TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

Số 559
Tháng 1 - 2024
ISSN: 2734-9284

VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 61 - XUẤT BẢN TỪ 1964 - DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT Biên tập: (024) 35121607; ĐT Phát hành: (024) 35142649;
ĐT-Fax Hành chính: (024) 35121606 - Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com - Website: viennghiencuusachgd.com

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

PHÊ DUYỆT SÁCH GIÁO KHOA LỚP 9

Sau thời gian dài nỗ lực, khẩn trương triển khai thực hiện công tác biên soạn, biên tập sách giáo khoa của lớp 9, các đầu sách giáo khoa (SGK) của NXB Giáo dục Việt Nam đã được Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo *Nguyễn Kim Sơn* phê duyệt, cụ thể như sau:

DANH MỤC

Sách giáo khoa lớp 9 sử dụng trong cơ sở giáo dục phổ thông của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam

(Được phê duyệt kèm theo Quyết định số 4338/QĐ-BGDĐT ngày 18 tháng 12 năm 2023 của Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo)

TT	Tên sách	Tác giả
1	Ngữ văn 9, Tập 1 Kết nối tri thức với cuộc sống	Bùi Mạnh Hùng (Tổng Chủ biên), Nguyễn Thị Ngân Hoa, Đặng Lưu (đồng Chủ biên), Dương Tuấn Anh, Lê Trà My, Nguyễn Thị Nương, Nguyễn Thị Hải Phương, Nguyễn Thị Minh Thương.
	Ngữ văn 9, Tập 2 Kết nối tri thức với cuộc sống	Bùi Mạnh Hùng (Tổng Chủ biên), Nguyễn Thị Ngân Hoa, Đặng Lưu (đồng Chủ biên), Phan Huy Dũng, Nguyễn Thị Mai Liên, Lê Thị Minh Nguyệt
2	Ngữ văn 9, Tập 1 Chân trời sáng tạo	Nguyễn Thị Hồng Nam, Nguyễn Thành Thi (đồng Chủ biên), Nguyễn Thành Ngọc Bảo, Trần Lê Duy, Dương Thị Hồng Hiếu, Tăng Thị Tuyết Mai, Nguyễn Thị Ngọc Thúy, Phan Thu Vân
	Ngữ văn 9, Tập 2 Chân trời sáng tạo	Nguyễn Thị Hồng Nam, Nguyễn Thành Thi (đồng Chủ biên), Nguyễn Thành Ngọc Bảo, Trần Lê Duy, Phan Mạnh Hùng, Tăng Thị Tuyết Mai, Nguyễn Thị Minh Ngọc, Nguyễn Thị Ngọc Thúy, Phan Thu Vân
3	Toán 9, Tập 1 Kết nối tri thức với cuộc sống	Hà Huy Khoái (Tổng Chủ biên), Cung Thế Anh, Nguyễn Huy Đoan (đồng Chủ biên), Nguyễn Cao Cường, Trần Mạnh Cường, Doãn Minh Cường, Trần Phương Dung, Sĩ Đức Quang, Lưu Bá Thắng, Đặng Hùng Thắng
	Toán 9, Tập 2 Kết nối tri thức với cuộc sống	Hà Huy Khoái (Tổng Chủ biên), Cung Thế Anh, Nguyễn Huy Đoan (đồng Chủ biên), Nguyễn Cao Cường, Trần Mạnh Cường, Doãn Minh Cường, Trần Phương Dung, Sĩ Đức Quang, Lưu Bá Thắng, Đặng Hùng Thắng.
4	Toán 9, Tập 1 Chân trời sáng tạo	Trần Nam Dũng (Tổng Chủ biên), Trần Đức Huyên, Nguyễn Thành Anh (đồng Chủ biên), Nguyễn Văn Hiển, Ngô Hoàng Long, Huỳnh Ngọc Thanh, Nguyễn Đặng Trí Tín
	Toán 9, Tập 2 Chân trời sáng tạo	Trần Nam Dũng (Tổng Chủ biên), Trần Đức Huyên, Nguyễn Thành Anh (đồng Chủ biên), Nguyễn Văn Hiển, Ngô Hoàng Long, Huỳnh Ngọc Thanh, Nguyễn Đặng Trí Tín
5	Tiếng Anh 9 Friends Plus	Trần Cao Bội Ngọc (Chủ biên), Trần Kim Duyên, Trần Nguyễn Thụy Thoại Lan.
6	Tiếng Anh 9 Global Success	Hoàng Văn Vân (Tổng Chủ biên), Lương Quỳnh Trang (Chủ biên), Nguyễn Thị Chi, Lê Kim Dung, Nguyễn Thụy Phương Lan, Phan Chí Nghĩa, Trần Thị Hiếu Thủy.
7	Lịch sử và Địa lí 9 Chân trời sáng tạo	Hà Bích Liên, Hồ Thanh Tâm (đồng Chủ biên Phần Lịch sử), Lê Phụng Hoàng, Nhữ Thị Phương Lan, Nguyễn Trà My, Trần Viết Ngạc, Nguyễn Văn Phương, Nguyễn Kim Tường Vy, Nguyễn Kim Hồng (Tổng Chủ biên phần Địa lí), Huỳnh Phẩm Dũng Phát (Chủ biên phần Địa lí), Trần Ngọc Điệp, Nguyễn Hà Quỳnh Giao, Tạ Đức Hiếu, Hoàng Thị Kiều Oanh, Trần Quốc Việt
8	Giáo dục Công dân 9 Chân trời sáng tạo	Huỳnh Văn Sơn (Tổng Chủ biên), Bùi Hồng Quân (Chủ biên), Đào Lê Hoà An, Trần Tuấn Anh, Nguyễn Thanh Huân, Đỗ Công Nam, Cao Thanh Tân.
9	Tin học 9 Kết nối tri thức với cuộc sống	Nguyễn Chí Công (Tổng Chủ biên), Hà Đặng Cao Tùng (Chủ biên), Phan Anh, Nguyễn Hải Châu, Hoàng Thị Mai
10	Tin học 9 Chân trời sáng tạo	Quách Tất Kiên (Tổng Chủ biên kiêm Chủ biên), Cổ Tồn Minh Đăng, Hồ Thị Hồng, Nguyễn Tấn Phong, Đoàn Thị Ái Phương, Đào Thị Thoa, Nguyễn Thanh Tùng
11	Âm nhạc 9 Kết nối tri thức với cuộc sống	Hoàng Long (Tổng Chủ biên kiêm Chủ biên), Bùi Minh Hoa, Vũ Mai Lan, Trần Bảo Lâm, Đặng Khánh Nhật, Nguyễn Thị Thanh Vân
12	Âm nhạc 9 Chân trời sáng tạo	Hồ Ngọc Khải, Nguyễn Thị Tố Mai (đồng Tổng Chủ biên), Nguyễn Văn Hảo (Chủ biên), Lương Diệu Ánh, Nguyễn Thị Ái Chiêu, Trần Đức Lâm, Lương Minh Tân
13	Mĩ thuật 9 Kết nối tri thức với cuộc sống	Đinh Gia Lê (Tổng Chủ biên), Đoàn Thị Mỹ Hương (Chủ biên), Phạm Duy Anh, Trương Triều Dương
14	Mĩ thuật 9 Chân trời sáng tạo bản 1	Nguyễn Thị Nhung (Tổng Chủ biên), Nguyễn Tuấn Cường (Chủ biên), Nguyễn Dương Hải Đăng, Đỗ Thị Kiều Hạnh, Nguyễn Đức Sơn, Đàm Thị Hải Uyên, Trần Thị Vân.
15	Mĩ thuật 9 Chân trời sáng tạo bản 2	Nguyễn Thị May (Tổng Chủ biên), Hoàng Minh Phúc (Chủ biên), Nguyễn Văn Bình, Đào Thị Hà, Trần Doãn Thanh Ngọc
16	Giáo dục Thể chất 9 Kết nối tri thức với cuộc sống	Nguyễn Duy Quyết (Tổng Chủ biên), Hồ Đắc Sơn (Chủ biên), Vũ Tuấn Anh, Nguyễn Xuân Đoàn, Nguyễn Thị Hà, Lê Trường Sơn Chấn Hải, Trần Mạnh Hùng, Nguyễn Thành Trung.
17	Giáo dục Thể chất 9 Chân trời sáng tạo	Trịnh Hữu Lộc (Tổng Chủ biên), Lưu Trí Dũng (Chủ biên), Lê Minh Chí, Nguyễn Trung Kiên, Nguyễn Thiên Lý, Lê Phước Thật, Nguyễn Thị Thùy Trâm, Phạm Thái Vinh
18	Hoạt động trải nghiệm và hướng nghiệp 9 Chân trời sáng tạo Bản 1	Đinh Thị Kim Thoa (Tổng Chủ biên), Nguyễn Hồng Kiên (Chủ biên), Nguyễn Thị Bích Liên, Lại Thị Yến Ngọc, Trần Thị Quỳnh Trang, Phạm Đình Văn.
19	Hoạt động trải nghiệm và hướng nghiệp 9 Chân trời sáng tạo Bản 2	Đinh Thị Kim Thoa, Vũ Phương Liên (đồng Chủ biên), Trần Bảo Ngọc, Mai Thị Phương, Dương Văn Toàn, Huỳnh Mộng Tuyền
20	Hoạt động trải nghiệm và hướng nghiệp 9 Kết nối tri thức với cuộc sống	Lưu Thu Thủy (Tổng Chủ biên), Trần Thị Thu (Chủ biên), Nguyễn Thanh Bình, Nguyễn Thu Hương, Nguyễn Thị Việt Nga, Lê Thị Thanh Thủy
21	Công nghệ 9 – Định hướng nghề nghiệp Kết nối tri thức với cuộc sống	Lê Huy Hoàng (Tổng Chủ biên), Phạm Mạnh Hà (Chủ biên), Nguyễn Xuân An, Nguyễn Thị Bích Thủy, Vũ Cẩm Tú
22	Công nghệ 9 – Mô đun Lắp đặt mạng điện trong nhà Kết nối tri thức với cuộc sống	Lê Huy Hoàng (Tổng Chủ biên), Đặng Văn Nghĩa (Chủ biên), Vũ Thị Ngọc Thúy, Nguyễn Thanh Trịnh, Phạm Khánh Tùng.
23	Công nghệ 9 – Mô đun Trồng cây ăn quả Kết nối tri thức với cuộc sống	Lê Huy Hoàng (Tổng Chủ biên), Đồng Huy Giới (Chủ biên), Bùi Thị Thu Hương, Đào Quang Nghị.
24	Công nghệ 9 – Mô đun Chế biến thực phẩm Kết nối tri thức với cuộc sống	Lê Huy Hoàng (Tổng Chủ biên), Nguyễn Xuân Thành (Chủ biên), Đặng Ngọc Bảo, Nguyễn Thị Hồng Tiến
25	Công nghệ 9 – Mô đun Định hướng nghề nghiệp Chân trời sáng tạo	Bùi Văn Hồng (Tổng Chủ biên), Nguyễn Thị Cẩm Vân (Chủ biên), Nguyễn Thị Lưỡng, Phan Nguyễn Trúc Phương, Đào Văn Phượng, Nguyễn Phước Sơn, Nguyễn Thị Thúy
26	Công nghệ 9 – Mô đun Lắp đặt mạng điện trong nhà Chân trời sáng tạo	Bùi Văn Hồng (Tổng Chủ biên), Nguyễn Thị Cẩm Vân (Chủ biên), Nguyễn Thị Lưỡng, Phan Nguyễn Trúc Phương, Đào Văn Phượng, Nguyễn Phước Sơn, Nguyễn Thị Thúy
27	Công nghệ 9 – Mô đun Cắt may Chân trời sáng tạo	Bùi Văn Hồng (Tổng Chủ biên), Nguyễn Thị Cẩm Vân (Chủ biên), Nguyễn Thị Lưỡng, Phan Nguyễn Trúc Phương, Đào Văn Phượng, Nguyễn Phước Sơn, Nguyễn Thị Thúy

NXBGD Việt Nam

KHAI THÁC MỘT SỐ BÀI TOÁN RỜI RẠC

NGUYỄN ĐỨC TRƯỜNG
(GV THCS Đa Tốn, Gia Lâm, Hà Nội)

Trong các đề thi có những bài toán rời rạc, chúng thuộc lớp bài toán hay và khó. Trong bài viết này, chúng tôi xin phân tích và khai thác một số bài thuộc dạng toán này.

1. Thí dụ 1. *Xét 100 số nguyên dương bất kỳ có tổng bằng 101. Chứng minh rằng ta có thể chọn trong chúng một vài số sao cho tổng của chúng bằng 100.*

Lời giải.

Cách 1. Rõ ràng không thể xảy ra tất cả các số bằng nhau được. Vì vậy giả sử 100 số nguyên dương đó là: $a_1 \neq a_2, a_3, \ldots, a_{100}$.

Ta xây dựng dãy:

$$a_1,\ a_2,\ a_1+a_2,\ a_1+a_2+a_3, \ldots,$$
$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{100}.$$

Bây giờ xét dãy trên gồm 101 số khác nhau và nhận giá trị trong đoạn: [1; 101] nên phải có số 100. Từ đây có được điều phải chứng minh.

Cách 2. Giả sử 100 số nguyên dương đó là:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{100}.$$

Không giảm tính tổng quát, giả sử:

$$1 \le a_1 \le a_2 \le a_3 \le \ldots \le a_{100}.$$

Nếu $a_1 \ge 2 \Rightarrow 2 \le a_2 \le a_3 \le \ldots \le a_{100}$

Suy ra:

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{100} \ge 2.100 = 200.$$

Vô lý, vậy $a_1 < 2$, suy ra $a_1 = 1$, do đó:

$$a_2+a_3+a_4+a_5+\ldots+a_{100} = 100.$$

Nhận xét. Ta thấy 100 số nguyên dương bất kỳ có tổng bằng 101. Thử đặt câu hỏi liệu số lớn nhất trong 100 số đó có thể là bao nhiêu? Dễ thấy số lớn nhất trong 100 số đó không vượt quá 2. Quan tâm tới lời giải trên, chúng ta thấy để có giả thiết này thì phải tồn tại 99 số 1 và một số 2.

Bởi nếu số lớn nhất trong 100 số đó vượt quá 2 thì tổng 99 số còn lại nhỏ hơn 99, suy ra vô lý. Từ đó ta có bài toán sau:

Bài 1.1. *Xét 100 số nguyên dương bất kỳ có tổng bằng 101. Chứng minh rằng ta có thể chọn trong chúng một vài số sao cho tổng của chúng bằng 99.*

Nhận xét. Ta có thể tổng quát bài toán ban đầu:

Bài 1.2. *Xét n ($n \ge 2$) số nguyên dương bất kỳ có tổng bằng $n+1$. Chứng minh rằng ta có thể chọn trong chúng một vài số sao cho tổng của chúng bằng n.*

Nhận xét. Nếu ta thay 100 số nguyên dương bất kỳ thành 100 số nguyên dương phân biệt thì kết quả thay đổi thế nào ? Ta nhận thấy tổng 100 số nguyên dương phân biệt nhỏ nhất là 5050. Dựa vào thí dụ 1, cho phép chúng ta đề xuất bài sau:

Bài 1.3. *Xét 100 số nguyên dương phân biệt có tổng bằng 5051. Chứng minh rằng ta có thể chọn trong chúng một vài số sao cho tổng của chúng bằng 5050.*

Bài 1.4. *Xét 100 số nguyên dương phân biệt có tổng bằng 5051. Chứng minh rằng ta có thể chọn trong chúng một vài số sao cho tổng của chúng bằng 4950.*

Tương tự như trên, chúng ta hoàn toàn có thể tổng quát hai bài toán này. Thật vậy:

Bài 1.5. *Xét n số nguyên dương phân biệt ($n > 3$) có tổng bằng $\frac{n^2+n+2}{2}$. Chứng minh rằng ta có thể chọn trong chúng một vài số sao cho tổng của chúng bằng $\frac{n(n+1)}{2}$.*

Bài 1.6. *Xét n số nguyên dương phân biệt ($n > 3$) có tổng bằng $\frac{n^2+n+2}{2}$. Chứng minh rằng ta có thể chọn trong chúng một vài số sao cho tổng của chúng bằng $\frac{n(n-1)}{2}$.*

2. Thí dụ 2. *Cho 69 số nguyên dương phân biệt mỗi số không vượt quá 100. Chứng minh rằng tồn tại 4 số sao cho trong chúng có một số bằng tổng ba số còn lại.*

Phân tích. Phân tích kết luận của bài toán, giả sử tồn tại a, b, c, d thuộc 69 số nguyên dương phân biệt không vượt quá 100 mà $a = b + c + d$ thì $a - b = c + d$. Do đó ý tưởng xét hai dãy số:

- Dãy thứ nhất các số có dạng: $c + d$.
- Dãy thứ hai các số có dạng: $a - b$.

Sau đó chứng tỏ tồn tại một phần tử thuộc cả hai dãy.

Hướng dẫn giải.

Giả sử 69 số nguyên dương phân biệt đó là:

$$1 \le a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{69} \le 100.$$

Quan sát đầu tiên sẽ thấy ngay: $a_1 \le 32$.

Xây dựng hai dãy số sau:

- Xét dãy số:

$$1 < a_3 + a_1 < a_4 + a_1 < \ldots < a_{69} + a_1 \le 132.$$

Nhưng từ dãy này ta đã rút ra được điều gì chưa? Nhớ lại rằng đề bài yêu cầu chỉ ra 2 đối tượng bằng nhau nên ta sẽ xây dựng thêm một dãy nữa.

- Xét dãy số:

$$1 \le a_3 - a_2 < a_4 - a_2 < \ldots < a_{69} - a_2 < 132.$$

Vậy ta đã xây dựng 134 số hạng nằm trong đoạn từ 1 đến 132 nên sẽ có 2 số hạng của 2 dãy này bằng nhau và 2 số bằng nhau này thuộc 2 dãy trên. Từ đây có được điều phải chứng minh.

Nhận xét. Từ kỹ thuật trên, chúng ta có thể giải được bài sau:

Bài 2.1. *Cho 2015 số nguyên dương phân biệt không vượt quá 3019. Chứng minh trong 2015 số đó tồn tại bốn số a, b, c, d sao cho $a + b + c = d$.*

(Tuyển sinh lớp 10, THPT chuyên TP. Hà Nội, năm học 2015 - 2016)

Lời giải. Gọi 2015 số nguyên dương đó là $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2015}$.

Không mất tổng quát, giả sử

$$0 < a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{2015} \le 3019$$

$$\Rightarrow 3019 \ge a_{2015} \ge a_1 + \underbrace{1+1+\ldots+1}_{2014 \text{ số } 1}$$

$$\Rightarrow a_1 \le 3019 - 2014 = 1005.$$

Đặt $u_n = a_n + a_1$, $n = \overline{3,2015}$

$$\Rightarrow u_3 < u_4 < \ldots < u_{2015} \le 3019 + 1005 = 4024 \quad (1).$$

Đặt $v_n = a_n - a_2$, $n = \overline{3,2015}$

$$\Rightarrow v_3 < v_4 < \ldots < v_{2015} \le 3019 < 4024 \quad (2).$$

Vì $(u_n), (v_n)$ là hai dãy số dương phân biệt, gồm tổng cộng 4026 số nên từ (1), (2) và theo nguyên lý Dirichlet tồn tại $i, j \in \{3, 4, \ldots, 2015\}$ sao cho:

$$u_i = v_j \Leftrightarrow a_i + a_1 = a_j - a_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} i \ne j \\ a_j = a_i + a_1 + a_2 \end{cases} \text{ (đpcm).}$$

Nhận xét. Ta có thể tổng quát bài toán ban đầu

Bài 2.2. *Cho n số nguyên dương phân biệt ($n > 4$) mỗi số không vượt quá $\frac{3n-5}{2}$. Chứng minh trong n số đó tồn tại bốn số a, b, c, d sao cho $a + b + c = d$.*

Lời giải. Gọi n số nguyên dương đó là:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n.$$

Không mất tổng quát, giả sử:

$$0 < a_1 < a_2 < a_3 < ... < a_n \le \frac{3n-5}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{3n-5}{2} \ge a_n \ge a_1 + \underbrace{1+1+...+1}_{n-1 \text{ số } 1}$$

$$\Rightarrow a_1 \le \frac{3n-5}{2} - n + 1.$$

Đặt $u_k = a_k + a_1,\ k = \overline{3,n}$

$$\Rightarrow u_3 < u_4 < ... < u_n \le \frac{3n-5}{2} + \frac{3n-5}{2} - n + 1$$
$$= 2n - 4 \quad (1).$$

Đặt $v_k = a_k - a_2,\ k = \overline{3,n}$

$$\Rightarrow v_3 < v_4 < ... < v_n \le a_n < \frac{3n-5}{2} < 2n-4 \quad (2).$$

Vì $(u_n),(v_n)$ là hai dãy số dương phân biệt, gồm tổng cộng $2n-4$ số nên từ (1), (2) và theo nguyên lý Dirichlet tồn tại $i, j \in \{3,4,...,n\}$ sao cho

$$u_i = v_j \Leftrightarrow a_i + a_1 = a_j - a_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} i \ne j \\ a_j = a_i + a_1 + a_2 \end{cases} \text{(đpcm)}.$$

Nhận xét. Nếu kết luận tồn tại 3 số mà một số bằng tổng của hai số kia thì giả thiết thay đổi thế nào?

Với ý tưởng của thí dụ 2, chúng ta chỉ cần xây dựng hai dãy có dạng sau:

- Dãy thứ nhất các số có dạng:

$$1 \le a_1 < a_2 < a_3 < ... < a_n \le x.$$

Dãy thứ hai các số có dạng:

$$1 \le a_2 - a_1 < a_3 - a_1 < ... < a_n - a_1 < x.$$

Vậy chỉ cần tìm được x theo n để tồn tại một phần tử thuộc hai dãy, chúng ta sẽ được bài toán mới. Chẳng hạn:

Bài 2.3. *Cho 2020 số tự nhiên đôi một khác nhau và nhỏ hơn 4038. Chứng minh tồn tại ba số trong 2020 số đó mà một số bằng tổng hai số kia.*

Lời giải.

Sắp thứ tự 2020 số đã cho:

$$0 \le a_1 < a_2 < ..... < a_{2020} < 4038 \text{ (nhóm 1)}.$$

Xét thêm 2019 số:

$$b_1 = a_2 - a_1,\ b_2 = a_3 - a_1,\ b_3 = a_4 - a_1;...,$$
$$b_{2019} = a_{2020} - a_1.$$

Ta có: $1 \le b_1 < b_2 < .... < b_{2019} < 4038$ (nhóm 2).

Tập hợp gồm 4038 số của hai nhóm trên (trừ a_1 của nhóm 1) nhận 4037 giá trị $\{1;2;.....;4037\}$.

Theo nguyên lí Dirichlet có hai số bằng nhau nhưng không cùng một nhóm 1 hoặc nhóm 2, tức là phải thuộc hai nhóm. Giả sử đó là

$$a_i = b_j \ (i = 2, 3, . . ., 2020,\ j = 1, 2, . . ., 2019)$$

$$\Rightarrow a_i = a_k - a_1 \Rightarrow a_k = a_i + a_1 \ (k = 2;3;.....;2020).$$

Ta có điều phải chứng minh.

Bài 2.4. *Cho 2014 số tự nhiên đôi một khác nhau và nhỏ hơn 4026. Chứng minh tồn tại ba số trong 2014 số đó mà một số bằng tổng hai số kia.*

(Tuyển sinh lớp 10, THPT chuyên Đăk Lăk, năm học 2014 - 2015, vòng 2)

Lời giải.

Sắp thứ tự 2014 số đã cho:

$$0 \le a_1 < a_2 < ..... < a_{2014} < 4026 \text{ (nhóm 1)}.$$

Xét thêm 2013 số: $b_1 = a_2 - a_1; b_2 = a_3 - a_1;$

$$b_3 = a_4 - a_1;...b_{2013} = a_{2014} - a_1.$$

Ta có $1 \le b_1 < b_2 < .... < b_{2013} < 4026$ (nhóm 2). Tập hợp gồm 4026 số của hai nhóm trên (trừ a_1 của nhóm 1) nhận 4025 giá trị $\{1;2;.....;4025\}$. Theo nguyên lí Dirichlet có hai số bằng nhau nhưng không cùng một nhóm 1 hoặc nhóm 2, tức là phải thuộc hai nhóm. Giả sử đó là:

$$a_i = b_j \left(i = 2;3;....;2014. j = 1;2;....;2014\right)$$

$$\Rightarrow a_i = a_k - a_1 \Rightarrow a_k = a_i + a_1 \ (k = 2;3;.....;2013).$$

Ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét. Ta có thể tổng quát bài toán trên:

Bài 2.5. *Cho n số tự nhiên đôi một khác nhau ($n > 3$) và nhỏ hơn $2n-2$. Chứng minh tồn tại ba số trong n số đó mà một số bằng tổng hai số kia.*

Lời giải. Sắp thứ tự n số đã cho:

$$0 \le a_1 \le a_2 < \ldots < a_n < 2n-2 \text{ (nhóm 1).}$$

Xét thêm $n-1$ số: $b_1 = a_2 - a_1$, $b_2 = a_3 - a_1$,

$$b_3 = a_4 - a_1, \ldots, b_{n-1} = a_n - a_1.$$

Ta có: $1 \le b_1 < b_2 < \ldots < b_{n-1} < 2n-2$ (nhóm 2).

Tập hợp gồm $2n-2$ số của hai nhóm trên (trừ a_1 của nhóm 1) nhận $2n-3$ giá trị $\{1; 2; \ldots; 2n-3\}$.

Theo nguyên lí Dirichlet có hai số bằng nhau nhưng không cùng một nhóm 1 hoặc nhóm 2, tức là phải thuộc hai nhóm. Giả sử đó là:

$$a_i = b_j \; (i = 2; 3; \ldots; n, j = 1; 2; \ldots; n-1)$$

$$\Rightarrow a_i = a_k - a_1 \Rightarrow a_k = a_i + a_1 \; (k = 2; 3; \ldots; n).$$

Ta có điều phải chứng minh.

