương thì phương trình đã cho có hai nghiệm cũng là những số chính phương.

Lời giải. a) Ta có:

$$A=\left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}+1}+\frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}-\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right):\frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}$$

$$=\frac{x+2+\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)-x+\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)}:\frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)}:\frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}.$$

Do đó:

$$\frac{2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}\le 2\Leftrightarrow 2\sqrt{x}\le 2x-2\sqrt{x}+2$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-1\right)^2\ge 0\ \text{(luôn đúng)}.$$

Vậy $A\le 2$.

b) Ta có: $\Delta'=(a+1)^2-(a^2-2a+1)=4a\ge 0$.

Khi đó:

$$x_1=(a+1)-\sqrt{\Delta'}=(a+1)-2\sqrt{a}=(\sqrt{a}-1)^2;$$

$$x_2=(a+1)+\sqrt{\Delta'}=(a+1)+2\sqrt{a}=(\sqrt{a}+1)^2.$$

Do a là số chính phương nên $\sqrt{a}$ là số nguyên, vậy nên x_1; x_2 là số chính phương.

Bài 2. a) *Giải phương trình:*

$$\left(3x^2+4x+6\right)\sqrt{3x^2+4x+5}=27x^3+3x.$$

b) *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases}\sqrt{y}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)=1\\ y+4\sqrt{y}=x^2+3x-3-2(x+1)\sqrt{x}\end{cases}.$$

Lời giải. a) Đặt $\sqrt{3x^2+4x+5}=a>0,\ 3x=b$.

Khi đó phương trình trở thành:

$$a^3+a=b^3+b$$

$$\Leftrightarrow(a-b)(a^2+ab+b^2+1)=0\Leftrightarrow a=b$$

$$\text{(vì } a^2+ab+b^2+1=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4}+1>0\text{)}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{3x^2+4x+5}=3x$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ 6x^2-4x-5=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{2+\sqrt{34}}{6}.$$

b) ĐKXĐ: $x\ge 0;\ y\ge 0$.

PT thứ nhất $\Leftrightarrow\sqrt{y}=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ (1).

PT thứ hai $\Leftrightarrow\left(\sqrt{y}+2\right)^2=\left(x+1-\sqrt{x}\right)^2$.

- TH1: $\sqrt{y}+2=x+1-\sqrt{x}\Leftrightarrow\sqrt{y}=x-\sqrt{x}-1$.

Kết hợp với (1) ta có:

$$\sqrt{x+1}=x-1\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\ x^2-3x=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=3;y=7-4\sqrt{3}\ \text{(thỏa mãn ĐKXĐ)}.$$

- TH2: $\sqrt{y}+2=-x-1+\sqrt{x}$

(vô lý vì $\sqrt{y}+2>0;-x-1+\sqrt{x}<0$).

Vậy $x=3;y=7-4\sqrt{3}$.

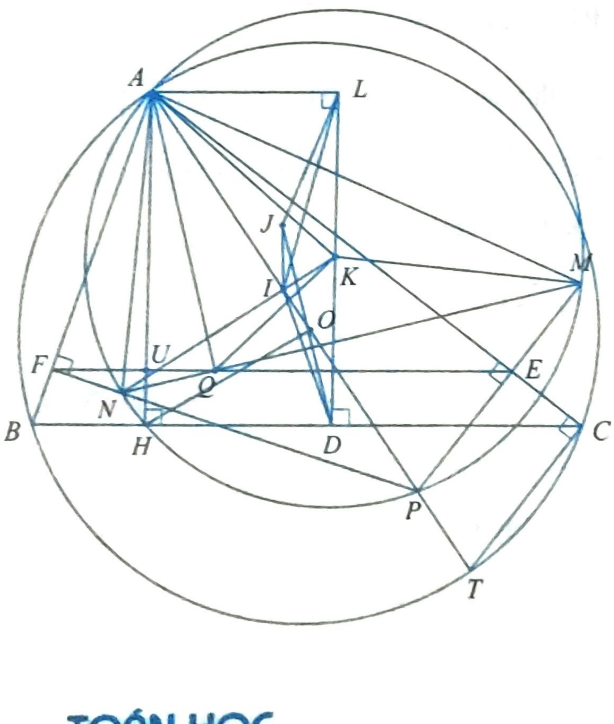
Bài 3. *Cho tam giác nhọn ABC không cân nội tiếp đường tròn tâm O. Vẽ đường kính AT của đường tròn (O) và lấy điểm P trên đoạn thẳng OT $(P \neq T)$. Gọi E và F tương ứng là hình chiếu vuông góc của P trên các đường thẳng AC và AB. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh BC.*

a) Chứng minh $\widehat{OAB} = \widehat{HAC}$ và hai đường thẳng BC, EF song song với nhau.

b) Cho AH và EF cắt nhau tại U; điểm Q di động trên đoạn thẳng UE $(Q \neq U,\ Q \neq E)$. Đường thẳng vuông góc với AQ tại điểm Q cắt các đường thẳng PE, PF tương ứng tại M, N. Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN. Chứng minh bốn điểm A, M, N, P cùng thuộc một đường tròn và $\widehat{OAH} = \widehat{KAQ}$.

c) Kẻ KD vuông góc với BC $(D \in BC)$. Chứng minh đường thẳng đi qua điểm D và song song với AQ luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải.



a) Ta có $\widehat{BAH} = \widehat{OAC}$ do cùng phụ với $\widehat{ABC}$, suy ra $\widehat{PAF} = \widehat{HAC}$.

Có $AEPF$ là tứ giác nội tiếp, suy ra $\widehat{AEF} = \widehat{APF}$.

Có $\widehat{APF} = 90^0 - \widehat{PAF}$ và $\widehat{ACB} = 90^0 - \widehat{HAC}$.

Suy ra $\widehat{AEF} = \widehat{ACB} \Rightarrow EF \,//\, BC$.

b) $AQEM$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{AEF} = \widehat{APN}$

$\Rightarrow A, M, N, P$ cùng nằm trên một đường tròn.

Ta có: $\widehat{AMN} = \widehat{ACB}$, tương tự: $\widehat{ANM} = \widehat{ABC}$,

$\widehat{OAH} = \widehat{OAB} - \widehat{HAB} = \left(90^0 - \widehat{ACB}\right) - \left(90^0 - \widehat{ABC}\right)$

$= \left(90^0 - \widehat{AMN}\right) - \left(90^0 - \widehat{ANM}\right) = \widehat{KAN} - \widehat{QAN} = \widehat{KAQ}$.

c) Gọi L là chân đường vuông góc hạ từ điểm A xuống đường thẳng KD. Từ $\widehat{OAH} = \widehat{KAQ}$ suy ra:

$\widehat{KAO} = \widehat{KAQ} - \widehat{OAQ} = \widehat{OAH} - \widehat{OAQ} = \widehat{QAH}$.

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AP và J là giao điểm của đường thẳng qua D song song với AQ và đường thẳng qua I vuông góc với BC.

$\Rightarrow \widehat{QAH} = \widehat{JDL} \Rightarrow \widehat{KAO} = \widehat{JDL}$. Do tứ giác $AIKL$ nội tiếp $\left(\widehat{ALK} = \widehat{AIK} = 90^0\right)$ nên

$$\widehat{KAO} = \widehat{KAI} = \widehat{ILK}, \text{ suy ra } \widehat{ILK} = \widehat{JDL}.$$

Mặt khác ta có $IJ \,//\, LD$ nên dễ suy ra tứ giác $ILDJ$ (hoặc $IJLD$) là hình thang cân. Suy ra I và J đối xứng với nhau qua trung trực của DL, hay qua trung trực của AH.

Dễ thấy $ALDH$ là hình chữ nhật. Từ đây, vì I là điểm cố định và trung trực của AH là đường thẳng cố định nên J là điểm cố định.

Bài 4. *Cho các số thực a, b, c thoả mãn $a+b+c=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:*

$$P = \frac{2a-1}{a^2+2} + \frac{2b-1}{b^2+2} + \frac{2c-1}{c^2+2}.$$

Lời giải. Ta có:

$$P+3=\frac{(a+1)^2}{a^2+2}+\frac{(b+1)^2}{b^2+2}+\frac{(c+1)^2}{c^2+2}$$
$$\geq\frac{(a+b+2)^2}{(a^2+b^2)+4}+\frac{(c+1)^2}{c^2+2}$$

Trong ba số a, b, c luôn có hai số cùng không âm hoặc cùng không dương; do đó không mất tính tổng quát, ta giả sử $ab\geq 0$. Khi đó:

$$P+3\geq\frac{(a+b+2)^2}{(a+b)^2+4}+\frac{(c+1)^2}{c^2+2}$$
$$=\frac{(c-2)^2}{c^2+4}+\frac{(c+1)^2}{c^2+2}.$$

Ta có sự tương đương:

$$\frac{(c-2)^2}{c^2+4}+\frac{(c+1)^2}{c^2+2}\geq\frac{3}{2}$$
$$\Leftrightarrow c^2(c-2)^2\geq 0.$$

Vậy $P\geq\frac{-3}{2}$; dấu đẳng thức xảy ra chẳng hạn khi

$a=b=c=0$ hoặc $a=b=-1, c=2$.

Do đó $\min P=\frac{-3}{2}$.

Bài 5. a) *Tìm các số nguyên tố a, b và số nguyên dương m thoả mãn $a^2+b^2+18ab=4.5^m$.*

b) *Cho 8 điểm phân biệt trên một đường tròn. Đánh số các điểm đó một cách ngẫu nhiên bởi các số $1,2,\ldots,8$ (hai điểm khác nhau được đánh số bởi hai số khác nhau). Mỗi dây cung nối hai điểm bất kỳ được gán với giá trị tuyệt đối của hiệu các số ở hai đầu mút. Chứng minh rằng luôn tìm được bốn dây cung, đôi một không có điểm chung, sao cho tổng của các số gán với bốn dây cung đó bằng 16.*

Lời giải. a) Ta có: $(a-b)^2=4.5^m-20ab\,\vdots\,5$

$$\Rightarrow (a-b)\,\vdots\,5\Rightarrow (a-b)^2\,\vdots\,25.$$

$a,b\geq 2\Rightarrow a^2+b^2+18ab=4.5^m\geq 80\Rightarrow m\geq 2$

$$\Rightarrow 20ab=(a-b)^2-4.5^m\,\vdots\,25$$

$$\Rightarrow 20ab\,\vdots\,25\Rightarrow ab\,\vdots\,5\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a\,\vdots\,5\\ b\,\vdots\,5\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a\,\vdots\,5\\ b\,\vdots\,5\end{cases}\Rightarrow a=b=5; m=3.$$

b) Gọi X là tập 4 điểm được gán các số 1, 2, 3, 4 và Y là tập 4 điểm còn lại. Ta sẽ chỉ ra rằng tồn tại 4 dây cung không có điểm chung, mỗi dây cung nối một điểm của X và một điểm của Y. Một cách nối như vậy thoả mãn yêu cầu bài toán vì tổng các số tương ứng với 4 dây cung này bằng

$$5+6+7+8-4-3-2-1=16.$$

Dễ thấy rằng có một điểm của X nằm kề một điểm của Y. Kẻ dây cung nối 2 điểm này rồi loại bỏ 2 điểm đánh dấu này lẫn dây cung đi, ta còn lại 6 điểm được đánh dấu trên đường tròn và 2 tập con X_1, Y_1 tương ứng, mỗi tập gồm 3 điểm được đánh dấu.

Bây giờ, lập luận tương tự, ta cũng suy ra có một điểm của X_1 kề nhau với một điểm Y_1 trên đường tròn đã bỏ đi 2 điểm trước đó. Kẻ dây cung nối 2 điểm này rồi loại bỏ 2 điểm đánh dấu này lẫn dây cung đi, ta còn lại 4 điểm được đánh dấu trên đường tròn và 2 tập con X_2, Y_2 tương ứng, mỗi tập gồm 2 điểm được đánh dấu.

Lập luận tương tự, ta cũng suy ra có một điểm của X_2 kề nhau với một điểm Y_2 trên đường tròn đã bỏ đi 2 điểm trước đó. Kẻ dây cung nối 2 điểm này cũng như dây cung nối 2 điểm còn lại. Bây giờ, khôi phục lại các dây cung ban đầu. Dễ thấy, 4 dây cung được kẻ đôi một không có điểm chung.

LÊ ĐỨC THỊNH
(GV THPT chuyên Trần Phú, Hải Phòng)
Giới thiệu

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN, TỈNH BẮC NINH NĂM HỌC 2023 – 2024

(Thời gian làm bài 150 phút, dành cho thí sinh thi vào chuyên Toán)

Câu 1. *(2,0 điểm)*

1) Rút gọn biểu thức

$$P=\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}.$$

2) Vẽ đường thẳng d là đồ thị hàm số $y=2x-4$. Tính khoảng cách từ gốc toạ độ O đến đường thẳng d.

Câu 2. *(2,0 điểm)*

1) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}6x+6y=2023|xy|\\ x-2y=3xy\end{cases}.$$

2) Giải phương trình

$$2x+3+\sqrt{4x^2+9x+2}=2\sqrt{x+2}+\sqrt{4x+1}.$$

Câu 3. *(3,0 điểm)*

1) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), có ba góc nhọn, $AB<AC$, hai đường cao BE và CF. Các tiếp tuyến của (O) tại B và C cắt nhau tại S. Gọi M là giao điểm của BC và SO.

a) Chứng minh rằng tam giác EAB đồng dạng với tam giác MBS, từ đó suy ra tam giác AEM đồng dạng với tam giác ABS.

b) Gọi N là giao điểm của AM và EF, P là giao điểm của SA và BC. Chứng minh rằng NP vuông góc với BC.

2) Cho hình chữ nhật $ABCD$. Lấy các điểm E,F thuộc cạnh AB (E nằm giữa A,F); G,H thuộc cạnh BC (G nằm giữa B,H); I,J thuộc cạnh CD (I nằm giữa C,J); K,M thuộc cạnh DA (K nằm giữa D,M) sao cho E,F,G,H,I,J,K,M đôi một phân biệt và khác các đỉnh của hình chữ nhật $ABCD$, đồng thời hình đa giác $EFGHIJKM$ có các góc bằng nhau. Chứng minh rằng nếu độ dài các cạnh của hình đa giác $EFGHIJKM$ là các số hữu tỉ (theo đơn vị cm) thì $EF=IJ$.

Câu 4. *(1,5 điểm)*

Cho các số nguyên dương x,y,z thoả mãn

$$x^3+y^3+z^3=18(x+y+z).$$

1) Chứng minh rằng $x+y+z$ chia hết cho 6.

2) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $F=xyz$.

Câu 5. *(1,5 điểm)*

1) Cho các số thực dương a,b,c thoả mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{15}{ab+bc+ca}\geq 6-abc.$$

2) Trên mặt phẳng cho 2008 điểm bất kì sao cho khoảng cách giữa 2 điểm tùy ý luôn lớn hơn 1. Chứng minh rằng mỗi hình tròn có bán kính bằng 1 chỉ chứa không quá 5 điểm trong 2008 điểm đã cho.

NGUYỄN VĂN XÁ
(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)

Giới thiệu

KHAI THÁC TÍNH CHẤT ĐỐI XỨNG TRONG HÌNH HỌC PHẲNG ĐỂ GIẢI TOÁN

TRẦN VĂN ĐỨC
(GV THPT Cẩm Bình, Cẩm Xuyên, Hà Tĩnh)

Năm học 2022-2023 là năm học đầu tiên Bộ giáo dục và Đào tạo thực hiện chương trình mới đối với học sinh lớp 10. Tuy có một số bỡ ngỡ và khó khăn nhưng học sinh và giáo viên cũng dần quen với chương trình mới và chủ động bắt nhịp kịp. Nội dung hình học phẳng lớp 10 khá hay trong đó có hình học tọa độ phẳng là nội dung chính. Trong bài viết này, chúng tôi mạnh dạn khai thác sâu chủ đề sử dụng tính chất đối xứng trong hình học phẳng để giải toán.

1. Tính đối xứng qua đường phân giác

Thí dụ 1. *Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có phương trình đường cao BH:* $3x+4y+10=0$, *phương trình đường phân giác trong AK:* $x-y+1=0$, *điểm* $M(0;2)$ *thuộc đường thẳng AB và* $MC=\sqrt{2}$. *Tìm tọa độ điểm C của tam giác ABC.*

A. $C(1;1)$ *hoặc* $C\left(\frac{31}{25};\frac{33}{25}\right)$ **B.** $C\left(\frac{31}{25};\frac{33}{25}\right)$

C. $C(1;1)$ **D.** $C(1;-1)$.

• ***Phân tích bài toán***

- Đầu tiên ta nhận thấy rằng khi có phương trình đường cao BH nếu trên đường thẳng AC có tọa độ một điểm ta sẽ lập được phương trình đường thẳng AC.

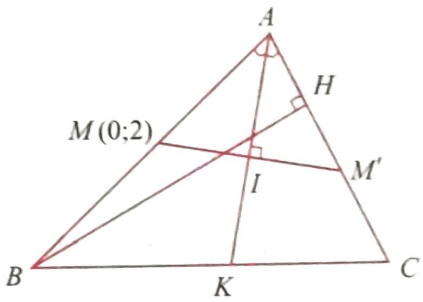
- Khi đã có phương trình đường thẳng AC ta dễ dàng tìm được tọa độ các đỉnh của tam giác.

- Vậy mấu chốt bài toán là làm sao trên AC xác định tọa độ một điểm, để lập phương trình AC?

- Ta để ý rằng nếu gọi M' là điểm đối xứng với M qua đường phân giác trong AK, I là giao điểm MM' và AK lúc đó M' thuộc AC và I là trung điểm MM'.

- Ta sẽ lập được phương trình MM' đi qua M và vuông góc với AK, từ đó tìm được tọa độ điểm I, mà I là trung điểm MM' nên ta suy ra tọa độ M'.

Lời giải.



Gọi M' là điểm đối xứng của M qua đường phân giác trong AK, lúc đó M' thuộc AC; I là giao điểm MM' và AK.

Ta có đường thẳng MM' đi qua M và vuông góc với AK có phương trình là: $x+y-2=0$. Lúc đó tọa độ điểm I là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x+y+1=0 \\ x+y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right).$$

Mà I là trung điểm của MM', suy ra $M'(1;1)$. Đường thẳng AC đi qua M' và vuông góc với BH có phương trình là: $4x-3y-1=0$.

Lúc đó tọa độ điểm A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x-y+1=0 \\ 4x-3y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases} \Rightarrow A(4;5).$$

Suy ra đường thẳng AB đi qua A và M có phương trình: $3x-4y+8=0$.

Lúc đó tọa độ điểm B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 3x+4y+10=0 \\ 3x-4y+8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=-\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow B\left(3;-\frac{1}{4}\right).$$

Mặt khác điểm C thuộc đường thẳng AC nên gọi $C\left(c;\frac{4c-1}{3}\right)$, từ $MC=\sqrt{2}$ suy ra $C(1;1)$ hoặc $C\left(\frac{31}{25};\frac{33}{25}\right)$. Chọn A.

Ghi nhớ.

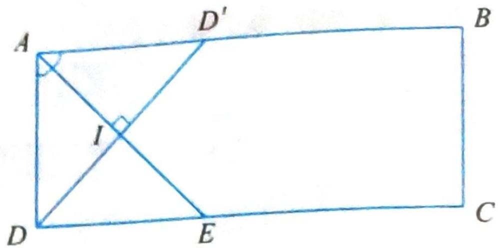
- Một câu hỏi mà học sinh thường hay thắc mắc vì sao thầy lại lấy điểm đối xứng qua đường phân giác là M mà không phải là B hay C. Nếu em chọn điểm đối xứng của B hay C qua đường phân giác liệu có được không ?
- Ở đây ta cần xác định một điểm trên cạnh AC, nên ta sẽ lấy điểm đối xứng qua đường phân giác AK của M hoặc B. Mà tọa độ B chưa biết nên hiển nhiên ta phải tìm điểm đối xứng với M qua AK.
- Hoàn toàn tương tự thí dụ 1, thí dụ 2 sau đây, một lần nữa khắc sâu cho ta dạng toán này.

Thí dụ 2. *Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có $D(-1;3)$, phương trình phân giác trong góc A là (d): $x-y+6=0$. Tìm tọa độ điểm B biết $y_B>0$, $|x_A|=|y_A|$, và diện tích hình chữ nhật là 18.*

A. $B(-3;-12)$ **B.** $B(-3;6)$ hoặc $B(-3;-12)$

C. $B(-3;6)$ **D.** $B(-3;12)$.

Lời giải.



Gọi D' là điểm đối xứng của D qua đường thẳng (d), lúc đó D' thuộc AB. Gọi I là giao điểm của (d) và DD'. Lúc đó tương tự thí dụ 1 ta sẽ tìm được tọa độ điểm $I(-2;4)$. Mà I là trung điểm của DD' suy ra $D'(-3;5)$. Dễ thấy tam giác ADI vuông cân tại I suy ra $AI=DI=\sqrt{2}$. Lúc đó tọa độ điểm A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x-y+6=0 \\ (x+2)^2+(y-4)^2=2 \end{cases}.$$

Suy ra $A(-1;5)$ (loại do giả thiết $|x_A|=|y_A|$)

hoặc $A(-3;3)$ (thỏa mãn).