3. Thí dụ 3. *Mỗi lần cho phép thay thế cặp số (a, b) thuộc tập hợp*

$$M = \{(16,4), (6,10), (8,12), (20,14)\}$$

bằng cặp số $(a + c, b + d)$ trong đó cặp số (c, d) cũng thuộc M. Hỏi sau một số hữu hạn lần thay thế ta có thể nhận được tập hợp các cặp số

$$M_1 = \{(2020,504), (426,360), (2021,120), (342,274)\}$$

hay không?

Lời giải.

Mọi cặp số (a, b) thuộc tập hợp M thì a, b đều là số chẵn, nên sau mỗi phép thay thế thì mọi cặp của M_1 các số cũng là số chẵn. Mặt khác $(2021,120)$ có số 2021 là số lẻ. Vậy không thể nhận được M_1 sau một số hữu hạn lần thay thế.

Nhận xét. Thực chất của bài 3 là sử dụng tính chất bất biến. Tức là trong đó tồn tại một thuộc tính không thay đổi sau mỗi lần thực hiện phép thay thế. Và tính chất bất biến trong bài luôn là số chẵn.

Khi tình huống thay đổi thì góc nhìn cũng thay đổi. Chẳng hạn:

Bài 3.1. *Mỗi lần cho phép thay thế cặp số (a, b) thuộc tập hợp $M = \{(16,4), (5,9), (8,12), (21,15)\}$ bằng cặp số $(a + c, b + d)$ trong đó cặp số (c, d) cũng thuộc M. Hỏi sau một số hữu hạn lần thay thế ta có thể nhận được tập hợp các cặp số*

$$M_1 = \{(2020,504), (427,360), (2021,120), (342,275)\}$$

hay không?

Bài 3.2. *Mỗi lần cho phép thay thế cặp số (a, b) thuộc tập hợp*

$$M = \{(16,4), (24,8), (76,12), (104,20)\}$$

bằng cặp số $(a + c, b + d)$ trong đó cặp số (c, d) cũng thuộc M. Hỏi sau một số hữu hạn lần thay thế ta có thể nhận được tập hợp các cặp số

$$M_1 = \{(2020,504), (424,1016), (574,1008), (232,404)\}$$

hay không?

Lời giải.

Xét (a, b) thuộc tập M, ta có $|a-b|$ chia hết cho 4 $\Rightarrow |(a+c)-(b+d)|$ chia hết cho 4 (vì $(c, d) \in M$).

Suy ra mọi cặp số của M_1 đều có tính chất nêu trên. Mặt khác $(574,1008) \in M_1$ nhưng $|1008 - 574| = 434$ không chia hết cho 4. Vậy không thể nhận được M_1 sau một số hữu hạn lần thay thế.

Nhận xét. Linh hoạt trong biến đổi, chúng ta có thể giải được bài sau bởi tính chất bất biến luôn chia hết cho 7.

Bài 3.3. *Mỗi lần cho phép thay thế cặp số (a, b) thuộc tập hợp*

$$M = \{(16,2), (4,32), (6,62), (78,8)\}$$

bằng cặp số $(a + c, b + d)$ trong đó cặp số (c, d) cũng thuộc M. Hỏi sau một số hữu hạn lần thay thế ta có thể nhận được tập hợp các cặp số

$$M_1 = \{(2018,702), (844,2104), (1056,2176), (2240,912)\}$$

hay không?

(Tuyển sinh lớp 10, THPT chuyên ĐHKHTN, năm học 2009- 2010, vòng 2)

Lời giải.

Xét (a, b) thuộc tập M ta có $|a-b|$ chia hết cho 7 $\Rightarrow |(a+c)-(b+d)|$ chia hết cho 7 (vì $(c, d) \in M$).

Suy ra mọi cặp số của M_1 đều có tính chất nêu trên. Mặt khác $(2240,912) \in M_1$ nhưng $|2240-912|=1328$ không chia hết cho 7. Vậy không thể nhận được M_1 sau một số hữu hạn lần thay thế.

Nhận xét.

- Như vậy, cách sáng tạo của dạng toán này là chọn các số có cùng số dư trong phép chia cho m ở giả thiết, còn kết luận thì chọn 1 cặp khác số dư trong phép chia cho m với các số còn lại.
- Sử dụng tính bất biến, chúng ta có bài toán đảo sau

Bài 3.4. *Mỗi lần cho phép thay thế cặp số (a, b) thuộc tập hợp*

$A=\{(2018,702),(844,2104),(1056,2176),(2240,912)\}$ *bằng cặp số $(a+c, b+d)$ trong đó cặp số (c, d) cũng thuộc A. Hỏi sau một số hữu hạn lần thay thế ta có thể nhận được tập hợp các cặp số* $B=\{(16,2),(4,32),(6,62),(78,8)\}$ *hay không?*

4. Thí dụ 4. *Trong tập hợp các số tự nhiên từ 1 đến 2013 có thể chọn ra nhiều nhất bao nhiêu số phân biệt thỏa mãn tổng ba số bất kỳ trong tập hợp các số được chọn đều chia hết cho 10.*

(Tuyển sinh lớp 10, THPT chuyên Bắc Giang, năm học 2012- 2013, vòng 2)

Lời giải. Gọi n là số phần tử của tập hợp được chọn $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$.

Dễ thấy 4 số 10, 20, 30, 40 thỏa mãn yêu cầu của bài nên $n \geq 4$.

Giả sử a_1, a_2, a_3, a_4 là bốn số bất kì trong tập hợp n số được chọn. Ta có: $(a_1+a_2+a_3) \vdots 10$,

$(a_1+a_3+a_4) \vdots 10, (a_1+a_2+a_4) \vdots 10, (a_2+a_3+a_4) \vdots 10$

$$\Rightarrow 3a_1+2(a_2+a_3+a_4) \vdots 10 \Rightarrow a_1 \vdots 10.$$

Tương tự ta có: $a_2 \vdots 10$, $a_3 \vdots 10$, $a_4 \vdots 10$.

Trong tập hợp các số tự nhiên từ 1 đến 2013 có 201 số chia hết cho 10. Do đó tập hợp các số tự nhiên chia hết cho 10 từ 1 đến 2013 là tập hợp lớn nhất thỏa mãn yêu cầu của bài.

Kết luận số cần tìm là 201.

Nhận xét. Dựa vào kỹ thuật của lời giải, chúng ta có thể sáng tạo ra bài toán sau

Bài 4.1. *Trong tập hợp các số tự nhiên từ 1 đến 2020 có thể chọn ra nhiều nhất bao nhiêu số phân biệt thỏa mãn tổng ba số bất kỳ trong tập hợp các số được chọn đều chia hết cho 10.*

Lời giải. Gọi n là số phần tử của tập hợp được chọn $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$.

Dễ thấy 4 số 10, 20, 30, 40 thỏa mãn yêu cầu của bài nên $n \geq 4$.

Giả sử a_1, a_2, a_3, a_4 là bốn số bất kì trong tập hợp n số được chọn. Ta có: $(a_1+a_2+a_3) \vdots 10$,

$(a_1+a_3+a_4) \vdots 10, (a_1+a_2+a_4) \vdots 10, (a_2+a_3+a_4) \vdots 10$

$$\Rightarrow 3a_1+2(a_2+a_3+a_4) \vdots 10 \Rightarrow a_1 \vdots 10.$$

Tương tự ta có: $a_2 \vdots 10$, $a_3 \vdots 10$, $a_4 \vdots 10$.

Trong tập hợp các số tự nhiên từ 1 đến 2020 có 202 số chia hết cho 10. Do đó tập hợp các số tự nhiên chia hết cho 10 từ 1 đến 2020 là tập hợp lớn nhất thỏa mãn yêu cầu của bài.

Kết luận số cần tìm là 202.

Nhận xét. Thay đổi một chút kết luận, chúng ta có thể sáng tạo ra bài toán sau

Bài 4.2. *Trong tập hợp các số tự nhiên từ 1 đến 2020 có thể chọn ra nhiều nhất bao nhiêu số phân biệt thỏa mãn tổng ba số bất kỳ trong tập hợp các số được chọn đều chia hết cho 5.*

Lời giải. Gọi n là số phần tử của tập hợp được chọn $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$.

Dễ thấy 4 số 5, 10, 15, 20 thỏa mãn yêu cầu của bài nên $n \geq 4$.

Giả sử a_1, a_2, a_3, a_4 là bốn số bất kì trong tập hợp n số được chọn. Ta có: $(a_1+a_2+a_3) \vdots 5$,

$(a_1+a_3+a_4) \vdots 5, (a_1+a_2+a_4) \vdots 5, (a_2+a_3+a_4) \vdots 5$

$$\Rightarrow 3a_1+2(a_2+a_3+a_4) \vdots 5 \Rightarrow a_1 \vdots 5.$$

Tương tự ta có: $a_2 \vdots 5$, $a_3 \vdots 5$, $a_4 \vdots 5$.

Trong tập hợp các số tự nhiên từ 1 đến 2020 có 404 số chia hết cho 5. Do đó tập hợp các số tự nhiên chia hết cho 5 từ 1 đến 2020 là tập hợp lớn nhất thỏa mãn yêu cầu của bài.
Kết luận số cần tìm là 404.

Nhận xét. Thay đổi một chút giả thiết, chúng ta có thể sáng tạo ra bài toán sau

Bài 4.3. *Trong tập hợp các số tự nhiên từ 1 đến 2020 có thể chọn ra nhiều nhất bao nhiêu số phân biệt thỏa mãn tổng bốn số bất kỳ trong tập hợp các số được chọn đều chia hết cho 5.*

5. Thí dụ 5. *Cho 13 số thực thỏa mãn điều kiện: Tổng của 6 số bất kỳ trong chúng nhỏ hơn tổng của 7 số còn lại. Chứng minh rằng tất cả các số đã cho đều dương.*

(Tuyển sinh lớp 10, Phổ thông Năng khiếu, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh, năm học 2006 - 2007)

Phân tích. Với điều kiện tổng 6 số của 6 số bất kỳ trong chúng nhỏ hơn tổng của 7 số còn lại. Rất tự nhiên chúng ta nghĩ tới việc tổng 6 số lớn nhất nhỏ hơn tổng 7 số nhỏ nhất. Và chỉ cần chứng tỏ số nhỏ nhất trong 13 số đó là số dương là xong. Do vậy việc sắp xếp thứ tự 13 số là điều cần thiết.

Lời giải. Gọi 13 số đã cho là: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{13}$.
Không mất tính tổng quát, giả sử

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_{13}.$$

Từ giả thiết

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_6 < a_7 + a_8 + \ldots + a_{13}$$

$$\Rightarrow a_{13} > (a_1 + a_2 + \ldots + a_6) - (a_7 + a_8 + \ldots + a_{13})$$

Mà $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_{13}$ suy ra điều phải chứng minh.

Nhận xét. Nếu ta đặc biệt hóa 13 số thực thành 13 số tự nhiên phân biệt và chú ý rằng $a_1 - a_7 \geq 6$.

Ta sẽ được bài toán sau

Bài 5.1. *Cho 13 số tự nhiên phân biệt sao cho tổng của 7 số bất kì trong chúng lớn hơn tổng của 6 số còn lại. Chứng minh rằng tất cả 13 số đã cho đều không nhỏ hơn 37.*

Nhận xét. Lời giải bài 5.1 sẽ tương tự lời giải 5.2 sau đây:

Bài 5.2. *Cho 5 số tự nhiên phân biệt sao cho tổng của ba số bất kì trong chúng lớn hơn tổng của hai số còn lại. Chứng minh rằng tất cả 5 số đã cho đều không nhỏ hơn 5.*

(Tuyển sinh lớp 10, THPT chuyên Thái Bình, năm học 2017 - 2018)

Lời giải. Gọi 5 số đã cho là: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5.
Không mất tính tổng quát, giả sử

$$a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5.$$

Từ giả thiết

$$a_1 + a_2 < a_3 + a_4 + a_5$$

$$\Rightarrow a_5 > (a_1 - a_3) + (a_2 - a_4).$$

Mà $a_1 - a_3 = a_1 - a_2 + a_2 - a_3 \geq 1 + 1 = 2;$

$a_2 - a_4 = a_2 - a_3 + a_3 - a_4 \geq 1 + 1 = 2$

$$\Rightarrow a_5 > (a_1 - a_3) + (a_2 - a_4) \geq 2 + 2 = 4 \Rightarrow a_5 \geq 5.$$

Ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét. Nếu ta thêm điều kiện thì bài toán sẽ đặc sắc và khó hơn.

Bài 5.3. *Cho $2k + 1$ số tự nhiên đôi một khác nhau $(k \geq 1; k \in \mathbb{N}^*)$ thỏa mãn tổng của $k + 1$ số tự nhiên bất kì trong các số đã cho lớn hơn tổng của k số còn lại cộng với 2020. Chứng minh rằng mỗi số tự nhiên trong $2k + 1$ đã cho lớn hơn $k^2 + 2020$.*

Hướng dẫn giải.
Rõ ràng với mỗi $k \geq 1$ có vô số bộ $2k + 1$ số thỏa mãn điều kiện đã cho. Từ đó học sinh gặp khó khăn khi tìm lời giải cho bộ $2k + 1$ thỏa mãn điều kiện bài toán.
Do mỗi bộ $2k + 1$ số tự nhiên hữu hạn nên có thể sắp xếp chúng theo thứ tự tăng dần: Giả sử

$$a_1 < a_2 < a_3 \ldots\ldots < a_{2k} < a_{2k+1} \quad (1).$$

Từ đó có thể diễn đạt lại bài toán như sau: Cho $2k + 1$ số tự nhiên thỏa mãn điều kiện (1) và tổng của $k + 1$ số bất kỳ lấy trong (1) lớn hơn tổng của k số còn lại cộng với 2020. Chứng minh rằng mỗi số trong các số lấy từ (1) lớn hơn $k + 2020$.

Với cách diễn đạt trên sẽ xuất hiện ý tưởng chứng minh là chỉ ra $a_1 > k + 2020$. Nói cách khác, phải chứng tỏ số bé nhất lớn hơn $k + 2020$. Khi đó ta có kĩ thuật chứng minh như sau:

$$a_{k+2} + a_{k+3} + \ldots + a_{2k+1} + 2020 < a_1 + a_2 + \ldots + a_{k+1}$$

$$\Leftrightarrow (a_{k+2} - a_2) + (a_{k+3} - a_3) + \ldots + (a_{2k+1} - a_{k+1}) + 2020 < a_1$$

Do mỗi số hạng trong dấu ngoặc ở vế trái lớn hơn hoặc bằng 1 (hiệu hai số tự nhiên khác nhau) do có k số hạng trong ngoặc nên $a_1 > k + 2020$.

Nhận xét. Nếu ta thêm điều kiện đặc biệt, biết phần tử bé nhất thì bài toán sẽ lạ và khó hơn. Chẳng hạn:

Bài 5.4. *Cho tập hợp A gồm 21 phần tử là các số nguyên khác nhau thỏa mãn tổng 11 phần tử bất kỳ lớn hơn tổng 10 phần tử còn lại. Biết các số 101 và 102 thuộc tập A. Tìm tất cả các phần tử của A.*

(Thi học sinh giỏi lớp 9, TP. Hải Phòng, năm học 2016- 2017)

Lời giải. Giả sử $A = \{a_1; a_2; a_3; \ldots; a_{21}\}$ với $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{21} \in \mathbb{Z}$ và $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{21}$.

Theo giả thiết ta có:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{11} > a_{12} + a_{13} + \ldots + a_{21}$$

$$\Leftrightarrow a_1 > a_{12} - a_2 + a_{13} - a_3 + \ldots + a_{21} - a_{11} \quad (1).$$

Mặt khác với $x, y \in \mathbb{Z}$ và $x < y$ thì $y \geq x + 1$, suy ra: $a_{12} - a_2 \geq 10$, $a_{13} - a_3 \geq 10, \ldots, a_{21} - a_{11} \geq 10$ (2).

Nên từ (1) suy ra:

$$a_1 > 10 + 10 + \ldots + 10 = 100$$

$$\Rightarrow a_1 = 101 \text{ (vì } 101 \in A)$$

$$\Rightarrow 101 > a_{12} - a_2 + a_{13} - a_3 + \ldots + a_{21} - a_{11} \geq 100$$

$$\Rightarrow a_{12} - a_2 + a_{13} - a_3 + \ldots + a_{21} - a_{11} = 100.$$

Kết hợp với (2) ta được:

$$a_{12} - a_2 = a_{13} - a_3 = \ldots = a_{21} - a_{11} = 10 \quad (3)$$

$$\Rightarrow 10 = a_{12} - a_2$$
$$= (a_{12} - a_{11}) + (a_{11} - a_{10}) + \ldots + (a_3 - a_2) \geq 10$$

$$\Rightarrow a_{12} - a_{11} = a_{11} - a_{10} = \ldots = a_3 - a_2 = 1 \quad (4).$$

Ta có $a_1 = 101$ mà $102 \in A \Rightarrow a_2 = 102$.

Kết hợp với (3) và (4) suy ra:

$$A = \{101, 102, 103, \ldots, 121\}.$$

Bài 5.5. *Cho 21 số nguyên đôi một khác nhau thỏa mãn điều kiện tổng của 11 số tùy ý trong chúng luôn lớn hơn tổng của 10 số còn lại. Biết trong 21 số này có một số bằng 101 và số lớn nhất bằng 2014. Tìm 19 số còn lại.*

Lời giải. Gọi 21 số nguyên đó là $a_1, a_2, \ldots, a_{20}, a_{21}$ và giả sử rằng $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{20} < a_{21}$ thì $a_{21} = 2014$.

Theo giả thiết ta có:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + \ldots + a_{11} > a_{12} + a_{13} + \ldots + a_{21}$$

nên $a_1 > (a_{12} - a_2) + (a_{13} - a_3) + \ldots + (a_{21} - a_{11})$.

Mỗi hiệu số ở vế phải bất đẳng thức không nhỏ hơn 10 và có 10 hiệu số nên $a_1 > 100$, suy ra $a_1 \geq 101$.

Vì a_1 là số nguyên nhỏ nhất nên $a_1 = 101$ và $100 \geq (a_{12} - a_2) + (a_{13} - a_3) + \ldots + (a_{21} - a_{11}) \geq 100$.

Suy ra 10 hiệu số này đều bằng 10. Do đó:

$$a_{11} = a_{21} - 10 = 2014 - 10 = 2004.$$

Từ $a_{11} = 2004$ đến $a_{21} = 2014$ có 11 số khác nhau nên dãy số $a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{20}$ là dãy các số nguyên liên tiếp $a_{12} = 2005$, $a_{13} = 2006, \ldots, a_{20} = 2013$ suy ra: $a_2 = a_{12} - 10 = 2005 - 10 = 1995$,

$$a_3 = a_{13} - 10 = 2006 - 10 = 1996, \ldots,$$

$$a_{10} = a_{20} - 10 = 2013 - 10 = 2003.$$

Vậy 19 số phải tìm là các số nguyên liên tiếp từ 1995 đến 2013.

Bài 5.6. *Cho 5 số nguyên phân biệt sao cho tổng của ba số bất kì trong chúng lớn hơn tổng của hai số còn lại. Tìm giá trị nhỏ nhất của tích 5 số nguyên đó.*

Bài 5.7. *Cho tập hợp A gồm 11 phần tử là các số nguyên khác nhau thỏa mãn tổng 21 phần tử bất kỳ lớn hơn tổng 20 phần tử còn lại. Biết các số 401 và 402 thuộc tập A. Tìm tất cả các phần tử của A.*

(Thi học sinh giỏi lớp 9, tỉnh Kon Tum, năm học 2019 - 2020)

6. Thí dụ 6. *Cho 7 số nguyên dương khác nhau mà mỗi số không vượt quá 1706. Chứng minh rằng tồn tại trong chúng ba số a, b, c sao cho*

$$a < b + c < 4a.$$

Lời giải. Xét 7 số nguyên dương khác nhau mà mỗi số không vượt quá 1706.

Không giảm tính tổng quát, giả sử 7 số đã cho là:

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < a_7.$$

Giả sử không tồn tại trong chúng ba số a, b, c nào mà $a < b + c < 4a$. Điều này nghĩa là, với mọi 3 số a, b, c trong chúng thì $a \geq b + c$ hoặc $b + c \geq 4a$. Rõ ràng trường hợp $a \geq b + c$ là không thể xảy ra. Xét trường hợp $b + c \geq 4a$. Ta có :

$a_2 \geq a_1 + 1;$

$a_3 + a_1 \geq 4a_2 \geq 4(a_1 + 1) \Rightarrow a_3 \geq 3a_1 + 4;$

$a_4 + a_1 \geq 4a_3 \geq 4(3a_1 + 4) \Rightarrow a_4 \geq 11a_1 + 16;$

$a_5 + a_1 \geq 4a_4 \geq 4(11a_1 + 16) \Rightarrow a_5 \geq 43a_1 + 64;$

$a_6 + a_1 \geq 4a_5 \geq 4(43a_1 + 64) \Rightarrow a_6 \geq 171a_1 + 256;$

$a_7 + a_1 \geq 4a_6 \geq 4(171a_1 + 256)$

$$\Rightarrow a_7 \geq 683a_1 + 1024 \geq 683.1 + 1024 = 1707 \quad (\text{do } a_1 \geq 1),$$

mâu thuẫn với $a_7 \leq 1706$. Vậy giả sử trên là sai. Do đó trong 7 số nguyên dương khác nhau mà mỗi số không vượt quá 1706 luôn tìm được 3 số a, b, c thỏa mãn $a < b + c < 4a$.

Nhận xét. Thay đổi một chút kết luận, chúng ta có thể sáng tạo ra bài toán sau:

Bài 6.1. *Cho 7 số nguyên dương khác nhau mà mỗi số không vượt quá 364. Chứng minh rằng tồn tại trong chúng ba số a, b, c sao cho*

$$a < b + c < 3a.$$

Lời giải. Xét 7 số nguyên dương khác nhau mà mỗi số không vượt quá 364. Không giảm tính tổng quát, giả sử 7 số đã cho là:

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < a_7.$$

Giả sử không tồn tại trong chúng ba số a, b, c nào mà $a < b + c < 3a$. Điều này nghĩa là, với mọi 3 số a, b, c trong chúng thì $a \geq b + c$ hoặc $b + c \geq 3a$. Rõ ràng trường hợp $a \geq b + c$ là không thể xảy ra. Xét trường hợp $b + c \geq 3a$. Ta có:

$a_2 \geq a_1 + 1;$

$a_3 + a_1 \geq 3a_2 \geq 3(a_1 + 1) \Rightarrow a_3 \geq 2a_1 + 3;$

$a_4 + a_1 \geq 3a_3 \geq 3(2a_1 + 3) \Rightarrow a_4 \geq 5a_1 + 9;$

$a_5 + a_1 \geq 3a_4 \geq 3(5a_1 + 9) \Rightarrow a_5 \geq 14a_1 + 27;$

$a_6 + a_1 \geq 3a_5 \geq 3(14a_1 + 27) \Rightarrow a_6 \geq 41a_1 + 81;$

$a_7 + a_1 \geq 3a_6 \geq 3(41a_1 + 81)$

$$\Rightarrow a_7 \geq 122a_1 + 243 \geq 122.1 + 243 = 365 \quad (\text{do } a_1 \geq 1),$$

mâu thuẫn với $a_7 \leq 364$. Vậy giả sử trên là sai. Do đó trong 7 số nguyên dương khác nhau mà mỗi số không vượt quá 364 luôn tìm được 3 số a, b, c thỏa mãn $a < b + c < 3a$.

Nhận xét. Tương tự như trên, chúng ta có thể giải được bài toán sau

Bài 1. Cho 8 số nguyên dương khác nhau mà mỗi số không vượt quá 1097. Chứng minh rằng tồn tại trong chúng ba số a, b, c sao cho $a < b + c < 3a$.

Bài 2. Cho 7 số nguyên dương khác nhau mà mỗi số không vượt quá 32. Chứng minh rằng tồn tại trong chúng ba số a, b, c sao cho

$$a < b + c < 2a.$$

Nhận xét. Nếu ta giữ nguyên kết luận của thí dụ 6, ta tổng quát giả thiết thì được bài toán sau:

Bài 7.4. Cho n số nguyên dương khác nhau ($n > 3$) mà mỗi số không vượt quá $\frac{5.4^{n-2} - 2}{3}$. Chứng minh rằng tồn tại trong chúng ba số a, b, c sao cho $a < b + c < 4a$.

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN, TỈNH BẮC NINH NĂM HỌC 2023 - 2024

Câu 1. 1) *Rút gọn biểu thức*

$$P=\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}.$$

2) *Vẽ đường thẳng d là đồ thị hàm số $y=2x-4$. Tính khoảng cách từ gốc toạ độ O đến đường thẳng d.*

Lời giải.

1) Rút gọn được $P=2$.

2) Khoảng cách từ gốc toạ độ O đến đường thẳng d bằng $\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

Câu 2. 1) *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases}6x+6y=2023|xy|\\ x-2y=3xy\end{cases}$$

2) *Giải phương trình*

$$2x+3+\sqrt{4x^2+9x+2}=2\sqrt{x+2}+\sqrt{4x+1}.$$

Lời giải. 1) Xét hệ phương trình

$$\begin{cases}6x+6y=2023|xy|\\ x-2y=3xy\end{cases}\ (1).$$

Nếu $xy>0$ thì

$$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{6}{y}+\frac{6}{x}=2023\\ \frac{1}{y}-\frac{2}{x}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{y}=\frac{2032}{9}\\ \frac{1}{x}=\frac{2005}{18}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{18}{2005}\\ y=\frac{9}{2032}\end{cases}$$

(thoả mãn $xy>0$).

Nếu $xy<0$ thì

$$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{6}{y}+\frac{6}{x}=-2023\\ \frac{1}{y}-\frac{2}{x}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{y}=-\frac{2014}{9}\\ \frac{1}{x}=-\frac{2041}{18}\end{cases}$$

(loại, vì không thoả mãn $xy<0$).

Nếu $xy=0$ thì từ (1) ta tính được $x=y=0$.

Vậy hệ phương trình (1) có đúng 2 nghiệm $(x;\,y)$ là $(0;0)$ và $\left(\frac{18}{2005};\frac{9}{2032}\right)$.

2) Giải phương trình

$$2x+3+\sqrt{4x^2+9x+2}=2\sqrt{x+2}+\sqrt{4x+1}\ (2).$$

ĐK: $x\geq-\frac{1}{4}$. Ta có:

$$(2)\Leftrightarrow 2x+3+\sqrt{(x+2)(4x+1)}=2\sqrt{x+2}+\sqrt{4x+1}.$$

Đặt $t=2\sqrt{x+2}+\sqrt{4x+1}$ (với $t\geq\sqrt{7}$) thì

$$t^2=8x+4\sqrt{(x+2)(4x+1)}+9$$

hay $$2x+\sqrt{(x+2)(4x+1)}=\frac{t^2-9}{4}.$$

Phương trình (2) trở thành: $\frac{t^2-9}{4}+3=t$

$$\Leftrightarrow t^2-4t+3=0\Leftrightarrow t=1 \text{ hoặc } t=3.$$

Kết hợp với điều kiện $t\geq\sqrt{7}$ ta lấy $t=3$.

Với $t=3$ thì

$$2\sqrt{x+2}+\sqrt{4x+1}=3\Leftrightarrow 2x+\sqrt{(x+2)(4x+1)}=0$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{(x+2)(4x+1)}=-2x$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 0\\ (x+2)(4x+1)=4x^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{2}{9}.$$

Vậy phương trình (2) có nghiệm duy nhất $x=-\frac{2}{9}$.

Câu 3. *1) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), có ba góc nhọn, $AB < AC$, hai đường cao BE và CF. Các tiếp tuyến của (O) tại B và C cắt nhau tại S. Gọi M là giao điểm của BC và SO.*

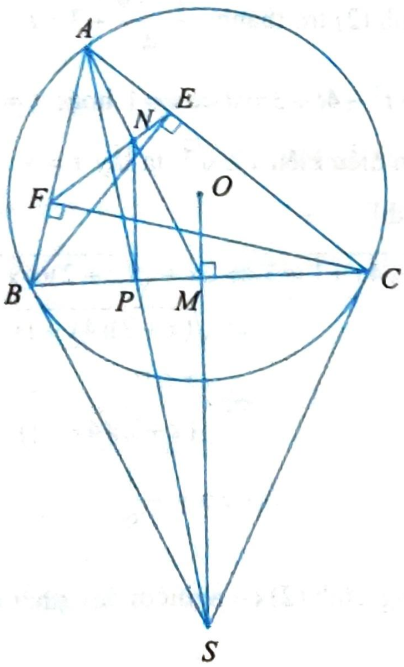
a) Chứng minh rằng tam giác EAB đồng dạng với tam giác MBS, từ đó suy ra tam giác AEM đồng dạng với tam giác ABS.

b) Gọi N là giao điểm của AM và EF, P là giao điểm của SA và BC. Chứng minh rằng NP vuông góc với BC.

2) Cho hình chữ nhật ABCD. Lấy các điểm E, F thuộc cạnh AB (E nằm giữa A, F); G, H thuộc cạnh BC (G nằm giữa B, H); I, J thuộc cạnh CD (I nằm giữa C, J); K, M thuộc cạnh DA (K nằm giữa D, M) sao cho E, F, G, H, I, J, K, M đôi một phân biệt và khác các đỉnh của hình chữ nhật ABCD, đồng thời hình đa giác EFGHIJKM có các góc bằng nhau. Chứng minh rằng nếu độ dài các cạnh của hình đa giác EFGHIJKM là các số hữu tỉ (theo đơn vị cm) thì $EF = IJ$.

Lời giải.

1) a)



Ta có $OS \perp BC$ tại trung điểm M của BC nên $\widehat{BEA} = \widehat{SMB} = 90°$.

Mà $\widehat{BAC} = \widehat{SBC} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{BC}$. Suy ra ΔEAB đồng dạng với ΔMBS (g.g).

Hai tam giác EAB, MBS đồng dạng nên

$$\frac{AB}{AE} = \frac{BS}{BM}.$$

Tam giác BEC vuông tại E, EM là trung tuyến nên $BM = ME$. Suy ra $\frac{AB}{AE} = \frac{BS}{ME}$ (1).

Tam giác MEC cân tại M nên $\widehat{MEC} = \widehat{MCE}$.
Mặt khác

$$\widehat{ABS} + \widehat{ACB} = 180° = \widehat{AEM} + \widehat{MEC} = \widehat{AEM} + \widehat{ACB}$$

$$\Rightarrow \widehat{ABS} = \widehat{AEM} \quad (2).$$

Từ (1), (2) suy ra hai tam giác AEM, ABS đồng dạng với nhau (c.g.c).

b) Hai tam giác AEM, ABS đồng dạng nên $\widehat{BAP} = \widehat{EAN}$; $\widehat{AME} = \widehat{ASB}$ (3).

Mà tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn đường kính BC nên $\widehat{ABP} = \widehat{AEN}$. Suy ra hai tam giác AEN, ABP đồng dạng, dẫn tới $\frac{AN}{AP} = \frac{NE}{BP}$ (4).

Ta có:

$$\widehat{NEM} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = \widehat{NEM} + \widehat{AEN} + \widehat{MEC} = 180°.$$

Suy ra $\widehat{NEM} = \widehat{BAC} = \widehat{SBP}$ (5).

Từ (3) và (5) suy ra hai tam giác EMN, BSP đồng dạng. Do đó $\frac{NE}{BP} = \frac{MN}{PS}$ (6).

Từ (4) và (6) suy ra:

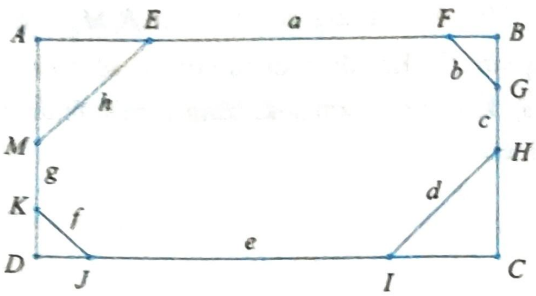
$$\frac{AN}{AP} = \frac{NM}{PS} \Rightarrow \frac{AN}{MN} = \frac{AP}{PS} \Rightarrow NP \parallel MS.$$

Ta lại có $SM \perp BC$. Vậy $NP \perp BC$.

2) Đặt $EF = a$; $FG = b$; $GH = c$; $HI = d$; $IJ = e$; $JK = f$; $KM = g$; $ME = h$ (theo đơn vị cm, với a,b,c,d,e,f,g,h là các số hữu tỉ dương).

Do các góc của hình bát giác $EFGHIJKM$ bằng nhau nên mỗi góc trong của hình bát giác đó có số đo là:

$$\frac{(8-2).180^\circ}{8} = 135^\circ.$$



Suy ra mỗi góc ngoài của hình bát giác này là $180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$.

Do đó các tam giác $MAE; FBG; CIH$; DKJ là các tam giác vuông cân.

Ta có $MA = AE = \frac{h}{\sqrt{2}}$; $BF = BG = \frac{b}{\sqrt{2}}$;

$$CH = CI = \frac{d}{\sqrt{2}}; DK = DJ = \frac{f}{\sqrt{2}}.$$

Vì $AB = CD$ nên $\frac{h}{\sqrt{2}} + a + \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{f}{\sqrt{2}} + e + \frac{d}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow (e-a)\sqrt{2} = h + b - f - d.$$

Nếu $e - a \neq 0$ thì $\sqrt{2} = \frac{h+b-f-d}{e-a}$, điều này vô lí, do $\sqrt{2}$ là số vô tỉ, còn $\frac{h+b-f-d}{e-a}$ là số hữu tỉ.

Vậy $e - a = 0 \Leftrightarrow e = a$ hay $EF = IJ$ (đpcm).

Câu 4. *Cho các số nguyên dương x, y, z thoả mãn*

$$x^3 + y^3 + z^3 = 18(x+y+z).$$

1) Chứng minh rằng $x + y + z$ chia hết cho 6.

2) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $F = xyz$.

Lời giải. 1) Từ giả thiết ta có:

$$\left(x^3 - x\right) + \left(y^3 - y\right) + \left(z^3 - z\right) = 17(x+y+z).$$

Tích của ba số nguyên liên tiếp luôn chia hết cho 6 nên $x^3 - x = (x-1)x(x+1) \vdots 6$. Tương tự: $y^3 - y \vdots 6$, $z^3 - z \vdots 6$. Suy ra $17(x+y+z) \vdots 6$.

Mà 17 và 6 nguyên tố cùng nhau nên $x + y + z \vdots 6$.

2) Ta có $x + y + z = 6m$, $x^3 + y^3 + z^3 = 108m$, với $m \in \mathbb{N}^*$.

Vì $\frac{x^3+y^3+z^3}{3} \geq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3$ nên

$$\frac{108m}{3} \geq \left(\frac{6m}{3}\right)^3 \Leftrightarrow m^2 \leq \frac{9}{2}, \text{ suy ra } m \leq 2$$

$$\Rightarrow x + y + z \leq 12.$$

Lúc này $F = xyz \leq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 \leq \left(\frac{12}{3}\right)^3 = 64$ (1).

Từ $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

$= (x+y+z)\left(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx\right)$ suy ra:

$$108m - 3F = 6m\left(36m^2 - 3(xy + yz + zx)\right)$$

$$\Leftrightarrow F = 36m - 6m\left(12m^2 - (xy + yz + zx)\right).$$

Do đó $F \vdots 6$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $F \leq 60$ (3).

Đẳng thức ở (3) xảy ra, chẳng hạn khi

$$\begin{cases} x + y + z = 12 \\ 60 = 72 - 12\left(48 - (xy + yz + zx)\right) \\ xyz = 60 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 12 \\ xy + yz + zx = 47 \\ xyz = 60 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x; y; z) \text{ là hoán vị của } (3;4;5).$$

Vậy giá trị lớn nhất của F là 60, đạt được chẳng hạn khi $(x; y; z)$ là hoán vị của $(3;4;5)$.

Câu 5. 1) Cho các số thực dương a,b,c thoả mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{15}{ab+bc+ca}\geq 6-abc.$$

2) Trên mặt phẳng cho 2008 điểm bất kì sao cho khoảng cách giữa 2 điểm tùy ý luôn lớn hơn 1. Chứng minh rằng mỗi hình tròn có bán kính bằng 1 chỉ chứa không quá 5 điểm trong 2008 điểm đã cho.

Lời giải. 1) Ta sẽ chứng minh

$$(3-2a)(3-2b)(3-2c)\leq abc \text{ (1)}.$$

Nếu $(3-2a)(3-2b)(3-2c)\leq 0$ thì (1) đúng.

Nếu $(3-2a)(3-2b)(3-2c)>0$ thì

$3-2a>0, 3-2b>0, 3-2c>0$ (do $a+b+c=3$).

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\begin{cases}(3-2a)(3-2b)\leq\left(\dfrac{3-2a+3-2b}{2}\right)^2=c^2\\(3-2a)(3-2c)\leq\left(\dfrac{3-2a+3-2c}{2}\right)^2=b^2\\(3-2c)(3-2b)\leq\left(\dfrac{3-2c+3-2b}{2}\right)^2=a^2\end{cases}$$

$$\Rightarrow (3-2a)(3-2b)(3-2c)\leq abc.$$

Dấu "=" ở (1) xảy ra khi $a=b=c=1$.

Ta có (1) tương đương với

$$27-9(2a+2b+2c)+3(4ab+4bc+4ca)-8abc\leq abc$$

$$\Leftrightarrow 27-9.6+12(ab+bc+ca)-8abc\leq abc$$

(do $a+b+c=3$)

$$\Leftrightarrow abc\geq\frac{4}{3}(ab+bc+ca)-3.$$

Áp dụng bất đẳng thức $3(ab+bc+ca)\leq(a+b+c)^2$ ta có: $abc+\dfrac{15}{ab+bc+ca}$

$$\geq\frac{4}{3}(ab+bc+ca)+\frac{12}{ab+bc+ca}+\frac{3}{ab+bc+ca}-3$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{4}{3}(ab+bc+ca)\frac{12}{ab+bc+ca}}+\frac{9}{(a+b+c)^2}-3$$

$$=8+1-3=6.$$

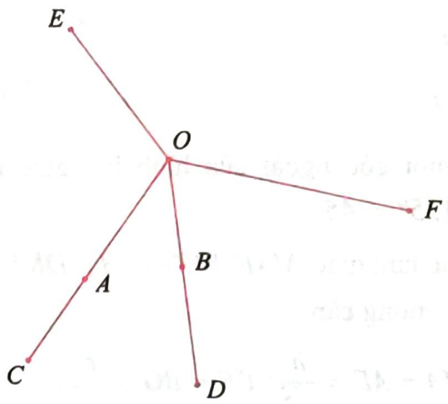
Suy ra $\dfrac{15}{ab+bc+ca}\geq 6-abc$ (đpcm).

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$.

2. Ta chứng minh bài toán bằng phương pháp phản chứng.

Giả sử tồn tại hình tròn tâm O bán kính bằng 1 có thể chứa được n điểm trong số 2008 điểm đã cho, $n\in\mathbb{N}, n\geq 6$. Gọi 6 điểm trong số n điểm đó là A,B,M,N,E,F.

TH1: Một điểm trong các điểm A,B,M,N,E,F trùng với O. Khi đó 5 điểm còn lại sẽ cách tâm O một khoảng bé hơn hoặc bằng 1, mâu thuẫn với giả thiết.



TH2: Các điểm A,B,M,N,E,F không trùng tâm O. Khi đó vẽ các bán kính của đường tròn (O) đi qua 6 điểm trên. Vì có 6 bán kính nên tồn tại 2 bán kính tạo thành một góc bé hơn hoặc bằng $60°$. Giả sử 2 bán kính OC và OD lần lượt đi qua A và B, $\widehat{AOB}\leq 60°$.

Ta có $\widehat{OBA}+\widehat{OAB}=180°-\widehat{AOB}\geq 120°$.

Suy ra một trong hai góc $\widehat{OBA},\widehat{OAB}$ phải lớn hơn hoặc bằng $60°$. Không mất tính tổng quát giả sử $\widehat{OBA}\geq 60°$, suy ra $AB\leq OA\leq OC=1$, mâu thuẫn với giả thiết.Từ hai trường hợp trên chứng tỏ không tồn tại hình tròn tâm O bán kính bằng 1 chứa được nhiều hơn 5 điểm trong số 2008 điểm đã cho. Vậy mỗi hình tròn có bán kính bằng 1 chỉ chứa không quá 5 điểm trong 2008 điểm đã cho.

NGUYỄN VĂN XÁ

(*GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh*) ***Giới thiệu***

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN, TỈNH BẮC GIANG NĂM HỌC 2023 – 2024

(*Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề*)

Câu 1. (5,0 *điểm*).

1.1. Rút gọn biểu thức

$$Q=\left(\frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}+\frac{x-y}{\sqrt{x^2-y^2}-x+y}\right).\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2-y^2}}$$

với $x>y>0$.

1.2. Cho đường thẳng d có phương trình: $y=(3m+1)x-6m-1$, m là tham số. Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng d là lớn nhất.

1.3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2-2(3m-1)x+m^2-m-4=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn

$$\left|x_1+x_2+\sqrt{x_1x_2}\right|+\left|x_1+x_2-\sqrt{x_1x_2}\right|=2008.$$

Câu 2. (4,0 *điểm*).

2.1. Giải phương trình:

$$4\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}=x+7.$$

2.2. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}x^2+x-2xy=2\\ x^4+x^2-4x^3y=4-4x^2y^2\end{cases}$$

Câu 3. (4,0 *điểm*).

3.1. Tìm các bộ ba số nguyên dương $(x;y;z)$ thỏa mãn đẳng thức dưới đây:

$$x^3+y^3+x^2(3y+2z)+y^2(3x+2z)$$
$$+z^2(x+y)+4xyz=2023.$$

3.2. Trên mặt phẳng cho 2×2024 điểm phân biệt, trong đó không có bất kỳ 3 điểm nào thẳng hàng. Người ta tô 2024 điểm trong các điểm đã cho bằng màu đỏ và tô 2024 điểm còn lại bằng màu xanh. Chứng minh rằng, bao giờ cũng tồn tại một cách nối tất cả các điểm màu đỏ với tất cả các điểm màu xanh bởi 2024 đoạn thẳng (mỗi đoạn thẳng có hai điểm đầu mút là một cặp điểm đỏ - xanh) sao cho hai đoạn thẳng bất kỳ trong đó không có điểm chung.

Câu 4. (6,0 *điểm*). Cho đường tròn $(O;R)$ và dây cung BC cố định của đường tròn thỏa mãn $BC<2R$. Một điểm A di chuyển trên $(O;R)$ sao cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Các đường cao AD,BE,CF của tam giác ABC cắt nhau tại H. Đường phân giác của $\widehat{CHE}$ kéo dài về hai phía cắt AB và AC lần lượt tại M và N.

4.1. Chứng minh tam giác AMN cân tại A.

4.2. Gọi I,P,Q,J lần lượt là hình chiếu của D trên các cạnh AB,BE,CF,AC. Chứng minh rằng bốn điểm I,P,Q,J cùng nằm trên một đường thẳng vuông góc với AO.

4.3. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt đường phân giác trong của $\widehat{BAC}$ tại điểm thứ hai K. Chứng minh rằng HK luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 5. (1,0 *điểm*). Cho x,y,z là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện $x+y+z=xyz$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}.$$

NGUYỄN ANH TUẤN
(*Trường THPT chuyên Bắc Giang*)
Giới thiệu

DIỄN ĐÀN DẠY HỌC TOÁN

THEO CHƯƠNG TRÌNH VÀ SGK MỚI

MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA ĐỊNH LÍ SIN VÀ CÔSIN

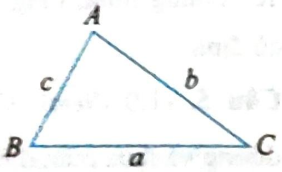
NGUYỄN CÔNG CHUẨN
(GV THPT chuyên, Đại học Vinh)

Trong chương trình, Sách giáo khoa năm 2006 và trong chương trình GDPT năm 2018 nội dung định lý côsin và định lý sin chiếm một vị trí khá quan trọng trong chương trình GDPT môn Toán lớp 10. Việc khai thác ứng dụng của định lý côsin và định lý sin có thể giúp học sinh phát triển các năng lực trí tuệ như: quan sát, ghi nhớ, trí tưởng tượng, tư duy độc lập, linh hoạt, sáng tạo, vận dụng kiến thức đã học để giải quyết vấn đề đặt ra một cách tốt nhất không chỉ trong nội bộ toán học mà còn biết vận dụng kiến thức đã học để giải các bài toán đặt ra trong thực tiễn. Góp phần phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học cho học sinh. Giúp các em ngày càng tiến bộ và cảm thấy vui khi nhận ra ý nghĩa học Toán rất có ích cho cuộc sống hằng ngày.

Nội dung của định lý côsin và định lý sin được phát biểu như sau:

Định lý côsin. Trong tam giác ABC bất kì với $BC=a, CA=b, AB=c$ ta có:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$
$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$



Hệ quả. $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$;

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca};$$

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

Định lý sin. Trong tam giác ABC bất kỳ với $BC=a, CA=b, AB=c$ và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp, ta có: $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$.

Hệ quả. • $R=\dfrac{a}{2\sin A}=\dfrac{b}{2\sin B}=\dfrac{c}{2\sin C}$;

• $a=2R\sin A, b=2R\sin B, c=2R\sin C$.

• $\sin A=\dfrac{a}{2R}, \sin B=\dfrac{b}{2R}, \sin C=\dfrac{c}{2R}$.

Sau đây là một số ứng dụng của định lý côsin và định lý sin trong hoạt động giải toán:

1. Tính các yếu tố cạnh, góc và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác

Bài 1. *Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh a,b,c thỏa mãn $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}=\dfrac{3}{a+b+c}$. Hãy tính số đo góc $\widehat{B}$.*

Lời giải. Từ giả thiết ta có:

$$\frac{a+b+c}{a+b}+\frac{a+b+c}{b+c}=3$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{c}{a+b}+1+\frac{a}{b+c}=3 \Leftrightarrow \frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}=1$$

$$\Leftrightarrow bc+c^2+a^2+ab=ab+ac+b^2+bc$$

$$\Leftrightarrow c^2+a^2-b^2=ca$$

Áp dụng định lý côsin ta được:

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{ca}{2ca}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \widehat{B}=60^0.$$

Bài 2. *Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh $a=4, b=5, c=8$. Hãy tính giá trị biểu thức*

$$P=\sin A+4\sin B-3\sin C.$$

Lời giải. Áp dụng định lý sin ta có:

$$P=\frac{a}{2R}+\frac{4b}{2R}-\frac{3c}{2R}=\frac{a+4b-3c}{2R}=\frac{4+20-24}{2R}=0.$$

Bài 3 (Đề thi chọn HSG Toán 10, Sở GD&ĐT Hà Tĩnh, năm học 2022 - 2023). *Cho tam giác ABC không vuông có độ dài đường trung tuyến kẻ từ A là $m_a=5$, độ dài các đường cao kẻ từ B và C lần lượt là $h_b=8$ và $h_c=6$. Tính $\cos A$.*

Lời giải. Ta có: $\sin A=\frac{h_b}{c}=\frac{8}{c}\Rightarrow c=\frac{8}{\sin A}$;

$$\sin A=\frac{h_c}{b}=\frac{6}{b}\Rightarrow b=\frac{6}{\sin A};$$

$$25=m_a^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}\Leftrightarrow a^2=2\left(b^2+c^2\right)-100.$$

Áp dụng định lý côsin, ta có:

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{100-\left(b^2+c^2\right)}{2bc}$$

$$=\frac{100-\left(\frac{36}{\sin^2 A}+\frac{64}{\sin^2 A}\right)}{2.\frac{6}{\sin A}.\frac{8}{\sin A}}=-\frac{25}{24}\cos^2 A.$$

Suy ra $\cos A=-\frac{24}{25}$ (vì $\cos A\neq 0$ do ΔABC không vuông).

Bài 4 (Đề thi chọn HSG Toán 10, Sở GD&ĐT Hải Dương, năm học 2022 - 2023). *Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh là $BC=a, CA=b$, $AB=c$; góc $\widehat{A}=60^0$ và $\frac{b-c}{a+c}=2(\cos B-1)$. Tính số đo các góc B và C.*

Lời giải. $\widehat{A}=60^0$ nên áp dụng định lý côsin ta có:

$$b^2+c^2-a^2=bc\Leftrightarrow a^2-b^2=c^2-bc \quad (1)$$

hay $c^2-a^2=bc-b^2$ (2).

Lại có: $\frac{b-c}{a+c}=2(\cos B-1)$

$$\Leftrightarrow\frac{b-c}{a+c}=\frac{a^2+c^2-b^2-2ac}{ac}$$

$$\Leftrightarrow\frac{b-c}{a+c}=\frac{2c^2-bc-2ac}{ac}$$

$$\Leftrightarrow\frac{b-c}{a+c}=\frac{2c-b-2a}{a}$$

$$\Leftrightarrow(b-c)a=(a+c)(2c-b-2a)$$

$$\Leftrightarrow 2ab-ca=2(c^2-a^2)-cb \quad (3).$$

Từ (2) và (3) ta được:

$$2ab-ca=bc-2b^2$$

$$\Leftrightarrow(a+b)(2b-c)=0\Leftrightarrow c=2b.$$

Thay vào (1) được: $a^2+b^2=c^2$. Vậy tam giác ABC vuông tại C và khi đó $\widehat{B}=30^o$.

2. Chứng minh các đẳng thức liên quan đến yếu tố cạnh, góc, bán kính đường tròn ngoại tiếp, bán kính đường tròn nội tiếp trong tam giác

Bài 5. *Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta luôn có $a\cos B+b\cos A=c$.*

Lời giải. Áp dụng định lý côsin, ta có:

$$a\cos B+b\cos A=a.\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+b.\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$=\frac{a^2+c^2-b^2+b^2+c^2-a^2}{2c}=c.$$

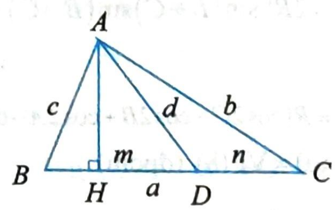
Chú ý. Ngoài cách giải trên, áp dụng định lý sin ta có: $a\cos B+b\cos A=2R\left(\sin A\cos B+\cos A\sin B\right)$

$$=2R\sin\left(A+B\right)=2R\sin C=c.$$

Bài 6 (Định lý Stewart). *Cho tam giác ABC, D là một điểm bất kỳ trên cạnh BC. Đặt $AD=d$, $BD=m$, $DC=n$.. Chứng minh rằng*

$$ad^2=mb^2+nc^2-mna.$$

Lời giải. Vẽ đường cao AH. Áp dụng định lý côsin đối với tam giác ABD và ACD ta có:



$$c^2=d^2+m^2-2dm\cos\widehat{ADB}=d^2+m^2-2m.HD \quad (4).$$

$$b^2=d^2+n^2-2dn\cos\widehat{ADC}=d^2+n^2+2dn\cos\widehat{ADB}$$

$$=d^2+n^2+2n.HD \quad (5).$$

Nhân cả hai vế của (4) và (5) lần lượt với n và m rồi cộng lại, ta có:

$$nc^2 + mb^2 = d^2(m+n) + mn(m+n) \quad (6).$$

Do $m+n=a$ nên từ (6) ta thu được:

$$ad^2 = mb^2 + nc^2 - mna.$$

Chú ý. • Nếu AD là đường trung tuyến, khi ấy $m = n = \dfrac{a}{2}$ ta có: $a.m_a^2 = \dfrac{a}{2}\left(b^2+c^2\right) - a.\dfrac{a^2}{4}$

$$\Rightarrow m_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \quad (7).$$

(7) là công thức tính độ dài đường trung tuyến.