Vậy đường thẳng AB đi qua A và D' có phương trình $x+3=0$, suy ra $B(-3;b)$.

Mặt khác $AD=2 \Rightarrow AB=\frac{S}{AD}=\frac{18}{2}=9$, suy ra:

$$\sqrt{(b-3)^2}=9 \Leftrightarrow |b-3|=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=6 \\ b=-12 \end{array}\right..$$

$\Rightarrow B(-3;-12)$ (loại, vì $y_B<0$) hoặc $B(-3;6)$ (thỏa mãn). Chọn C.

2. Tính đối xứng của hình vuông, hình chữ nhật, hình thoi, hình bình hành

Ta biết rằng hình vuông, hình chữ nhật, hình thoi, hình bình hành luôn nhận giao điểm hai đường chéo làm tâm đối xứng. Ta sẽ sử dụng tính chất này để xét các thí dụ sau:

Thí dụ 3. *Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có $I(6;2)$ với I là giao điểm*

AC và BD, điểm $M(1;5)$ thuộc AB và trung điểm E của CD thuộc đường thẳng $(\Delta): 4x+3y-12=0$. Viết phương trình đường thẳng AB.

A. $y-5=0$ **B.** $y-5=0$ *hoặc* $x-4y+19=0$

C. $x-4y+19=0$ **D.** $x-4y-19=0$.

Phân tích bài toán.

- Muốn viết phương trình đường thẳng AB ta cần biết một điểm thuộc nó và một vectơ pháp tuyến hoặc ta tìm một vectơ chỉ phương rồi suy ra vectơ pháp tuyến.

- Ở đây giả thiết đã cho tọa độ điểm M. Do đó ta tìm tọa độ vectơ pháp tuyến hoặc vectơ chỉ phương của AB.

- Ta để ý rằng hình chữ nhật có điểm I là tâm đối xứng, do đó nếu ta gọi N là điểm đối xứng với M qua tâm I, lúc đó N thuộc CD và I là trung điểm MN. Ta tìm được tọa độ điểm N.

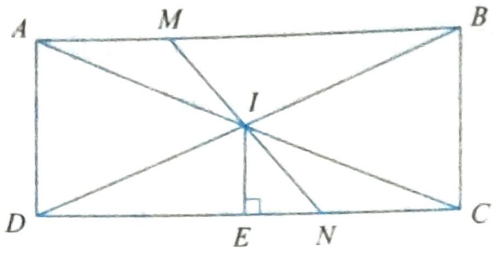
- Nếu tìm được tọa độ điểm E thì do $EN \parallel AB$ nên $\overrightarrow{EN}$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng AB, lúc đó sẽ suy ra vectơ pháp tuyến của đường thẳng AB. (*chú ý: Nếu $\vec{u}(a,b)$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng AB thì $\vec{n}(b,-a)$ hoặc $\vec{n}(-b,a)$ là một vectơ pháp tuyến của đường thẳng AB*).

- Ta thấy việc tìm tọa độ điểm E là dễ dàng, thật vậy do E thuộc $(\Delta): 4x+3y-12=0$ nên ta gọi $E(m;5-m)$, và do $IE \perp EN \Leftrightarrow \overrightarrow{IE}.\overrightarrow{EN}=0$ từ đó ta sẽ tìm tọa độ điểm E.

Lời giải.

Gọi N là điểm đối xứng của M qua I thì N thuộc CD. Lúc đó I là trung điểm của MN suy ra $N(11;-1)$. Vì điểm E thuộc đường thẳng Δ nên gọi $E(m;5-m)$, suy ra:

$$\overrightarrow{IE}(m-6;3-m); \overrightarrow{NE}(m-11;6-m).$$



Ta có: $\overrightarrow{IE} \perp \overrightarrow{NE} \Leftrightarrow \overrightarrow{IE}.\overrightarrow{NE}=0$

$\Leftrightarrow m=6$ hoặc $m=7$.

Với $m=6$ suy ra $E(6;-1)$ lúc đó ta có đường thẳng AB đi qua M và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{EN}$ có phương trình $y-5=0$.

Với $m=7$ suy ra $E(7;-2)$ lúc đó ta có đường thẳng AB đi qua M và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{EN}$ có phương trình $x-4y+19=0$. Chọn B.

Chú ý. Nếu thay hình chữ nhật trong bài toán trên bằng hình vuông thì cách giải bài toán hoàn tương tự. Cụ thể ta xét thí dụ 4 sau:

Thí dụ 4. *Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có tâm $I\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$, các đường thẳng AB, CD lần lượt đi qua các điểm $M(-4;-1); N(-2;-4)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông biết B có hoành độ âm.*

Phân tích bài toán.

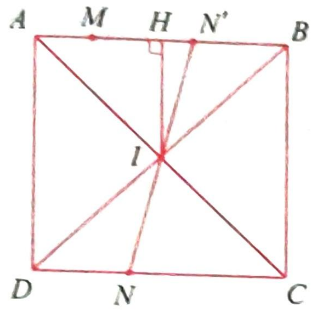
- Đầu tiên khi đọc bài toán ta có suy nghĩ rằng nếu viết được phương trình đường thẳng AB, lúc đó nếu gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên AB ta sẽ tìm được tọa độ của H. Lại có tam giác AHI

vuông cân tại H nên $IH = AH$ từ đó ta tìm được tọa độ điểm A.

- Do H là trung điểm AB nên ta tìm được tọa độ điểm B.

- Khi đã tìm được tọa độ điểm A, B ta dễ dàng tìm được tọa độ các đỉnh còn lại của hình vuông.

Lời giải.



Gọi N' lần lượt là điểm đối xứng của N qua tâm I, lúc đó N' thuộc AB. Từ I là trung điểm của NN' suy ra $N'(5;5)$. Lúc đó đường thẳng AB đi qua M, N' có phương trình $2x-3y+5=0$. Gọi H là trung điểm của AB lúc đó $IH \perp MN'$. Vì H thuộc AB nên $H\left(m;\dfrac{2m+5}{3}\right)$. Ta có:

$$IH \perp MN' \Leftrightarrow \overrightarrow{IH}.\overrightarrow{MN'}=0 \Leftrightarrow m=\frac{1}{2} \Rightarrow H\left(\frac{1}{2};2\right).$$

Gọi $A\left(a;\dfrac{2a+5}{3}\right)$, do tam giác AHI vuông cân tại H nên HA=HI suy ra $a=3 \Rightarrow A(2;3)$.

Mà H là trung điểm AB suy ra $B(-1;1)$. Dễ dàng tìm được $C(1;2); D(4;0)$.

Kết luận.

Qua thí dụ 3 và thí dụ 4 trên ta rút ra một nhận xét rằng nếu đề bài cho tọa độ tâm đối xứng I của hình chữ nhật hay hình vuông và tọa độ 2 điểm M, N lần lượt thuộc hai cạnh đối thì thường ta sẽ lấy M' đối xứng với M hoặc N' đối xứng với N qua tâm I. Lúc đó ta sẽ tìm được tọa độ M' hoặc N' và kết hợp với tính vuông góc hoặc mối liên hệ giữa độ dài các đoạn thẳng để giải quyết bài toán.

MỘT SỐ BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(1;-2)$, phương trình đường cao $CH: x+y-5=0$, phương trình đường phân giác trong $BN: 2x+y+5=0$. Tìm tọa độ B và C.

2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A, có đỉnh $C(-4;1)$, phân giác trong góc A có phương trình $x+y-5=0$. Viết phương trình đường thẳng BC, biết diện tích tam giác ABC bằng 24 và đỉnh A có hoành độ dương.

3. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh $B(-4;1)$, trọng tâm $G(1;1)$ và đường thẳng chứa đường phân giác trong góc A có phương trình $x-y-1=0$. Tìm tọa độ đỉnh A và C.

4. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình bình hành ABC có phương trình đường phân giác trong $CD: 2x+y+5=0$, phương trình đường cao $AH: 2x+y+11=0$. Cạnh AC đi qua $M(0;-14)$ Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC, biết rằng diện tích tam giác ABC bằng 16.

5. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$. Gọi M là trung điểm cạnh BC, N là điểm trên cạnh CD sao cho $CN = 2ND$. Giả sử $M\left(\dfrac{11}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ và đường thẳng AN có phương trình $2x-y-3=0$. Tìm tọa độ điểm A.

6. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có điểm M là trung điểm AB và N thuộc đoạn AC sao cho $AN = 3NC$. Viết phương trình đường thẳng CD, biết rằng $M(1;2)$ và $N(2;-1)$.

BẠN CÓ BIẾT?

MỘT BÀI TOÁN HÌNH HỌC HAY VÀ NHỮNG VẤN ĐỀ LIÊN QUAN

HOÀNG ĐỨC TÂN (Hà Nội)

I. ĐẶT BÀI TOÁN

Xét bài toán phẳng tổng quát sau:

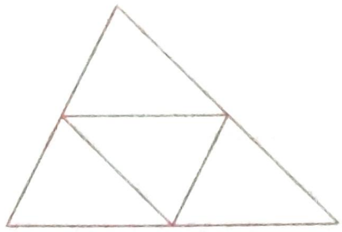
"Cho trước tam giác có diện tích bằng 1. Gọi k là số tự nhiên có tính chất là trong k điểm được đặt bên trong tam giác luôn có 3 điểm là đỉnh của tam giác có diện tích không vượt quá $\frac{1}{4}$. Hãy xác định số k nhỏ nhất có thể (k_{min})?".

Nếu trong k điểm có 3 điểm thẳng hàng thì tam giác lập bởi 3 điểm này sẽ là đoạn thẳng và có diện tích bằng 0, khi đó bài toán đặt ra sẽ không còn ý nghĩa. Bởi vậy ta quy ước trong k điểm đã cho không có ba điểm nào thẳng hàng.

Trước hết ta hãy xem liệu có tồn tại k hay không? Sử dụng nguyên lý Dirichlet về các chuồng chim, ta dễ dàng giải được bài toán sau.

Bài toán 1. *Cho 9 điểm trong một tam giác (nghĩa là ở bên trong hoặc trên cạnh) có diện tích 1, chứng minh rằng có ba điểm trong số 9 điểm đó tạo thành một tam giác có diện tích lớn nhất là $\frac{1}{4}$.*

Chứng minh. Các đường trung bình phân chia tam giác đã cho thành bốn tam giác bằng nhau có diện tích $\frac{1}{4}$ (h.1). Các hình tam giác bằng nhau này là những chuồng chim và các điểm đã cho là các con chim. Vậy là chín con chim đang bị nhốt trong bốn chuồng chim. Vì $9 = 2\times 4+1$ nên có ít nhất một chuồng chim chứa ít nhất ba con chim (điều phải chứng minh).

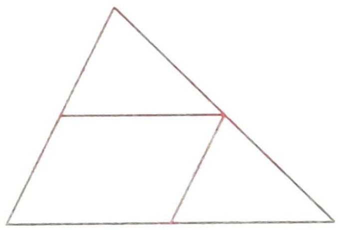


Hình 1

Vậy là số k trong bài toán ban đầu luôn tồn tại. bằng cách cải tiến dạng chuồng chim ta có thể giảm k từ 9 xuống 7.

Bài toán 2. *Cho 7 điểm trong một tam giác có diện tích bằng 1, chứng minh rằng ba điểm trong số đó tạo thành một tam giác có diện tích lớn nhất là $\frac{1}{4}$.*

Chứng minh. Vì $7 = 2\times 3+1$, nên chỉ cần cắt tam giác ban đầu thành ba chuồng chim là đủ: bởi sẽ có ít nhất một trong 3 chuồng chim có chứa ít nhất ba con chim, và bài toán đã được giải quyết. Phương pháp cắt của ta là chỉ cần dựng hai đường trung bình của tam giác đã cho là xong (h.2).



Hình 2

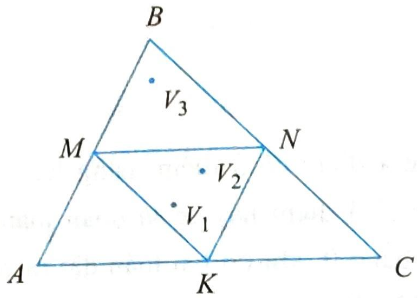
Ba lồng chim của ta gồm 2 tam giác bằng nhau có diện tích $\frac{1}{4}$ và hình bình hành có diện tích $\frac{1}{2}$. Nếu 3 điểm cho trước nằm trong một lồng tam giác thì bài toán đã được giải xong. Chỉ còn lại trường hợp hình bình hành chứa 3 điểm đã cho. Khi đó, sử dụng kết quả sau: "*Diện tích lớn nhất của một tam giác nội tiếp trong một hình bình hành có diện tích* $\frac{1}{2}$ *là bằng* $\frac{1}{4}$".

(Bạn đọc có thể dễ dàng chứng minh kết quả này, xem như một bài tập nhỏ). Và ta có điều phải chứng minh.

Và k có thể giảm được nữa không? Bây giờ thì câu hỏi không còn đơn giản nữa rồi. Có thể thấy rằng k sẽ không thể bằng 4 được. Thật vậy, đối với 4 điểm đã cho ta đặt 3 điểm ở 3 đỉnh tam giác, còn điểm thứ 4 được đặt tại trọng tâm của tam giác. Vì vậy 4 điểm đã cho tạo thành 3 tam giác nhỏ có diện tích bằng $\frac{1}{3}$ và chính tam giác ban đầu có diện tích 1. Chẳng có tam giác nào có diện tích lớn nhất là $\frac{1}{4}$ cả. Vì vậy, k không thể bằng 4 được. Vậy k_{min} sẽ bằng bao nhiêu? Nó sẽ bằng 5! Đây chính là nội dung một bài toán trong kỳ thi trong một khóa học giải quyết vấn đề giành cho học sinh trung học năng khiếu đến từ một số quốc gia như: Nhật Bản, Israel, Mỹ, Canada, Thụy Sĩ, Pháp và những nước khác do *Alexander Soifer* (Mỹ) tổ chức vào tháng 8 năm 1987. Bài toán được gọi là *Bài toán 5 điểm*.

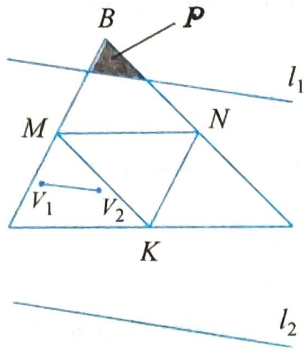
Bài toán 3 (Bài toán 5 điểm). *Cho 5 điểm trong tam giác có diện tích 1, chứng minh rằng có ba điểm trong số đó tạo thành tam giác có diện tích lớn nhất bằng* $\frac{1}{4}$.

Chứng minh (Của *Royce Peng*, một thí sinh trung học tham dự kỳ thi đó). Các đường trung bình phân chia tam giác đã cho thành bốn chuồng chim (h.3). Ít nhất một trong số các chuồng chim phải có ít nhất là hai trong năm điểm đã cho. Nếu tam giác ở giữa MNK chứa hai điểm cho trước V_1 và V_2 (h.3) thì ta đã hoàn thành việc chứng minh. Thật vậy, một trong các tam giác ở góc (giả sử ΔMBN) phải chứa ít nhất một điểm V_3 trong ba điểm còn lại đã cho và chúng ta có thể bao quanh ba điểm V_1, V_2, và V_3 bởi một hình bình hành $MBNK$ có diện tích $\frac{1}{2}$. Từ lời giải của Bài toán 2 đảm bảo rằng diện tích của $\Delta V_1V_2V_3$ lớn nhất là $\frac{1}{4}$.



Hình 3

Bây giờ giả sử một trong các tam giác ở góc (giả sử ΔAMK) chứa ít nhất hai điểm cho trước V_1 và V_2 (h.4).



Hình 4

Quỹ tích tất cả các đỉnh K của ΔV_1KV_2 có diện tích $\frac{1}{4}$ là một cặp đường thẳng l_1 và l_2 song song với V_1V_2. Nhưng l_1 và l_2 có thể nằm ở đâu? Chẳng hạn chúng có thể giao với MN không? Vì mỗi tam giác $\Delta V_1MV_2, \Delta V_1NV_2, \Delta V_1KV_2, \Delta V_1AV_2$ được chứa trong hình bình hành $AMNK$ có diện tích $\frac{1}{2}$ nên mỗi hình tam giác này có diện tích nhiều nhất là $\frac{1}{4}$. Do đó, các điểm A, M, N và K đều phải nằm giữa hoặc trên các đường thẳng l_1 và l_2. Phần nào của tam giác ABC có thể nằm bên ngoài dải giới hạn bởi các đường l_1 và l_2? Chỉ một mảnh **P** của ΔMBN hoặc ΔNCK! (Bạn đọc có thể chứng minh được rằng các mảnh của cả hai hình ΔMBN và ΔNCK có thể không nằm bên ngoài dải).

Bây giờ thì ta có thể hoàn thành việc chứng minh: Một trong các điểm đã cho V_3 nằm giữa hai đường thẳng l_1 và l_2 (hoặc trên l_1 hoặc trên l_2), và khi đó diện tích của $\Delta V_1V_2V_3$ bằng $\frac{1}{4}$ hoặc nhỏ hơn (tại sao?), hoặc cả ba điểm V_3, V_4, V_5 đã cho còn lại nằm trong mảnh **P** của ΔMBN (hoặc ΔNCK) thì khi đó diện tích $\Delta V_3V_4V_5$ chắc chắn nhỏ hơn hoặc bằng diện tích ΔMBN đúng bằng $\frac{1}{4}$!

Bài toán đã được giải xong. Vậy ta có $k_{min} = 5$. Một lời giải khác của bài toán 3 bạn đọc có thể tham khảo trong cuốn sách [4].

II. LÀM CHẶT THÊM KẾT QUẢ BÀI TOÁN

Trong phần I, bài toán phẳng đã được giải quyết trọn vẹn ! Nhưng câu chuyện vẫn chưa dừng lại ở đó.

Matthew Kahle cũng là một thí sinh đã tham dự kỳ thi do *Alexander Soifer* tổ chức vào tháng 8 năm 1987. Anh thừa nhận mình đã không giải được Bài toán 5 điểm, nhưng bài bài toán vẫn cứ ám ảnh anh nhiều năm sau đó, và anh quyết tâm trả bằng được "món nợ" ấy. Năm 2008 *M. Kahle* đã công bố một bài báo trong đó chứng minh kết quả sau, cải thiện kết quả của Bài toán 3 ở trên.

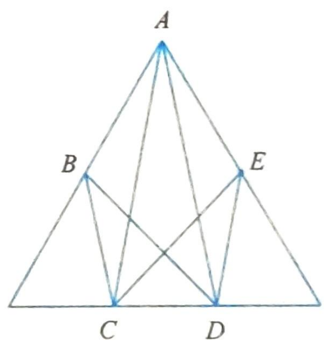
Định lý Kahle. *Bất kỳ 5 điểm nào trong tam giác có diện tích 1 cũng chứa 3 điểm tạo thành tam giác có diện tích nhiều nhất là $\frac{6}{25}$.*

Do $\frac{1}{4} = 0,25 > \frac{6}{25} = 0,24$ nên định lý *M. Kahle* mạnh hơn kết quả của Bài toán 3. Tuy nhiên chứng minh của *Kahle* khá phức tạp và dài dòng nên không thể trình bày ở trong bài báo này được, bạn đọc quan tâm có thể xem trong [1].

Sau khi chứng minh định lý của mình, *Kahle* đã nêu một câu hỏi rất tự nhiên như sau.

Bài toán Mở. *"Tìm α nhỏ nhất sao cho 5 điểm bất kỳ trong tam giác có diện tích 1 luôn chứa ba điểm tạo thành tam giác có diện tích lớn nhất là α".*

Kahle đã xác định được giới hạn dưới của α trong bài toán mở là $\alpha \geq \frac{1}{6}$. Điều này được suy ra một cách hiển nhiên bởi cấu hình hình 5 xếp đặt khéo léo bởi *Kahle* dưới đây.



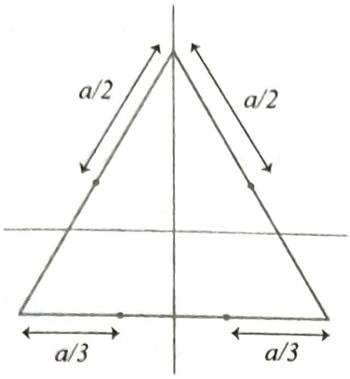
Hình 5

Các điểm B và E là trung điểm của các cạnh bên, trong khi C và D chia đáy tam giác đều thành ba phần bằng nhau. Các tam giác ABC, ADE, BCD và CDE đều có diện tích bằng $\frac{1}{6}$.

Tất nhiên, định lý Kahle cho ta giới hạn trên: $\alpha \leq \frac{6}{25}$. Và *Kahle* đã đưa ra phỏng đoán giá trị chính xác của α:

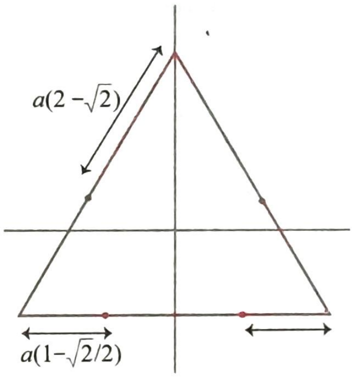
Phỏng đoán Kahle. $\alpha = \frac{1}{6}$.