• Nếu AD là đường phân giác trong, khi đó ta có:

$$\frac{m}{n} = \frac{c}{b} \Rightarrow m = \frac{ac}{b+c},\, n = \frac{ab}{b+c}.$$

Suy ra: $ad^2 = \dfrac{ac}{b+c}b^2 + \dfrac{ab}{b+c}c^2 - a.\dfrac{a^2bc}{(b+c)^2}$

$$\Leftrightarrow d^2 = \frac{bc\left[b^2+c^2-a^2+2bc\right]}{(b+c)^2} \Rightarrow d = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}.$$

Đây là công thức tính độ dài đường phân giác trong góc A.

Bài 7. *Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta đều có:*

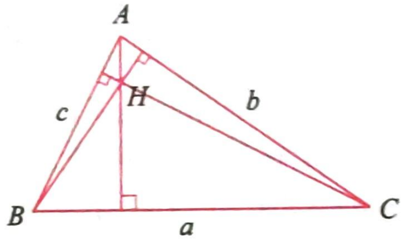
$$a\sin(B-C) + b\sin(C-A) + c\sin(A-B) = 0 \ (8).$$

Lời giải. Áp dụng định lý sin cho ΔABC, ta có:

$$\begin{aligned}\mathrm{VT}(8) &= 2R\big[\sin A\sin(B-C) + \sin B\sin(C-A) \\ &\qquad + \sin C\sin(A-B)\big] \\ &= 2R\big[\sin(B+C)\sin(B-C) + \sin(C+A)\sin(C-A) \\ &\qquad + \sin(A+B)\sin(A-B)\big] \\ &= R(\cos 2C - \cos 2B + \cos 2A - \cos 2C + \cos 2B - \cos 2A) \\ &= 0 = \mathrm{VP}(8) \ \text{(đpcm).}\end{aligned}$$

Bài 8. *Cho tam giác ABC. Gọi H là trực tâm tam giác; R_1, R_2, R_3 tương ứng là các bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác HBC, HCA, HAB. Chứng minh rằng $R_1 = R_2 = R_2 = R$.*

Lời giải.



Áp dụng định lý sin đối với tam giác HBC ta có:

$$R_1 = \frac{BC}{2\sin\widehat{BHC}} \quad (9).$$

Do $\widehat{BHC} + \widehat{A} = 180^0$ nên từ (9) suy ra:

$$R_1 = \frac{a}{2\sin A} \quad (10).$$

Áp dụng định lý sin đối với tam giác ABC ta có:

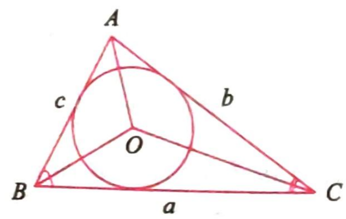
$$R = \frac{a}{2\sin A} \quad (11).$$

Từ (10), (11) suy ra $R_1 = R$. Lập luận tương tự như trên đối với các tam giác HCA, HAB ta có $R_2 = R_3 = R$. Vậy ta có $R_1 = R_2 = R_3 = R$.

Bài 9. *Gọi O, r lần lượt là tâm, bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Gọi R_1, R_2, R_3 tương ứng là các bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC, OCA, OAB.. Chứng minh rằng:*

$$R_1R_2R_3 = 2R^2r.$$

Lời giải. Áp dụng định lý sin đối với tam giác OBC ta có:



$$R_1 = \frac{BC}{2\sin\widehat{BOC}}$$

Do $\widehat{BOC} = 180^0 - \dfrac{\widehat{B}+\widehat{C}}{2}$ nên

$$R_1 = \frac{BC}{2\sin\frac{B+C}{2}} = \frac{a}{2\cos\frac{A}{2}}$$

Lập luận tương tự ta có:

$$R_2 = \frac{b}{2\cos\frac{B}{2}},\, R_3 = \frac{c}{2\cos\frac{C}{2}}$$

Suy ra: $R_1R_2R_3 = \dfrac{abc}{8\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$ (12).

Áp dụng định lý sin đối cho ΔABC từ (12) ta được: $R_1R_2R_3 = \dfrac{R^3\sin A\sin B\sin C}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$

$$= 8R^3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \quad (13).$$

Lại có: $r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{2R^2\sin A\sin B\sin C}{R(\sin A + \sin B + \sin C)}$

$$= \frac{R\sin A\sin B\sin C}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \; (14).$$

Từ (13) và (14) ta được: $R_1R_2R_3 = 2R^2r$ (đpcm).

3. Nhận dạng tam giác theo cạnh, theo góc, theo các yếu tố cạnh góc

Bài 10. *Tam giác ABC là tam giác gì nếu thỏa mãn điều kiện:* $\begin{cases} a^2 = \dfrac{a^3 - b^3 - c^3}{a - b - c} \\ 2\sin A\cos C = \sin B \end{cases}$.

Lời giải. Ta có: $a^2 = \dfrac{a^3 - b^3 - c^3}{a - b - c}$

$$\Leftrightarrow a^3 - (b + c)a^2 = a^3 - (b + c)(b^2 - bc + c^2)$$

$$\Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 = bc.$$

Áp dụng định lý côsin cho ΔABC, ta có:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{bc}{2bc} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \widehat{A} = 60^0 \; (15).$$

Tiếp tục áp dụng định lý sin và côsin cho ΔABC, ta có:

$$2\sin A\cos C = \sin B \Leftrightarrow 2\frac{a}{2R}.\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{b}{2R}$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - c^2 = b^2 \Leftrightarrow a = c \; (16).$$

Từ (15) và (16) suy ra tam giác ABC đều.

Bài 11. *Tam giác ABC là tam giác gì nếu thỏa mãn điều kiện:*

$$\begin{cases} \sin B = \left(\sqrt{2} - \cos C\right)\sin A \\ \sin C = \left(\sqrt{2} - \cos B\right)\sin A \end{cases}.$$

Lời giải. Áp dụng định lý côsin và định lý sin cho ΔABC, từ giả thiết ta thu được:

$$\begin{cases} b = \left(\sqrt{2} - \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)a \\ c = \left(\sqrt{2} - \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right)a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3b^2 + a^2 - c^2 = 2\sqrt{2}ab \\ 3c^2 + a^2 - b^2 = 2\sqrt{2}ca \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3b^2 + a^2 - c^2 = 2\sqrt{2}ab \\ (b - c)\left[\sqrt{2}(b + c) - a\right] = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3b^2 + a^2 - c^2 = 2\sqrt{2}ab \\ b = c \end{cases} \text{(do } \sqrt{2}(b+c) > \sqrt{2}a > a\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{2}b \\ b = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2 + c^2 = a^2 \\ b = c \end{cases}.$$

Vậy tam giác ABC vuông cân tại A.

Bài 12. *Gọi a, b, c là độ dài các cạnh của tam giác ABC và a^2, b^2, c^2 là độ dài tương ứng của các cạnh của tam giác $A'B'C'$.*

a) *Hãy xác định dạng của tam giác ABC.*

b) *So sánh góc bé nhất của tam giác ABC và góc bé nhất của tam giác $A'B'C'$.*

Lời giải. a) Do a^2, b^2, c^2 là độ dài ba cạnh của tam giác $A'B'C'$ nên

$$\begin{cases} a^2 < b^2 + c^2 \\ b^2 < c^2 + a^2 \\ c^2 < a^2 + b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 + c^2 - a^2 > 0 \\ c^2 + a^2 - b^2 > 0 \\ a^2 + b^2 - c^2 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2bc\cos A > 0 \\ 2ca\cos B > 0 \\ 2ab\cos C > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \widehat{A} < 90^0 \\ \widehat{B} < 90^0 \\ \widehat{C} < 90^0 \end{cases}.$$

Vậy tam giác ABC nhọn.

b) Không mất tính tổng quát ta giả sử $a \le b \le c \Rightarrow a^2 \le b^2 \le c^2$. Suy ra $\widehat{A}$ và $\widehat{A'}$ lần lượt là hai góc bé nhất của ΔABC và $\Delta A'B'C'$.

Xét $\cos A' - \cos A = \dfrac{b^4 + c^4 - a^4}{2b^2c^2} - \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$$=\frac{b^4+c^4-a^4-bc\left(b^2+c^2-a^2\right)}{2b^2c^2}$$

$$=\frac{\left(c^3-b^3\right)(c-b)+a^2\left(bc-a^2\right)}{2b^2c^2}\geq 0 \text{ (do } a\leq b\leq c)$$

$\Rightarrow \cos A'\geq \cos A \Rightarrow \widehat{A'}\leq \widehat{A}$ (do $\widehat{A}$ và $\widehat{A'}$ cùng nhọn). Vậy góc bé nhất của ΔABC sẽ lớn hơn hoặc bằng góc bé nhất của $\Delta A'B'C'$.

4. Chứng minh các bất đẳng thức liên quan đến cạnh và góc trong tam giác

Bài 13 (TH&TT, T8/494). *Cho A, B, C là ba góc của một tam giác không vuông ABC. Chứng minh rằng* $\frac{\sin A}{\tan B}+\frac{\sin B}{\tan C}+\frac{\sin C}{\tan A}\geq \frac{3}{2}$.

Lời giải. Áp dụng định lý sin và định lý côsin trong tam giác ABC ta có:

$$\frac{\sin A}{\tan B}=\frac{\sin A\cos B}{\sin B}=\frac{\frac{a}{2R}\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}}{\frac{b}{2R}}$$

$$=\frac{a\left(a^2+c^2-b^2\right)}{2abc}.$$

Tương tự ta có: $\frac{\sin B}{\tan C}=\frac{b\left(a^2+b^2-c^2\right)}{2abc}$,

$$\frac{\sin C}{\tan A}=\frac{c\left(b^2+c^2-a^2\right)}{2abc}.$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$a\left(a^2+c^2-b^2\right)+b\left(a^2+b^2-c^2\right)+c\left(b^2+c^2-a^2\right)\geq 3abc$$

$$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+a^2b+b^2c+c^2a$$
$$-\left(ab^2+bc^2+ca^2\right)\geq 3abc \quad (17).$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số dương ta có:

$$a^3+c^2a\geq 2a^2c, b^3+a^2b\geq 2b^2a, c^3+b^2c\geq 2c^2b.$$

Suy ra:

$$\text{VT}(17)\geq a^2c+b^2a+c^2b\geq 3\sqrt[3]{a^2c.b^2a.c^2b}=3abc.$$

Dấu bằng xảy ra khi tam giác ABC đều.

Bài 14. *Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta luôn có*

$$2(a\cos A+b\cos B+c\cos C)\leq a+b+c.$$

Lời giải. Ta sẽ chứng minh

$$a\cos A+b\cos B\leq c \quad (18).$$

Thật vậy, áp dụng định lý côsin, ta có:

$$a\cos A+b\cos B\leq c$$

$$\Leftrightarrow a.\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+b.\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\leq c$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2+a^2c^2-a^4+a^2b^2+b^2c^2-b^4\leq 2abc^2$$

$$\Leftrightarrow \left(a^2c^2-2abc^2+b^2c^2\right)-\left(a^4-2a^2b^2+b^4\right)\leq 0$$

$$\Leftrightarrow (ac-bc)^2-\left(a^2-b^2\right)^2\leq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2\left[c^2-(a+b)^2\right]\leq 0 \text{ luôn đúng.}$$

Chứng minh tương tự ta có:

$$b\cos B+c\cos C\leq a \quad (19).$$

$$c\cos C+a\cos A\leq b \quad (20).$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức (18), (19), (20) ta thu được điều phải chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi tam giác ABC đều.

Bài 15. *Cho tam giác ABC nhọn. Chứng minh rằng*

$$\left(\frac{c}{\cos B}+\frac{b}{\cos C}-a\right)\times\left(\frac{a}{\cos C}+\frac{c}{\cos A}-b\right)\times$$
$$\times\left(\frac{b}{\cos A}+\frac{a}{\cos B}-c\right)\geq 27abc.$$

Lời giải. Áp dụng định lý côsin cho ΔABC, ta có:

$$\frac{c}{\cos B}+\frac{b}{\cos C}-a=\frac{2c^2a}{a^2+c^2-b^2}+\frac{2b^2a}{a^2+b^2-c^2}-a$$

$$=a\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{a^2+c^2-b^2}+1+\frac{b^2+c^2-a^2}{a^2+b^2-c^2}+1-1\right)$$

$$=a\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{a^2+c^2-b^2}+\frac{b^2+c^2-a^2}{a^2+b^2-c^2}+1\right).$$

Chứng minh tương tự ta có:

$$\frac{a}{\cos C}+\frac{c}{\cos A}-b=b\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{b^2+c^2-a^2}+\frac{a^2+c^2-b^2}{a^2+b^2-c^2}+1\right);$$

$$\frac{b}{\cos A}+\frac{a}{\cos B}-c=c\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{a^2+c^2-b^2}+\frac{a^2+b^2-c^2}{b^2+c^2-a^2}+1\right).$$

Đặt $\begin{cases}x=a^2+b^2-c^2\\ y=b^2+c^2-a^2\\ z=c^2+a^2-b^2\end{cases}$. Do tam giác ABC nhọn nên $x, y, z > 0$. BĐT cần chứng minh tương đương với

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+1\right)\left(\frac{y}{z}+\frac{y}{x}+1\right)\left(\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+1\right) \geq 27.$$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

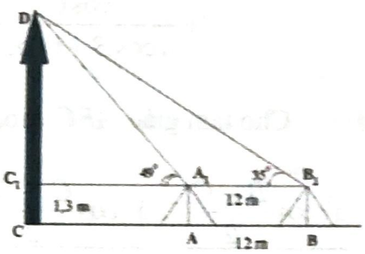
$$\left(\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+1\right)\left(\frac{y}{z}+\frac{y}{x}+1\right)\left(\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+1\right)$$

$$\geq 3\sqrt[3]{\frac{x^2}{yz}}.3\sqrt[3]{\frac{y^2}{zx}}.3\sqrt[3]{\frac{z^2}{xy}} = 27 \text{ (đpcm)}.$$

Dấu bằng xảy ra khi ΔABC đều.

5. Giải các bài toán đặt ra trong thực tiễn

Bài 16. *Muốn đo chiều cao của Tháp Chàm Po Klong Garai ở Ninh Thuận người ta lấy hai điểm A và B trên mặt đất có khoảng cách $AB = 12$ m cùng thẳng hàng với chân C của Tháp để đặt hai giác kế. Chân của giác kế có chiều cao $h = 1,3$ m. Gọi D là đỉnh Tháp và hai điểm A_1, B_1 cùng thẳng hàng với C_1 thuộc chiều cao CD của Tháp. Người ta đo được góc $\widehat{DA_1C_1} = 49°$ và $\widehat{DB_1C_1} = 35°$. Tính chiều cao CD của Tháp.*



Lời giải. Ta có: $\widehat{C_1DA_1} = 90° - 49° = 41°$;

$$\widehat{C_1DB_1} = 90° - 35° = 55°$$

nên $\widehat{A_1DB_1} = 55^0 - 41^0 = 14°$.

Áp dụng định lý sin đối với ΔA_1DB_1, ta có:

$$\frac{A_1B_1}{\sin\widehat{A_1DB_1}} = \frac{A_1D}{\sin\widehat{A_1B_1D}} \Rightarrow A_1D = \frac{12.\sin 35°}{\sin 14°} \approx 28,45 \text{m}.$$

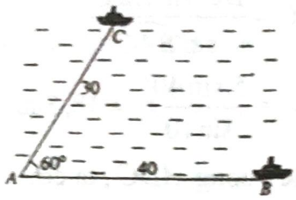
Xét ΔC_1A_1D vuông tại C_1, ta có:

$$\sin\widehat{C_1A_1D} = \frac{C_1D}{A_1D}$$

$$\Rightarrow C_1D = A_1D.\sin\widehat{C_1A_1D} = 28,45.\sin 49° \approx 21,47 \text{m}$$

$$\Rightarrow CD = C_1D + CC_1 \approx 22,77 \text{ m}.$$

Bài 17. *Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ một vị trí A, đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau góc 60^0. Tàu B chạy với tốc độ 20 hải lí một giờ. Tàu C chạy với tốc độ 15 hải lí một giờ. Sau hai giờ, hai tàu cách nhau bao nhiêu hải lí?*



Lời giải. Sau 2 giờ tàu B đi được 40 hải lí, tàu C đi được 30 hải lí. Vậy tam giác ABC có $AB = 40$, $AC = 30$ và $\widehat{A} = 60^0$.

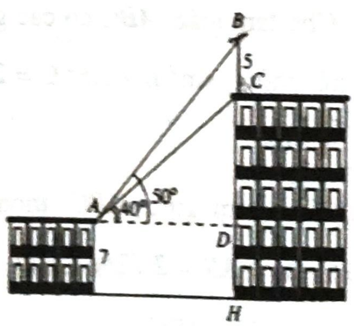
Áp dụng định lí côsin vào tam giác ABC, ta có:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ &= 30^2 + 40^2 - 2.30.40.\cos 60^0 \\ &= 900 + 1600 - 1200 = 1300. \end{aligned}$$

Vậy $BC = \sqrt{1300} \approx 36$ (hải lí).

Sau 2 giờ, hai tàu cách nhau khoảng 36 hải lí.

Bài 18 (Đề thi chọn HSG Toán 10, Sở GD&ĐT Vĩnh Phúc năm học 2022 - 2023). *Trên nóc một tòa nhà có một cột ăng-ten cao 5 m. Từ vị trí quan sát A cao 7m so với mặt đất, có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăng-ten lần lượt dưới góc 50^0 và 40^0 so với phương nằm ngang. Tính chiều cao của tòa nhà (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).*



Lời giải.

Từ giả thiết, suy ra $\widehat{BAC}=50^0-40^0=10^0$ và $\widehat{ABD}=180^0-\left(\widehat{BAD}+\widehat{ADB}\right)=180^0-\left(50^0+90^0\right)=40^0$.

Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC, ta có:

$$\frac{BC}{\sin\widehat{BAC}}=\frac{AC}{\sin\widehat{ABC}}$$

$$\Rightarrow AC=\frac{BC.\sin\widehat{ABC}}{\sin\widehat{BAC}}$$

$$=\frac{5.\sin 40^0}{\sin 10^0}\approx 18,5\text{ m}.$$

Trong tam giác vuông ADC, ta có:

$$\sin\widehat{CAD}=\frac{CD}{AC}\Rightarrow CD=AC.\sin\widehat{CAD}=11,9\text{ m}.$$

Vậy $CH=CD+DH=11,9+7=18,9$ m.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho tam giác ABC có ba cạnh a,b,c thỏa mãn $a:b:c=\sqrt{3}:\sqrt{2}:\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.

a) Tính số đo các góc của tam giác ABC;

b) Khi $a=2\sqrt{3}$, tính độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài 2. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta luôn có

a) $2abc\left(\cos A+\cos B\right)$

$$=\left(a+b\right)\left(c+b-a\right)\left(c+a-b\right);$$

b) $\left(b^2-c^2\right)\cot A+\left(c^2-a^2\right)\cot B+\left(a^2-b^2\right)\cot C=0$.

Bài 3. Cho tam giác ABC có các góc A,B,C thỏa mãn hệ thức $\sin^2 B+\sin^2 C=2\sin^2 A$. Chứng minh $\widehat{A}\le 60^0$.

Bài 4. Cho tam giác ABC thỏa mãn điều kiện $\left|b^2+c^2-a^2+4S\right|=2\sqrt{2}bc$. Hãy tính số đo góc A của tam giác ABC.

Bài 5. Cho tam giác ABC có

$$\frac{1+\cos B}{\sin B}=\frac{2a+c}{\sqrt{4a^2-c^2}}.$$

Chứng minh tam giác ABC cân.

Bài 6. Cho tam giác ABC thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases}\sin A-\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sin B+\sin C\right)=0\\ \sin A+\sin C-\sqrt{3}\sin B=0\end{cases}.$$

Chứng minh tam giác ABC vuông. Tính số đo các góc của tam giác đó.

Bài 7. Cho tam giác ABC. Gọi O,I tương ứng là tâm đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp; R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác. Đặt $l=IO$. Chứng minh rằng: $l^2=R^2-2Rr$.

Bài 8. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta luôn có

$$\frac{\cos A}{b\cos C+c\cos B}+\frac{\cos B}{c\cos A+a\cos C}+\frac{\cos C}{a\cos B+b\cos A}\ge\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Bài 9. Cho tam giác ABC thỏa mãn

$$\frac{a^2\cos\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}}+\frac{b^2\cos\frac{C-A}{2}}{2\sin\frac{B}{2}}+\frac{c^2\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}}=a^2+b^2+c^2.$$

Chứng minh tam giác ABC đều.

Bài 10. Từ hai vị trí A và B của một tòa nhà, người ta quan sát đỉnh C của ngọn núi. Biết rằng độ cao $AB=70$m, phương nhìn AC tạo với phương nằm ngang góc 30^0, phương nhìn BC tạo với phương nằm ngang góc $15^0 30'$. Tính độ cao của ngọn núi so với mặt đất.

CÁC LỚP THCS

Bài T1/559 (Lớp 6). Tìm tất các các số nguyên tố p, q sao cho $p^{q^2}+1$ cũng là số nguyên tố.

VƯƠNG THỊ HẢI

(GV THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Nghệ An)

Bài T2/559 (Lớp 7). Cho tam giác ABC có độ dài các đường cao vẽ từ A, B, C lần lượt là 6 cm, 7,5 cm, 10 cm. Hãy tính chu vi tam giác ABC.

NGUYỄN ĐỨC TẤN

(TP. Hồ Chí Minh)

Bài T3/559. Chứng minh rằng

$$P=\sqrt{1\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{\ldots\sqrt{n}}}}}$$

luôn là số vô tỷ với mọi số tự nhiên n lớn hơn 1.

PHAN QUANG LINH

(GV CLB CMATH, Hà Nội)

Bài T4/559. Cho P là điểm nằm trong tam giác ABC. Các đường thẳng AP, BP, CP cắt các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại A', B', C'. Tìm vị trí của điểm P sao cho

$$\frac{PA}{PA'}+\frac{PB}{PB'}+\frac{PC}{PC'}=4\left(\frac{PA'}{PA}+\frac{PB'}{PB}+\frac{PC'}{PC}\right).$$

NGUYỄN VIỆT HÙNG

(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T5/559. Giải phương trình

$$3(2x^2+1)=5\sqrt{8x^3+1}.$$

THÂN THANH NAM

(GV THPTDL Tiên Du, Bắc Ninh)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/559. Cho 4 số thực a, b, c, m thỏa mãn

$$(2m^2+m+2024)a+(m^2+m+2023)b+(3m^2+m+2025)c=0$$

và hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$. Chứng minh rằng phương trình $f(x)=0$ luôn có nghiệm.

NGUYỄN QUANG NAM

(GV THPT Quỳ Hợp 2, Nghệ An)

Bài T7/559. Cho $a,b,c\in[0;3]$ thỏa mãn $a+b+c=4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{13}{9}a^2+b^2+3c^2-2b-23c-10.$$

NGUYỄN HOÀI NAM

(GV THPT Dương Quảng hàm, Hưng Yênh)

Bài T8/559. Cho hình chóp $S.ABC$. Mặt phẳng (α) đi qua trọng tâm G của tam giác ABC lần lượt cắt các tia SA, SB, SC tại A', B', C'. Chứng minh rằng $V_{S.A'B'C'}\geq V_{S.ABC}$.

ĐÀO VĂN TRUNG

(GV THPT Huỳnh Thúc Kháng, Nghệ An)

Bài T9/559. Hãy tìm cặp số thực dương $(x_0;y_0)$ sao cho x_0 là số thực dương nhỏ nhất và $(x_0;y_0)$ là nghiệm của phương trình

$$\frac{1}{2x^3}+\frac{1}{2y^4}=\frac{1}{(3y)^2}+\frac{1}{81}.$$

LÊ HUY

(111A, khu phố 1, phường 7, TP. Bến Tre, Bến Tre)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/559. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho tồn tại duy nhất hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2023)=-1$ và

$$f(xy)\geq f(y)+y^n f(x) \text{ với mọi } x,y\in\mathbb{R}.$$

CHÂU HÒA NHÂN

(GV THPT Gò Đen, Long An)

Bài T11/559. Cho số thực a và dãy số (x_n) được xác định bởi:

$$\begin{cases} x_1 = a \\ (n+2024)x_{n+1} = n\log_3(x_n^2+2)+2024, \ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Xác định a để dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.

NGUYỄN LÁI

(GV THPT chuyên Lương Văn Chánh, Tuy Hòa, Phú Yên)

Bài T12/559. Cho tam giác không đều ABC. I_a, I_b, I_c theo thứ tự là tâm đường tròn bàng tiếp các góc A, B, C của tam giác ABC. J_a, J_b, J_c theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác I_aBC, I_bCA, I_cAB. Chứng minh rằng đường thẳng Euler của các tam giác $I_aJ_bJ_c$, $I_bJ_cJ_a$, $I_cJ_aJ_b$ đồng quy.

LÊ VIẾT ÂN

(Nhà 15, xóm 2, thôn Ngọc Anh, Phú Thượng, Phú Vang, Thừa Thiên Huế)

Bài L1/559. Trên mặt thoáng của một chất lỏng, một mũi nhọn O chạm vào mặt thoáng dao động điều hòa với tần số f, tạo thành sóng trên mặt thoáng với bước sóng $\lambda = 3$cm. Xét hai phương truyền sóng Ox và Oy vuông góc với nhau. Gọi A là điểm thuộc Ox cách O một khoảng 48 cm và B thuộc Oy cách O là 36 cm. Tính số điểm dao động cùng pha với nguồn O trên đoạn AB.