Có thể vẽ lại cấu hình của *Phỏng đoán Kahle* như sau.



Hình 6. Phỏng đoán của Kahle $\alpha = \frac{1}{6}$

Tuy nhiên, gần đây hai nhà toán học Pháp là *Francesco De Comité* và *Jean-Paul Delahaye* của Đại học Khoa học và Công nghệ Lille đã đưa ra một phản ví dụ cho Phỏng đoán Kahle và đồng thời cũng nêu ra một phỏng đoán mới cho giá trị của α. Họ cũng đã đưa ra cấu hình dưới đây (h.7).



Hình 7. Một phỏng đoán mới cho $N = 5$:

$\alpha = 3 - 2\sqrt{2}$ *(N là số điểm)*

Hình 8 cho thấy một cách sắp xếp mới gồm 5 điểm bên trong một tam giác đều có diện tích đơn vị, chúng cho thấy rằng

$$\alpha \geq 3 - 2\sqrt{2} \approx 0,17157287\ldots$$

(tất cả các tam giác được tạo bởi 3 điểm trong số 5 điểm đã cho có diện tích lớn hơn hoặc bằng $3 - 2\sqrt{2}$).

Họ cũng đã chứng minh được rằng $\alpha \leq 121/625 = 0,1936$. Một chứng minh phức tạp, bạn đọc quan tâm có thể xem trong [2].

III. MỞ RỘNG RA KHÔNG GIAN

Hoàn toàn tự nhiên ta có thể xét bài toán tương tự trong không gian:

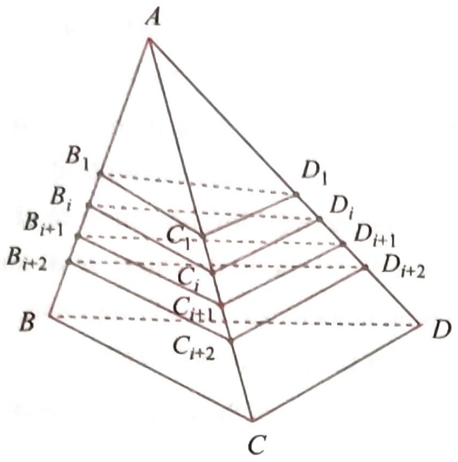
"Cho trước tứ diện ABCD có thể tích bằng V. Gọi k là số tự nhiên có tính chất là trong k điểm được đặt bên trong tứ diện luôn có 4 điểm là đỉnh của tứ diện có thể tích không vượt quá $\frac{V}{8}$. *Hãy xác định số k nhỏ nhất có thể* ($k_{\min}$) *?"* (*).

Nếu trong k điểm có 4 điểm đồng phẳng thì tứ diện tạo bởi 4 điểm này có thể tích bằng 0, khi đó bài toán đặt ra sẽ không còn ý nghĩa. Bởi vậy ta quy ước trong k điểm đã cho không có 4 điểm nào đồng phẳng.

Để có thể xác định sự tồn tại của k trong bài toán không gian (*), ta vẫn có thể sử dụng nguyên lý Dirichlet về các chuồng chim, và ta có kết quả sau.

Bài toán 1'. *Cho 25 điểm trong một tứ diện ABCD (nghĩa là ở bên trong hoặc trên các mặt) có thể tích V, chứng minh rằng có bốn điểm trong số 25 điểm đó tạo thành một tứ diện có thể tích lớn nhất là* $\frac{V}{8}$.

Chứng minh. Giả sử $ABCD$ là tứ diện có thể tích V, đường cao hạ từ đỉnh A có độ dài h. Ta xây dựng các lồng chim như sau: Trên cạnh AB ta đặt 7 điểm B_i $(i = 1, \ldots, 7)$ sao cho $\frac{AB_i}{AB} = \frac{\sqrt[3]{i}}{2}, (i = \overline{1,7})$. Sau đó dựng 7 mặt phẳng đi qua B_i và song song với đáy BCD của tứ diện $ABCD$. Các mặt phẳng song song đó cắt các cạnh AC và AD tương ứng tại các điểm C_i và D_i (xem hình 8).



Hình 8

Từ cách xây dựng trên ta suy ra ngay: $\Delta B_iC_iD_i \sim \Delta BCD$ $(i=1,...,7)$ với hệ số tỷ lệ là $\frac{\sqrt[3]{i}}{2}$ tương ứng. Cũng vậy đường cao h_i hạ từ đỉnh A của tứ diện $AB_iC_iD_i$ cũng có tỷ lệ $\frac{h_i}{h}=\frac{\sqrt[3]{i}}{2}$. Từ đó suy ra thể tích $V_{AB_iC_iD_i}$ của tứ diện $AB_iC_iD_i$ và thể tích V của tứ diện $ABCD$ có tỷ lệ:

$$\frac{V_{AB_iC_iD_i}}{V}=\left(\frac{\sqrt[3]{i}}{2}\right)^3=\frac{i}{8}\ ,(i=1,...,7)\ .$$

Vì thế 7 mặt phẳng song song ở trên đã chia tứ diện $ABCD$ thành 8 phần có thể tích bằng nhau và bằng $V/8$ (bao gồm 1 tứ diện và 7 khối chóp tam giác cụt). Đó là 8 chuồng chim của ta. Với 25 điểm nằm bên trong tứ diện, theo nguyên lý Dirichlet sẽ luôn có một phần chứa ít nhất 4 điểm, do phần đó có thể tích bằng $V/8$. Nên Bài toán 1' đã được chứng minh.

Vậy là k tồn tại. Vấn đề là liệu ta có thể giảm số 25 điểm xuống nữa không? Câu trả lời là giảm được. Vẫn sử dụng nguyên lý Dirichlet ta có kết quả sau.

Bài toán 2'. *Cho 16 điểm trong một tứ diện ABCD (nghĩa là ở bên trong hoặc trên các mặt) có thể tích V, chứng minh rằng có bốn điểm trong số 16 điểm đó tạo thành một tứ diện có thể tích lớn nhất là* $\frac{V}{8}$.

Chứng minh. Vẫn sử dụng hình 8, nhưng bây giờ ta chia tứ diện $ABCD$ thành 5 phần bao gồm: tứ diện $AB_1C_1D_1$ có thể tích $V/8$, hình chóp tam giác cụt $B_7C_7D_7.BCD$ có thể tích $V/8$, và 3 hình chóp tam giác cụt $B_iC_iD_i.B_{i+2}C_{i+2}D_{i+2}$ $(i=1,3,5)$ có thể tích $V/4$.

Không khó khăn lắm ta có thể chứng minh rằng: "Tứ diện nội tiếp trong hình chóp tam giác cụt $B_iC_iD_i.B_{i+2}C_{i+2}D_{i+2}$ có thể tích lớn nhất khi đáy của nó là $\Delta B_{i+2}C_{i+2}D_{i+2}$ và một đỉnh thuộc $\Delta B_iC_iD_i$". Gọi thể tích lớn nhất của tứ diện nội tiếp đó là V_i.

Từ chứng minh của Bài toán 1' ta thấy rằng đường cao của hình chóp tam giác cụt $B_iC_iD_i.B_{i+2}C_{i+2}D_{i+2}$ (và cũng là đường cao của tứ diện nội tiếp trong nó có thể tích lớn nhất) là $\left(\frac{\sqrt[3]{i+2}}{2}-\frac{\sqrt[3]{i}}{2}\right)h$. Vì thế ta suy ra rằng:

$$V_i=\left(\frac{\sqrt[3]{i+2}}{2}-\frac{\sqrt[3]{i}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt[3]{i+2}}{2}\right)^2\times V\quad (i=1,3,5)\ .$$

Do đó: $$\frac{V_i}{V}=\left(\frac{\sqrt[3]{i+2}}{2}-\frac{\sqrt[3]{i}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt[3]{i+2}}{2}\right)^2$$

$$=\frac{i+2}{8}-\frac{\sqrt[3]{i(i+2)^2}}{8}\ (i=1,3,5).$$

Với $i=1$ ta có:

$$\frac{V_1}{V}=\frac{3}{8}-\frac{\sqrt[3]{9}}{8}<\frac{3}{8}-\frac{\sqrt[3]{2^3}}{8}=\frac{3}{8}-\frac{2}{8}=\frac{1}{8}.$$

Với $i=3$ ta có:

$$\frac{V_3}{V}=\frac{5}{8}-\frac{\sqrt[3]{75}}{8}<\frac{5}{8}-\frac{\sqrt[3]{4^3}}{8}=\frac{5}{8}-\frac{4}{8}=\frac{1}{8}.$$

Với $i=5$ ta có:

$$\frac{V_5}{V}=\frac{7}{8}-\frac{\sqrt[3]{245}}{8}<\frac{7}{8}-\frac{\sqrt[3]{6^3}}{8}=\frac{7}{8}-\frac{6}{8}=\frac{1}{8}.$$

Cho nên $V_i<\frac{V}{8}$ $(\forall i=1,3,5)$ (*).

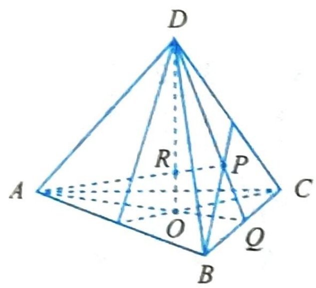
Theo nguyên lý Dirichlet với 16 điểm trong tứ diện $ABCD$ được chia thành 5 phần như trên thì luôn có một phần chứa ít nhất 4 điểm. Nếu phần đó là tứ diện $AB_1C_1D_1$ có thể tích $V/8$ hay hình chóp tam giác cụt $B_7C_7D_7.BCD$ có thể tích $V/8$ thì bài toán được chứng minh xong. Còn nếu phần đó là một trong các hình chóp cụt $B_iC_iD_i.B_{i+2}C_{i+2}D_{i+2}$ $(i=1,3,5)$ có thể tích $V/4$, thì theo chứng minh trên bốn điểm đó tạo thành tứ diện có thể tích lớn nhất là $V_i < \frac{V}{8}(i=1,3,5)$. Bài toán 2' đã được chứng minh xong.

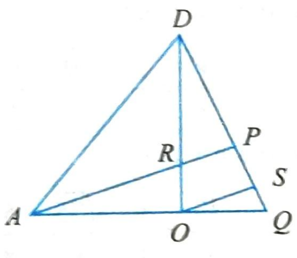
Số 16 có thể giảm được nữa hay không? Hiện tại người ta vẫn chưa biết, bởi thế Bài toán không gian (*) ở trên vẫn là một ***bài toán mở***.

Để xác định chặn dưới của k_{min}, trước tiên hãy chú ý tới Bổ đề sau.

Bổ đề. *Các đoạn nối các đỉnh của tứ diện với các giao điểm của các đường trung tuyến của các mặt đối diện cắt nhau tại một điểm – gọi là trọng tâm của tứ diện và được nó được chia tại điểm này theo tỷ lệ 3:1, tính từ đỉnh.*

Chứng minh. Cho tứ diện *ABCD*, *O* là là giao điểm của các đường trung tuyến của tam giác *ABC*, *P* là giao điểm của các đường trung tuyến của tam giác *BCD*, *R* là giao điểm của các đoạn thẳng *DO* và *AP* (h.9).





Hình 9

Xét tam giác *AQD*. Các điểm *O* và *P* chia các cạnh tương ứng theo tỉ lệ 2:1. Ta chứng minh rằng điểm *R* chia *DO* và *AP* theo tỉ lệ 3:1. Trong tam giác *APQ*, vẽ *OS* song song với *AP*. Nó sẽ chia đoạn *PQ* theo tỷ lệ 2:1. Nếu đoạn *SQ* được lấy là 1, thì đoạn *PS* sẽ bằng 2 do vậy đoạn *DP* sẽ bằng 6. Các đoạn *DR* và *RO* giống như *DP* và *PS*, tức là $DR:RO = 6:2 = 3:1$. Tương tự, ta cũng chứng minh được rằng điểm *R* chia đoạn *AP* theo tỉ lệ 3:1. Đoạn nối các đỉnh *B* và *C* với trọng tâm của các mặt đối diện cũng sẽ chia đoạn *DO* theo tỷ lệ 3:1 và do đó chúng sẽ đi qua điểm *R*. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

Từ Bổ đề trên ta có ngay $RO:DO = 1:4$, theo tỷ số này ta dễ dàng suy ra thể tích của tứ diện *RBCD* bằng $\frac{1}{4}$ thể tích của tứ diện *ABCD*. Tương tự thể tích của ba tứ diện *RABC*, *RABD*, *RACD* cũng bằng $\frac{1}{4}$ thể tích của tứ diện *ABCD*. Bởi vậy nếu với 5 điểm đã cho ta chọn 4 điểm trùng với 4 đỉnh của tứ diện và 1 điểm trùng với trọng tâm *R* của tứ diện *ABCD* thì không có 4 điểm nào trong số 5 điểm ấy tạo thành tứ diện có thể tích $\le \frac{V}{8}$ cả. Do đó ta có $k_{min} > 5$.

Một số tính chất thú vị của tứ diện, bạn đọc có thể tìm thấy trong tài liệu tham khảo [3].

Bạn đọc thân mến! Vậy thì k_{min} của bài toán không gian sẽ bằng bao nhiêu? Chỉ biết rằng với những kết quả đạt được ở trên thì: $5 < k_{min} < 16$.

Và Bài toán vẫn chờ các bạn trẻ yêu toán của TH&TT sẽ cùng tiếp sức để giải quyết. TH&TT hy vọng sẽ nhận được lời giải của bài toán này. Chúc các bạn thành công!

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Matthew Kahle. *Points in a triangle forcing small triangles*. arXiv:0811.2449v1

[2] http://www.lifl.fr/~decomite/triangle/triangles.html

[3] Понарин Я. П. Треугольники и тетраэдры.

[4] Alexander Soifer. *How Does One Cut A Triangle*.

CÁC LỚP THCS

Bài T1/558 (Lớp 6). Tìm các số nguyên a, b, c sao cho $a-bc=8$ và $ac+b=6$.

PHẠM TUẤN KHẢI
(Hà Nội)

Bài T2/558 (Lớp 7). Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) và O là giao điểm của ba đường trung trực của ba cạnh. Kẻ AH vuông góc với cạnh BC tại H. Kẻ BK vuông góc với tia AO tại K. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh $MH = MK$.

HUỲNH THANH TÂM
(CB Bưu điện TX. An Nhơn, Bình Định)

Bài T3/558. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, y) thỏa mãn

$$x^3+2x^2-7x-221=5^y.$$

HOÀNG NGỌC MINH
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T4/558. Cho tam giác ABC có đường cao AH (H thuộc cạnh BC). Gọi M là trung điểm cạnh BC ($M \neq H$). Biết $\widehat{BAH}=\widehat{CAM}=40^0$. Tính số đo góc $\widehat{MAH}$.

CAO NGỌC TOẢN
(GV THPT Tam Giang, Phong Điền, Thừa Thiên Huế)

Bài T5/558. Giải phương trình

$$\sqrt{16-x^2}+\sqrt[3]{19683-x^3}=31.$$

ĐOÀN VĂN SOẠN
(GV THPT Lý Thường Kiệt, Việt Yên, Bắc Giang)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/558. Giả sử $P(x)$ và $Q(x)$ là các đa thức với hệ số nguyên sao cho a và $a + 2023$ đều là nghiệm của $P(x)$ (a là số nguyên). Biết rằng $Q(2022) = 2024$, chứng minh không tồn tại số nguyên b sao cho $Q(P(b)) = 1$.

BÙI VĂN BÌNH
(GV THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa)

Bài T7/558. Giải phương trình

$$4x^3=\sqrt[3]{8x^3+\frac{72}{x}+\frac{54}{x^3}}.$$

NGUYỄN VĂN XÁ
(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)

Bài T8/558. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. Các đường phân giác trong AA_1, BB_1, CC_1 của tam giác ABC lần lượt cắt đường tròn tâm O tại A_2, B_2, C_2. Chứng minh rằng

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2 \geq \frac{3R}{2}.$$

PHẠM DUY KHÁNH
(GV THPT Quỳ Châu, Nghệ An)

Bài T9/558. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{2^{2^x}}=2(y+1) \\ 2^{2^y}=2x \end{cases}, x, y \in \mathbb{R}.$$

TRẦN VĂN LÂM
(Xóm Tiến Bộ, xã Tân Phú, TX. Phổ Yên, Thái Nguyên)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/558. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $\varphi(n)=12$, ở đây ký hiệu $\varphi(n)$ là hàm Euler của n.

(Nhắc lại rằng hàm số Euler của một số nguyên dương n, ký hiệu là $\varphi(n)$, là số các số nguyên dương nhỏ hơn n và nguyên tố cùng nhau với n. Ví dụ: $\varphi(9)=6$ vì có 6 số: 1, 2, 4, 5, 7, 8 nhỏ hơn 9 và nguyên tố cùng nhau với 9).

NGUYỄN ĐỨC TƯỜNG
(TP. Pleiku, Gia Lai)

Bài T11/558. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ thỏa mãn

$$f\left(2f(a)+f(b)\right)=2a+b-4, \forall a,b\in\mathbb{Z}.$$

HỒ THANH LAI
(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định)

Bài T12/558. Cho tam giác ABC có trực tâm H. M, N lần lượt là trung điểm của AC, AB. Đường tròn ngoại tiếp tam giác HMN cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC tại K khác H. HK cắt BC tại J. Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác BHN tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác CHM. Chứng minh rằng $JA = JK$.

NGUYỄN VĂN LINH

(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài L1/558. Trong thí nghiệm giao thoa sóng trên mặt nước với hai nguồn kết hợp, cùng pha S_1 và S_2 với $S_1S_2 = 4,2$ cm. Khoảng cách giữa hai điểm gần nhất dao động cực đại trên S_1S_2 là 0,5 cm. Điểm C di động trên mặt nước sao cho CS_1 luôn vuông góc với CS_2. Khoảng cách lớn nhất từ S_1 đến C khi C nằm trên một vân giao thoa cực tiểu là bao nhiêu?

VIỆT CƯƠNG (*Hà Nội*)

Bài L2/558. Đoạn mạch điện AB mắc nối tiếp theo thứ tự lần lượt gồm cuộn dây thuần cảm, biến trở và tụ điện. Đặt vào hai đầu đoạn mạch điện áp xoay chiều có giá trị hiệu dụng không đổi và tần số góc ω (với $5\omega^2 LC = 3$). Khi $R = R_0$ thì công suất tiêu thụ trên đoạn mạch đạt cực đại. Gọi M và N lần lượt là điểm nối giữa cuộn cảm thuần với biến trở và biến trở với tụ điện. Biết điện áp ở hai đầu MB có biểu thức là

$$u_{MB} = 290\sqrt{2}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) \text{ (V)}.$$

Viết biểu thức điện áp ở hai đầu đoạn mạch AN.

THANH LÂM (*Hà Nội*)

****

ĐÍNH CHÍNH.

Do sơ suất khi chọn bài nên bài **T12/557** (tháng 11/2023) đã trùng với bài **T12/554** (tháng 8/2023). Do vậy Tòa soạn xin thay bài **T12/557** bằng bài **T12/557 mới** như sau:

Bài T12/557. Cho tam giác nhọn, không cân ABC nội tiếp đường tròn (O), H là trực tâm và BE, CF là các đường cao của tam giác. M, N lần lượt là trung điểm của AH, EF. P đối xứng với N qua BC.

a) Chứng minh rằng $\widehat{BMP} = \widehat{NMC}$.

b) Gọi K là giao điểm thứ hai của AN và (O). Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp của các tam giác PBF, PCE cùng đi qua một điểm trên MK.

LƯU CÔNG ĐÔNG

(*GV THPT chuyên ĐHSP Hà Nội*)

Thành thật xin lỗi tác giả và bạn đọc.

TH&TT

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/558 (For 6th grade). Find the integers a, b, c such that $a - bc = 8$ and $ac + b = 6$.

Problem T2/558 (For 7th grade). Given an acute triangle ABC ($AB < AC$) and O is the intersection of its perpendicular bisectors. Assume that AH is perpendicular to BC at H and BK is perpendicular to the ray AO at K. Let M be the midpoint of BC. Show that $MH = MK$.

Problem T3/558. Find all pairs of positive integers (x, y) satisfying

$$x^3 + 2x^2 - 7x - 221 = 5^y.$$

Problem T4/558. Given a triangle ABC with the altitude AH (H belongs to the side BC). Let M be the midpoint of BC and assume that $M \neq H$. Suppose that $\widehat{BAH} = \widehat{CAM} = 40^0$. Find the measurement of the angle $\widehat{MAH}$.

Problem T5/558. Solve the equation

$$\sqrt{16 - x^2} + \sqrt[3]{19683 - x^3} = 31.$$

Problem T6/558. Given polynomials $P(x)$ and $Q(x)$ with integral coefficients. Assume that both a and $a + 2023$ are solutions of $P(x)$ (a is an integer). Given that $Q(2022) = 2024$. Prove that there does not exist an integer b such that $Q(P(b)) = 1$.