VIỆT CƯƠNG *(Hà Nội)*

Bài L2/559. Cho mạch điện xoay chiều R, L, C mắc nối tiếp theo thứ tự đó (cuộn cảm thuần). Điện dung C có thể thay đổi được. Điều chỉnh C để điện áp ở hai đầu tụ điện C là lớn nhất. Khi đó điện áp hiệu dụng ở hai đầu điện trở R là $100\sqrt{2}$ V. Khi điện áp tức thời ở hai đầu đoạn mạch là $100\sqrt{2}$ V thì điện áp tức thời giữa hai đầu đoạn mạch chứa điện trở và cuộn cảm là $-100\sqrt{2}$ V. Tính giá trị điện áp hiệu dụng ở hai đầu đoạn mạch AB.

THANH LÂM *(Hà nội)*

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/559 (For 6th grade). Find all prime numbers p and q so that is also a prime number.

Problem T2/559 (For 7th grade). Given a triangle ABC with the lengths of the altitudes from A, B, C respectively are 6 cm, 7,5 cm, 10 cm. Find the perimeter of the triangle ABC.

Problem T3/559. Prove that the number

$$P = \sqrt{1\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{\ldots\sqrt{n}}}}}$$

is always irrational for every integer n which is greater than 1.

Problem T4/559. A point P is inside a triangle ABC. The lines AP, BP, CP intersect the sides BC, CA, AB respectively at A', B', C'. Find the position of the point P so that

$$\frac{PA}{PA'} + \frac{PB}{PB'} + \frac{PC}{PC'} = 4\left(\frac{PA'}{PA} + \frac{PB'}{PB} + \frac{PC'}{PC}\right).$$

Problem T5/559. Solve the equation

$$3(2x^2+1) = 5\sqrt{8x^3+1}.$$

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/559. Given four real numbers a, b, c, m such that

$$(2m^2+m+2024)a + (m^2+m+2023)b + (3m^2+m+2025)c = 0$$

Show that the equation $ax^2+bx+c=0$ always has solutions.

Problem T7/559. Given $a, b, c \in [0;3]$ such that $a+b+c=4$. Find the maximum value of the expression

$$P = \frac{13}{9}a^2 + b^2 + 3c^2 - 2b - 23c - 10.$$

Problem T8/559. Given a $p^{q^2}+1$ pyramid $S.ABC$. A plane (α) which passes through the centroid G of the triangle ABC intersects the rays SA, SB, SC respectively at A', B', C'. Show that $V_{S.A'B'C'} \geq V_{S.ABC}$.

(Xem tiếp theo trang 45)

Bài T1/555. *Tìm số có bốn chữ số* $\overline{abcd}$ *biết* $a+b+c+d=7$, $\overline{cd}-\overline{ab}=3$ *và* $7.\overline{abcd}$ *là một số chính phương.*

Lời giải. Đặt $n=\overline{abcd}$. Từ $\overline{cd}-\overline{ab}=3$ có:

$$10c+d-10a-b=3 \text{ hay } 10(c-a)=b-d+3.$$

Do $b<10$ nên chỉ có thể $b-d+3=10$ hoặc $b-d+3=0$.

Nếu $b-d+3=10$ hay là $b=d+7$, mà $a\ge 1$ thì từ $7=a+b+c+d$ có $7\ge 1+7+2d+c$, điều này không xảy ra vì $c\ge 0$ và $d\ge 0$. Vậy chỉ có thể là $b-d+3=0$, hay là $b+3=d$ và $c=a$.

Từ $7=a+b+c+d$ có $7=3+2b+a+c$ hay là $4=2b+2a$. Từ $\overline{cd}-\overline{ab}=3$ thì $c=a\ge 1$, lúc đó $4\ge 2b+2$, hay là $2\ge 2b$, suy ra $b=0$ và hoặc $b=1$. Nếu $b=1$ thì từ $4=2b+2a$ có $2=2a$ nên chỉ có thể $a=c=1$, tức là $n=1114$.

Để $7.\overline{abcd}=7n$ là một số chính phương thì $n=1114$ phải chia hết cho 7, nhưng điều này không xảy ra nên $n=1114$ không thỏa mãn đề bài. Nếu $b=0$ thì $d=3$. Từ $4=2b+2a$ có $a=c=2$, tức là $n=2023$.

Xét $7.\overline{abcd}=7n=7.2023=7^2.289$
$$=7^2.17^2=119^2$$
là một số chính phương, thỏa mãn đề bài.

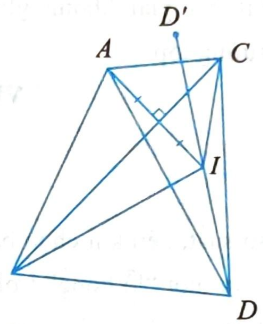
Vậy $n=2023$ là số cần tìm.

Nhận xét. Một vài bạn đưa ra khẳng định về các chữ số nhưng không lập luận chi tiết. Các bạn sau có lời giải đúng. **Vĩnh Phúc**: *Trần Mạnh Phong*, 6E, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Tường; *Nguyễn Minh Đại*, 6A1, THCS Phúc Yên; *Nguyễn Thị Ngọc Linh*, 6A6, THCS Yên Lạc; **Nghệ An**: *Nguyễn Thị Phương Chi*, 6A, *Trần Hà Giang*, *Nguyễn Kim Tuấn Kiệt*, *Thái Tùng Quân*, *Đặng Bá Hoàng Minh*, *Nguyễn Thái Dũng*, *Nguyễn Sỹ Bảo Long*, 6B, *Nguyễn Thị Kim Ngân*, 6D, *Đặng Bá Khôi Nguyên*, 7D, THCS Lý Nhật Quang; **Nước CH Áo, TP. Graz**: *Lê Bạch Hải Đăng*, lớp 1B, Trường Quốc tế Song ngữ cấp 2, 3 GIBS.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/555. *Cho tam giác ABC có* $\widehat{BAC}=125^0$, $\widehat{ABC}=25^0$. *Lấy điểm D sao cho A và D nằm về hai phía của đường thẳng BC, ngoài ra* $\widehat{BAD}=40^0$, $\widehat{CBD}=75^0$. *Tính số đo của góc* $\widehat{ADC}$.

Lời giải.



Ta có: $\widehat{ADB}=180^0-\widehat{DBA}-\widehat{BAD}$
$$=180^0-\left(40^0+25^0+75^0\right)=40^0.$$

Vậy tam giác ABD cân tại B. Lấy I đối xứng với A qua BC, có $\widehat{ABI}=2\widehat{ABC}=50^0$ và $BA=BI$.

Ta có:
$$\widehat{IBD}=\widehat{ABD}-\widehat{ABI}=\left(\widehat{ABC}+\widehat{CBD}\right)-\widehat{ABI}$$
$$=\left(25^0+75^0\right)-50^0=50^0.$$

Suy ra $\Delta ABI=\Delta DBI$ (c.g.c).

Từ đó ta có $IA=ID$ (*).

Mặt khác $\widehat{ACB}=180^0-\widehat{BAC}-\widehat{ABC}=30^0$, cho nên IAC là tam giác đều, do đó $IA=IC=AC$.

Do (*) nên ta có $IA=ID=IC$. Lấy D' đối xứng với D qua I. Do góc ngoài tại đỉnh tam giác cân gấp đôi các góc trong còn lại nên ta có:

$$\widehat{ADD'}=\frac{1}{2}\widehat{AID'},$$
$$\widehat{CDD'}=\frac{1}{2}\widehat{CID'}.$$

Suy ra: $\widehat{ADC} = \frac{1}{2}\widehat{AIC} = 30^0$.

Nhận xét. Các bạn gửi bài đều có đáp số đúng: **Nghệ An:** *Lê Việt Bảo*, 7A, THCS thị trấn Thanh Sơn, *Phạm Quang Thắng*, 7C, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, *Trần Ngọc Đức*, 7A2, THCS Nghĩa Xuân, Quỳ Hợp, *Nguyễn Bảo Duy*, *Nguyễn Quỳnh Anh*, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Nội:** *Phan Nhật Minh*, THCS Tân Đình, Hoàng Mai; **Nam Định:** *Trần Mai Phương*, 7A, THCS Trần Huy Liệu, Vụ Bản; **Thanh Hóa:** *Hoàng Thái Sơn*, 7A, THCS Nguyệt Ấn, Ngọc Sơn.

Có một bạn gửi bài giải không ghi tên họ cũng không ghi tên trường lớp.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T3/555. *Chứng minh rằng tồn tại vô số số tự nhiên n thỏa mãn* $2024^n + 2 \vdots n$.

Nhận xét. Do sơ suất, nên khi chọn bài chúng tôi đã không phát hiện ra một "lỗ hổng" trong chứng minh của tác giả. Không có bạn nào giải được bài toán này. Và đây vẫn còn là bài toán mở chờ lời giải của bạn đọc: *Tồn tại hay không vô số số tự nhiên n thỏa mãn* $(2024^n + 2) \vdots n$?

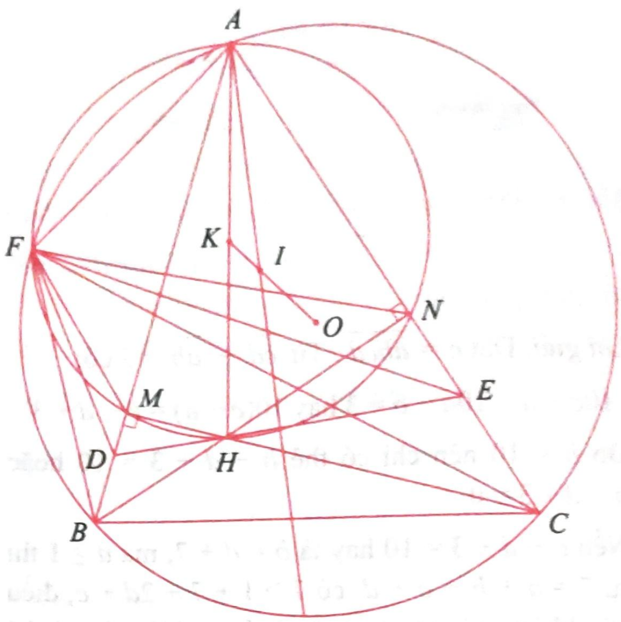
Tuy nhiên sử dụng định lý Fermat bé, một số bạn có nhận xét sau:

Tồn tại vô số số số tự nhiên n để $2024^{n-1} - 1$ *chia hết* cho n.

Thật vậy với p là số nguyên tố, với mọi $a \in \mathbb{N}^*$, $(a, p) = 1$, theo định lý Ferrmat bé ta có: $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, hay $a^{p-1} \vdots p$. Do tồn tại vô số các số nguyên tố p nguyên tố cùng nhau với $2024 = 2^3.11.23$ nên chọn $n = p$ thì ta được nhận xét trên.

TẠ DUY PHƯỢNG

Bài T4/555. *Cho BC là dây cung cố định của đường tròn (O; R) (BC ≠ 2R). A là điểm chuyển động trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC nhọn. H là trực tâm tam giác ABC. Đường thẳng qua H vuông góc với tia phân giác góc* $\widehat{BAC}$ *cắt AB, AC lần lượt tại D, E. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE, K là trung điểm AH. Chứng minh KI luôn đi qua một điểm cố định.*



Lời giải. Kẻ đường cao BN, CM của tam giác ABC. Gọi F là giao điểm thứ hai của đường tròn (K) đường kính AH với đường tròn (O).

Ta có: $\widehat{FMB} = \widehat{FNC}$ và $\widehat{FBM} = \widehat{FCN}$, suy ra $\Delta FMB \backsim \Delta FNC$ (g.g), dẫn đến:

$$\frac{FM}{FN} = \frac{MB}{NC} \quad (1).$$

Lại có ΔADE cân tại A, do đó ta có các cặp tam giác đồng dạng: $\Delta MHD \backsim \Delta NHE$ (g.g); $\Delta MHB \backsim \Delta NHC$ (g.g).

Từ đó: $$\frac{MD}{NE} = \frac{MH}{NH} = \frac{MB}{NC} \quad (2).$$

Từ (1), (2), ta có: $\widehat{FMD} = \widehat{FNC}$, $\frac{MF}{NF} = \frac{MD}{NE}$, nên $\Delta MDF \backsim \Delta NEF$.

Suy ra $\widehat{FDA} = \widehat{FEA}$, do đó tứ giác $AFDE$ nội tiếp. Theo tính chất đường nối tâm – dây cung chung của hai đường tròn ta có :

$$OI \perp AF \text{ và } OK \perp AF.$$

Từ đó suy ra O, K, I thẳng hàng. Do đó KI luôn đi qua điểm O cố định.

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Thanh Hóa: *Nguyễn Bảo Khánh*, 9C, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; **Nghệ An:** *Trịnh Bá Hiếu*, 9A, THCS Lê Hồng Phong, Hưng Nguyên;

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/555. *Cho x, y là các số thực thỏa mãn*

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x^2+y^2 \le 10 \end{cases}$$

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^3(x-1)+y^3(y-1)$.

Lời giải. Đặt $S = x^2+y^2$. Ta có:

$$2S = 2(x^2+y^2) \ge (x+y)^2 = 4 \Rightarrow 2 \le S \le 10;$$

$$2xy = (x+y)^2 - (x^2+y^2) = 4 - S \Rightarrow xy = \frac{4-S}{2}.$$

Do đó: $x^3+y^3 = (x+y)(x^2+y^2-xy)$

$$= 2\left(S - \frac{4-S}{2}\right) = 3S-4;$$

$$x^4+y^4 = (x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2 = S^2 - 2\left(\frac{4-S}{2}\right)^2$$

$$= \frac{S^2+8S-16}{2}.$$

Ta được :

$$P = x^4+y^4-(x^3+y^3) = \frac{S^2+8S-16}{2} - (3S-4)$$

$$= \frac{S^2+2S-8}{2}.$$

Vì $2 \le S \le 10$ nên

$$8 \le S^2+2S \le 120 \Rightarrow 0 \le P \le 56.$$

Vậy $\max P = 56$, giá trị đó đạt được khi:

$$S = 10 \Rightarrow xy = \frac{4-10}{2} = -3 \text{ hay } \begin{cases} x+y=2 \\ xy=-3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}.$$

$$\min P = 0 \text{ khi } S = 2 \Rightarrow xy = \frac{4-2}{2} = 1$$

$$\text{hay } \begin{cases} x+y=2 \\ xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1.$$

Nhận xét. 1) Ta có $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=-3 \end{cases}$ nên x, y là các nghiệm của phương trình bậc 2:

$$z^2-2z-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-1 \\ z=3 \end{array}\right.$$

ta được: $\begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$.

2) Có thể giải bài toán theo những cách khác:

a) Đặt $t = xy$; chứng minh $-3 \le t \le 1$, $P = 2t^2-10t+8 = 2(1-t)(4-t)$; từ đó tìm được $0 \le P \le 56$.

b) Thay $y = 2-x$; từ $x^2+y^2 \le 10$ suy ra $-1 \le x \le 3$; ta được $P = f(x)$ rồi chứng minh với $-1 \le x \le 3$ có $0 \le f(x) \le 56$.

Các bạn sau đây có bài giải tốt :

Phú Thọ: *Trần Ngọc Tú*, 8A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông; **Nghệ An:** *Hồ Tùng Lâm*, 9C, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, *Trịnh Bá Hiếu*, 9A, THCS Lê Hồng Phong, Hưng Nguyên; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Bảo Khánh*, 9C, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; **Hưng Yên:** *Lê Tuấn Hiệp*, 8C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; **TP. Hồ Chí Minh:** *Hoàng Thị Thanh Thảo*, 10A1, THCS-THPT Lê Thánh Tông, Tân Phú.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T6/555. *Tìm tất cả các cặp số tự nhiên $(m; n)$ để phương trình*

$$x^4 - mnx^3 + (m^2+m+n+1)x^2 - (m^3n+mn)x + m^3+m^2n+m+n = 0 \quad (*).$$

có nghiệm nguyên.

Lời giải. Biến đổi phương trình (*) về dạng

$$x^2(x^2-mnx+m+n) + m^2(x^2-mnx+m+n) + (x^2-mnx+m+n) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-mnx+m+n)(x^2+m^2+1) = 0 \quad (1).$$

Do $x^2+m^2+1 > 0$ nên từ (1) dẫn đến:

$$x^2-mnx+m+n = 0 \quad (2).$$

Phương trình (*) có nghiệm nguyên khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm nguyên, ta gọi hai nghiệm nguyên của (2) là x_1 và x_2 $(x_1 \ge x_2)$. Theo định lí Viète, ta có: $\begin{cases} x_1+x_2 = mn \\ x_1x_2 = m+n \end{cases}$.

Suy ra: $x_1 + x_2 - x_1x_2 = mn - m - n$

$\Leftrightarrow (x_1 - 1)(x_2 - 1) + (m - 1)(n - 1) = 2$ (3).

Do $m, n \in \mathbb{N}$ nên $mn \in \mathbb{N}$, $m + n \in \mathbb{N}$ suy ra:

$x_1 + x_2 \in \mathbb{N}$ và $x_1x_2 \in \mathbb{N}$. Vì vậy $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$.

- Nếu $mn = 0 \Leftrightarrow m = 0$ hoặc $n = 0$ thì phương trình (2) trở thành $x^2 = -n$ hoặc $x^2 = -m$. Để phương trình có nghiệm nguyên thì $n = 0$ hoặc $m = 0$, và khi đó nghiệm nguyên là $x_1 = x_2 = 0$, suy ra $m + n = 0$, kết hợp với $mn = 0$ suy ra $m = n = 0$.

- Nếu $mn \geq 1$ thì $m \geq 1$, $n \geq 1$, do đó $x_1 + x_2 \geq 1$ và $x_1x_2 \geq 2$. Suy ra $x_1 \geq 1$, $x_2 \geq 1$. Vì vậy:

$(x_1 - 1)(x_2 - 1)$ và $(m - 1)(n - 1)$

là các số tự nhiên.

Kết hợp với (3) xảy ra các trường hợp sau:

a) $\begin{cases}(m-1)(n-1)=0\\(x_1-1)(x_2-1)=2\end{cases}$.

Từ $(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 2$. Do $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ và $x_1 \geq x_2$ suy ra $x_1 = 3$, $x_2 = 2$. Từ đó $mn = 5$ và $m + n = 6$. Ta tìm được $m = 1$, $n = 5$ hoặc $m = 5$, $n = 1$ (thoả mãn điều kiện).

b) $\begin{cases}(m-1)(n-1)=2\\(x_1-1)(x_2-1)=0\end{cases}$.

Từ $(m - 1)(n - 1) = 2$, do $m, n \in \mathbb{N}$ và $m \geq 1$, $n \geq 1$ nên $m - 1 = 2$, $n - 1 = 1$ hoặc $m - 1 = 1$, $n - 1 = 2$, suy ra: $m = 3$, $n = 2$ hoặc $m = 2$, $n = 3$.

Khi đó phương trình (3) có hai nghiệm $x_1 = 5$, $x_2 = 1$ (thoả mãn là các số nguyên).

c) $\begin{cases}(m-1)(n-1)=1\\(x_1-1)(x_2-1)=1\end{cases}$.

Từ $(m - 1)(n - 1) = 1$, do $m, n \in \mathbb{N}$ và $m \geq 1$, $n \geq 1$ nên $m = n = 2$. Khi đó phương trình (3) có hai nghiệm: $x_1 = 2$, $x_2 = 2$ (thoả mãn là các số nguyên).

Vậy có 6 cặp số tự nhiên (m, n) thoả mãn điều kiện bài toán là:

(0; 0), (1; 5), (5; 1), (2; 2), (2; 3), (3; 2).

Nhận xét. Bài này các bạn tham gia gửi bài đều cho lời giải tương tự như trên. Một số bạn sau khi biến đổi đến phương trình (2), đã tính Δ và sử dụng phương trình (2) có nghiệm nguyên khi Δ là số chính phương, để đưa đến giải phương trình nghiệm nguyên tìm ra m, n. Tuyên dương các bạn sau có lời giải lập luận chặt chẽ và ngắn gọn.

Thanh Hoá: *Nguyễn Bảo Khánh*, 9C, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hoá; **Gia Lai:** *Trần Ngọc Hải*, 10A7, THPT Chi Lăng; **Quảng Bình:** *Hoàng Kim Lộc*, 11 Toán 1, *Đoàn Ngọc Duy*, *Nguyễn Thanh Hải*, 12 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T7/555. *Cho tập $X = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ gồm n số nguyên dương đầu tiên.*

a) Với $n = 10$, hãy chỉ ra 10 tập con của X, mỗi tập có đúng 3 phần tử và 2 tập bất kỳ trong 10 tập này có chung nhau không quá 1 phần tử.

b) Với $n = 15$, chứng minh rằng tồn tại ít nhất 333 tập con của X, mỗi tập có đúng 6 phần tử và 2 tập bất kỳ trong đó có không quá 4 phần tử chung.

Lời giải. a) Ví dụ về 10 tập hợp thoả mãn điều kiện đề bài là:

$A_1 = \{1,2,3\}, A_2 = \{1,4,5\}, A_3 = \{1,6,7\}, A_4 = \{1,9,8\},$

$A_5 = \{5,7,9\}, A_6 = \{2,4,10\}, A_7 = \{2,6,9\},$

$A_8 = \{2,5,8\}, A_9 = \{3,4,9\}, A_{10} = \{3,10,5\}.$

b) Có tất cả là $C_{15}^6 = 5005$ tập con 6 phần tử của X. Ta chia 5005 tập con này thành 15 nhóm, nhóm thứ i, kí hiệu là N_i gồm các tập con mà khi chia tổng phần tử của mỗi tập con cho 15 được số dư là i với $i = 0,1,2,\ldots,14$.

Kí hiệu $|N_i|$ là số tập con trong nhóm N_i và ta có $\sum_{i=0}^{14} |N_i| = 5005$. Ta chứng minh với hai tập hợp bất kỳ Y, Z cùng thuộc một nhóm N_i thì $|Y \cap Z| \leq 4$. Thật vậy, rõ ràng là $|Y \cap Z| \neq 6$ nên ta chỉ cần xét $|Y \cap Z| = 5$ tức là Y, Z chung nhau đúng 5 phần tử. Khi đó gọi hai phần tử tương ứng còn lại của Y, Z là $y, z\,(y \neq z)$. Theo định nghĩa của nhóm N_i thì ta phải có $y \equiv z \pmod{15}$, tức là

$y-z$ chia hết cho 15. Mà $0 \le |y-z| < 15$ nên phải có $y=z$, mâu thuẫn.

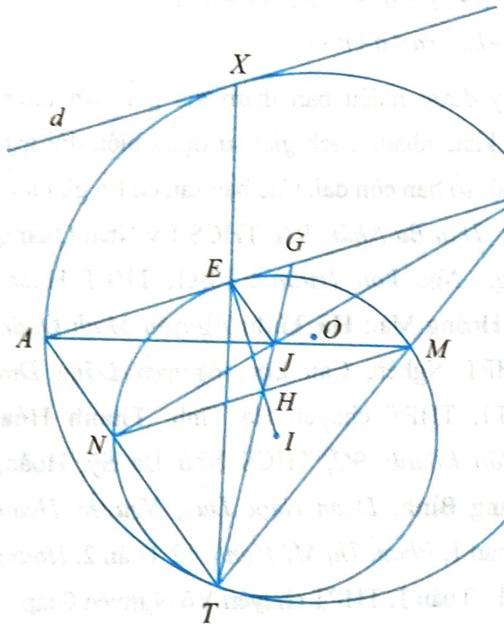
Vì $\sum_{i=0}^{14} |N_i| = 5005$ nên tồn tại $i\ (0 \le i \le 14)$ sao cho $|N_i| \ge \frac{5005}{15} = 333$. Từ đây suy ra tồn tại ít nhất 333 tập con của X mà hai tập con bất kỳ có không quá 4 phần tử chung.

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải tốt: *Nguyễn Thanh Hải*, *Đoàn Ngọc Duy*, 12 Toán 1; *Phạm Thị Mỹ Hạnh*, 12 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình**.

NGUYỄN TIẾN LÂM

Bài T8/555. *Cho đường tròn (I) tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại T. Dây cung AB của (O) tiếp xúc với (I) tại E. TA cắt (I) tại điểm N khác T và TB cắt (I) tại điểm M khác T. Biết AM cắt BN tại J. Chứng minh rằng TE là phân giác của góc* $\widehat{ATB}$ *và EI là phân giác của góc* $\widehat{TEJ}$.

Lời giải. (Theo bạn *Lê Thành Đạt*, 11 Toán 1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu, **Bà Rịa – Vũng Tàu**).



Gọi X là giao điểm thứ hai của TE với (O), d là tiếp tuyến tại X của (O). TJ cắt MN, AB theo thứ tự tại H, G.

• Do (I) tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại điểm T, nên tồn tại phép vị tự tâm T biến đường tròn (I) thành đường tròn (O). Kí hiệu phép biến hình đó là f_T.

Ta có: $f_T: \begin{array}{l} N \mapsto A \\ M \mapsto B \\ E \mapsto X \end{array}$

$$\Rightarrow f_T: \begin{array}{c} MN \mapsto AB \\ \text{đường } AB \mapsto d \end{array} \Rightarrow MN \,//\, AB \,//\, d.$$

Ta có: $OX \perp d \Rightarrow OX \perp AB \Rightarrow X$ là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{AB}$ không chứa T của đường tròn (O) $\Rightarrow TE$ là phân giác của góc $\widehat{ATB}$.

• Xét hình thang $ABMN$. Áp dụng bổ đề hình thang ta thu được H, G lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng MN, AB. Từ đó suy ra ba điểm I, H, E thẳng hàng.

Xét tứ giác toàn phần $TMJN.BA$ với ba đường chéo TJ, MN, AB ta có hàng điểm điều hòa cơ bản sau:

$$(GH;JT) = -1 \Rightarrow E(TJ;IB) = (TJ;HG) = -1.$$

Suy ra $(EG, EI, EJ, ET) = -1$. Mà $EI \perp EB$, nên theo tính chất của chùm điều hoà ta thấy EI là phân giác của góc $\widehat{TEJ}$ (đpcm).

Nhận xét. Tất cả các bài giải gửi về Toà soạn đều sử dụng *tính chất của hàng điểm điều hoà, chùm điều hoà* và *Bổ đề hình thang* để giải quyết bài toán trên. Ngoài bạn *Đạt*, các bạn sau cũng có lời giải tốt:

Quảng Ninh: *Vũ Hải Văn*, 11 Toán, THPT chuyên Hạ Long, TP. Hạ Long; **Thanh Hoá**: *Nguyễn Bảo Khánh*, 9C, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hoá; **Nghệ An**: *Phan Đại Hoàng*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh; **Hà Tĩnh**: *Bùi Văn Dũng*, *Nguyễn Đặng Đức Tuấn*, 10T1, *Trần Duy Hưng*, 10T2, THPT chuyên Hà Tĩnh, TP. Hà Tĩnh; **Quảng Bình**: *Hoàng Kim Lộc*, 11 Toán 1, *Đoàn Ngọc Duy*, *Nguyễn Thanh Hải*, 12 Toán 1, *Phạm Thị Mỹ Hạnh*, 12 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới; **Thừa Thiên Huế:** *Trương Duy Thái*, 10T1, *Đoàn Văn Hoàng Lân*, 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế; **Bà Rịa – Vũng Tàu**: *Đỗ Tiến Dũng*, 10 Toán 1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu; **Đà Nẵng**: *Tô Đông Hải*, 11A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đà Nẵng; **Kiên Giang**: *Dương Thạnh Duy*, 12T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt, TP. Rạch Giá; **Vĩnh Long**: *Nguyễn Tuấn Kiệt*, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, TP. Vĩnh Long.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/555. *Xét các số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện* $\frac{1}{1+a+b}+\frac{1}{1+b+c}+\frac{1}{1+c+a}=1$. *Chứng minh rằng:* $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge a+b+c$.

Lời giải. Cách 1. Ta có:

$$\frac{1}{1+a+b}+\frac{1}{1+b+c}+\frac{1}{1+c+a}=1$$

$$\Leftrightarrow 2=\frac{a+b}{1+a+b}+\frac{b+c}{1+b+c}+\frac{c+a}{1+c+a}.$$

Do a, b, c dương và theo BĐT Schwarz ta có:

$$2=\frac{a+b}{1+a+b}+\frac{b+c}{1+b+c}+\frac{c+a}{1+c+a}$$
$$=\frac{(a+b)^2}{a+b+(a+b)^2}+\frac{(b+c)^2}{b+c+(b+c)^2}+\frac{(c+a)^2}{c+a+(c+a)^2}$$
$$\ge\frac{4(a+b+c)^2}{2(a+b+c)+2(a^2+b^2+c^2)+2(ab+bc+ca)}$$
$$\Leftrightarrow a+b+c\ge ab+bc+ca \quad (1).$$

Đến đây, lại áp dụng BĐT Schwarz ta có :

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=\frac{a^2}{ab}+\frac{b^2}{bc}+\frac{c^2}{ca}\ge\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}$$
$$\overset{\text{do }(1)}{\ge}\frac{(a+b+c)^2}{a+b+c}=a+b+c.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Cách 2. Theo BĐT Bunyakovsky ta có:

$$(ab+bc+ca)^2=(1.ab+\sqrt{b}.\sqrt{b}c+\sqrt{c}.\sqrt{c}a)^2$$
$$\le(1+b+c)(a^2b^2+bc^2+ca^2)$$
$$\Leftrightarrow\frac{1}{1+b+c}\le\frac{a^2b^2+bc^2+ca^2}{(ab+bc+ca)^2}.$$

Tương tự: $\frac{1}{1+c+a}\le\frac{b^2c^2+ca^2+ab^2}{(ab+bc+ca)^2}$;

$$\frac{1}{1+a+b}\le\frac{c^2a^2+ab^2+bc^2}{(ab+bc+ca)^2}.$$

Cộng các BĐT trên ta được:

$$1=\frac{1}{1+a+b}+\frac{1}{1+b+c}+\frac{1}{1+c+a}$$
$$\le\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2(ab^2+bc^2+ca^2)}{(ab+bc+ca)^2}$$
$$\Leftrightarrow(ab+bc+ca)^2\le a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2(ab^2+bc^2+ca^2)$$
$$\Leftrightarrow ab^2c+abc^2+a^2bc\le ab^2+bc^2+ca^2$$
$$\Leftrightarrow\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge a+b+c \text{ (đpcm).}$$

Nhận xét. 1) Có nhiều cách đánh giá để có BĐT(1). Chẳng hạn sử dụng BĐT Bunyakovsky ta có:

$$(1+a+b)(c^2+a+b)\ge(a+b+c)^2\Rightarrow\frac{1}{1+a+b}\le\frac{c^2+a+b}{(a+b+c)^2}.$$

Tương tự: $\frac{1}{1+b+c}\le\frac{a^2+b+c}{(a+b+c)^2};\frac{1}{1+c+a}\le\frac{b^2+c+a}{(a+b+c)^2}$.

Do đó: $1=\frac{1}{1+a+b}+\frac{1}{1+b+c}+\frac{1}{1+c+a}$

$$\le\frac{a^2+b^2+c^2+2a+2b+2c}{(a+b+c)^2}$$
$$\Leftrightarrow(a+b+c)^2\le a^2+b^2+c^2+a+b+c$$
$$\Leftrightarrow ab+bc+ca\le a+b+c.$$

2) Bài này được nhiều bạn tham gia giải với nhiều cách giải khác nhau. Cách giải sử dụng biến đổi trực tiếp của một số bạn còn dài. Các bạn sau có lời giải tốt: **Nghệ An:** *Thái Bá Nhân*, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Ngô Văn Trường*, 10A1, THPT Hoàng Mai, TX. Hoàng Mai; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Minh Quân*, 10A1, THPT Nghèn, Can Lộc, *Nguyễn Đặng Đức Tuấn*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Bảo Khánh*, 9C, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; **Quảng Bình:** *Đoàn Ngọc Duy*, *Nguyễn Thanh Hải*, 12 Toán 1, *Phạm Thị Mỹ Hạnh*, 12 Toán 2, *Hoàng Kim Lộc*, 11 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Quảng Trị:** *Lê Quang Duy*, 11A1, THPT Hướng Hóa, Hướng Hóa; **Thừa Thiên Huế:** *Trương Duy Thái*, 10T1, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế; **TP. Hồ Chí Minh:** *Lê Hoàng Gia Phúc*, 10E2, TH,

THCS&THPT Lê Thánh Tông; **Phú Yên:** *Trần Gia Huy*, 10 Toán 1, *Nguyễn Tấn Nguyên Chương*, 11 Toán 1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Bình Định:** *Trần Ngọc Tuyên*, 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bà Rịa – Vũng Tàu:** *Đỗ Tiến Dũng*, 10 Toán 1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Sóc Trăng:** *Tiết Trọng Khiêm*, 12A2, *Doãn Trọng Quý*, 11T2, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **Hà Nội:** *Hoàng Minh Hiển*, 9C1, THCS Archimede Academy.

TRẦN HỮU NAM

Bài T10/555. *Cho hai dãy số (x_n) và (y_n) thỏa mãn $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ và với mọi $n \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{cases} 2\sqrt{2}x_{n+1} = (\sqrt{3}+1)x_n - (\sqrt{3}-1)y_n \\ 2\sqrt{2}y_{n+1} = (\sqrt{3}-1)x_n + (\sqrt{3}+1)y_n \end{cases} \quad (1).$$

Chứng minh rằng tồn tại $T \in \mathbb{N}^*$ sao cho $x_{n+T} = x_n$, $y_{n+T} = y_n$, với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Lời giải. (Theo đa số các bạn)

Nhận xét rằng từ đẳng thức

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6} = 2\cos^2\frac{\pi}{12} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{\pi}{12}$$

ta có: $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$, $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.

Ta viết (1) dưới dạng:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}x_n - \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}y_n = \cos\frac{\pi}{12}x_n - \sin\frac{\pi}{12}y_n \\ y_{n+1} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}x_n + \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}y_n = \sin\frac{\pi}{12}x_n + \cos\frac{\pi}{12}y_n \end{cases} \quad (2).$$

Tiếp theo, ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp công thức sau:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \cos\frac{(n+1)\pi}{12}x_0 - \sin\frac{(n+1)\pi}{12}y_0 \\ y_{n+1} = \sin\frac{(n+1)\pi}{12}x_0 + \cos\frac{(n+1)\pi}{12}y_0 \end{cases}, n \in \mathbb{N} \quad (3).$$

Khi $n = 0$ thì (3) hiển nhiên đúng. Giả sử (3) đúng khi $n = k \in \mathbb{N}$. Khi đó:

$$x_{k+2} = \cos\frac{\pi}{12}x_{k+1} - \sin\frac{\pi}{12}y_{k+1}$$

$$= \cos\frac{\pi}{12}\left(\cos\frac{(k+1)\pi}{12}x_0 - \sin\frac{(k+1)\pi}{12}y_0\right) - \sin\frac{\pi}{12}\left(\sin\frac{(k+1)\pi}{12}x_0 + \cos\frac{(k+1)\pi}{12}y_0\right)$$

$$= \left(\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{(k+1)\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{(k+1)\pi}{12}\right)x_0 - \left(\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{(k+1)\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{(k+1)\pi}{12}\right)y_0$$

$$= \cos\frac{(k+2)\pi}{12}x_0 - \sin\frac{(k+2)\pi}{12}y_0.$$

Tương tự:

$$y_{k+2} = \sin\frac{(k+2)\pi}{12}x_0 + \cos\frac{(k+2)\pi}{12}y_0.$$

Vậy (3) được chứng minh. Từ (3) ta chỉ cần chọn $T = 24$ thì thì hiển nhiên $x_{n+24} = x_n$ và $y_{n+24} = y_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Nhận xét. Đây là dạng toán về dãy số tuần hoàn giải bằng phương pháp biến đổi lượng giác. Các bạn tham gia giải đều nhận được kết quả đúng. Đặc biệt, các bạn còn sử dụng trực tiếp đẳng thức $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ với $\cos\alpha = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}, \alpha \in [0, \pi]$ để chứng minh (3) bằng phưng pháp quy nạp cho phép giảm bớt độ cồng kềnh của biểu thức biến đổi đại số tương ứng.

Các bạn sau đây có lời giải đúng:

Kiên Giang. *Dương Thạnh Duy*, 12T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt; **Quảng Bình:** *Hoàng Kim Lộc*, 11T1, *Nguyễn Thanh Hải*, 12T1, *Phan Thị Mỹ Hạnh*, 12T2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T11/555. *Tìm số thực a nhỏ nhất để*

$$f_n(x) = \frac{1}{n+3}x^{n+3} + \frac{2}{n+2}x^{n+2} + \frac{1}{n+1}x^{n+1} - x + 2024$$

đồng biến trên $[a; +\infty)$ với mọi số nguyên dương n.

Lời giải (Dựa trên lời giải của bạn *Phạm Thị Mỹ Hạnh*, 12T2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình**)

Giả sử a là số thực thỏa mãn điều kiện bài toán. Suy ra: $f_n'(x) = x^{n+2} + 2x^{n+1} + x^n - 1 \geq 0$,

$\forall x \in (a;+\infty), n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì

$$\lim_{x\to a^+}(x^{n+2} + 2x^{n+1} + x^n - 1)$$

$$= a^{n+2} + 2a^{n+1} + a^n - 1 \geq 0 \quad (1).$$

• Nếu $a \leq 0$ thì $\forall n \in N^*, a^{n+2} + 2a^{n+1} + a^n - 1 \geq 0$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a^n(a+1)^2 - 1 \geq 0.$$

Lấy $n = 1$ ta có: $a(a+1)^2 \leq 0$

$$\Rightarrow -1 \geq a(a+1)^2 - 1 \geq 0, \text{ mâu thuẫn.}$$

• Nếu $0 < a < 1$ thì từ (1) cho $n \to \infty$ ta có:

$$\lim(a^{n+2} + 2a^{n+1} + a^n - 1) = -1 \geq 0, \text{ mâu thuẫn.}$$

Thành thử $a \geq 1$. Với $\forall x \in (1,+\infty)$ ta có:

$$f_n'(x) = x^{n+2} + 2x^{n+1} + x^n - 1 \geq 3 > 0$$

do đó $f_n(x)$ đồng biến trên $[1,+\infty)$ với mọi số nguyên dương n.

Vậy $a = 1$ là giá trị nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện bài toán.

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tốt: **Quảng Bình:** *Đoàn Ngọc Duy*, 12T1, *Hoàng Kim Lộc*, 11T1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Phú Yên:** *Nguyễn Tấn Nguyên Chương*, 11T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Đà Nẵng:** *Tô Đông Hải*, 11, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T12/555. *Cho tam giác ABC nhọn, không cân nội tiếp đường tròn (O), có AD là đường phân giác góc $\widehat{BAC}$. Điểm I thuộc AD sao cho BI cắt AC tại E, CI cắt AB tại F và IE = IF. Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF và N là giao điểm của AI và EF. Gọi G là giao điểm của EF với tiếp tuyến tại A của đường tròn (O); gọi L là giao điểm thứ hai của hai đường tròn (O) và (J). Chứng minh GL đi qua điểm chính giữa cung $\widehat{EAF}$.*

Lời giải. Ta cần có một bổ đề.

Bổ đề. *Cho tam giác ABC không cân tại A và điểm M thuộc phân giác góc $\widehat{BAC}$ sao cho MB = MC. Khi đó tứ giác ABMC nội tiếp.*

Phép chứng minh bổ đề trên rất đơn giản, không trình bày tại đây.

Trở lại giải bài toán T12/555.

Vì tam giác *ABC* không cân tại *A* nên tam giác *AEF* không cân tại *A*.

Do đó, theo bổ đề 1, tứ giác *AEIF* nội tiếp (1).

Từ đó, chú ý rằng *GA* tiếp xúc với (*O*); theo định lí sin; chú ý rằng *AD*, *BE*, *CF* đồng quy; theo định lí Ceva; chú ý rằng $\widehat{DAB} = \widehat{DAC}$; các tam giác *BFL*, *CEL* đồng dạng, suy ra

$$\frac{GE}{GF} = \frac{S_{AGE}}{S_{AGF}} = \frac{AG.AE\sin\widehat{GAE}}{AG.AF\sin\widehat{GAF}}$$

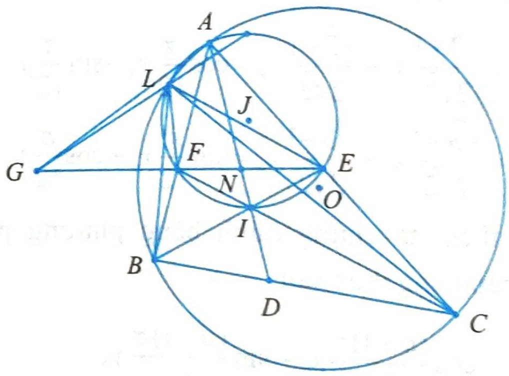
$$= \frac{AE}{AF}.\frac{\sin\widehat{ABC}}{\sin\widehat{ACB}} = \frac{AE}{AF}.\frac{AC}{AB}$$

$$= \frac{AE}{CE}.\frac{CD}{BD}.\frac{BF}{AF}.\frac{AC}{AB}.\frac{BD}{CD}.\frac{CE}{BF}$$

$$= 1.\frac{DC}{DB}.\frac{BD}{CD}.\frac{CE}{BF} = \frac{CE}{BF} = \frac{LE}{LF}.$$

Điều đó có nghĩa rằng *LG* là phân giác ngoài của tam giác *LEF*.

Vậy *LG* đi qua điểm chính giữa của cung $\widehat{EAF}$.



Nhận xét. 1) Bài toán này không khó, nhưng chỉ có 5 bạn tham gia giải. Một vài bạn cho lời giải quá phức tạp.

2) Xin nêu tên cả 5 bạn: **Quảng Bình:** *Nguyễn Thanh Hải*, *Đoàn Ngọc Duy*, 12T1, *Phạm Thị Mỹ Hạnh*, 12T2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Đà Nẵng:** *Tô Đông Hải*, 11A$_2$, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Phú Yên:** *Nguyễn Tấn Nguyên Chương*, 11T1,

THPT chuyên Lương Văn Chánh. **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Lê Thành Đạt*, 11T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/555. *Một con lắc đơn có chiều dài dây treo $l = 20$ cm, được treo tại một điểm cố định. Kéo con lắc khỏi phương thẳng đứng một góc bằn 0,1 rad về phía bên phải rồi truyền cho nó một vận tốc 14 cm/s theo phương vuông góc với dây về phía vị trí cân bằng. Coi con lắc dao động điều hoà, viết phương trình dao động đối với li độ dài của con lắc. Chọn gốc tọa độ tại vị trí cân bằng, chiều dương hướng từ vị trí cân bằng sang phía bên phải, gốc thời gian là lúc con lắc đi qua vị trí cân bằng lần thứ nhất. Cho gia tốc trọng trường $g = 9,8$ m/s^2.*

Lời giải. Phương trình dao động tổng quát của con lắc đơn: $s = S_0\cos(\omega t + \varphi)$.

Tần số góc: $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}} = \sqrt{\dfrac{9,8}{0,2}} = 7$ rad/s.

Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng:

$$W = W_đ + W_t$$

$$\Leftrightarrow \frac{m\omega^2 s_0^2}{2} = \frac{m\omega^2 s^2}{2} + \frac{mv^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow s_0^2 = s^2 + \frac{v^2}{\omega^2}.$$

Với $s = \alpha l$, $v = 14$ cm/s $\Rightarrow s_0 = 2\sqrt{2}$ cm.

Tại thời điểm $t = 0$ thì con lắc qua vị trí cân bằng lần thứ nhất nên $s = 0$, $v < 0$:

$$\begin{cases} s = s_0\cos\varphi = 0 \\ v = -\omega\sin\varphi < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\varphi = 0 \\ \sin\varphi < 0 \end{cases} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Vậy phương trình dao động của con lắc là:

$$s = 2\sqrt{2}\cos\left(7t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (cm)}.$$

Nhận xét. Chúc mừng các bạn sau đã có lời giải đúng cho đề ra kì này: **Đồng Tháp:** *Võ Hoàng Minh Khôi*, 10T1, *Phạm Văn Anh*, 11 Lý, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Thừa Thiên Huế:** *Hoàng Ngọc Gia Huy*, *Trần Lê Thiện Nhân*, 11 Lý 2, THPT chuyên Quốc học Huế; **Bình Định:** *Lý Nhật Nam*, 11 lý, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Quảng Bình:** *Đỗ Thị Thanh Thảo*, 12 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Đồng Nai:** *Phạm Xuân Khánh*, 11A2, THPT Tam Phước, TP. Biên Hòa.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/555. *Hiệu suất truyền tải điện năng một công suất $\mathscr{P}$ từ máy phát điện đến nơi tiêu thụ là 35%. Nếu sử dụng máy biến áp lí tưởng có tỉ số giữa cuộn thứ cấp và cuộn sơ cấp là $\dfrac{N_2}{N_1} = 5$ để tăng điện áp truyền tải thì hiệu suất truyền tải sau khi sử dụng máy biến áp này là bao nhiêu?*

Lời giải. Theo bài ra ta có:

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1} = 5 \quad (1).$$

Mặt khác: $$1 - H_1 = \frac{\mathscr{P}.R}{U_1^2\cos^2\varphi} \quad (2);$$

$$1 - H_2 = \frac{\mathscr{P}.R}{U_2^2\cos^2\varphi} \quad (3);$$

Từ (2) và (3) suy ra: $$\frac{1 - H_1}{1 - H_2} = \left(\frac{U_2}{U_1}\right)^2 \quad (4).$$

Thay $H_1 = 0,35$ vào (4) và kết hợp với (1) ta tìm được $H_2 = 0,974$.

Vậy hiệu suất truyền tải sau khi sử dụng máy biến áp là 97,4%.

Nhận xét. Chúc mừng các bạn sau đã có lời giải đúng cho đề ra kì này: **Đồng Tháp:** *Võ Hoàng Minh Khôi*, 10T1, *Phạm Văn Anh*, 12 Lý, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Thừa Thiên Huế:** *Trần Lê Thiện Nhân*, 11 lý 2, THPT chuyên Quốc học Huế; **Bình Định:** *Lý Nhật Nam*, 11 Lý, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Quảng Bình:** *Đỗ Thị Thanh Thảo*, 12 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Tiền Giang:** *Trương Phúc Vinh*, 12 Lý, THPT chuyên Tiền Giang.

NGUYỄN XUÂN QUANG

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH HÀM BẰNG PHƯƠNG PHÁP THÁC TRIỂN MIỀN GIÁ TRỊ

KIỀU ĐÌNH MINH
(GV THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)

Phương trình hàm là dạng toán hay và khó, thường xuất hiện trong các kỳ thi Olympic. Có nhiều phương pháp giải khác nhau cho bài toán phương trình hàm. Trong bài báo này chúng tôi muốn trao đổi với bạn đọc một phương pháp rất hay và hiệu quả mà chúng tôi tạm gọi là **"Phương pháp thác triển miền giá trị"**. Chúng ta cùng tìm hiểu phương pháp này qua từng thí dụ sau

Thí dụ 1. *Tìm tất cả các hàm số thỏa mãn*

$$f(x-f(y))=3f(x)-2x-f(y), \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Phân tích. Phương trình đã cho được viết lại như sau:

$$f(x-f(y))-3f(x)=-2x-f(y), \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Cố định y thì ta thấy vế phải của phương trình nhận giá trị trên $\mathbb{R}$ với mọi $\forall x\in\mathbb{R}$. Ngoài ra $x-f(y)$ cũng nhận giá trị trên $\mathbb{R}$ với mọi $\forall x\in\mathbb{R}$. Do đó, với mỗi $t\in\mathbb{R}$, đều tồn tại $u,v\in\mathbb{R}$ sao cho $t=f(u)-3f(v)$. Từ đó ta có nhu cầu đi tìm $f(t)$ hay là tìm $f(f(u)-3f(v))$. Ta có lời cho bài toán giải như sau

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn điều kiện bài toán. Gọi $P(x,y)$ là phép thế giá trị các biến x,y vào phương trình:

$$f(x-f(y))=3f(x)-2x-f(y), \forall x,y\in\mathbb{R}\ (1).$$

Với $P(f(y),y)$, ta có:

$$f(0)=3f(f(y))-3f(y), y\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(f(y))=f(y)+\frac{a}{3}, \forall y\in\mathbb{R}, (a=f(0))(2)$$

Với $P(f(x),y)$ và sử dụng (2), ta có:

$$f(f(x)-f(y))=3f(f(x))-2f(x)-f(y)$$
$$=(f(x)-f(y))+\text{a}, \forall x,y\in\mathbb{R}\ (3).$$

Với $P(f(x)-f(y),y)$ và sử dụng (3), ta có:

$$f(f(x)-2f(y))=(f(x)-2f(y))+3a,$$
$$\forall x,y\in\mathbb{R}\ (4).$$

Với $P(f(x)-2f(y),y)$ và sử dụng (4), ta có:

$$f(f(x)-3f(y))=(f(x)-3f(y))+9a, \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Suy ra $f(t)=t+9a, \forall t\in\mathbb{R}$. Thay vào phương trình (1), ta được $a=0$. Vậy tất cả các hàm số cần tìm là $f(x)=x, \forall x\in\mathbb{R}$.

Thí dụ 2. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x-f(y))=f(x)+xf(y)+f(f(y)), \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Lời giải. Trong thí dụ này, cái khác với thí dụ 1 ở chỗ, hệ số của ẩn x là $f(y)$ không phải là hằng số.

Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn bài toán. Gọi $P(x,y)$ là phép thế giá trị các biến x,y vào phương trình:

$$f(x-f(y))=f(x)+xf(y)+f(f(y)), \forall x,y\in\mathbb{R}\ (1).$$

Nhận thấy $f(x)=0, \forall x\in\mathbb{R}$ thỏa mãn bài toán. Xét $f(x)\neq 0$, khi đó tồn tại y_0 sao cho $f(y_0)\neq 0$, suy ra:

$$f(x-f(y_0))-f(x)=xf(y_0)+f(f(y_0))\in\mathbb{R},$$
$$\forall x\in\mathbb{R}.$$

Do đó, với mỗi $t \in \mathbb{R}$, đều tồn tại $u, v \in \mathbb{R}$ sao cho $t = f(u) - f(v)$. Với $P(f(y), y)$, ta có:

$$f(f(y)) = -\frac{f^2(y)}{2} + \frac{a}{2}, \forall y \in \mathbb{R}, (a = f(0)) \quad (2).$$

Với $P(f(x), y)$ và sử dụng (2), ta có:

$$f(f(x) - f(y)) = -\frac{(f(x) - f(y))^2}{2} + a, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \ (3).$$

Do đó $f(t) = -\frac{t^2}{2} + a, \forall t \in \mathbb{R}, (4)$. Thay (4) vào (1), ta được $a = 0$. Vậy tất cả các hàm số cần tìm là

$$f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } f(x) = -\frac{x^2}{2}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thí dụ 3. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$2f(3x - 2f(y)) = 3f(x) - 4f(f(y)) - 3x - 1, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn bài toán. Gọi $P(x, y)$ là phép thế giá trị các biến x, y vào phương trình:

$$2f(3x - 2f(y)) = 3f(x) - 4f(f(y)) - 3x - 1, \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (1).$$

Với $P(f(y), y)$, ta có:

$$2f(f(y)) = 3f(f(y)) - 4f(f(y)) - 3f(y) - 1$$
$$\Leftrightarrow 3f(f(y)) = -3f(y) - 1, \forall y \in \mathbb{R} \quad (2).$$

Với $P(f(x), y)$ và sử dụng (2), ta có:

$$\begin{aligned} 2f(3f(x) - 2f(y)) &= 3f(f(x)) - 4f(f(y)) - 3f(x) - 1 \\ &= -6f(x) + \frac{4}{3}(3f(y) + 1) - 2 \\ &= -2(3f(x) - 2f(y)) - \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Suy ra:

$$f(3f(x) - 2f(y)) = -(3f(x) - 2f(y)) - \frac{1}{3}, \forall x, y \in \mathbb{R},$$

hay $f(t) = -t - \frac{1}{3}, \forall t \in \mathbb{R}$. Thử lại ta thấy thỏa mãn. Vậy hàm cần tìm là

$$f(x) = -x - \frac{1}{3}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thí dụ 4. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(f(x) + y) = f(f(x) - y) + 4f(x).y, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn bài toán. Gọi $P(x, y)$ là phép thế giá trị các biến x, y vào phương trình:

$$f(f(x) + y) = f(f(x) - y) + 4f(x).y, \forall x, y \in \mathbb{R} \ (1).$$

Dễ thấy $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn bài toán.