(Xem tiếp theo trang 43)

Bài T1/554. *Tìm tất cả các cặp số nguyên $(m; n)$ sao cho*

$$n^4+2n^3+16n^2+30n+15=m^2 \quad (*).$$

Lời giải. Biến đổi VT(*) như sau:

$$\begin{aligned} &n^4+2n^3+16n^2+30n+15\\ &=n^4+2n^3+n^2+15n^2+30n+15\\ &=n^2(n^2+2n+1)+15(n^2+2n+1)\\ &=n^2(n+1)^2+15(n+1)^2\\ &=(n+1)^2(n^2+15),\end{aligned}$$

từ đó đẳng thức (*) trở thành:

$$(n+1)^2(n^2+15)=m^2 \quad (**).$$

Số $n^2+15 \geq 15$ nên khi $m=0$ thì $(n+1)^2=0$, suy ra $n=-1$.

Xét m khác 0 thì $n+1$ khác 0. Do $(n+1)^2$ là ước của m^2 thì $n+1$ là ước của m, đặt $m=(n+1)a$ với a là số nguyên. Thay vào đẳng thức (**) được:

$$(n+1)^2(n^2+15)=(n+1)^2a^2,$$

mà $n+1$ khác 0 nên có $n^2+15=a^2$, từ đó có:

$$a^2-n^2=15, \text{ hay là } (a-n)(a+n)=15.$$

Số $15=1.15=3.5=(-1)(-15)=(-3)(-5)$.

Cho tích $(a-n)(a+n)$ bằng từng cặp số trên, suy ra n có thể bằng $1; -1; 7; -7$.

Với $n=1$ thay vào đẳng thức (**) suy ra:

$m^2=4^2.2^2$ nên $m=8$ hoặc $m=-8$.

Với $n=-1$ thay vào đẳng thức (**) suy ra:

$m^2=0$ nên $m=0$.

Với $n=7$ thay vào đẳng thức (**) suy ra:

$m^2=8^2.8^2=64^2$ nên $m=64$ hoặc $m=-64$.

Với $n=-7$ thay vào đẳng thức (**) suy ra:

$m^2=8^2(-6)^2=48^2$ nên $m=48$ hoặc $m=-48$.

Thử lại, ta thấy các cặp số nguyên $(m; n)$ sao cho $n^4+2n^3+16n^2+30n+15=m^2$ là:

$(0; -1), (8; 1), (-8; 1), (64; 7), (-64; 7), (48; -7), (-48; -7)$.

Nhận xét. Một vài bạn nhầm dấu khi biến đổi hoặc khi liệt kê các cặp số nguyên $(m; n)$. Cần chú ý rằng khi $ab=0$ thì $a=0$ hoặc $b=0$ mà không cần xét đến thừa số chính phương. Các bạn sau có lời giải đúng. **Phú Thọ**: *Nguyễn Trường Giang*, 7B, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông; **Sơn La**: *Đoàn Thùy Dương*, 7A1, THCS Chất lượng cao Mai Sơn; **Hải Dương**: *Nguyễn Lan Ngọc*, 7B, THCS Tân Quang, Ninh Giang; **Nghệ An**: *Nguyễn Thảo Nhi*, 7A; THCS Thanh Lâm, Thanh Chương; *Đặng Bá Khôi Nguyên*, 6D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Ngãi**: *Lương Thanh Nhã*, 7B, THCS Hành Trung, Nghĩa Hành; **Bình Dương**: *Nguyễn Thị Quỳnh Anh*, 7N4, THCS Trần Đại Nghĩa, TP. Thuận An.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/554. *Tìm số x sao cho*

$$|x-2021|+|x-2022|+|x-2023| = 2(2022x+1)-(x^2+2022^2).$$

Lời giải. Ta có:

$$\begin{aligned} \text{VP}&=2(2022x+1)-(x^2+2022^2)\\ &=-(x^2+2022^2-2.2022.x)+2\\ &=2-(x-2022)^2 \leq 2.\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=2022$.

Áp dụng $|a| \geq \pm a$ vào vế trái ta có:

$$\begin{aligned} \text{VT}&=|x-2021|+|x-2022|+|x-2023|\\ &\geq (x-2021)+|x-2022|+(2023-x)\\ &=2+|x-2022| \geq 2.\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=2022$.

Vậy bài toán có nghiệm duy nhất là $x=2022$.

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải đúng: **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Tiến Hưng, Trần Gia Bảo*, 9B, *Đặng Anh Thư*, 8C, THCS Bình Thịnh, Đức Thọ; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Nhật Hưng*, 7A6, THCS Trần

Quốc Toản P. Ninh Xá; **Sơn La:** *Đoàn Thủy Dương*, 7A1, THCS Chất lượng cao, Mai Sơn; **Nghệ An:** *Nguyễn Công Lĩnh, Nguyễn Thị Băng Tâm*, 7C, *Đặng Bá Khôi Nguyên*, 6D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Nội:** *Doãn Hải Dương*, 7A6, THCS Thanh Xuân; **Quảng Ngãi:** *Lương Thanh Nhã*, 7B, THCS Hành Trung.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T3/554. *Xét số nguyên dương $a = 2^n p$ với n là số nguyên dương và p là số nguyên tố lẻ. Gọi S là tổng các ước số dương của của a mà các ước số này nhỏ hơn a. Hãy so sánh giá trị của S và a.*

Lời giải. Do p là số nguyên tố lẻ, nên tổng tất cả các ước số dương của $a = 2^n p$ và nhỏ hơn a là

$$S = (1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n) + (1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n)p - 2^n p$$
$$= (1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n)(1 + p) - 2^n p.$$

Đặt $D = 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n$ thì

$$2D = 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{n+1}.$$

Suy ra $D = 2D - D = 2^{n+1} - 1$. Vì vậy:

$$S = (2^{n+1} - 1)(1 + p) - 2^n p$$
$$= 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} p - p - 2^n p$$
$$= 2^{n+1} - 1 - p + 2^n p = 2^{n+1} - 1 - p + a.$$

Do đó $S - a = 2^{n+1} - 1 - p$.

Xảy ra các trường hợp sau:

1) Nếu $p = 2^{n+1} - 1$ thì $S - a = 0$, tức là $S = a$;

2) Nếu $p > 2^{n+1} - 1$ thì $S - a < 0$, tức là $S < a$;

3) Nếu $p < 2^{n+1} - 1$ thì $S - a > 0$, tức là $S > a$.

Ví dụ: Với $a = 2.3$, $p = 3 = 2^2 - 1$ thì

$$S = 1 + 2 + 3 = 6\ (S = a).$$

Với $a = 2^2.11$, $p = 11 > 2^3 - 1$ thì

$$S = 1 + 2 + 4 + 11 + 22 = 40\ (S < a).$$

Với $a = 2^2.5$, $p = 5 < 2^3 - 1$ thì

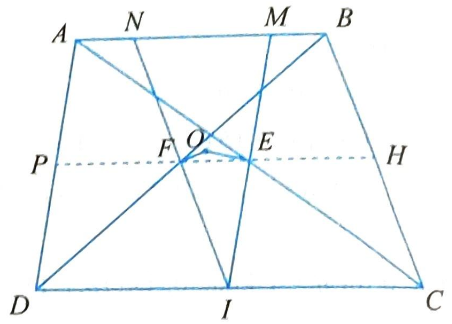
$$S = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 = 22\ (S > a).$$

Nhận xét. Bài này các bạn tham gia gửi bài đều cho lời giải tương tự như trên. Tuyên dương các bạn sau có lời giải lập luận chặt chẽ và ngắn gọn: **Hà Nội:** *Doãn Hải Dương*, 7A6, THCS Thanh Xuân; *Trần Thanh Tùng*, 7C, THCS Nguyễn Du; **Nghệ An:** *Nguyễn Tất Han*, 8C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Hồ Tùng Lâm*, 9C, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Hà Tĩnh:** *Trần Lê Nam Anh*, 9H, THCS Nguyễn Du.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T4/554. *Cho hình thang ABCD có AB // CD, $\frac{CD}{2} < AB < CD$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của các đường chéo AC, BD. Qua E vẽ đường thẳng d_1 vuông góc với AD, qua F vẽ đường thẳng d_2 vuông góc với BC. Hai đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau tại O. Chứng minh OA = OB.*

Lời giải.



Gọi I là trung điểm của CD. Các đường thẳng IE, IF cắt AB tại M, N tương ứng.

Dễ thấy $IE \parallel AD$ và $IF \parallel BC$ (tính chất đường trung bình). Do đó $ADIM$, $BCIN$ là các hình bình hành, nên có $AM = DI = CI = BN$.

Mặt khác, từ kết quả quen thuộc, E và F nằm trên đường trung bình của hình thang $ABCD$, do đó E, F tương ứng là trung điểm của IM và IN.

Kết hợp với giả thiết, suy ra OE, OF lần lượt là trung trực của IM, IN. Do đó O thuộc trung trực của MN.

Hơn nữa, từ $AM = BN$, suy ra O thuộc trung trực của AB. Từ đó ta có $OA = OB$.

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tốt.

Nghệ An: *Trịnh Bá Hiếu*, 9A, THCS Lê Hồng Phong, Hưng Nguyên; *Bùi Thị Thùy Linh*, 9A, *Nguyễn Tất Han*, 8C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Thừa Long*, 9D, THCS Đại Nài, TP. Hà Tĩnh.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/554. *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng ta luôn có*

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}}+\sqrt{\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}}+\sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}}\ge 1.$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, với số thực dương x, ta có:

$$\sqrt{1+x^3}=\sqrt{(1+x)(1-x+x^2)}$$
$$\le\frac{(1+x)+(1-x+x^2)}{2}=1+\frac{x^2}{2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$1+x=1-x+x^2\Leftrightarrow 2x=x^2\Leftrightarrow x=2.$$

Sử dụng bất đẳng thức trên, ta có:

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{b+c}{a}\right)^3}}\ge\frac{1}{1+\frac{1}{2}\left(\frac{b+c}{a}\right)^2}$$
$$\ge\frac{1}{1+\frac{b^2+c^2}{a^2}}=\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\frac{b+c}{a}=2\\ b=c\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c.$$

Tương tự, ta có: $\sqrt{\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}}\ge\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}$;

$$\sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}}\ge\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên, ta được:

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}}+\sqrt{\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}}+\sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}}$$
$$\ge\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}=1.$$

Vậy

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}}+\sqrt{\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}}+\sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}}\ge 1.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. Bài toán được chứng minh.

Nhận xét. 1) Điều then chốt của lời giải là chứng minh

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}}\ge\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Hầu hết các bạn có kết quả đúng làm theo cách trên.

2) Bất đẳng thức $\frac{1}{2}\left(\frac{b+c}{a}\right)^2\le\frac{b^2+c^2}{a^2}$

$\Leftrightarrow(b+c)^2\le 2(b^2+c^2)\Leftrightarrow(b-c)^2\ge 0$ đúng.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b=c$.

3) Một số bạn đặt

$$(x,y,z)=\left(\frac{b+c}{a},\frac{c+a}{b},\frac{a+b}{c}\right),$$

bất đẳng thức phải chứng minh tương với

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^3}}\frac{1}{\sqrt{1+z^3}}\ge 1\quad(x,y,z>0).$$

Lưu ý rằng bất đẳng thức này không đúng với x, y, z dương bất kỳ. Chẳng hạn khi $x=y=z>2$.

Các bạn sau đây có bài giải tốt:

Phú Thọ: *Hà Thị Hồng Hải*, 9A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông; **Nghệ An:** *Nguyễn Thị Băng Tâm*, 7C, *Bùi Thị Thùy Linh*, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Nội:** *Ngô Minh Chấn*, 9A3, TH & THCS Archimedes Đông Anh; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Chánh Thiện*, 9/12, THCS Lê Quý Đôn, quận 3; **Hà Tĩnh:** *Trần Lê Nam Anh*, 9H, THCS Nguyễn Du, TP. Hà Tĩnh .

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T6/554. *Với x, y là các số thực thay đổi thỏa mãn $13x^2+y^2+36x+y\le 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=y(y+4x-9)$.*

Lời giải. *Cách 1.* Vì $0\ge 13x^2+y^2+36x+y$ nên ta có: $P\ge y(y+4x-9)+13x^2+y^2+36x+y$

$$=(4x^2+4xy+y^2)+(y^2-8y+16)+9(x^2+4x+4)-52$$
$$=(2x+y)^2+(y-4)^2+9(x+2)^2-52$$
$$\ge -52.$$

$$P=-52 \text{ khi } \begin{cases}2x+y=0\\ y-4=0\\ x+2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-2\\ y=4\end{cases}.$$

Vậy $\min P=-52$.

Cách 2. Ta có:

$$P \geq y(y+4x-9)+13x^2+y^2+36x+y$$

$$=2(x^2+y^2+4+2xy-4x-4y)+11(x^2+4x+4)-52$$

$$=2(x+y-2)^2+11(x+2)^2-52 \geq -52.$$

$$P=-52 \text{ khi } \begin{cases}x+y-2=0\\ x+2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-2\\ y=4\end{cases}.$$

Vậy $\min P=-52$.

Nhận xét. Cách đánh giá qua tổng các bình phương (như 2 cách giải trên) có lẽ là cách gọn gàng hơn cả để giải bài toán. Các bạn tham gia đều có lời giải đúng với cách giải tương tự. Danh sách các bạn có lời giải đúng là:

Sóc Trăng: *Trương Vĩnh Thọ*, 10A1, *Tiết Trọng Khiêm*, 11A2, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Chánh Thiện*, 9/12, THCS Lê Quý Đôn, quận 3; **Quảng Bình:** *Đoàn Ngọc Duy*, *Nguyễn Thanh Hải*, 12 Toán 1, *Phạm Thị Mỹ Hạnh*, 12 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Vĩnh Long:** *Nguyễn Tuấn Kiệt*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Thừa Long*, 9D, THCS Đại Nài; **Bình Định:** *Phan Trung Trực*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Nghệ An:** *Trịnh Bá Hiếu*, 9A, THCS Lê Hồng Phong, Hưng Nguyên, *Ngô Văn Trường*, 10A1, THPT Hoàng Mai, TX. Hoàng Mai; **Hà Nội:** *Ngô Minh Chấn*, 9A3, TH&THCS Archimede Đông Anh; **Đà Nẵng:** *Tô Đông Hải*, 11A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

TRẦN HỮU NAM

Bài T7/554. *Giải phương trình*

$$x^3(x^6-27)=(9x^4+x+2)\sqrt{x+2} \quad (1).$$

Lời giải 1 (Của *Hà Thị Hồng Hải* và *Nguyễn Hà Ngân*). Điều kiện để phương trình (1) có nghĩa là:

$$x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2 \quad (*).$$

Phương trình (1) trở thành

$$x^9-27x^3=9x^4\sqrt{x+2}+(x+2)\sqrt{x+2}.$$

hay

$$\left(x^3\right)^3+(-3x)^3+\left(-\sqrt{x+2}\right)^3$$
$$-3\left(x^3\right)(-3x)\left(-\sqrt{x+2}\right)=0 \quad (2).$$

Áp dụng đồng nhất thức

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$
$$=\frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$$

thì phương trình (2) tương đương với

$$\left(x^3-3x-\sqrt{x+2}\right)\times$$
$$\times\left[\left(x^3+3x\right)^2+\left(-3x+\sqrt{x+2}\right)^2+\left(-\sqrt{x+2}-x^3\right)^2\right]=0$$

$$\Leftrightarrow x^3-3x-\sqrt{x+2}=0 \Leftrightarrow x^3-3x=\sqrt{x+2} \quad (3).$$

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases}x^3-3x \geq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{3} \leq x \leq 0,\ x \geq \sqrt{3} & (4)\\ \left(x^3-3x\right)^2=x+2. & (5)\end{cases}$$

Ta có: $(5) \Leftrightarrow x^6-6x^4+9x^2-x-2=0$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(x^2+x-1\right)\left(x^3+x^2-2x-1\right)=0.$$

- $x=2$ thỏa mãn (4) và (*) nên là nghiệm.
- $x^2+x-1=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Chỉ có $x_1=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ thỏa mãn (*) và (4) nên là nghiệm.
- $x^3+x^2-2x-1=0$. Giải trên máy tính điện tử khoa học Casio fx-580VN ta được:

$$\begin{cases}x_1=1.246979604;\\ x_2=-0.4450418679;\\ x_3=-1.801937736.\end{cases}$$

Chỉ có $x_2 \approx -0.4450418679$ thỏa mãn (4) và (*) nên là nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là

$$x_1=2; \quad x_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \quad x_3 \approx -0.4450418679.$$

Lời bình. Đối với học sinh THCS, lời giải này là tốt. Nếu sử dụng lượng giác, ta có lời giải sau.

Lời giải 2 (Của tác giả và nhiều bạn). Với $x>2$ thì $x^3>4x$. Do đó

$$x^3-3x-\sqrt{x+2}>x-\sqrt{x+2}$$
$$=\frac{x^2-x-2}{x+\sqrt{x+2}}$$
$$=\frac{(x+1)(x-2)}{x+\sqrt{x+2}}>0.$$

Vậy phương trình không có nghiệm $x>2$. Kết hợp với điều kiện $x\ge -2$ suy ra phương trình chỉ có nghiệm trong khoảng $-2\le x\le 2$.

Với $-2\le x\le 2$ đặt $x=2\cos t$, $0\le t\le \pi$, phương trình (3) trở thành:

$$8\cos^3 t-6\cos t-\sqrt{2(1+\cos t)}=0$$

$$\Leftrightarrow\ 2\cos 3t=\sqrt{4\cos^2\frac{t}{2}}\Leftrightarrow \cos 3t=\cos\frac{t}{2}$$

$$\left(\text{do } 0\le t\le\pi\Rightarrow 0\le\frac{t}{2}\le\frac{\pi}{2}\Rightarrow\cos\frac{t}{2}\ge 0\right)$$

$$\Leftrightarrow 3t=\pm\frac{t}{2}+k2\pi,\quad 0\le t\le\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,...$$

$$\Leftrightarrow t_1=0,\quad t_2=\frac{4\pi}{5},\quad t_3=\frac{4\pi}{7}.$$

Đáp số: Phương trình đã cho có nghiệm là

$$x_1=2,\ x_2=2\cos\frac{4\pi}{5},\ x_3=2\cos\frac{4\pi}{7}.$$

Nhận xét. Nghiệm $x_2=2\cos\frac{4\pi}{5}=-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ và $x_3=2\cos\frac{4\pi}{7}\approx -0.4450418679.$

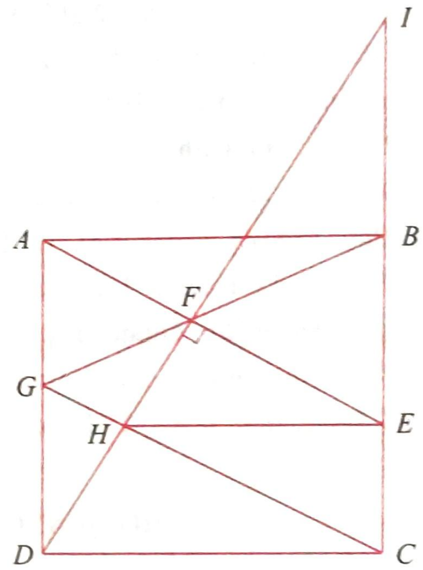
Tất cả các bạn đã gửi bài có lời giải tốt:

Hà Nội: *Ngô Minh Chấn*, 9A3, Archimedes Academy Đông Anh. **Hà Tĩnh**: *Nguyễn Thừa Long*, 9D, THCS Đại Nài, TP. Hà Tĩnh. **Phú Thọ**: *Hà Thị Hồng Hải*, *Nguyễn Hà Ngân*, 9A, THCS Nguyễn Quang Bích, huyện Tam Nông. **Quảng Bình**: *Hoàng Kim Lộc*, 11`Toán 1, *Đoàn Ngọc Duy*, *Nguyễn Thanh Hải*, 12 Toán 1, *Phạm Thị Mỹ Hạnh*, 12 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp. **Sóc Trăng**: *Tiết Trọng Khiêm*, 11A2, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai. **Vĩnh Long**: *Nguyễn Tuấn Kiệt*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

TẠ DUY PHƯỢNG

Bài T8/554. *Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh BC lấy điểm E. Gọi F là chân đường vuông góc hạ từ D xuống AE. Tia BF cắt AD tại G, CG cắt DF tại H. Chứng minh HE // AB.*

Lời giải. (Theo bạn *Hoàng Kim Lộc*, 10 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới, **Quảng Bình**).



Gọi I là giao điểm của DF và BC. Sử dụng định lý Menelaus cho tam giác GBC với cát tuyến IFH ta được:

$$\frac{FG}{FB}\cdot\frac{IB}{IC}\cdot\frac{HC}{HG}=1\Rightarrow\frac{FG}{FB}\cdot\frac{HC}{HG}=\frac{IC}{IB}\quad(1).$$

Mặt khác $GD\,//\,BC$ nên

$$\frac{HC}{HG}=\frac{HI}{HD}\quad(2);$$
$$\frac{FG}{FB}=\frac{FA}{FE}=\frac{DA}{IE}=\frac{BC}{IE}\quad(3).$$

Để ý rằng $AFBI$ là tứ giác nội tiếp, ta có:

$$\widehat{EAB}=\widehat{DIC}\Rightarrow\Delta ABE\sim\Delta ICD\ (\text{g.g})$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{BE}=\frac{IC}{CD} \Rightarrow AB.CD=BE.IC \Rightarrow BC^2=BE.IC$$

$$\Rightarrow (IC-IB)BC=BE.IC \Rightarrow IB.BC=IC.EC$$

$$\Rightarrow \frac{IC}{IB}=\frac{BC}{EC} \quad (4).$$

Từ (1), (2), (3) và (4) suy ra:

$$\frac{HI}{HD}=\frac{EI}{EC}.$$

Do đó $HE \parallel CD$, hay $HE \parallel AB$.

Nhận xét. Một số bạn sử dụng phương pháp toạ độ cũng đi đến điều cần chứng minh.Tất cả các bài giải gửi về Toà soạn đều đúng. Ngoài bạn *Lộc*, các bạn sau cũng có lời giải tốt:

Điện Biên: *Nguyễn Ngọc Diệp*, 10A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Điện Biên Phủ; **Nghệ An**: *Ngô Văn Trường*, 10A1, THPT Hoàng Mai, TX. Hoàng Mai, *Phan Đại Hoàng*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh; **Hà Tĩnh**: *Nguyễn Thừa Long*, 9D, THCS Đại Nài, TP. Hà Tĩnh; **Quảng Bình**: *Đoàn Ngọc Duy*, *Nguyễn Thanh Hải*, 12 Toán 1, *Phạm Thị Mỹ Hạnh*, 12 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới; **Quảng Trị**: *Trần Văn Đức*, 11A1, THPT Hướng Hoá, huyện Hướng Hoá; **Đà Nẵng**: *Tô Đông Hải*, 11A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đà Nẵng.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/554. *Cho* $a,b,c \in \left[\frac{1}{2};2\right]$. *Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$\frac{|ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)|}{abc}.$$

Lời giải. Vì vai trò của a,b,c là như nhau nên không mất tính tổng quát, giả sử $\frac{1}{2} \le a \le b \le c \le 2.$

Ta có:

$$ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$$
$$=(a-b)(b-c)(a-c)$$

nên $P=\dfrac{|(a-b)(b-c)(a-c)|}{abc}$

$$=\left(\frac{b}{a}-1\right)\left(\frac{c}{b}-1\right)\left(1-\frac{a}{c}\right).$$

Cách 1. Đặt $x=\frac{b}{a}, y=\frac{c}{b}$ thì $x,y \in [1;4]$

và $P=(x-1)(y-1)\left(1-\frac{1}{xy}\right).$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$(x-1)(y-1)=xy-(x+y)+1$$
$$\le xy-2\sqrt{xy}+1=\left(\sqrt{xy}-1\right)^2.$$

Kéo theo

$$P \le \frac{(t-1)^2(t^2-1)}{t^2} \text{ với } t=\sqrt{xy}=\sqrt{\frac{c}{a}} \in [1;2].$$

Khảo sát hàm $f(t)=\dfrac{(t-1)^2(t^2-1)}{t^2}$ với $t \in [1;2]$ ta có: $f'(t)=\dfrac{2(t-1)^2(t^2+t+1)}{t^3} \ge 0$ nên $f(t)$ đồng biến trên $[1;2]$.

Do đó, $f(t) \le f(2)=\frac{3}{4}$. Dấu "=" xảy ra chẳng hạn khi $a=\frac{1}{2}, b=1, c=2$. Vậy $\min P=\frac{3}{4}$.

Cách 2. Ta có:

$$P=\frac{(c-b)\left(\frac{b}{a}-1\right)\left(1-\frac{a}{c}\right)}{b}$$

$$\le \frac{(2-b)\left(\frac{b}{\frac{1}{2}}-1\right)\left(1-\frac{\frac{1}{2}}{2}\right)}{b}=\frac{3(2-b)(2b-1)}{4b}$$

$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{-2(b-1)^2+b}{b} \le \frac{3}{4}\cdot\frac{b}{b}=\frac{3}{4}.$$

Dấu "=" xảy ra chẳng hạn khi $a=\frac{1}{2}, b=1, c=2.$

Vậy $\min P=\frac{3}{4}$.

Nhận xét. Bài toán này không khó, có nhiều bạn tham gia giải. Tất cả các bạn gửi lời giải tới Tòa soạn đều đúng. Danh sách các bạn là:

Hà Nội: *Ngô Minh Chấn*, 9A3, TH&THCS Archimedes Đông Anh; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Thừa Long*, 9D, THCS Đại Nài, TP. Hà Tĩnh; **Vĩnh Long:** *Nguyễn Tuấn Kiệt*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Sóc Trăng:** *Tiết Trọng Khiêm*, 11A2, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **Bình Định:** *Phan Trung Trực*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Quảng Bình:** *Nguyễn Thanh Hải, Đoàn Ngọc Duy*, 12 Toán 1, *Phạm Thị Mỹ Hạnh*, 12 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp.

NGUYỄN TIẾN LÂM

Bài T10/554. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $E = a^2 + b^2$ trong đó a, b là các số nguyên dương sao cho $a^2 + b^2$ chia hết cho 2023.*

Lời giải (Của bạn *Nguyễn Thanh Hải*, 12 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình**)

Ta có: $7|2023|a^2+b^2$. Ta chứng minh rằng $7|a$ và $7|b$. Giả sử trái lại. Khi đó 7 cũng không là ước của a và của b. Theo định lý Fermat nhỏ ta có:

$$a^6 \equiv 1 \pmod 7; \quad b^6 \equiv 1 \pmod 7$$

$$\Rightarrow a^6 + b^6 \equiv 2 \pmod 7.$$

Lại có: $7 \mid a^2+b^2 \mid a^6+b^6$

$$\Rightarrow a^6 + b^6 \equiv 0 \pmod 7.$$

Thành thử $2 \equiv 0 \pmod 7$ tức là 2 chia hết cho 7. Vô lý. Vậy $7|a$ và $7|b$ $\Rightarrow 7^2 \mid a^2; 7^2 \mid b^2$

$$\Rightarrow 49 \mid a^2 + b^2.$$

Lại có $289|2023|a^2+b^2$. Vì gcd (289,49) = 1 nên

$$289.49 | a^2+b^2 \text{ hay } 14161|a^2+b^2$$

$\Rightarrow a^2 + b^2 \geq 14161.$

Với $a = 56$, $b = 105$ thì $a^2+b^2 = 14161$.

Vậy min$E = 14161$.

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tốt: **Hà Nội:** *Ngô Minh Chấn*, 9A3, TH&THCS Archimede Đông Anh; **Kiên Giang:** *Dương Thạch Duy*, 11T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt; **Quảng Bình:** *Nguyễn Đăng Khiêm, Hoàng Kim Lộc*, 10 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Thừa Long*, 9D, THCS Đại Nài; **Vĩnh Long:** *Nguyễn Tuấn Kiệt*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/554. *Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ thỏa mãn $f(1) = 3$ và*

$$f(xy) + 2f(x+y) = f(x)f(y) + 2, \forall x, y \in \mathbb{Q} \quad (1).$$

Lời giải (Theo đa số các bạn). Giả sử f là hàm số thỏa mãn các điều kiện bài toán.

Cho $y = 1$ trong (1), ta thu được:

$$f(x+1) = f(x) + 1, \forall x \in \mathbb{Q} \quad (2)$$

và từ (2) suy ra: $f(t-1) = f(t) - 1, \forall t \in \mathbb{Q}$ (3).

Từ (2) và (3), sử dụng phương pháp quy nạp ta thu được:

$$f(x+n) = f(x) + n, \forall x \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{Z} \quad (4).$$

Do đó $f(n) = n + 2, \forall n \in \mathbb{Z}$.

Thay $x = n$ và $y = \dfrac{1}{n}$ với $n \in \mathbb{Z}^+$ vào (1), ta thu được: $f\left(n \times \dfrac{1}{n}\right) + 2f\left(n + \dfrac{1}{n}\right) = f(n)f\left(\dfrac{1}{n}\right) + 2$

$$\Leftrightarrow f(1) + 2\left(f\left(\frac{1}{n}\right) + n\right) = (n+2)f\left(\frac{1}{n}\right) + 2$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + 2 \quad (5).$$

Thay $x = m \in \mathbb{Z}$ và $y = \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}^+$ vào (1) và sử dụng (5), ta thu được:

$$f\left(\frac{m}{n}\right) + 2f\left(m + \frac{1}{n}\right) = f(m)f\left(\frac{1}{n}\right) + 2$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{m}{n}\right) + 2f\left(\frac{1}{n}\right) + 2m = (m+2)f\left(\frac{1}{n}\right) + 2$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n} + 2.$$

Suy ra: $f(x) = x + 2, \forall x \in \mathbb{Q}$.

Thử lại, ta thấy hàm số này thỏa mãn các điều kiện bài ra.

Kết luận: Tất cả các hàm cần tìm là:

$$f(x) = x + 2, \forall x \in \mathbb{Q}.$$

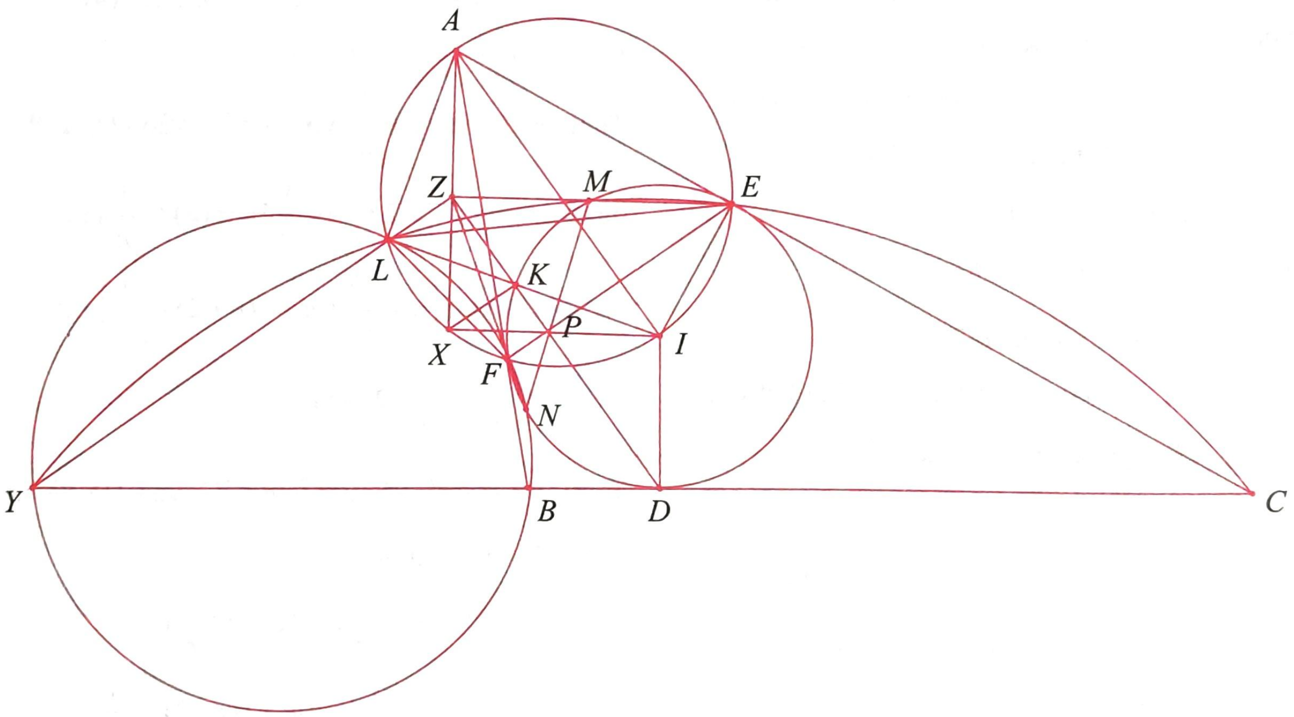
Nhận xét. Đây là dạng toán cơ bản về phương trình hàm với cặp biến tự do trên tập hợp các số hữu tỷ. Các bạn gửi bài giải đến Tòa soạn đều có lời giải đúng.

Bình Định: *Trần Ngọc Tuyên*, 10T, *Phan Trung Trực*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Đồng Tháp:** *Trần Hồng Vy*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Gia Lai:** *Phan Trần Ngọc Hải*, 10A7, THPT Chi Lăng; **Thừa Thiên Huế:** *Phùng Hoàng Hữu Phú*, 11T1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Kiên Giang:** *Dương Thạnh Duy*, 11T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt; **Nghệ An:** *Phan Đại Hoàng*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Quảng Bình:** *Nguyễn Thanh Hải*, 12T1, *Phạm Thị Mỹ Hạnh*, 12T2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Sóc Trăng:** *Tiết Trọng Khiêm*, 11A2, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T12/554. *Cho tam giác nhọn không cân ABC ngoại tiếp đường tròn (I). D, E, F lần lượt là tiếp điểm của (I) và BC, CA, AB. P là hình chiếu vuông góc của D trên EF. DP cắt (I) tại điểm thứ hai K. L là hình chiếu vuông góc của A trên IK. Đường tròn ngoại tiếp các tam giác LEC, LFB cắt (I) lần thứ hai tương ứng tại M, N. Chứng minh rằng M, N, P thẳng hàng.*

Lời giải.(Dựa trên lời giải của bạn *Phan Trung Trực*, 11T, THPT chuyên Lê Qúy Đôn, **Bình Định**)



Trong bài ký hiệu (XYZ) là đường tròn đi qua ba điểm X, Y, Z. Gọi X là giao điểm thứ hai (khác I) của đường tròn (AEF) và IP; Y là giao điểm thứ hai (khác L) của các đường tròn $(LFB), (LEC)$. ME cắt NF tại Z.

Dễ thấy các điểm A, L, E, F cùng thuộc một đường tròn. Ta có:

$$(YL, YB) \equiv (FL, FB) \equiv (FL, FA) \equiv (EL, EA)$$
$$\equiv (EL, EC) \equiv (YL, YC) (\bmod \pi).$$

Suy ra Y, B, C thẳng hàng. Ta có:

$$(KL,KD)\equiv(IL,IA)\equiv(FL,FA)\equiv(FL,FB)$$
$$\equiv(YL,YB)\equiv(YL,YD)\ (\mathrm{mod}\,\pi).$$

Điều đó có nghĩa Y,L,K,D cùng thuộc một đường tròn.

Vì Z là tâm đẳng phương của các đường tròn $(LFB),(LEC),(I)$ nên các điểm Z,Y,L thẳng hàng. Vì Z là tâm đẳng phương của các đường tròn $(LYDK),(LEC),(I)$ nên các điểm Z,K,D thẳng hàng. Ta có:

$$(YZ,YD)\equiv(YL,YD)\equiv(KL,KD)\equiv(KI,KD)$$
$$\equiv(DK,DI)\equiv(IA,ID)\ (\mathrm{mod}\,\pi).$$

Chú ý rằng $YD\perp ID$, suy ra $YZ\perp IA$. Do đó $YZ\perp ZD$ (1).

Vì $IK^2=IE^2=\overline{IP}\cdot\overline{IX}$ (kết quả quen thuộc), nên IK tiếp xúc với đường tròn (XKP). Ta có:

$$(XK,XI)\equiv(KI,KP)\equiv(IL,IA)$$
$$\equiv(XL,XA)\ (\mathrm{mod}\,\pi).$$

Điều đó có nghĩa

$$(XK,XL)\equiv(XI,XA)\equiv\frac{\pi}{2}(\mathrm{mod}\,\pi)\ (2).$$

Từ (1) và (2), ta có:

$$(ZL,ZK)\equiv(XL,XK)\ (\mathrm{mod}\,\pi).$$

Suy ra L,X,Z,K cùng thuộc một đường tròn. Khi đó: $(XL,XZ)\equiv(KL,KZ)\equiv(IL,IA)$

$$\equiv(XL,XA)\ (\mathrm{mod}\,\pi).$$

Vậy Z, K, P thẳng hàng.

Xét cực và đối cực qua đường tròn (I). Với mỗi điểm T, kí hiệu Δ_T là đường đối cực của điểm T đối với đường tròn (I).

Vì $\overline{IX}.\overline{IP}=IE^2$, nên $X\in\Delta_P$. Mà $P\in EF\equiv\Delta_A$, nên $A\in\Delta_P$. Do đó $\Delta_P\equiv AX$.

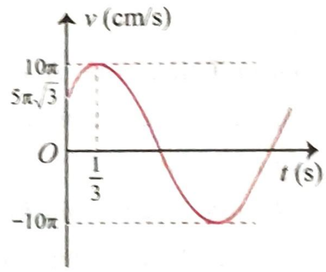
Vì $Z\in AX\equiv\Delta_P$, nên $P\in\Delta_Z$. Chú ý rằng EF,MN,Δ_Z đồng quy, ta suy ra P thuộc MN.

Nhận xét. 1) Đây là bài toán không khó nhưng chỉ có 8 bạn tham gia giải. Lời giải của một số bạn còn dài và phụ thuộc vào hình vẽ bởi không sử dụng góc định hướng (kể cả bạn *Trực*).

2) Xin nêu tên cả 8 bạn: **Hà Tĩnh:** *Trần Duy Hưng*, 10T2, THPT Chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Bình:** *Nguyễn Thanh Hải*, *Đoàn Ngọc Duy*, 12 Toán 1, *Phạm Thị Mỹ Hạnh*, 12 Toán 2, *Hoàng Kim Lộc*, 11 Toán 1, THPT Chuyên Võ Nguyên Giáp; **Bình Định:** *Phan Trung Trực*, 11T, THPT Chuyên Lê Quý Đôn; **Kiên Giang:** *Lương Gia Hưng*, 12 Tin, THPT Chuyên Huỳnh Mẫn Đạt; **Bà Rịa – Vũng Tàu:** *Lê Thành Đạt*, 11 Toán 1, THPT Chuyên Lê Quý Đôn.

LƯU CÔNG ĐÔNG

Bài L1/554. *Một vật dao động điều hoà có đồ thị của vận tốc theo thời gian như hình dưới. Hãy viết phương trình của gia tốc của vật.*



Lời giải. Phương trình dao động của vật có dạng: $x=A\cos(\omega t+\varphi)$. Từ đồ thị ta xác định được:

$$v_{max}=\omega A=10\pi\ \text{cm/s}.$$

Tại thời điểm $t=0$ vật có vận tốc $v=5\pi\sqrt{3}$ cm/s. Vì $v>0$ và đang tăng dần, do vậy vật đang ở phía âm của hệ trục và chuyển động về vị trí cân bằng. Điều này nghĩa là khi $t=0$, ta có:

$$\begin{cases}x=A\cos\varphi<0\\ v=-A\omega\sin\varphi=5\pi\sqrt{3}>0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\cos\varphi<0\\ \sin\varphi=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\Rightarrow\varphi=-\frac{2\pi}{3}.$$

Khi đó $x = -\frac{A}{2}$ theo chiều dương.

Sau $\frac{1}{3}$ s, vật tới vị trí $x = 0$ và $v = v_{max}$

Ta suy ra: $\frac{1}{3} = \frac{T}{12} \Rightarrow T = 4$ s

$$\Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2} \text{ (rad/s).}$$

Từ $v_{max} = \omega A = 10\pi \Rightarrow A = \frac{10\pi}{\omega} = 20$ cm.

Suy ra phương trình dao động của vật:

$$x = 20\cos\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{2\pi}{3}\right)\text{(cm).}$$

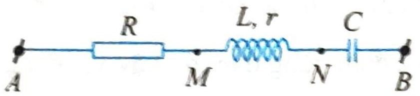
Phương trình gia tốc:

$$a = -5\pi^2\cos\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{2\pi}{3}\right)\text{(cm/s}^2\text{).}$$

Nhận xét. Chúc mừng các bạn *Phạm Văn Anh*, 11 Lý, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp**; *Hoàng Ngọc Huy*, 11 Lý 2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**; *Hứa Vĩnh Tùng*, 11E1, TH&THCS, THPT Lê Thánh Tông **TP. Hồ Chí Minh**; *Trương Phúc Vinh*, 12 Lý, THPT chuyên Tiền Giang, **Tiền Giang**; *Phạm Xuân Khánh*, 11A2, THPT Tam Phước, Biên Hòa, **Đồng Nai**, đã có lời giải đúng cho đề ra kì này.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/554. *Cho mạch điện xoay chiều như hình dưới.*



Biết điện trở thuần $R = 120\sqrt{3}$ Ω, điện trở thuần của cuộn dây $r = 30\sqrt{3}$ Ω. Điện áp hai đầu đoạn mạch có biểu thức: $U_{AB} = U_0\cos 100\pi t$ (V), hiệu điện thế hiệu dụng giữa hai điểm A, N là $U_{AN} = 300$ V và giữa hai điểm M, B là $U_{MB} = 60\sqrt{3}$ V. Điện áp tức thời U_{AN} lệch pha $\frac{\pi}{2}$ so với U_{MB}. Viết biểu thức điện áp giữa hai đầu mạch.