Xét $f(x) \neq 0$. Với $P(x, f(x))$, ta có:

$$\begin{aligned} f(2f(x)) &= f(0) + 4f^2(x) \\ &= 4f^2(x) + a, \forall x \in \mathbb{R} \ (a = f(0) \ (2). \end{aligned}$$

Với $P(x, f(x) - 2f(y))$ và sử dụng (2), ta có:

$$\begin{aligned} f(2f(x) - 2f(y)) &= f(2f(y)) + \\ &\quad + 4f(x)(f(x) - 2f(y)) \\ &= 4(f(x) - f(y))^2 + a, \forall x, y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

hay $f(t) = t^2 + a, \forall t \in \mathbb{R}$. Thử lại ta thấy thỏa mãn. Tất cả các hàm cần tìm là:

$$f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } f(x) = x^2 + a, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thí dụ 5. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f^2(x) + 2yf(x) + f(y) = f(y + f(x)), \forall x, y \in \mathbb{R},$$

với $f^2(x) = (f(x))^2$.

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn bài toán. Gọi $P(x, y)$ là phép thế giá trị các biến x, y vào phương trình:

$f^2(x) + 2yf(x) + f(y) = f(y + f(x)), \forall x, y \in \mathbb{R}$ (1). Dễ thấy $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn bài toán.

Xét $f(x) \neq 0$. Lấy $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x_0) \neq 0$, suy ra:

$$f(y+f(x_0))-f(y)=f^2(x_0)+2yf(x_0)\in\mathbb{R},\forall y\in\mathbb{R}.$$

Do đó, với mỗi $t\in\mathbb{R}$, đều tồn tại $u,v\in\mathbb{R}$ sao cho $t=f(u)-f(v)$. Với $P(x,0)$, ta có:

$$f^2(x)+f(0)=f(f(x)),\forall x\in\mathbb{R}\ (2)$$

Với $P(x,f(y)-f(x))$ và sử dụng (2), ta có:

$$f^2(x)+2(f(y)-f(x))f(x)+f(f(y)-f(x))=f(f(y)),\forall x,y\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(f(y))-f(f(y)-f(x))=f^2(x)+2f(y)f(x)-2f^2(x),\forall x,y\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f^2(y)+f(0)-f(f(y)-f(x))=2f(x)f(y)-f^2(x),\forall x,y\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(f(y)-f(x))=(f(y)-f(x))^2+f(0),\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Từ đó suy ra $f(t)=t^2+a,\forall t\in\mathbb{R}$ $(a=f(0)$. Thử lại ta thấy thỏa mãn. Vậy các hàm thỏa mãn đề bài là:

$$f(x)=0,\forall x\in\mathbb{R} \text{ và } f(x)=x^2+a,\forall x\in\mathbb{R}.$$

Thí dụ 6. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(f(x)+y)=f(x^2-y^2)+4f(x).y,\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn bài toán. Gọi $P(x,y)$ là phép thế giá trị các biến x,y vào phương trình:

$$f(f(x)+y)=f(x^2-y^2)+4f(x).y,\forall x,y\in\mathbb{R}\ (1).$$

Dễ thấy $f(x)=0,\forall x\in\mathbb{R}$ thỏa mãn bài toán.

Xét $f(x)\neq 0$. Đặt $f(u)=v\neq 0$. Ta chứng minh các khẳng định sau:

1) Với $\forall x\in\mathbb{R},\exists a,b\in\mathbb{R}$ sao cho $x=f(a)-f(b)$. Thật vậy:

a) Với $P\left(u,\frac{x}{8v}\right)$ thì

$$f\left(v+\frac{x}{8v}\right)=f\left(u^2-\left(\frac{x}{8v}\right)^2\right)+\frac{x}{2},\forall x\in\mathbb{R}$$

b) Với $P\left(u,-\frac{x}{8v}\right)$ thì

$$f\left(v-\frac{x}{8v}\right)=f\left(u^2-\left(\frac{x}{8v}\right)^2\right)-\frac{x}{2},\forall x\in\mathbb{R}$$

Từ (a) và (b) suy ra:

$$x=f\left(v+\frac{x}{8v}\right)-f\left(v-\frac{x}{8v}\right).$$

2) f là hàm chẵn. Thật vậy:

a) Với $P(x,f(y))$, thì

$$f(f(x)+f(y))=f(x^2-f^2(y))+4f(x).f(y),\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

b) Với $P(x,-f(y))$, thì

$$f(f(x)-f(y))=f(x^2-f^2(y))-4f(x).f(y),\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

c) Với $P(y,f(x))$ thì

$$f(f(x)+f(y))=f(y^2-f^2(x))+4f(x).f(y),\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

d) Với $P(y,-f(x))$ thì

$$f(f(y)-f(x))=f(y^2-f^2(x))-4f(x).f(y),\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Lấy $(a)-(b)-(c)+(d)$, ta được:

$$f(f(x)-f(y))=f(f(y)-f(x)),\forall x,y\in\mathbb{R}$$
$$\Rightarrow f(x)=f(-x),\forall x\in\mathbb{R}.$$

3) $f(x)=x\Rightarrow x=0$. Thật vậy:

Với $P(x,-x)$ thì $f(f(x)-x)=f(0)-4xf(x)$.

Do đó, nếu $f(x)=x$ thì

$$f(0)=f(0)-4x^2\Rightarrow x=0.$$

4) $f(0)=0$. Thật vậy:

Với $P(0,0)$ thì $f(f(0))=f(0)\Rightarrow f(0)=0$.

5) Không có nghiệm hàm. Thật vậy:

Với $P(0,u)$ thì $f(u)=f(-u^2)=f(u^2)$.

Với $P(u,0)$ thì $f(f(u))=f(u^2)$. Vậy ta có $f(f(u))=f(u)\Rightarrow f(u)=0$, vô lý.

Vậy bài toán đã cho có nghiệm hàm duy nhất là

$$f(x)=0,\forall x\in\mathbb{R}.$$

Thí dụ 7. *Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ *thỏa mãn*

$$f\left(\frac{f(x)}{y}\right)=yf(y)f(f(x)),\forall x,y\in\mathbb{R}^+.$$

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn bài toán. Gọi $P(x,y)$ là phép thế giá trị các biến x,y vào phương trình:

$$f\left(\frac{f(x)}{y}\right)=yf(y)f(f(x)),\forall x,y\in\mathbb{R}^+ \ (1).$$

Với $P(x,1)$, ta có:

$$f(f(x))=f(1)f(f(x)),\forall x\in\mathbb{R}^+\Rightarrow f(1)=1.$$

Với $P(x,f(x))$, ta có:

$$1=f(1)=f(x)f(f(x))f(f(x)),\forall x\in\mathbb{R}^+$$

$$\Rightarrow f(f(x))=\frac{1}{\sqrt{f(x)}} \ (2).$$

Với $P(x,f(y))$ và sử dụng (2), ta được:

$$f\left(\frac{f(x)}{f(y)}\right)=f(y)f(f(y))f(f(x))$$

$$=f(y).\frac{1}{\sqrt{f(y)}}.\frac{1}{\sqrt{f(x)}}=\sqrt{\frac{f(y)}{f(x)}} \ (3).$$

Phương trình đã cho được viết lại dưới dạng:

$$\frac{f\left(\frac{f(x)}{y}\right)}{f(y)}=yf(f(x)),\forall x,y\in\mathbb{R}^+.$$

Cố định $x\in\mathbb{R}^+$ và cho y chạy trên $\mathbb{R}^+$, ta suy ra với mọi số thực dương $t\in\mathbb{R}^+$ luôn viết được dưới dạng $t=\frac{f(u)}{f(v)},u,v\in\mathbb{R}^+$.

Từ đó và sử dụng (3) ta có:

$$f(t)=f\left(\frac{f(u)}{f(v)}\right)=\sqrt{\frac{f(v)}{f(u)}}=\frac{1}{\sqrt{t}}$$

hay $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}},\forall x\in\mathbb{R}^+$. Thử lại ta thấy thỏa mãn.

BÀI TẬP LUYỆN TẬP

1. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x-f(y))=2f(x)+x+f(y),\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

2. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(f(x)+y)=2x+f(f(y)-x),\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

3. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f^2(x)+2yf(x)+f(y)=f(y+f(x)),\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

4. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x+f(y))=f^2(y)+2xf(y)+f(-x),$$
$$y\in\mathbb{R}.$$

5. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x+f(y))=f^4(y)+4x^3f(y)+6x^2f^2(y)$$
$$+4xf^3(y)+f(-x),\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

6. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x-2f(y))=5f(x)-4x-2f(y),\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

7. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(2x+f(y))=f(2x)+xf(2y)+f(f(y)),$$
$$\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

8. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x+f(y))=f(x)+\frac{1}{8}xf(4y)+f(f(y)),$$
$$\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

9. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x+f(y))=f(y^2+3)+2xf(y)+f(x)-3,$$
$$\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

10. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$xf(xf(y))=f(f(y)),\forall x,y\in\mathbb{R}^+.$$

BẠN ĐỌC TÌM TÒI

KHAI THÁC KẾT QUẢ MỘT BÀI TOÁN

ĐẬU ANH HÙNG
(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị)

Trong quá trình tìm tòi, nghiên cứu tôi phát hiện một kết quả của một bài toán xuất hiện trong Tạp chí Pi rất thú vị và đã được ứng dụng để chứng minh một số bài toán. Xin giới thiệu cùng bạn đọc.

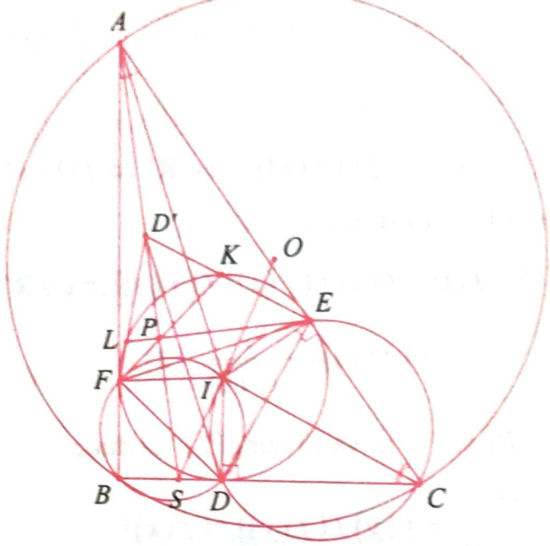
BÀI TOÁN 1 (P628, số 7, 8, tháng 8/2022). *Cho tam giác ABC. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác, tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại A_1, B_1, C_1. Gọi A_2, B_2, C_2 lần lượt là các điểm đối xứng của A_1 qua B_1C_1, B_1 qua C_1A_1, C_1 qua A_1B_1; A_3, B_3, C_3 lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng AA_2 với BC, BB_2 với AC, CC_2 với AB. Chứng minh rằng A_3, B_3, C_3 thẳng hàng.*

Lời giải của bài toán trên bạn đọc có thể tham khảo [1].

Nhận xét 1. Các điểm A_3, B_3, C_3 nằm trên đường thẳng IO, hay ta có $AA_2; IO; BC$ đồng quy. Trong bài viết kí hiệu (XYZ) chỉ đường tròn đi qua các điểm X, Y, Z.

BÀI TOÁN 2 (Iran MO 2019). *Cho tam giác ABC nội tiếp (O), ngoại tiếp đường tròn (I). (I) tiếp xúc với AB, AC lần lượt tại F, E. Tiếp tuyến tại E của đường tròn (IEC) cắt tiếp tuyến tại F của đường tròn (IFB) tại P. Chứng minh rằng AP, OI, BC đồng quy.*

Lời giải. (Của tác giả bài viết)



Gọi D là điểm tiếp xúc của (I) với cạnh BC; K là giao điểm của PF và (I), $K \neq F$; L là giao điểm của PE và (I), $L \neq E$; D' là giao của FL và EK.

Ta có: $\widehat{KFI} = \widehat{IFD} = \left(\frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{FI}\right)$ và $IF \perp AB$

nên $\widehat{AFK} = \widehat{DFB}$, suy ra:

sđ$\widehat{FK}$ = sđ$\widehat{FD}$ (trên (I)), suy ra: $\widehat{D'EF} = \widehat{FED}$.

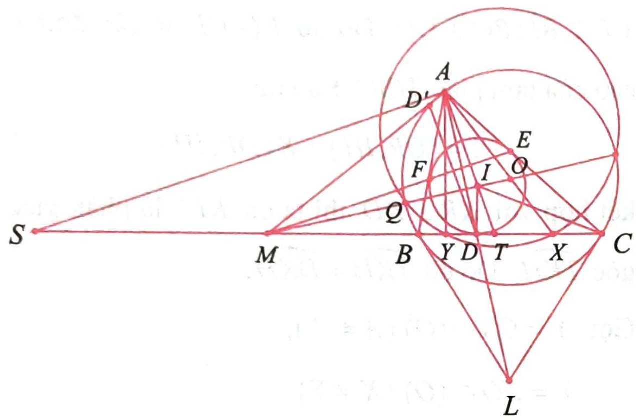
Chứng minh tương tự ta có: $\widehat{D'FE} = \widehat{EFD}$.

Từ đây suy ra D, D' đối xứng nhau qua EF.

Trên đường tròn (I), áp dụng định lý Pascal cho bộ điểm $\begin{pmatrix} F & E & L \\ E & F & K \end{pmatrix}$ ta có A, D', P thẳng hàng. Áp dụng kết quả bài toán 1 ta có điều phải chứng minh.

BÀI TOÁN 3 (China National Olympiad 2017). *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), ngoại tiếp đường tròn (I). Đường tròn (I) tiếp xúc với BC tại D. Tiếp tuyến của (O) tại B và C cắt nhau tại L. Gọi X là giao điểm của AO và BC; P,Q là các giao điểm của IO và (O); Y là hình chiếu của A lên BC. Chứng minh rằng P,Q,X,Y cùng thuộc một đường tròn khi và chỉ khi A,D,L thẳng hàng.*

Lời giải.



Giả sử (I) tiếp xúc với AC, AB tại E, F tương ứng. Gọi T, S lần lượt là giao điểm của BC với phân giác trong, phân giác ngoài của $\widehat{BAC}$; D' là điểm đối xứng của D qua EF; M là trung điểm của ST. Ta có $(ST;BC)=-1$ nên

$$MA^2 = MT^2 = \overline{MB}.\overline{MC},$$

từ đây suy ra MA là tiếp tuyến của (O). Do đó ΔMAX vuông tại A, cũng vì vậy ta có:

$$MA^2 = \overline{MY}.\overline{MX}.$$

Vậy $\overline{MB}.\overline{MC} = \overline{MY}.\overline{MX}$.

• Giả sử tứ giác $PQXY$ nội tiếp. Gọi P' là giao điểm của MQ và (O) $(P' \neq Q)$. Khi đó ta có:

$$\overline{MQ}.\overline{MP'} = \overline{MB}.\overline{MC} = \overline{MX}.\overline{MY}.$$

Điều này chứng tỏ $P' \in (PQXY)$ hay $P \equiv P'$. Theo kết quả bài toán 1 thì $D' \in MA$. Vì $DD' // AT$ nên $\Delta MDD'$ cân tại M. Tức M thuộc trung trực DD'. Nói cách khác M thuộc EF. Suy ra $(MD;BC)=-1$. Do đó A,D,L thuộc đường đối cực của M đối với (O), nghĩa là A,D,L thẳng hàng.

• Nếu A,D,L thẳng hàng thì $(M'D;BC)=-1$, với M' là giao điểm của EF và BC. Suy ra DL là đường đối cực của M' đối với (O). Do đó $M'A$ là tiếp tuyến của (O), từ đây ta có $M \equiv M'$. Kết quả này suy ra D' thuộc MA. Theo kết quả bài toán 1 thì M,P,Q thẳng hàng.

Ta có $\overline{MP}.\overline{MQ} = \overline{MB}.\overline{MC} = \overline{MX}.\overline{MY}$. Suy ra tứ giác $PQYX$ nội tiếp. Bài toán được chứng minh.

BÀI TOÁN 4 (Taiwan TST 2020). *Cho tam giác ABC nội tiếp (O), ngoại tiếp đường tròn (I). Đường tròn (I) tiếp xúc với BC tại D. Gọi S, T là điểm trên (O) sao cho AS, OI, BC đồng quy và $\widehat{ATI} = 90^\circ$; H là trực tâm của tam giác IBC. Chứng minh rằng D, T, S, H cùng thuộc một đường tròn.*

Lời giải.

Trước hết ta có bổ đề sau:

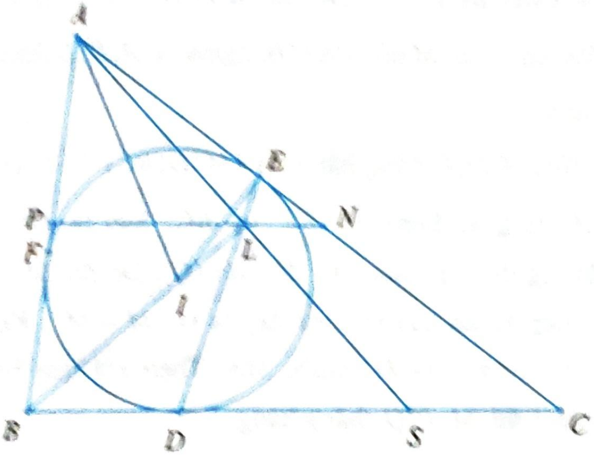
Bổ đề. *Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh CA, AB và L là giao điểm của BI và DE. Khi đó $AL \perp BI$ và P, N, L thẳng hàng.*

Chứng minh bổ đề.

Gọi S là giao điểm của AL và BC. Ta chứng minh tứ giác $AILE$ nội tiếp. Thật vậy, ta có:

$$\widehat{BLD}=\widehat{EDC}-\widehat{LBC}=90^\circ-\frac{\widehat{C}}{2}-\frac{\widehat{B}}{2}=\frac{\widehat{A}}{2}=\widehat{IAE}.$$

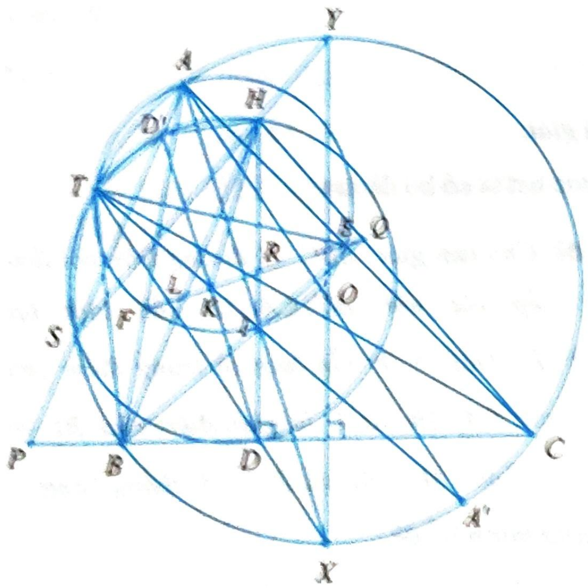
Suy ra tứ giác $AILE$ nội tiếp. Do đó $\widehat{ALI}=\widehat{AEI}=90^\circ$.



Tam giác ABS có BL là phân giác cũng là đường cao nên nó là tam giác cân tại B. Suy ra L là trung điểm AS. Điều này chứng tỏ P, N, L thẳng hàng.

Trở lại bài toán.

Gọi P là giao điểm của AS và BC; D' là điểm đối xứng D qua EF; K là hình chiếu của D trên EF; X là giao điểm của AI và (O) $(X \neq A)$.



Ta có: $\Delta TFB \sim \Delta TEC$ (g.g) nên

$$\frac{TB}{TC}=\frac{FB}{EC}=\frac{DB}{DC},$$

suy ra TD là phân giác $\widehat{BTC}$. Do đó T, D, X thẳng hàng.

Lại có:

$$\frac{KF}{KE}=\frac{\tan\widehat{KED}}{\tan\widehat{KFD}}=\frac{\tan\widehat{FIB}}{\tan\widehat{EIC}}=\frac{BF}{CE}=\frac{TF}{TE},$$

suy ra TK là phân giác $\widehat{FTE}$. Do đó T, K, I thẳng hàng. Gọi Q, L, R lần lượt là giao điểm của BI, CI, DI với FE. Theo bổ đề trên thì $CL \perp BL$; $BQ \perp CQ$. Do đó BQ; CL là các đường cao của tam giác HBC. Suy ra:

$$-1=(DR;IH)=K(DR;IH),$$

kết hợp với $KR \perp KD$ thì ta có KD' là phân giác góc $\widehat{TKH}$. Do đó $\widehat{TKD}=\widehat{DKH}$.

Gọi $A'=OA\cap(O)$ $(A\neq A')$,

$Y=XO\cap(O)$ $(X\neq Y)$.

Ta có: $\widehat{KTD}=\widehat{AXY}$ (do sđ$\overset{\frown}{AY}$ = sđ$\overset{\frown}{A'X}$)

$=\widehat{XAA'}=\widehat{KDH}$ (do $DK \parallel XA$; $DH \parallel XY$)

nên $\Delta TKD \sim \Delta DKH$, suy ra:

$$\frac{TK}{TD'}=\frac{TK}{TD}=\frac{KD}{KH}=\frac{KD'}{KH}.$$

Do đó $\Delta TKD' \sim \Delta D'KH$,

điều này kéo theo $\widehat{D'TK}=\widehat{HD'K}$.

Ta có:

$$\widehat{D'TD}=\widehat{D'TK}+\widehat{KTD}=\widehat{HD'K}+\widehat{HDK}$$
$$=180^\circ-\widehat{D'HD},$$

hay tứ giác $D'TDH$ nội tiếp.

Theo bài toán 1 thì D' thuộc SA. Từ đây suy ra:

$$\widehat{TSD'}=\widehat{TSA}=\widehat{TXA}=\widehat{TDD'},$$

dẫn đến tứ giác $TSDD'$ nội tiếp. Vậy tứ giác $HTSD$ nội tiếp.

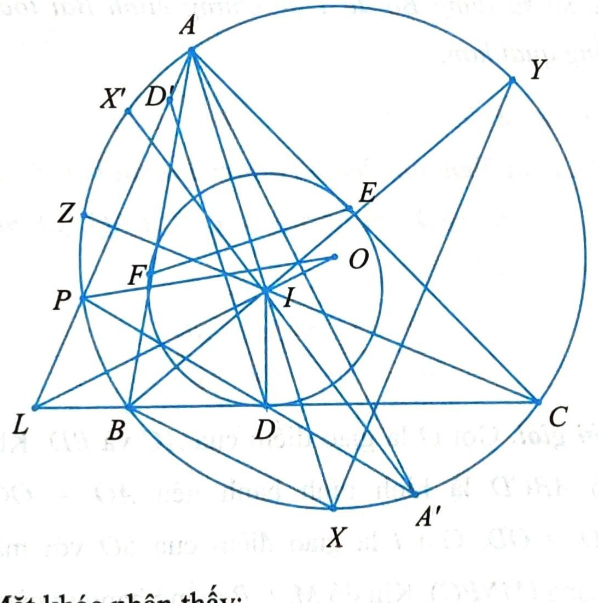
Nhận xét 2. Từ quá trình chứng minh trên ta nhận thấy tâm của đường tròn ngoại tiếp $HTSD$ nằm trên EF.

BÀI TOÁN 5. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (I) nội tiếp tam giác, tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi D' là điểm đối xứng của D qua đường thẳng EF; A' là điểm đối xứng của A qua IO; P là giao điểm khác A của AD' và (O). Chứng minh rằng P, D, A' thẳng hàng.*

Lời giải. Gọi X, Y, Z, X' lần lượt là giao điểm của $AI, BI, CI, A'I$ với $(O)(X \neq A, Y \neq B, Z \neq C, X' \neq A')$; L là giao điểm của AD' và BC.

Theo kết quả bài toán 1 thì ta có O, I, L thẳng hàng. Ta có: $(AA';BC) = I(AA';BC) = (XX';YZ)$

$$= X(XX';YZ).$$



Mặt khác nhận thấy:

$$XX \perp ID; XX' \perp OI; XY \perp IC; XZ \perp IB$$

(trong đó kí hiệu XX là tiếp tuyến của (O) tại X) nên $X(XX';YZ) = I(DL;CB) = P(DL;CB)$

$$= (A''A;CB) = (AA'';BC),$$

với A'' là giao điểm của PD và (O), $(A'' \neq P)$.

Từ đây suy ra $(AA';BC) = (AA'';BC)$, do đó P, D, A' thẳng hàng. Kết thúc chứng minh.

Cuối cùng là hai bài toán của tác giả xin gửi đến bạn đọc như bài tập để luyện tập.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI TOÁN 6. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), ngoại tiếp đường tròn (I), phân giác trong AT. Đường tròn (I) tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi X là giao điểm của AO và BC; P, Q là các giao điểm của IO và (O); Y là hình chiếu của A trên BC. Chứng minh rằng P, Q, X, Y cùng thuộc một đường tròn khi và chỉ khi $AFTE$ là hình thoi.