Lời giải. Ta có:

$$\begin{cases} Z_{AN} = \frac{U_{AN}}{I} \\ Z_{MB} = \frac{U_{MB}}{I} \\ \tan\varphi_{AN}.\tan\varphi_{MB} = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{(r+R)^2 + (Z_L)^2} = \frac{U_{AN}}{I} \\ \sqrt{r^2 + (Z_L - Z_C)^2} = \frac{U_{MB}}{I} \\ \frac{Z_L}{R+r}.\frac{Z_L - Z_C}{r} = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{(r+R)^2 + (Z_L)^2}}{\sqrt{r^2 + (Z_L - Z_C)^2}} = \frac{U_{AN}}{U_{MB}} \\ \frac{Z_L}{R+r}.\frac{Z_L - Z_C}{r} = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{(150\sqrt{3})^2 + (Z_L)^2}}{\sqrt{(30\sqrt{3})^2 + (Z_L - Z_C)^2}} = \frac{300}{60\sqrt{3}} \\ \frac{Z_L}{150\sqrt{3}r}.\frac{Z_L - Z_C}{30\sqrt{3}} = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Z_L = 150\ \Omega \\ Z_C = 240\ \Omega \end{cases} \Rightarrow I = \frac{U_{AN}}{Z_{AN}} = 1 \text{ A}$$

$$\Rightarrow U_0 = I.Z_{AB}\sqrt{2}$$

$$= \sqrt{2}\sqrt{(150\sqrt{3})^2 + (90)^2} = 60\sqrt{42} \text{ V.}$$

Suy ra biểu thức của điện áp giữa hai đầu đoạn mạch: $u = 60\sqrt{42}\cos(100\pi t)$ (V).

Nhận xét. Chúc mừng các bạn *Phạm Văn Anh*, 11 Lý, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp**; *Trương Phúc Vinh*, 12 Lý, THPT chuyên Tiền Giang, **Tiền Giang** đã có lời giải đúng cho đề ra kì này.

NGUYỄN XUÂN QUANG

GIỚI THIỆU ĐỊNH LÝ CESARO-STOLZ VÀ ÁP DỤNG

HUỲNH THANH LUÂN (*GV THPT chuyên Hùng Vương, Gia Lai*)
TRẦN MINH VŨ (*GV THPT Trần Cao Vân, Gia Lai*)

Trong những kỳ thi TST Việt Nam, Olympic sinh viên toàn quốc hay kỳ thi Học sinh giỏi cấp tỉnh từ năm 1993 đến nay, chúng ta luôn thấy có sự xuất hiện của các bài toán tìm giới hạn của dãy số. Chẳng hạn, với dãy số (u_n), hãy tìm giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{n^\alpha}$, $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha(u_n-a)$, với α là một số thực nào đó và trong các trường hợp $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=\pm\infty$; $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=a$.

Với khuôn khổ bài viết ngắn, bài báo này sẽ xâu chuỗi lại một số mạch kiến thức về định lý nổi tiếng Cesaro-Stolz và hệ quả của nó. Qua đó giúp cho học sinh và sinh viên có cách nhìn tổng quát hơn về bài toán tìm giới hạn của dãy số, giúp các em ôn tập tốt trong các kỳ thi Học sinh giỏi các cấp.

1. Định lý Cesaro-Stolz. *Xét hai dãy các số thực là $(u_n)_n$ và $(v_n)_n$, sao cho*

a) v_n *tăng thực sự và không bị chặn;*

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}-u_n}{v_{n+1}-v_n}=a$ *hữu hạn.*

Khi đó dãy số $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ *hội tụ về a.*

Hệ quả 1.1. *Cho dãy số (a_n), nếu $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=a$ thì $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=a$, với a hữu hạn.*

Hệ quả 1.2 *Cho dãy số (a_n), nếu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ thì*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=a, \text{ với a hữu hạn.}$$

2. Một số kết quả và áp dụng

Nếu đơn thuần tìm giới hạn của $\dfrac{u_n}{n}$ hay nu_n thì ta dễ dàng dùng ngay định lý Cesaro-Stolz, hệ quả 1.1 hay hệ quả 1.2. Nhưng nếu tìm giới hạn của các dãy số có dạng (2.2) hay (2.3) bên dưới thì việc giải quyết bài toán trở nên phức tạp hơn. Trước khi đưa ra một số kết quả chính chúng ta nhắc lại mệnh đề sau, mệnh đề này được suy ra trực tiếp từ định nghĩa đạo hàm tại một điểm và sẽ được sử dụng xuyên suốt cho bài viết này.

Mệnh đề 2.1. *Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại 0 thì khi đó với mọi dãy số (x_n) hội tụ về 0, ta có*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(0)}{x_n}=f'(0) \quad (2.1).$$

Định lý 2.1. *Cho a,b,α là các số thực dương và dãy số (u_n) được xác định bởi công thức truy hồi*

$$\begin{cases} u_1=a \\ u_{n+1}=u_n+\dfrac{b}{u_n^\alpha}, \quad n\ge 1 \end{cases} \quad (2.2).$$

Khi đó $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n^{1+\alpha}}{n}=b(1+\alpha)$.

Chứng minh. Ta có $u_{n+1}-u_n=\dfrac{b}{u_n^\alpha}>0$. Như vậy dãy số đã cho tăng.

Giả sử dãy số bị chặn trên, khi đó tồn tại $l=\lim\limits_{n\to\infty}u_n$, ta được phương trình:

$$l=l+\frac{b}{l^\alpha}\Leftrightarrow\frac{b}{l^\alpha}=0 \text{ (mâu thuẫn).}$$

Vậy ta có $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=+\infty$. Ta biến đổi:

$$u_{n+1}^{1+\alpha}-u_n^{1+\alpha}=\left(u_n+\frac{b}{u_n^{\alpha}}\right)^{1+\alpha}-u_n^{1+\alpha}$$

$$=\frac{\dfrac{\left(u_n+\dfrac{b}{u_n^{\alpha}}\right)^{1+\alpha}-u_n^{1+\alpha}}{u_n^{1+\alpha}}}{\dfrac{1}{u_n^{1+\alpha}}}=\frac{\left(1+\dfrac{b}{u_n^{1+\alpha}}\right)^{1+\alpha}-1}{\dfrac{1}{u_n^{1+\alpha}}}.$$

Đặt $f(x)=(1+bx)^{1+\alpha}$ với $x_n=\dfrac{1}{u_n^{1+\alpha}}$, áp dụng mệnh đề 2.1 ta được:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(1+x_n)-f(0)}{x_n}=f'(0)=b(1+\alpha).$$

Điều đó có nghĩa là:

$$\lim_{n\to\infty}\left(u_{n+1}^{1+\alpha}-u_n^{1+\alpha}\right)=b(1+\alpha),$$

theo hệ quả 1.1 suy ra:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n^{1+\alpha}}{n}=b(1+\alpha).$$

Định lý 2.2. *Cho $(b_i)_{i=1}^m,(\alpha_i)_{i=1}^m$ là hai bộ m số dương cho trước. Xét dãy số (u_n) xác định bởi công thức*

$$\begin{cases}u_1=a>0\\ u_{n+1}=u_n+\displaystyle\sum_{i=1}^m\frac{b_i}{u_n^{\alpha_i}}, & n\ge 1\end{cases}\quad(2.3).$$

Giả sử $\alpha_l=\min\{\alpha_i\}, l\in\{1,2,\cdots,m\}$. Khi đó

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n^{1+\alpha_l}}{n}=b_l(1+\alpha_l).$$

Chứng minh. Dễ dàng chứng minh được dãy số trên tăng và không bị chặn trên, nghĩa là $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=+\infty$. Ta biến đổi:

$$u_{n+1}^{1+\alpha_l}-u_n^{1+\alpha_l}=\left(u_n+\sum_{i=1}^m\frac{b_i}{u_n^{\alpha_i}}\right)^{1+\alpha_l}-u_n^{1+\alpha_l}$$

$$=\frac{\dfrac{\left(u_n+\displaystyle\sum_{i=1}^m\frac{b_i}{u_n^{\alpha_i}}\right)^{1+\alpha_l}-u_n^{1+\alpha_l}}{u_n^{1+\alpha_l}}}{\dfrac{1}{u_n^{1+\alpha_l}}}$$

$$=\frac{\left(1+\displaystyle\sum_{i=1}^m\frac{b_i}{u_n^{1+\alpha_i}}\right)^{1+\alpha_l}-1}{\dfrac{1}{u_n^{1+\alpha_l}}}$$

$$=\frac{\left(1+\displaystyle\sum_{i=1}^m\frac{b_i}{u_n^{1+\alpha_i}}\right)^{1+\alpha_l}-1}{\displaystyle\sum_{i=1}^m\frac{b_i}{u_n^{1+\alpha_i}}}\cdot\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^m\frac{b_i}{u_n^{1+\alpha_i}}}{\dfrac{1}{u_n^{1+\alpha_l}}}$$

$$=\frac{\left(1+\displaystyle\sum_{i=1}^m\frac{b_i}{u_n^{1+\alpha_i}}\right)^{1+\alpha_l}-1}{\displaystyle\sum_{i=1}^m\frac{b_i}{u_n^{1+\alpha_i}}}\cdot\sum_{i=1}^m\frac{b_i}{u_n^{\alpha_i-\alpha_l}}.$$

Đặt $x_n=\displaystyle\sum_{i=1}^m\frac{b_i}{u_n^{1+\alpha_i}}$ thì $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, $f(x)=(1+x)^{1+\alpha_l}$ thì như chứng minh trên ta có

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\displaystyle\sum_{i=1}^m\frac{b_i}{u_n^{1+\alpha_i}}\right)^{1+\alpha_l}-1}{\displaystyle\sum_{i=1}^m\frac{b_i}{u_n^{1+\alpha_i}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(0)}{x_n}$$

$$=f'(0)=1+\alpha_l.$$

Ta lại có $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\sum_{i=1}^m\frac{b_i}{u_n^{\alpha_i-\alpha_l}}=b_l$. Do đó:

$$\lim_{n\to\infty}\left(u_{n+1}^{1+\alpha_l}-u_n^{1+\alpha_l}\right)=b_l(1+\alpha_l).$$

Áp dụng hệ quả 1.1 ta có điều phải chứng minh.

Thí dụ 1 (Chọn Đội tuyển HSG Trường THPT chuyên, ĐHSP Hà Nội, 2020)

Cho dãy số (u_n) được xác định bởi công thức truy hồi

$$\begin{cases}u_1=1\\ u_{n+1}=\dfrac{u_n}{\sqrt{u_n}+1}, & n\ge 1\end{cases}.$$

Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty}(nu_n)=0$.

Lời giải. Dễ thấy $u_n>0,\forall n\ge 1$ và dãy (u_n) giảm thực sự. Ta chứng minh bằng quy nạp rằng với mọi $n\ge 1$ thì $u_n\le\dfrac{1}{n}$ (*).

Thật vậy, với $n=1$ thì (*) đúng. Giả sử (*) đúng với n, ta có:

$$u_{n+1}=\frac{u_n}{\sqrt{u_n}+1}=\frac{1}{\frac{1}{u_n}+\frac{1}{\sqrt{u_n}}}<\frac{1}{n+\sqrt{n}}\le\frac{1}{n+1}$$

(do $n\ge 1$).

Vì vậy (*) đúng với $n+1$ nên (*) đúng với mọi $n\in\mathbb{N}^*$. Do đó cho $n\to+\infty$ thì $\lim u_n=0$.

Đặt $y_n=\frac{1}{u_n},\forall n\ge 1$. Khi đó dãy (y_n) là dãy tăng thực sự (do (u_n) là dãy giảm thực sự) và $\lim y_n=+\infty$. Đặt $x_n=n,\forall n\ge 1$. Theo định lý Cesaro-Stolz ta có:

$$\lim_{n\to\infty}(nu_n)=0$$

$$\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{u_{n+1}}-\frac{1}{u_n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{u_n}=0.$$

Thí dụ 2 (Romania 2007). *Cho dãy số (u_n) được xác định bởi công thức truy hồi:*

$$a_1\in(0;1);a_{n+1}=a_n\left(1-a_n^2\right),n\ge 1.$$

Hãy tìm giới hạn của dãy số $(\sqrt{n}a_n)$.

Lời giải. Trước hết bằng quy nạp ta chứng minh rằng $a_n\in(0;1),\forall n\ge 1$. Thật vậy, với $n=1$ thì khẳng định trên đúng. Giả sử rằng $a_n\in(0;1),\forall n\le k$ với $k\ge 1$ nào đó. Khi đó ta sẽ chứng minh $a_{k+1}\in(0;1)$ để hoàn tất chứng minh.

Ta có: $a_{k+1}=a_k\left(1-a_k^2\right)>0$ và áp dụng bất đẳng thức Cauchy thì

$$a_{k+1}=a_k\left(1-a_k^2\right)=\frac{1}{2}a_k\left(2-2a_k\right)\left(1+a_k\right)$$

$$\le\frac{1}{2}\left(\frac{a_k+2-2a_k+1+a_k}{3}\right)^3=\frac{1}{2}\in(0;1).$$

Từ đó ta khẳng định $a_n\in(0;1),\forall n\ge 1$.

Từ công thức truy hồi ta có: $a_{n+1}-a_n=-a_n^3<0$, do đó dãy số giảm và vì vậy nó hội tụ (tính bị chặn đã có ở trên). Gọi $l=\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$ thì

$$l=l\left(1-l^2\right)\Leftrightarrow l=0.$$

Bây giờ ta đi vào tìm giới hạn của đề bài. Ta có:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}^2}-\frac{1}{a_n^2}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{a_n^2\left(1-a_n^2\right)^2}-\frac{1}{a_n^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{a_n^2}\left(\frac{1}{\left(1-a_n^2\right)^2}-1\right)$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{2-a_n^2}{\left(1-a_n^2\right)^2}=2.$$

Do đó áp dụng hệ quả 1.1 ta có:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{a_n^2}}{n}=2\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{na_n^2}=2\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}na_n^2=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}a_n=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Thí dụ 3. *Cho dãy số (x_n) được xác định bởi công thức truy hồi:*

$$\begin{cases}x_1=a<0\\x_{n+1}=3-\sqrt{9-6x_n}, & n\ge 1\end{cases}.$$

Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to+\infty}nx_n=-6$.

Lời giải. Dễ dàng chứng minh bằng quy nạp rằng với mọi n ta có $x_n<0$. Thật vậy, rõ ràng là $x_1=a<0$. Khi đó giả sử rằng với mọi $n\le k$, $k\ge 1$ nào đó ta có $x_n<0$, lúc này vì

$$\sqrt{9-6x_k}>\sqrt{9-6.0}=3$$

nên $x_{k+1}=3-\sqrt{9-6x_k}<3-3=0$ hay $x_{n+1}<0$.

Vì vậy theo nguyên lý quy nạp giúp ta khẳng định $x_n<0$ với mọi $n\ge 1$.

Từ công thức truy hồi ta có:

$$x_{n+1}-x_n=\frac{6x_n}{3+\sqrt{9-6x_n}}-x_n=x_n\left(\frac{6}{3+\sqrt{9-6x_n}}-1\right)$$

$$=x_n.\frac{3-\sqrt{9-6x_n}}{3+\sqrt{9-6x_n}}=\frac{x_nx_{n+1}}{3+\sqrt{9-6x_n}}>0,\forall n\ge 1.$$

Vì vậy ta có $x_{n+1} - x_n > 0$ hay (x_n) là dãy số tăng. Từ dãy số tăng và bị chặn trên bởi 0 nên dãy số đã cho hội tụ về $l \le 0$. Ta được phương trình:

$$l = 3 - \sqrt{9-6l} \Leftrightarrow 3 - l = \sqrt{9-6l}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - l \ge 0 \\ 9 - 6l + l^2 = 9 - 6l \end{cases} \Leftrightarrow l = 0.$$

Ta được $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Xét giới hạn:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3+\sqrt{9-6x_n}}{6x_n} - \frac{1}{x_n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{9-6x_n}-3}{6x_n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{-6x_n}{6x_n\left(\sqrt{9-6x_n}+3\right)}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{-1}{\left(\sqrt{9-6x_n}+3\right)}\right) = \frac{-1}{6}.$$

Từ đó áp dụng hệ quả 1.1 ta có $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x_n}}{n} = \dfrac{-1}{6}$ hay

$$\lim_{n\to+\infty} nx_n = -6.$$

Thí dụ 4 (Olympic 30/4, 2000). *Cho dãy số (u_n) được xác định bởi công thức truy hồi:*

$$\begin{cases} u_1 = 2000 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n^2}, \quad n \ge 1 \end{cases}.$$

Tìm $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n^3}{n}$.

Lời giải. Áp dụng định lý 2.1 với $b = 1; \alpha = 2$ ta được $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n^3}{n} = 3$.

Thí dụ 5 (TST Việt Nam, 1993). *Cho dãy số (u_n) được xác định bởi công thức truy hồi:*

$$\begin{cases} u_1 = 1, \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{\sqrt{u_n}}, \quad n \ge 1. \end{cases}$$

Tìm tất cả các số thực β để cho dãy số $\left(\dfrac{u_n^\beta}{n}\right)$ có giới hạn hữu hạn khác 0.

Lời giải. Áp dụng định lý 2.1 ta được $\beta = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$. Khi đó $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n^{\frac{3}{2}}}{n} = \dfrac{3}{2}$. Điều đó có nghĩa là nếu $\beta < \dfrac{3}{2}$ thì dãy số $\left(\dfrac{u_n^\beta}{n}\right)_n$ hội tụ về 0 và $\beta > \dfrac{3}{2}$ thì dãy số $\left(\dfrac{u_n^\beta}{n}\right)$ không có giới hạn hữu hạn. Vậy $\beta = \dfrac{3}{2}$ là giá trị cần tìm.

Thí dụ 6. *Xét dãy số (u_n) xác định bởi công thức*

$$\begin{cases} u_1 = 2020 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{2}{u_n} + \dfrac{3}{u_n^2}, \quad n \ge 1 \end{cases}.$$

Chứng tỏ rằng $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n^2}{n} = 4$.

Lời giải. Áp dụng định lý 2.2 với $\alpha_l = 1; b_l = 2$ ta được điều phải chứng minh.

Thí dụ 7. *Cho a là số thực dương bất kỳ và dãy số (u_n) xác định bởi công thức*

$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{2}{\sqrt{u_n}} + \dfrac{5}{\sqrt[5]{u_n}}, \quad n \ge 1 \end{cases}.$$

Chứng minh rằng dãy số (v_n) với $v_n = \dfrac{u_n}{\sqrt[6]{n^5}}$ có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.

Lời giải. Áp dụng định lý 2.2 cho $b_1 = 2; b_2 = 5$ và $\alpha_1 = \dfrac{1}{2}; \alpha_2 = \dfrac{1}{5}$. Ta có $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n^{\frac{6}{5}}}{n} = 5.\dfrac{6}{5} = 6$.

Suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{n^{\frac{5}{6}}} = \sqrt[6]{6^5}$.

Định lý sau là một dạng khác, tuy nhiên kỹ thuật tính toán là tương tự.

Định lý 2.3. *Cho α, β là các số nguyên dương và dãy số (u_n) được xác định bởi công thức truy hồi:*

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{n^\alpha}{u_n^\beta}, \quad n \geq 1 \end{cases} \quad (2.4).$$

Khi đó $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n^{\beta+1}}{n^{\alpha+1}} = \dfrac{\beta+1}{\alpha+1}$.

Để chứng minh kết quả trên, chúng tôi có bổ đề sau

Bổ đề. *Với mọi $\alpha > 0$, ta có:*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}} \sum_{k=1}^{n} k^\alpha = \frac{1}{\alpha+1}.$$

Thật vậy, xét hàm số $f(x) = x^\alpha$ khả tích trên $[0;1]$. Ta có :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}} \sum_{k=1}^{n} k^\alpha = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^\alpha$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$
$$= \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{\alpha+1}.$$

Vì vậy bổ đề được chứng minh.

Bây giờ ta đi chứng minh định lý 2.3.

Với mọi số nguyên dương n, ta có:

$$u_{n+1}^{\beta+1} = \left(u_n + \frac{n^\alpha}{u_n^\beta}\right)^{\beta+1}$$
$$= u_n^{\beta+1} + (\beta+1)n^\alpha + \sum_{l=2}^{\beta+1} C_{\beta+1}^{l} u_n^{\beta+1-l} \frac{n^{\alpha l}}{u_n^{\beta l}} \quad (2.5).$$

vì vậy ta viết lại:

$$u_{n+1}^{\beta+1} = u_n^{\beta+1} + (\beta+1)n^\alpha + \sum_{l=2}^{\beta+1} C_{\beta+1}^{l} \frac{n^{\alpha l}}{u_n^{(\beta+1)(l-1)}} \quad (2.6).$$

Ta suy ra: $u_{n+1}^{\beta+1} \geq u_n^{\beta+1} + (\beta+1)n^\alpha$ (2.7).

Từ (2.7) ta suy ra:

$$u_{n+1}^{\beta+1} \geq u_1^{\beta+1} + (\beta+1)\sum_{k=1}^{n} k^\alpha = 1 + (\beta+1)\sum_{k=1}^{n} k^\alpha \quad (2.8).$$

Ta có đánh giá: $u_{n+1}^{\beta+1} \geq \sum\limits_{k=1}^{n} k^\alpha$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$.

Và bằng quy nạp ta có thể chứng minh được:

$$\sum_{k=1}^{n} k^\alpha \geq \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \ \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Thật vậy, với $n = 1$ thì mệnh đề cần chứng minh đúng. Ta giả sử rằng $\sum\limits_{k=1}^{n} k^\alpha \geq \dfrac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, $n \in \mathbb{Z}^+$. Khi đó ta có:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^\alpha = \sum_{k=1}^{n} k^\alpha + (n+1)^\alpha \geq \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} + (n+1)^\alpha.$$

Do vậy mệnh đề cần chứng minh đúng nếu ta kiểm tra được:

$$\frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} + (n+1)^\alpha \geq \frac{(n+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$
$$\Leftrightarrow \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} + (n+1)^\alpha - \frac{(n+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \geq 0 \ (*).$$

Xét hàm số $g(x) = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + (x+1)^\alpha - \dfrac{(x+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ với $x \geq 1$. Ta có:

$$g'(x) = x^\alpha + \alpha(x+1)^{\alpha-1} - (x+1)^\alpha.$$

Xét hàm số $h(t) = (1-t)^\alpha + \alpha t$ với $t \in [0;1]$. Ta có: $h'(t) = \alpha\left[1-(1-t)^{\alpha-1}\right] \geq 0, \forall t \in [0;1]$ nên hàm số $h(t)$ đồng biến trên [0 ; 1].

Vậy $h(t) \geq h(0) = 1$. Áp dụng điều này với $t = \dfrac{1}{x+1}$, ta được:

$$\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)^\alpha + \alpha\frac{1}{x+1} \geq 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{x+1}\right)^\alpha + \alpha\frac{1}{x+1} \geq 1$$
$$\Leftrightarrow x^\alpha + \alpha(x+1)^{\alpha-1} \geq (x+1)^\alpha.$$

Từ đây suy ra $g'(x) \geq 0$ hay ta được $g(x) \geq g(1) = \dfrac{1}{\alpha+1} + 2^\alpha - \dfrac{2^{\alpha+1}}{\alpha+1} \geq \dfrac{1}{\alpha+1} > 0$. Bất đẳng thức sau được suy ra vì α là số nguyên dương. Do đó bất đẳng thức cần chứng minh đúng theo nguyên lý quy nạp.

Suy ra: $u_{n+1}^{\beta+1} \geq \dfrac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ (2.9).

Từ kết quả (2.6) và (2.8) ta có:

$$u_{n+1}^{\beta+1} \le u_n^{\beta+1} + (\beta+1)n^\alpha + (\alpha+1)\sum_{l=2}^{\beta+1} C_{\beta+1}^l \frac{n^{\alpha l}}{n^{(\alpha+1)(l-1)}} \quad (2.10).$$

Suy ra:

$$u_{n+1}^{\beta+1} \le u_n^{\beta+1} + (\beta+1)n^\alpha + (\alpha+1)\sum_{l=2}^{\beta+1} C_{\beta+1}^l \frac{1}{n^{l-\alpha-1}} \quad (2.11).$$

Vì vậy ta được:

$$u_{n+1}^{\beta+1} \le 1 + (\beta+1)\sum_{k=1}^{n} k^\alpha + (\alpha+1)\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=2}^{\beta+1} C_{\beta+1}^l \frac{1}{k^{l-\alpha-1}} \quad (2.12).$$

Theo bổ đề ở trên ta có:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}}\left[1 + (\beta+1)\sum_{k=1}^{n} k^\alpha\right] = \frac{\beta+1}{\alpha+1} \quad (2.13).$$

Vì $\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=2}^{\beta+1} C_{\beta+1}^l \frac{1}{k^{l-\alpha-1}} \le \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=2}^{\beta+1} C_{\beta+1}^l \frac{1}{k^{1-\alpha}}$

$$\le \beta \max_{2\le l\le \beta+1}\left\{C_{\beta+1}^l\right\}\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha-1}$$

cho nên ta có:

$$\sum_{m=1}^{n}\sum_{l=2}^{\beta+1} C_{\beta+1}^l \frac{1}{k^{l-\alpha-1}} \le \beta \max_{2\le l\le \beta+1}\left\{C_{\beta+1}^l\right\} n.n^{\alpha-1}$$
$$= \beta \max_{2\le l\le \beta+1}\left\{C_{\beta+1}^l\right\} n^\alpha.$$

Từ đó ta có:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}}(\alpha+1)\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=2}^{\beta+1} C_{\beta+1}^l \frac{1}{k^{l-\alpha-1}} = 0 \quad (2.14).$$

Do đó theo các kết quả (2.8) và (2.12) ta có:

$$1 + (\beta+1)\sum_{k=1}^{n} k^\alpha \le u_{n+1}^{\beta+1}$$
$$\le 1 + (\beta+1)\sum_{k=1}^{n} k^\alpha + (\alpha+1)\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=2}^{\beta+1} C_{\beta+1}^l \frac{1}{k^{l-\alpha-1}}.$$

Bằng cách chia cho $n^{\alpha+1}$, ta được

$$\frac{1}{n^{\alpha+1}} + (\beta+1)\frac{1}{n^{\alpha+1}}\sum_{k=1}^{n} k^\alpha \le \frac{u_{n+1}^{\beta+1}}{n^{\alpha+1}}$$
$$\le \frac{1}{n^{\alpha+1}} + (\beta+1)\frac{1}{n^{\alpha+1}}\sum_{k=1}^{n} k^\alpha$$
$$+ (\alpha+1)\frac{1}{n^{\alpha+1}}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=2}^{\beta+1} C_{\beta+1}^l \frac{1}{k^{l-\alpha-1}}.$$

Từ đây theo nguyên lý kẹp và sử dụng các kết quả (2.13) và (2.14) ta có điều phải chứng minh.

Thí dụ 8 (TST Bà Rịa-Vũng Tàu 2020). *Cho dãy số (u_n) xác định bởi công thức:*

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{n}{u_n}, \quad n \ge 1 \end{cases}.$$

Chứng minh rằng dãy số (v_n) với $v_n = \dfrac{u_n}{n}$ có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.

Lời giải. Áp dụng định lý 2.3 với $\alpha = \beta = 1$ ta có điều phải chứng minh.

Thí dụ 9 (TST Đại học Vinh 2020). *Cho dãy số (u_n) được xác định bởi công thức truy hồi:*

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{n^2}{u_n^2}, \quad n \ge 1 \end{cases}.$$

Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{n} = 1$.

Lời giải. Áp dụng định lý 2.3 với $\alpha = \beta = 2$ ta có điều phải chứng minh.

Thí dụ 10 (Bà Rịa-Vũng Tàu 2022). *Xét dãy số (u_n) xác định bởi công thức:*

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{2}{u_n} + \dfrac{n}{u_n^4}, \quad n \ge 1 \end{cases}.$$

Chứng tỏ rằng $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{\sqrt{n}}$ có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.

Lời giải. Phương pháp giải giống như định lý 2.3. Với mọi số nguyên dương n, ta có:

$$u_{n+1}^2 > \left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)^2 = u_n^2 + 4 + \frac{4}{u_n^2} \quad (2.15).$$

Vì vậy ta có kết quả $u_{n+1}^2 > 1 + 4n$ (2.16).

Từ đó và công thức truy hồi ta được:

$$u_{n+1}^2 = u_n^2 + \frac{4}{u_n^2} + \frac{n^2}{u_n^8} + 4 + \frac{2n}{u_n^3} + \frac{4n}{u_n^5} \quad (2.17).$$

Do vậy, từ công thức (2.16) để tiện cho đánh giá ta có thể coi $u_n^{\,2} \ge n$, do đó từ (2.17) ta có:

$$u_{n+1}^2 \le u_n^2 + \frac{4}{n} + \frac{n^2}{n^4} + 4 + \frac{2n}{n\sqrt{n}} + \frac{4n}{n^2\sqrt{n}} \quad (2.18).$$

Ta có: $\frac{n^2}{n^4} \le \frac{1}{n}; \frac{2n}{n\sqrt{n}} \le \frac{2}{\sqrt{n}}; \frac{4n}{n^2\sqrt{n}} \le \frac{4}{n}$ (2.19)

cho nên ta có kết quả: $u_{n+1}^2 \le u_n^2 + 4 + \frac{9}{n} + \frac{2}{\sqrt{n}}$.

Từ đó suy ra:

$$u_{n+1}^2 \le 1 + 4n + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{9}{k} + \frac{2}{\sqrt{k}}\right) \quad (2.20).$$

Vì $\lim \sum_{k=1}^{n+1}\left(\frac{9}{k}\right) - \lim \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{9}{k}\right) = \lim \frac{9}{n+1} = 0$ nên theo hệ quả 1.2 ta có $\lim \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{9}{k}\right) = 0$.

Tương tự như vậy vì

$$\lim \sum_{k=1}^{n+1}\left(\frac{2}{\sqrt{k}}\right) - \lim \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{\sqrt{k}}\right) = \lim \frac{2}{\sqrt{n+1}} = 0$$

nên $\lim \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{\sqrt{k}}\right) = 0$.

Do đó, theo các công thức (2.16) và (2.20), ta có:

$$\frac{1+4n}{n+1} < \frac{u_{n+1}^{\,2}}{n+1} \le \frac{1+4n}{n+1} + \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{9}{k} + \frac{2}{\sqrt{k}}\right).$$

Do đó theo nguyên lý kẹp, ta có $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}^{\,2}}{n+1} = 4$ hay $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{\sqrt{n}} = 2$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1 (TST Quảng Ninh 2023). Cho dãy số (x_n) được xác định bởi công thức truy hồi:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2023}{2022} \\ x_{n+1} = \dfrac{2023x_n}{2022x_n + 1}, \quad n \ge 1 \end{cases}.$$

a) Với mỗi số nguyên dương n, đặt $y_n = \sum_{k=1}^{n}(x_n - 1)$. Chứng minh rằng dãy số (y_n) có giới hạn hữu hạn.

b) Tìm tất cả các số thực dương a sao cho dãy số $u_n = \sum_{k=1}^{n} a^k(x_n - 1)$ có giới hạn hữu hạn.

Bài 2. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi công thức truy hồi: $a_0 = \frac{1}{2}; a_{n+1} = a_n - a_n^2, n \ge 1$.

Hãy tìm giới hạn của dãy số (na_n).

Bài 3. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi công thức truy hồi: $2a_{n+1} - 2a_n + a_n^2 = 0, n = 0,1,2,\cdots$.

a) Chứng minh rằng dãy số đã cho là dãy số giảm.

b) Nếu $a_0 = 1$, tìm giới hạn của dãy số đã cho.

c) Trong trường hợp dãy số có giới hạn hữu hạn, hãy tìm giới hạn của dãy số (na_n).

Bài 4. Cho dãy số $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ xác định bởi công thức:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{\sqrt{u_n^2 + 2019u_n} + u_n}{2}, \quad n \ge 1 \end{cases}.$$

a) Đặt $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_n^2}$. Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

b) Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{n}$.

Bài 5. Cho dãy số (u_n) xác định bởi công thức:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{2u_n}, \quad n \ge 1 \end{cases}.$$

Chứng minh rằng

a) $n \le u_n^2 < n + \sqrt[3]{n}$. b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(u_n - \sqrt{n}\right) = 0$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Hội Toán học Việt Nam, *Kỷ yếu Olympic Sinh viên 2015*, năm 2015.

[2] Hội Toán học Việt Nam, *Kỷ yếu Olympic Sinh viên 2017*, năm 2017.

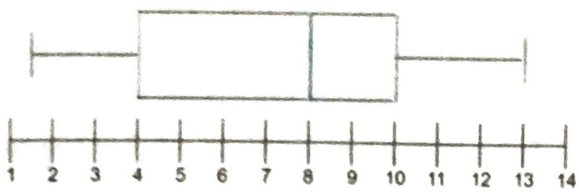
[3] Hội Toán học Việt Nam, *Kỷ yếu Olympic Sinh viên 2018*, năm 2018.

[4] Hội Toán học Việt Nam, *Kỷ yếu Olympic Sinh viên 2019*, năm 2019.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 99

PROBLEM. *The below box and whiskers plot shows the information about the shoe sizes of people in a community. Determine the first and the third quartiles and also determine the outliers using $1.5IQR$ criterion.*



Solution: From the box and whiskers plot we get :

- The first quartile $Q_1 = 4$;
- The third quartile $Q_3 = 10$;
- Then $1.5IQR = 1.5(Q_3 - Q_1) = 9$.

The shoes sizes which are smaller than $Q_1 - 1.5IQR$ or bigger than $Q_3 + 1.5IQR$ are consider the outliers. In this case, the shoes sizes which are bigger than 19 are the outliers.

TỪ VỰNG

box and whiskers plot	*: biểu đồ hộp và ria*
the first quartile	*: tứ phân vị thứ nhất*
the third quartile	*: tứ phân vị thứ ba*
outlier	*: phần tử ngoại biên*

NGUYEN PHU HOANG LAN
(*College of Science - Vietnam National University, Hanoi*)

****

BÀI DỊCH SỐ 97

BÀI TOÁN. *Hai mươi bốn tình nguyện viên được phân bổ cho ba trường học. Cách phân bổ là mỗi trường sẽ nhận ít nhất một tình nguyện viên và tất cả các trường nhận số tình nguyện viên khác nhau. Có bao nhiêu cách khác nhau để phân bổ các tình nguyện viên?*

Lời giải. **Câu trả lời là 222.**

Đầu tiên, tập trung vào điều kiện mỗi trường phải nhận ít nhất một tình nguyện viên. Ta có thể phân bổ một tình nguyện viên vào mỗi trường trước, và sau đó bài toán đã cho được rút gọn thành bài toán: "*Có bao nhiêu cách phân bổ 21 tình nguyện viên cho ba trường học và một số trường có thể không nhận tình nguyện viên?*".

Ta có thể đặt 21 ngôi sao * trên một đường thẳng và đặt hai thanh | trong hai không gian bất kỳ. Ví dụ, |****|** ...*** có nghĩa là trường đầu tiên không nhận tình nguyện viên, trường thứ hai nhận 4 tình nguyện viên, và trường cuối cùng nhận 17 tình nguyện viên. Số cách là:

$$C_{23}^2 = \frac{23 \times 22}{2} = 253 \text{ (cách).}$$

Thứ hai, ta tập trung vào điều kiện là tất cả các trường nhận được số tình nguyện viên khác nhau.

Có một trường hợp cả ba trường đều nhận được số tình nguyện viên như nhau đó là (8, 8, 8).

Và từ 1 đến 24 có 10 số chẵn không bao gồm 16 và 24: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 18, 20, 22.

PROBLEMS IN . . . *(Tiếp theo trang 24)*

Problem T7/558. Solve the equation

$$4x^3 = \sqrt[3]{8x^3 + \frac{72}{x} + \frac{54}{x^3}}.$$

Problem T8/558. Given a triangle ABC inscribed in the circle with the center O and radius R. The interior angle bisectors AA_1, BB_1, CC_1 of the triangle ABC intersect (O) respectively at A_2, B_2, C_2. Show that

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 \geq \frac{3R}{2}.$$

Problem T9/558. Solve the system of equations

$$\begin{cases} \sqrt{2^{2^x}} = 2(y+1) \\ 2^{2^y} = 2x \end{cases}, x, y \in \mathbb{R}.$$

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/558. Find all positive integer n such that $\varphi(n) = 12$, where φ is the Euler function.

(Recall that the Euler function φ is defined on the set of positive integers with $\varphi(n)$ is the number of positive integers which are smaller than n and are coprime with n. For example, $\varphi(9) = 6$ since there are exactly six numbers 1, 2, 4, 5, 7, 8 which are smaller than 9 and are coprime with 9).

Problem T11/558. Find all functions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ satisfying

$$f(2f(a) + f(b)) = 2a + b - 4, \forall a, b \in \mathbb{Z}.$$

Problem T12/558. Given a triangle ABC with the orthocenter H. Let M and N be the midpoints of AC and AB respectively. The circumcircle of HMN intersects the circumcircle of BHC at the second point K which is different from H. Assume that HK intersects BC at J and also assume that the circumcircle of BHN is tangent to the circumcircle of CHM. Show that $JA = JK$.

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN
(College of Science – Vietnam national University, Hanoi)

****

☞ Mỗi số trong chúng tương ứng với ba cách phân bổ tình nguyện viên. Ví dụ, số 10 sẽ cho ba cách

(5, 5, 14), (5, 14, 5), (14, 5, 5). Từ đó có 30 cách để có đúng hai trường nhận được số tình nguyện viên bằng nhau (bạn có thể giải thích tại sao ta loại số 16 và số 24 khỏi danh sách trên không?).

Vì vậy có 253 – 1 – 30 = 222 (cách).

(***Chú ý***: Ta xét tất cả các tình nguyện viên đều như nhau và từ đó chúng ta chỉ quan tâm đến số các tình nguyện viên mà mỗi trường sẽ nhận).

Lưu ý: Bài toán này được sưu tầm từ một đề thi Olympic Toán của Trung Quốc.

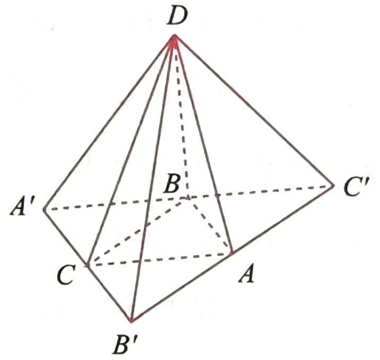
Nhận xét. Kì này bạn *Nguyễn Quốc Hoàng Anh*, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An** có bài dịch tốt, gửi bài về Toà soạn sớm. Xin hoan nghênh bạn.

HỒ HẢI *(Hà Nội)*

NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN

BÀI TOÁN 78. *Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a, AC = BD = b, AD = BC = c$ (tứ diện gần đều). Tính thể tích tứ diện $ABCD$.*

Cách 1. Dựng hình chóp $D.A'B'C'$ sao cho A, B, C lần lượt là trung điểm của $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$. Khi đó hình chóp $D.A'B'C'$ có DA', DB', DC' đôi một vuông góc với nhau.



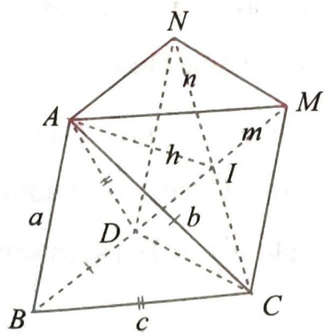
Ta có: $V_{ABCD} = \frac{1}{4}V_{D.A'B'C'} = \frac{1}{24}DA'.DB'.DC'$. Mà

$$\begin{cases} DA'^2 + DC'^2 = 4b^2 \\ DA'^2 + DB'^2 = 4a^2 \\ DB'^2 + DC'^2 = 4c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} DA'^2 = 2\left(a^2 + b^2 - c^2\right) \\ DB'^2 = 2\left(a^2 - b^2 + c^2\right) \\ DC'^2 = 2\left(-a^2 + b^2 + c^2\right) \end{cases}.$$

Khi đó:

$$V_{ABCD} = \frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{\left(-a^2+b^2+c^2\right)\left(a^2-b^2+c^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)}$$

Cách 2.



Dựng hình lăng trụ $AMN.BCD$. Từ giả thiết ta có $CDNM$ là hình thoi; các tam giác ACN, ADM là các tam giác cân tại A, suy ra:

$$AI \perp NC, AI \perp DM \Rightarrow AI \perp (CDNM).$$

Ta có: $V_{ABCD} = V_{C.AMN} = \frac{1}{2}V_{A.MNDC} = \frac{1}{2}.4V_{A.IMN}$

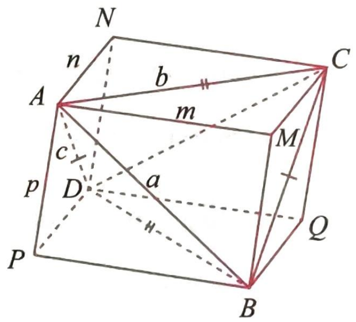
$$= 2V_{A.IMN} = \frac{1}{3}IA.IM.IN = \frac{1}{3}h.m.n.$$

Mà $\begin{cases} h^2 + m^2 = c^2 \\ h^2 + n^2 = b^2 \\ m^2 + n^2 = a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = \dfrac{a^2 - b^2 + c^2}{2} \\ n^2 = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \\ h^2 = \dfrac{-a^2 + b^2 + c^2}{2} \end{cases}.$

Khi đó:

$$V_{ABCD} = \frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{\left(-a^2+b^2+c^2\right)\left(a^2-b^2+c^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)}$$

Cách 3. Dựng hình hộp chữ nhật $AMCN.PBQD$ có các kích thước là m, n, p.



Ta có:

$$V_{PADB} = V_{MABC} = V_{QBCD} = V_{NACD} = \frac{1}{6}V_{AMCN.PBQD}.$$

Suy ra: $V_{ABCD} = \frac{1}{3}V_{AMCN.PBQD} = \frac{1}{3}m.n.p.$

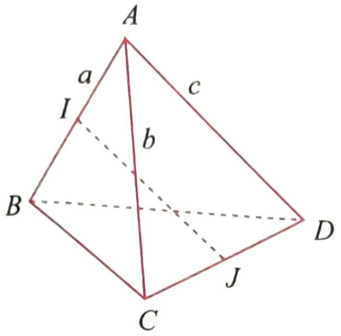
Mà $\begin{cases} m^2 + n^2 = b^2 \\ m^2 + p^2 = a^2 \\ p^2 + n^2 = c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \\ n^2 = \dfrac{-a^2 + b^2 + c^2}{2} \\ p^2 = \dfrac{a^2 - b^2 + c^2}{2} \end{cases}$

Khi đó:

$$V_{ABCD} = \frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{\left(-a^2+b^2+c^2\right)\left(a^2-b^2+c^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)}$$

Cách 4. Sử dụng công thức

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}AB.CD.d(AB;CD).\sin(AB,CD).$$



Gọi I,J lần lượt là trung điểm của AB và CD.

$\Delta ABC=\Delta BAD \Rightarrow IC=ID \Rightarrow IJ\perp CD$

$\Delta ACD=\Delta BDC \Rightarrow JA=JB \Rightarrow IJ\perp AB$

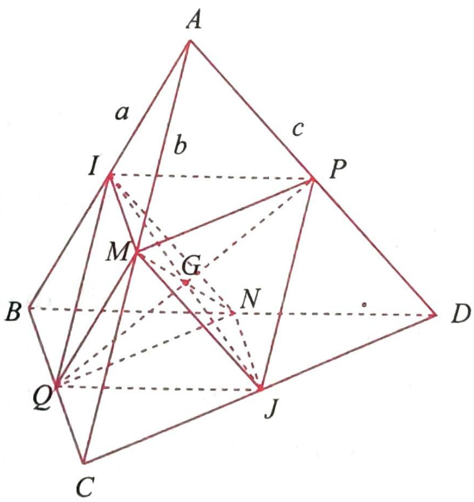
$$IJ^2=IC^2-CJ^2=\frac{AC^2+BC^2}{2}-\frac{AB^2}{4}-\frac{CD^2}{4}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}.$$

$$\cos(AB,CD)=\frac{\left|AD^2+BC^2-AC^2-BD^2\right|}{2AB.CD}=\frac{\left|c^2-b^2\right|}{a^2}.$$

Khi đó: $V_{ABCD}=\frac{1}{6}a^2.\sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{2}}.\sqrt{1-\frac{\left(c^2-b^2\right)^2}{a^4}}$

$$=\frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{\left(-a^2+b^2+c^2\right)\left(a^2-b^2+c^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)}.$$

Cách 5.



Gọi I,J,M,N,P,Q lần lượt là trung điểm của AB,CD,AC,BD,AD,BC. Ta thấy tứ giác $MINJ$ là hình thoi. Ta chứng minh được PQ vuông góc với AD và BC nên $PQ\perp(MINJ)$. Gọi G là giao điểm của các đường IJ,MN,PQ. Ta có:

$$V_{PMINJQ}=2V_{P.MINJ}=2.\frac{1}{3}PG.\frac{1}{2}IJ.MN=\frac{1}{6}PQ.IJ.MN.$$

Vì $V_{AIMP}=V_{BINQ}=V_{CQMJ}=V_{DPNJ}=\frac{1}{8}V_{ABCD}$ nên

$$V_{PIMJNQ}=V_{ABCD}-\left(V_{AIMP}+V_{BINQ}+V_{CQMJ}+V_{DPNJ}\right)=\frac{1}{2}V_{ABCD}.$$

Suy ra: $V_{ABCD}=2V_{P.IMJN}=\frac{1}{3}PQ.IJ.MN.$

Ta tính được: $IJ^2=IC^2-CJ^2$

$$=\frac{AC^2+BC^2}{2}-\frac{AB^2}{4}-\frac{CD^2}{4}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}.$$

Tương tự: $PQ^2=\frac{b^2+a^2-c^2}{2};MN^2=\frac{a^2-b^2+c^2}{2}.$

Khi đó:

$$V_{ABCD}=\frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{\left(-a^2+b^2+c^2\right)\left(a^2-b^2+c^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)}$$

TRƯƠNG QUANG AN

(Xã Nghĩa Thắng, huyện Tư Nghĩa, Quảng Ngãi)

Nhận xét. Kỳ này các bạn *Nguyễn Văn Lâm, Phạm Xuân Hoàng,* 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**; *Nguyễn Hùng Cường,* xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định** cũng đóng góp một số cách giải tương tự như các cách trên của bạn *Trương Quang An.* Bạn *Trần Đức Phương,* GV THPT Giao Thủy, **Nam Định** đưa ra 7 cách giải trong đó 5 cách tương tự như trên và có thêm hai cách trong đó có sử dụng công thức tính thể tích của khối tứ diện theo các cạnh và góc phẳng tại đỉnh A của tứ diện. Xin hoan nghênh các bạn.

LÊ MAI *(Hà Nội)*

Mời các bạn gửi lời giải BÀI TOÁN 80 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 31.1.2024.

BÀI TOÁN 80. *Giải phương trình*

$$x+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=2\sqrt{2}.$$

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc ninh)

BÀI TOÁN 87 (IMO 1983). *Cho a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng*

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geq 0.$$

Lời giải. ***Cách 1.*** Đặt $a=y+z, b=z+x,$ $c=x+y$ (x, y, z là các đoạn tạo nên do các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác chia các cạnh của tam giác). Sau khi biến đổi bất đẳng thức có dạng: $xy^3+yz^3+zx^3\geq xyz(x+y+z).$

Bất đẳng thức này tương đương với:

$$(xy^3+yz^3+zx^3)(x+y+z)\geq\left[\sqrt{xyz}(x+y+z)\right]^2\ (*).$$

Sử dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có:

$$\left[\sqrt{xyz}(x+y+z)\right]^2$$

$$=\left(\sqrt{y}.x\sqrt{xz}+\sqrt{z}.y\sqrt{yx}+\sqrt{x}.z\sqrt{zy}\right)^2$$

$$\leq(x+y+z)(x^3z+y^3x+z^3y).$$

Vậy bất đẳng thức (*) đúng.

Dấu "=" xảy ra khi

$$\frac{x\sqrt{xz}}{\sqrt{y}}=\frac{y\sqrt{yx}}{\sqrt{z}}=\frac{z\sqrt{zy}}{\sqrt{x}}\Leftrightarrow x=y=z$$

hay khi tam giác là đều.

Cách 2. Ta có thể giải bài toán này một cách trực tiếp như sau:

Giả sử c là cạnh nhỏ nhất của tam giác, khi đó:

$$a=c+m,\ b=c+n \text{ với } m, n\geq 0.$$

Thay các giá trị này vào vế trái bất đẳng thức cần chứng minh rồi biến đổi ta được:

$$S=(m-n)^2c^2+mnc^2+\left[m^3+n(m-n)^2\right]c$$
$$+m^2n(m-n).$$

Để chứng minh biểu thức này không âm ta xét hai trường hợp:

TH1: Nếu $m\geq n$ thì kết quả là rõ ràng, tất cả các số hạng của tổng S đều không âm ($m\geq 0$, $n\geq 0$, $m-n\geq 0$); $S=0$ khi $m^3+n(m-n)^2=0,$ từ đó:

$$m=0, n=0 \text{ và } a=b=c.$$

TH2: Nếu $m<n$ thì dựa vào bất đẳng thức tam giác $b<a+c$, tức là $n<c+m$ ta có:

$$m-n>-c\Leftrightarrow c>n-m.$$

Suy ra:

$$S=(m-n)^2c^2+mnc.c+(m^3+n^3+m^2n-2mn^2)c$$
$$+m^2n(m-n)$$
$$\geq(m-n)^2c^2+mn(n-m)c$$
$$+(m^3+n^3+m^2n-2mn^2)c-m^2nc$$
$$=(m-n)^2c^2+(m^3+n^3-m^2n-mn^2)c$$
$$=(m-n)^2c^2+(n^2-m^2)(n-m)c>0\ (\text{vì } n>m).$$

Bài toán được chứng minh.

Cách 3. Sau khi biến đổi đại số, bất đẳng thức có dạng:

$$a(b-c)^2(b+c-a)+b(a-b)(a-c)(a+b-c)\geq 0\ (**).$$

Do bất đẳng thức không đổi khi hoán vị vòng quanh (a; b; c) nên ta có thể giả sử: $a\geq b$, $a\geq c$. Bất đẳng thức (**) đúng vì $b+c-a>0$ và $a+b-c>0$. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Nhận xét. Hai bạn: *Phan Đại Hoàng*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, **Nghệ An** và *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định** đã có lời giải đúng. Xin hoan nghênh hai bạn.

NHƯ HOÀNG

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 31.1.2024.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

BÀI TOÁN 89. *Cho O, A, B, C là các điểm di động trong mặt phẳng sao cho* $OA=4, OB=2\sqrt{3}, OC=\sqrt{22}$. *Tìm diện tích lớn nhất có thể có của tam giác ABC.*

KHÁNH HỮU (*Hà Nội*)

GIẢI ĐÁP: SAO LẠI THẾ NHỈ ?

(*Đề đăng trên TH&TT số* 554, *tháng* 8 *năm* 2023)

Phân tích sai lầm, Lời giải sai ở bước tìm điều kiện của phương trình do đó khi giải đã xét thiếu trường hợp, dẫn đến thiếu nghiệm $x=\frac{-9}{8}$.

Lời giải đúng như sau:

Điều kiện của phương trình xác định như sau:

$$\begin{cases} x^2+x\ge 0 \\ x^2-2x\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le -1; x\ge 0 \\ x\le 0; x\ge 2\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le -1 \\ x=0 \\ x\ge 2\end{array}\right.$$

- Nếu $x=0$ thì (1) luôn đúng
- Nếu $x\ge 2$ thì

$$(1)\Leftrightarrow \sqrt{x(x+1)}+\sqrt{x(x-2)}=2\sqrt{x.x}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}=2\sqrt{x}$$
$$\Leftrightarrow 2x-1+2\sqrt{(x+1)(x-2)}=4x$$
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-x-2}=2x+1$$
$$\Leftrightarrow 4(x^2-x-2)=(2x+1)^2$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{-9}{8} \text{ (loại).}$$

- Nếu $x\le -1$ thì

$$(1)\Leftrightarrow \sqrt{(-x)(-x-1)}+\sqrt{(-x)(2-x)}=2\sqrt{(-x).(-x)}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{-x-1}+\sqrt{2-x}=2\sqrt{-x}$$
$$\Leftrightarrow -2x+1+2\sqrt{(x+1)(x-2)}=-4x$$
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-x-2}=-2x-1\ge 1$$
$$\Leftrightarrow 4(x^2-x-2)=(2x+1)^2$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{-9}{8}<-1 \text{ (thoả mãn).}$$

Vậy tập nghiệm phương trình sẽ là $S=\left\{0;\frac{-9}{8}\right\}$.

Nhận xét. Chúc mừng bạn *Nguyễn Xuân Hồng*, 9A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông, **Phú Thọ** đã phát hiện được sai lầm và đưa ra lời giải đúng.

KIHIVI

KẾT QUẢ ĐÃ ĐÚNG CHƯA?

Trong giờ luyện tập về tính đơn điệu của hàm số thầy giáo cho bài toán:

Tìm m để hàm số sau đồng biến trên $(0;+\infty)$

$$y=\frac{x^2-(m+1)x+4m^2-4m-2}{x-(m-1)}.$$

Bạn Hà lên bảng giải bài toán như sau:

$\forall x>0$ ta có:

$$y'=\frac{x^2-2(m-1)x-3m^2+4m+1}{(x+1-m)^2}=\frac{f(x)}{(x+1-m)^2}.$$

Để hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$ thì

$$f(x)\ge 0, \forall x>0.$$

$f(x)$ có $\Delta'=4m^2-6m=2m(2m-3)$.

Nếu $\Delta'\le 0\Leftrightarrow 0\le m\le\frac{3}{2}$ thì

$$f(x)\ge 0, \forall x\Rightarrow f(x)\ge 0, \forall x>0$$

$$\Rightarrow m\in\left[0;\frac{3}{2}\right] \text{ là giá trị cần tìm} \quad (1).$$

Nếu $\Delta'>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m<0 \\ m>\frac{3}{2}\end{array}\right.$ thì $f(x)$ có nghiệm $x_1;x_2$ $(x_1<x_2)$. Khi đó $f(x)\ge 0, \forall x>0\Leftrightarrow f(x)$ có nghiệm thoả mãn $x_1<x_2\le 0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} m<0; m>\frac{3}{2} \\ S=2(1-m)>0 \\ P=-3m^2+4m+1\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow\begin{cases} m<0 \\ \frac{2-\sqrt{7}}{3}\le m\le\frac{2+\sqrt{7}}{3}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{7}}{3}\le m<0 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta có giá trị m cần tìm là:

$$\frac{2-\sqrt{7}}{3}\le m\le\frac{3}{2}.$$

Theo bạn kết quả của bạn Hà đã đúng chưa?

NGUYỄN THANH GIANG

(GV THPT chuyên Hưng Yên)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 558 (12.2023)
Tòa soạn : 187B, Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607,
ĐT Phát hành: 024.35142649, 024.35682701
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TRONG SỐ NÀY

Biên tập: LÊ MAI, NHƯ HOÀNG
Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG
Trị sự, phát hành: HOÀNG THỊ KIM PHƯỢNG, TRẦN THỊ MINH HIỀN
Thiết kế, chế bản: MINH HÒA

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM TRAO HỌC BỔNG CHO HỌC SINH VƯỢT KHÓ HỌC TỐT TẠI GIA LAI

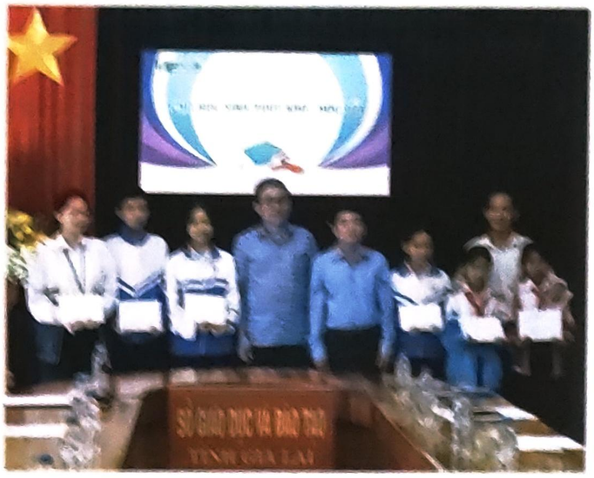
Ngày 15/11/2023, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam phối hợp với Sở Giáo dục và Đào tạo (GD-ĐT) tỉnh Gia Lai tặng học bổng cho học sinh vượt khó học tốt năm học 2023-2024 trên địa bàn tỉnh.

Tham dự chương trình có các ông: Lê Duy Định - Tỉnh ủy viên, Giám đốc Sở GD-ĐT; Nguyễn Thế Dũng - Phó Tổng Giám đốc Công ty cổ phần Sách và Thiết bị Giáo dục miền Trung cùng đại diện các em học sinh nhận học bổng.

Tại chương trình, được sự ủy quyền của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, Công ty cổ phần Sách và Thiết bị Giáo dục miền Trung đã trao bảng tượng trưng tặng 128 suất học bổng cho học sinh nghèo vượt khó học tốt của tỉnh Gia Lai (mỗi suất trị giá 2 triệu đồng); trong đó, bậc tiểu học 31 suất, THCS 56 suất và THPT 41 suất. Đồng thời, lãnh đạo Sở GD-ĐT và lãnh đạo Công ty cùng trao tặng học bổng cho 6 học sinh đại diện có mặt tại buổi lễ.

Giám đốc Sở GD-ĐT Lê Duy Định (bìa trái) nhận bảng tặng học bổng tượng trưng từ đại diện NXBGDVN

Đón nhận bảng tượng trưng từ đơn vị, Giám đốc Sở GD-ĐT Lê Duy Định cảm ơn sự quan tâm của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, Công ty cổ phần Sách và Thiết bị Giáo dục miền Trung đến học sinh khó khăn của tỉnh Gia Lai. Giám đốc Sở GD-ĐT khẳng định: "Những suất học bổng này là món quà có ý nghĩa thiết thực, góp phần tiếp sức cho học sinh khó khăn của tỉnh nỗ lực vươn lên trong học tập".



Lãnh đạo Sở GD-ĐT tỉnh Gia Lai và Công ty cổ phần Sách và Thiết bị Giáo dục miền Trung trao học bổng cho 6 học sinh đại diện có mặt tại buổi lễ

Trước đó, nhân dịp khai giảng năm học mới 2023-2024, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam cũng đã trao tặng 15 tủ sách giáo khoa dùng chung (tương đương 1.920 bộ sách giáo khoa) cho các trường học vùng khó của tỉnh Gia Lai và 18.722 bộ sách giáo khoa (tổng trị giá hơn 6 tỉ đồng) cho học sinh có hoàn cảnh khó khăn. Trong số này, hơn 2.000 bộ sách được trao tặng theo chương trình "Cùng tiếp bước em tới trường" của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam; hơn 16.000 bộ sách được trao theo đề nghị của Đoàn đại biểu Quốc hội tỉnh Gia Lai dành cho học sinh có hoàn cảnh khó khăn.

BAN TRUYỀN THÔNG

(Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam)

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

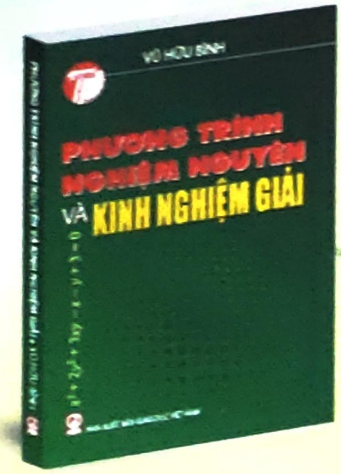
Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Cuốn sách

PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN VÀ KINH NGHIỆM GIẢI

(Tái bản lần thứ hai) Của tác giả NGND. VŨ HỮU BÌNH

Sách dày 224 trang, khổ 17 x 24 cm, giá bìa 42.000 đồng



Nội dung của sách trình bày các phương pháp giải phương trình với nghiệm nguyên, vốn là một đề tài lý thú của Số học và Đại số, từ các học sinh nhỏ với những bài toán như *Trăm trâu trăm cỏ* đến các chuyên gia toán học với những bài toán như *định lí lớn Fermat*.

Sách gồm 5 chương:

Chương I giới thiệu các phương pháp thường dùng để giải phương trình nghiệm nguyên.

Chương II giới thiệu những phương trình nghiệm nguyên được sắp xếp theo từng ngày.

Chương III giới thiệu những bài toán đưa về giải phương trình nghiệm nguyên, trong đó có những bài toán vui, bài toán thực tế.

Chương IV giới thiệu một số phương trình nghiệm nguyên mang tên các nhà toán học như *Pell*, *Pythagore*, *Fermat*, *Diophante*, ...

Chương V giới thiệu những phương trình nghiệm nguyên chưa được giải quyết và những bước tiến của Toán học để giải những phương trình nghiệm nguyên, trong đó có những đóng góp của *Andrew Wiles* chứng minh định lý lớn Fermat và Giáo sư *Ngô Bảo Châu* chứng minh Bổ đề cơ bản trong *Chương trình Langlands*.

Phương trình nghiệm nguyên có số phương trình ít hơn số ẩn nên đòi hỏi người giải toán phải vận dụng kiến thức sáng tạo, vì thế phương trình nghiệm nguyên thường có mặt trong các đề thi học sinh giỏi từ bậc tiểu học, trung học cơ sở đến trung học phổ thông. Cuốn sách dành một phần thích đáng nêu những kinh nghiệm giải toán về phương trình nghiệm nguyên như cách phân tích bài toán, cách suy luận để tìm hướng giải, cách phân chia bài toán thành những bài toán nhỏ dễ giải quyết hơn, cách "*đưa khó về dễ, đưa lạ về quen*", cách liên hệ tình huống đang giải quyết với những vấn đề mới, cách chọn hướng đi phù hợp với từng bài toán đặt ra ...tất cả những điều đó đều là những kĩ năng mà mỗi người cần có trong học tập, trong nghiên cứu và trong cuộc sống.

Với những câu thơ ở đầu mỗi chương, với cách trình bày rõ ràng, dễ hiểu, tươi mát, với những thông tin cập nhật, với những kinh nghiệm thực tế trong bồi dưỡng học sinh giỏi và viết sách, tác giả cuốn sách, NGND *Vũ Hữu Bình* sẽ đem đến cho bạn đọc những kiến thức hệ thống và những kinh nghiệm giải toán giúp giải quyết một loại toán khó ở bậc phổ thông.

Tin rằng cuốn sách không chỉ hữu ích cho học sinh và thầy cô giáo, mà còn là tài liệu tham khảo tốt cho sinh viên và giảng viên các trường Đại học và Cao đẳng ngành Toán, cùng các phụ huynh có nguyện vọng giúp con em mình học Toán tốt hơn.

BẠN ĐỌC CÓ THỂ MUA ẤN PHẨM TRÊN TẠI:

TÒA SOẠN TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

ĐỊA CHỈ: 187B, GIẢNG VÕ, HÀ NỘI

ĐIỆN THOẠI PHÁT HÀNH: 024.35142649 - 024.35682701

Giấy phép XB số 534/GP-BTTTT cấp ngày 19.11.2020; Mã số: 8BT12M23
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 12 năm 2023

Giá: 18.000 đồng
Mười tám nghìn đồng