BÀI TOÁN 7. Cho tam giác $ABC (AB < AC)$ nhọn, nội tiếp đường tròn (O), ngoại tiếp đường tròn (I). Đường tròn (I) tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi D' là điểm đối xứng của D qua đường thẳng EF; P là giao điểm khác A của AD' và (O); H là trực tâm của tam giác IBC; T là điểm trên (O) sao cho $\widehat{ATI} = 90^\circ$; Q là giao điểm của AI và (O) $(Q \neq A)$. Đường thẳng TH cắt lại (O) tại M. Chứng minh rằng $PQMT$ là tứ giác điều hòa (tứ giác nội tiếp có tích các cặp cạnh đối bằng nhau).

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Tạp chí Pi, tập 6, số 7, 8 tháng 8, số 11 tháng 11, năm 2022.

[2] Art of Problem Solving.
https://www.artofproblemsolving.com

NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN

BÀI TOÁN 79. *Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD và một điểm I cố định trên đường cao SO của hình chóp. Mặt phẳng qua I cắt các cạnh bên SA, SA, SC, SD của hình chóp lần lượt tại các điểm M, N, P, Q. Chứng minh hệ thức*

$$\frac{1}{SM}+\frac{1}{SP}=\frac{1}{SN}+\frac{1}{SQ}..$$

a) *Hãy tìm các các giải của Bài toán.*

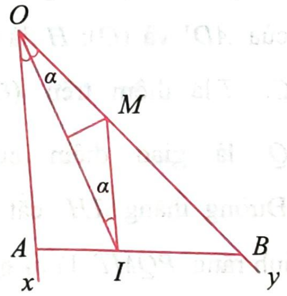
b) *Tổng quát hóa.*

c) *Nêu và giải bài toán tương tự.*

Lời giải 1. Dựa vào bổ đề sau

Bổ đề 1. *Trên đường phân giác Ox của góc $\widehat{xOy}=2\alpha$ lấy một điểm I. Đường thẳng qua I cắt Ox và Oy tai A và B. Thế thì* $\dfrac{1}{OA}+\dfrac{1}{OB}=\dfrac{2\cos\alpha}{OI}$.

Chứng minh Bổ đề 1. ***Cách 1*** (h.1)



Hình 1

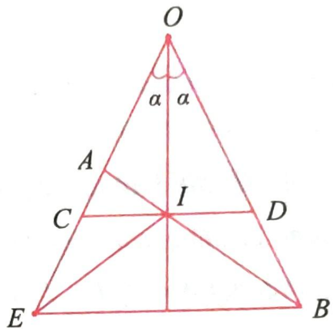
Đường thẳng kẻ từ I, song song với Ox cắt Oy tại M. Vì tam giác OIM cân tại M và $\widehat{xOy}=2\alpha$ nên $IM=OM=\dfrac{OI}{2\cos\alpha}$. Theo định lý Thales có:

$$\frac{IM}{OA}=\frac{OM}{OA}=\frac{BM}{OB}=\frac{OB-OM}{OB}=1-\frac{OM}{OB}$$

$$\Rightarrow\frac{OM}{OA}+\frac{OM}{OB}=1\Rightarrow\frac{1}{OA}+\frac{1}{OB}=\frac{1}{OM}.$$

Từ đó: $\dfrac{1}{OA}+\dfrac{1}{OB}=\dfrac{2\cos\alpha}{OI}$.

Cách 2. (h.2)



Hình 2

Đường thẳng đi qua I, vuông góc với OI cắt Ox, Oy lần lượt tại C và D. Gọi E là điểm đối xứng của B qua đường phân giác OI. Khi đó IC và IO là các phân giác trong và ngoài của tam giác AIE. Từ đó (IA,IE,IC,IO) là chùm điều hòa. Theo hệ thức Descartes, ta có:

$$\frac{1}{OA}+\frac{1}{OE}=\frac{2}{OC}\Rightarrow\frac{1}{OA}+\frac{1}{OB}=\frac{2\cos\alpha}{OI}.$$

Ta sẽ sử dụng Bổ đề 1 để chứng minh Bài toán tổng quát hơn.

Bài toán 79.1. *Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình bình hành. Một mặt phẳng tùy ý cắt SA, SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P, Q. Chứng minh hệ thức*

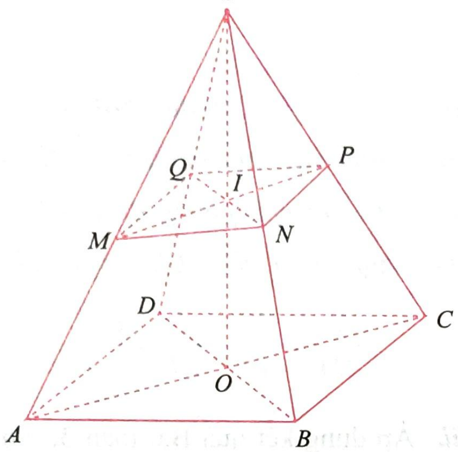
$$\frac{SA}{SM}+\frac{SC}{SP}=\frac{SB}{SN}+\frac{SD}{SQ}.$$

Lời giải. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Khi đó $ABCD$ là hình bình hành nên $AO=OC$, $BO=OD$. Gọi I là giao điểm của SO với mặt phẳng $(MNPQ)$. Khi đó M, I, P thẳng hàng vì cùng nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và $(MNPQ)$. Tương tự có N, I, Q thẳng hàng.

Vì $AO=OC$ nên $S_{\Delta SAO}=S_{\Delta SCO}=\dfrac{1}{2}S_{\Delta SAC}$.

Ta lại có: $\dfrac{S_{\Delta SMI}}{S_{\Delta SAO}}+\dfrac{S_{\Delta SIP}}{S_{\Delta SOC}}=\dfrac{S_{\Delta SMP}}{\frac{1}{2}S_{\Delta SAC}}$

nên $\dfrac{SM.SI}{SA.SO}+\dfrac{SI.SP}{SO.SC}=2\dfrac{SM.SP}{SA.SC}$.



Hình 3

Do đó $\dfrac{SA}{AM}+\dfrac{SC}{SP}=2\dfrac{SO}{SI}$. Tương tự có:

$\dfrac{SB}{SN}+\dfrac{SD}{SQ}=2\dfrac{SO}{SI}$. Từ đó: $\dfrac{SA}{SM}+\dfrac{SC}{SP}=\dfrac{SB}{SN}+\dfrac{SD}{SQ}$.

Áp dụng kết quả Bài toán 79* với chú ý: *S.ABCD* là hình chóp tứ giác đều nên $SA = SB = SC = SD$ ta nhận được lời giải bài toán 79.

Lời giải 2. Dựa vào bổ đề sau

Bổ đề 2. *Cho góc $\widehat{xOy}=\alpha$. Trên Ox và Oy lấy lần lượt hai cặp điểm A, A' và B, B'. Thế thì*

$$\frac{S_{\Delta OAB}}{S_{\Delta OA'B'}}=\frac{OA}{OA'}.\frac{OB}{OB'}.$$

Chứng minh. Từ $S_{\Delta OAB}=\dfrac{1}{2}.OA.OB.\sin\alpha$,

$$S_{\Delta OA'B'}=\frac{1}{2}.OA'.OB'.\sin\alpha$$

nên $\dfrac{S_{\Delta OAB}}{S_{\Delta OA'B'}}=\dfrac{OA}{OA'}.\dfrac{OB}{OB'}$.

Trở về bài toán 79 (h.3), vì *S.ABCD* là hình chóp tứ giác đều nên $SA = SB = SC = SD$ (= a), ta lại có:

$$\frac{S_{\Delta SMI}}{S_{\Delta SAO}}+\frac{S_{\Delta SIP}}{S_{\Delta SOC}}=\frac{SM}{SA}.\frac{SP}{SC}$$

$$\Rightarrow\frac{SI.SM}{SO.SA}+\frac{SI.SP}{SO.SC}=\frac{SM.SP}{SA.SC}$$

$$\Rightarrow\frac{SI(SM+SP)}{a.SO}=\frac{SM.SP}{SA.SC}\quad(1).$$

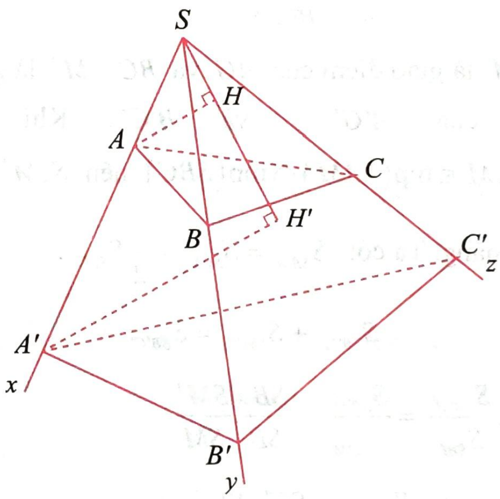
Tương tự: $\dfrac{SI(SN+SQ)}{a.SO}=\dfrac{SN.SQ}{SB.SD}\quad(2).$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{SM+SP}{SM.SP}=\frac{SN+SQ}{SN.SQ}\Rightarrow\frac{1}{SM}+\frac{1}{SP}=\frac{1}{SN}+\frac{1}{SQ}.$$

Bổ đề 3. *Cho góc tam diện S.xyz. Trên Sx, Sy, Sz lần lượt lấy các cặp điểm A, A'; B, B' và CC'. Thế thì* $\dfrac{V_{S.ABC}}{V_{S.A'B'C'}}=\dfrac{SA}{SA'}.\dfrac{SB}{SB'}.\dfrac{SC}{SC'}$.

Chứng minh. (h.4)



Hình 4

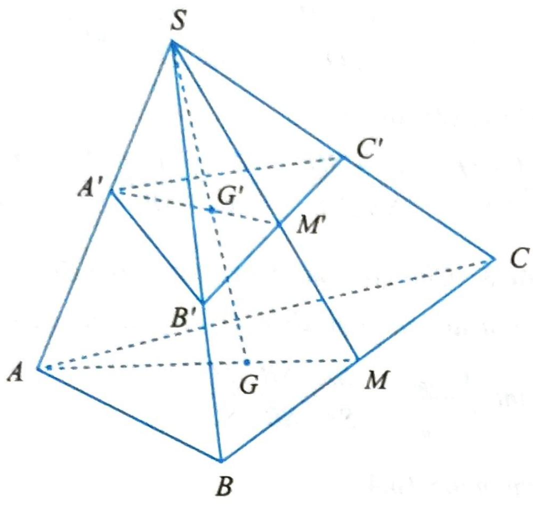
Kẻ $AH\perp$ mp(Syz), $A'H'\perp$ mp(Syz). Khi đó S, H, H' thẳng hàng và $AH\,//\,A'H'\Rightarrow\dfrac{AH}{A'H'}=\dfrac{SA}{SA'}$.

Do đó: $\dfrac{V_{S.ABC}}{V_{S.A'B'C'}}=\dfrac{V_{A.SBC}}{V_{A'.S'B'C'}}=\dfrac{\frac{1}{3}S_{\Delta SBC}.AH}{\frac{1}{3}S_{\Delta SB'C'}.A'H'}$

$$=\frac{SA}{SA'}.\frac{SB}{SB'}.\frac{SC}{SC'}.$$

Bài toán 79.2. *Cho hình chóp S.ABC và G là trọng tâm tam giác ABC. Một mặt phẳng cắt SA, SB, SC, SG lần lượt tại A', B', C' và G'. Chứng minh hệ thức* $\frac{SA}{SA'}+\frac{SB}{SB'}+\frac{SC}{SC'}=3\frac{SG}{SG'}$.

Lời giải. (h.5)



Hình 5

Gọi M là giao điểm của AG và BC, M' là giao điểm của $A'G'$ và $B'C'$. Khi đó $S, M', M \in \text{mp}(SAM) \cap \text{mp}(SBC)$ nên S, M', M thẳng hàng. Ta có: $S_{SBM}=S_{SCM}=\frac{1}{2}S_{SBC}$,

$$S_{SB'M'}+S_{SM'C'}=S_{SB'C'}$$

nên $2.\frac{S_{SB'M'}}{S_{SBC}}=\frac{S_{SB'M'}}{S_{SBM}}=\frac{SB'}{SB}.\frac{SM'}{SM}$.

Tương tự: $2.\frac{S_{SC'M'}}{S_{SBC}}=\frac{SC'}{SC}.\frac{SM'}{SM}$.

Từ đó: $2.\frac{S_{SB'C'}}{S_{SBC}}=\frac{SM'}{SM}.\left(\frac{SB'}{SB}+\frac{SC'}{SC}\right)$.

Suy ra: $2.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}=\frac{SM'}{SM}.\left(\frac{SB'}{SB}+\frac{SC'}{SC}\right)$.

Do đó: $2.\frac{SM}{SM'}=\frac{SB}{SB'}+\frac{SC}{SC'}$ (*).

Lập luận tương tự với chú ý:

$S_{SAG}=\frac{2}{3}S_{SAM}$, $S_{SGM}=\frac{1}{3}S_{SAM}$, $S_{SA'G'}+S_{SG'M'}=S_{SA'M'}$

ta nhận được: $3.\frac{SG}{SG'}=2\frac{SM}{SM'}+\frac{SA}{SA'}$ (**). Thay (*) vào (**) và biến đổi, ta có hệ thức cần chứng minh.

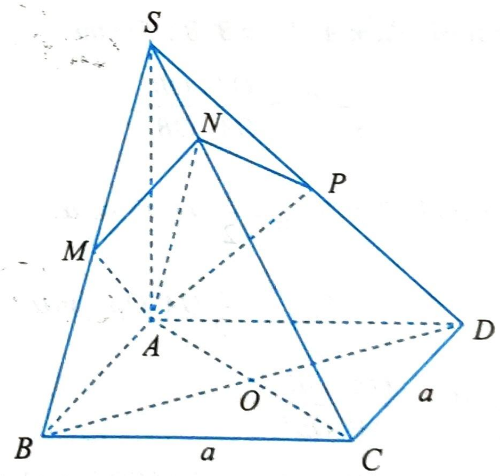
Bài toán 79.3. *Cho tứ diện đều ABCD cạnh bằng a, AH là đường cao của tứ diện và O là trung điểm của AH. Một mặt phẳng đi qua O cắt AB, AC, AD lần lượt tại M, N, P. Chứng minh hệ thức*

$$\frac{1}{AM}+\frac{1}{AN}+\frac{1}{AP}=\frac{6}{a}.$$

Lời giải. Áp dụng kết quả Bài toán 3, với chú ý $AB=AC=AD=a, \frac{AH}{AO}=2$.

Bài toán 79.4. *Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a và SA là đường cao. Góc tạo bởi S C và mặt phẳng (SAB) bằng α. Một mặt phẳng đi qua A, vuông góc với SC cắt SB, SC, SD lần lượt tại tại M, N, P. Chứng minh hệ thức* $\frac{V_{S.AMNP}}{V_{S.ABCD}}=\left(\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha}\right)^2$.

Lời giải. (h.6)



Hình 6

Dễ thấy: $\widehat{BSC}=\alpha$, $SB \perp BC$, $SC \perp AN$

và $\dfrac{V_{S.AMNP}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{2V_{S.AMN}}{2V_{S.ABC}}$

$$= \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC}$$

$$= \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC}.$$

Trong tam giác vuông SAB có $SM.SB = SA^2$

$\Rightarrow \dfrac{SM}{SB} = \dfrac{SA^2}{SB^2}$. Trong tam giác vuông SAC có:

$$SN.SC = SA^2 \Rightarrow \frac{SN}{SC} = \frac{SA^2}{SC^2}.$$

Mặt khác:

$$SB = a.\cot\alpha,\ SC = \frac{a}{\sin\alpha}$$

nên $SA^2 = SB^2 - AB^2 = a^2.\cot^2\alpha - a^2$

$$= a^2\left(\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} - 1\right) = \frac{a^2\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

Do đó:

$$\frac{SM}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{a^2\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha} \cdot \frac{\sin^2\alpha}{a^2\cos^2\alpha},$$

$$= \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha};$$

$$\frac{SN}{SC} = \frac{SB^2}{SC^2} = \frac{a^2\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha} \cdot \frac{\sin^2\alpha}{a^2}$$

$$= \cos 2\alpha.$$

Suy ra:

$$\frac{V_{S.AMNP}}{V_{S.ABCD}} = \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha}.\cos 2\alpha$$

$$= \left(\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha}\right)^2.$$

Bạn đọc hãy giải các bài toán tương tự sau.

BÀI TẬP

1. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi K là trung điểm của SC. Mặt phẳng qua AK cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại M, N. Chứng minh hệ thức

$$\frac{SB}{SM} + \frac{SD}{SN} = 3.$$

2. Cho một hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng nhau và bằng AC', góc tam diện đỉnh A là đều.

a) Tính số đo góc các mặt của tam diện đỉnh A.

b) Một mặt phẳng cắt các cạnh AB, AD, AA' tương ứng tại M, N, P và cắt AC' tại Q. Chứng minh hệ thức

$$\frac{1}{AQ} = \frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} + \frac{1}{AP}.$$

3. Một mặt phẳng cắt tất cả các cạnh bên của một hình chóp lục giác đều (đỉnh S) tại các điểm A, B, C, D, E, F. Chứng minh hệ thức

$$\frac{1}{SA} + \frac{1}{SD} = \frac{1}{SB} + \frac{1}{SE} = \frac{1}{SC} + \frac{1}{SF}.$$

LÊ QUỐC HÁN

(*Trường Đại Học Vinh, Nghệ An*)

Nhận xét. Kỳ này bạn *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, tỉnh **Bình Định** đã nêu được bài toán 79.1 và giải bài toán này bằng 2 cách: *Cách 1* sử dụng bổ đề 3 trong bài viết trên, *cách 2* sử dụng phương pháp biểu diễn vectơ. Xin hoan nghênh bạn.

LÊ MAI (*Hà Nội*)

Mời các bạn gửi lời giải bài toán 81 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 29.2.2024.

BÀI TOÁN 81. *Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số* $y = x^2\sqrt{2 - |x|}$.

TRẦN ĐỨC PHƯƠNG

(*GV THPT Giao Thủy, Nam Định*)

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 100

PROBLEM. *Given five lattice points on a grid. Show that there exists at least two points so that the midpoint of the line segment formed by these two points is also a lattice point.*

Solution.

Fix a coordinate plane on the grid. Then the coordinates of the lattice point are either even or odd integers, for examples $A(2; -4)$, $B(4; 3)$, $C(-2; 5)$,...

And with the above example, the midpoint of BC has coordinates $\left(\frac{4+(-2)}{2}, \frac{3+5}{2}\right) = (1,4)$.

Therefore, the midpoint in this case is also a lattice point.

By this observation, we see that the "worst" case happens when the first four points have coordinates in the following pattern (odd, odd), (odd, even), (even, odd), (even, even). But the coordinates type of the fifth point must be one of these four types, let say (odd, even). Then the midpoint of the line segment form by the second and the fifth point is also a lattice point.

TỪ VỰNG

grid	*: lưới ô vuông*
lattice point	*: điểm mắt lưới*
midpoint	*: trung điểm*
line segment	*: đoạn thẳng*
even	*: (số) chẵn*
odd	*: (số) lẻ*

NGUYEN PHU HOANG LAN
(*College of Science - Vietnam National University, Hanoi*)

****

BÀI DỊCH SỐ 98

BÀI TOÁN. *Chứng minh rằng, với mọi số nguyên dương n đều tồn tại n hợp số liên tiếp.*

Lời giải. Rõ ràng

$$(n+1)!+2, (n+1)!+3, \ldots, (n+1)!+(n+1)$$

là n hợp số liên tiếp.

Nhận xét. Kì này hai bạn *Nguyễn Quốc Hoàng Anh*, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An** và bạn *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định** có bài dịch tốt, gửi bài về Toà soạn sớm. Xin hoan nghênh hai bạn.

HỒ HẢI (*Hà Nội*)

****

SAI LẦM ..... (*tiếp theo trang 47*)

Ta lại có:

$$\frac{z}{z-4} = \frac{x+iy}{x+iy-4} = \frac{(x+iy)(x-4-iy)}{(x-4+iy)(x-4-iy)}$$

$$= \frac{(x^2-4x+y^2)-4yi}{(x-4)^2+y^2}.$$

Số $\frac{z}{z-4}$ là số thuần ảo khi và chỉ khi

$$x^2-4x+y^2=0 \quad (2).$$

Nhận thấy (1) là phương trình đường tròn tâm $I_1(0;3)$, bán kính $R_1=5$, phương trình (2) là phương trình đường tròn tâm $I_2(2;0)$, bán kính $R_2=2$. Vì $I_1I_2=\sqrt{13}$ nên

$$|R_1-R_2| < I_1I_2 < R_1+R_2,$$

chứng tỏ hai đường tròn đó cắt nhau tại hai điểm phân biệt. Vậy có hai số phức z thỏa mãn các yêu cầu của bài toán.Chọn đáp **D**.

Các bạn có đồng ý với kết quả hai bạn Khánh Linh, Đăng Vinh tìm được không?

NGUYỄN VĂN XÁ
(*GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh*)

PROBLEMS IN . . . *(Tiếp theo trang 22)*

Problem T9/559. Among the pairs of positive numbers satisfying

$$\frac{1}{2x^3}+\frac{1}{2y^4}=\frac{1}{(3y)^2}+\frac{1}{81}$$

find the pair $(x_0;y_0)$ where x_0 is smallest.

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/559. Find all positive integer n so that there exists only one function $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ satisfying the conditions $f(2023)=-1$ and

$$f(xy)\geq f(y)+y^n f(x) \text{ for every } x,y\in\mathbb{R}.$$

Problem T11/559. For a real number a, a sequence (x_n) is determined as follow

$$\begin{cases} x_1=a \\ (n+2024)x_{n+1}=n\log_3(x_n^2+2)+2024, \ n\in\mathbb{N}^* \end{cases}.$$

Find the values of a so that the sequence (x_n) has the limit which is a finite number and find that limit.

Problem T12/559. Given a triangle ABCwhich is not equilateral. Let I_a, I_b, I_c respectively be the excenters of the triangle ABC which correspond to A, B, C. Let J_a, J_b, J_c respectively be the incenters of I_aBC, I_bCA, I_cAB. Show that the Euler lines of $I_aJ_bJ_c$, $I_bJ_cJ_a$, $I_cJ_aJ_b$ are concurrent.

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN
(College of Science – Vietnam national University, Hanoi)

TOÁN HƠN CẢ TÔN GIÁO

Có người đặt câu hỏi
Học toán để làm gì?
Mà tốn công nhức óc
Mớ công thức ích chi?

Xin được nói vắn tắt
Sống trên trái đất này
Ở trong vũ trụ nữa
Không thiếu toán nửa giây

Toán là một công cụ
"Ô sin" cho mọi ngành
Toán mở đường dẫn lối
Cho khoa học tiến nhanh

Toán phục vụ cho toán
Cho tất cả chúng ta
Nơi đâu mà có toán
Cuộc sống nở đầy hoa

Bởi vì chỉ có toán
Mới tuyệt đối công bằng
Chân lý được tôn trọng
Lẽ phải không bị "cong"

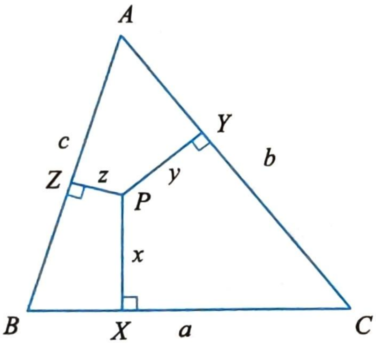
Tuy toán là chân lý
Nhưng mềm mỏng lạ kỳ
Những mũi tên ảo diệu
Soi sáng mọi lối đi

Toán vượt lên tính toán
Thành tôn giáo mê ly
Nhiều tín đồ "cuồng đạo"
"Tử" vì toán ... lạ chi.

VI THANH HOÀNG
(GV THPT Tĩnh Gia 3, TX. Nghi Sơn, Thanh Hóa)

BÀI TOÁN 88 (Vô địch toán Hungary năm 2000). *Trong mặt phẳng cho một tam giác. Hãy chỉ ra cách dựng một điểm P nằm bên trong tam giác đó và thỏa mãn điều kiện: Nếu từ P ta hạ các đường vuông góc xuống các cạnh tam giác thì ba chân đường vuông góc đó tạo thành một tam giác nhận P là trọng tâm.*

Lời giải. Trong tam giác ABC, đặt $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Gọi P là điểm nằm bên trong tam giác ABC. Gọi X, Y, Z lần lượt là chân các đường vuông góc hạ từ P xuống ba cạnh tương ứng BC, CA, AB. Đặt $x = PX$, $y = PY$, $z = PZ$.



Ta có: $\sin\widehat{YPZ} = \sin(\pi - \widehat{BAC}) = \sin\widehat{BAC}$.

Tương tự:

$$\sin\widehat{ZPX} = \sin\widehat{CBA},\ \sin\widehat{XPY} = \sin\widehat{ACB}.$$

Dễ dàng chứng minh các mệnh đề sau tương đương:

1) P là trọng tâm tam giác XYZ.
2) Các tam giác YPZ, ZPX, XPY đồng dạng.
3) $yz.\sin\widehat{YPZ} = xz\sin\widehat{ZPX} = xy.\sin\widehat{XPY}$.
4) $\dfrac{\sin\widehat{BAC}}{x} = \dfrac{\sin\widehat{CBA}}{y} = \dfrac{\sin\widehat{ACB}}{z}$.
5) $\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y} = \dfrac{c}{z}$.

Ta có cách dựng điểm P như sau:

Dựng đường thẳng song song và cách BC một đoạn bằng a, nằm cùng phía với A so với đường thẳng BC. Tương tự, dựng đường thẳng song song và cách CA một đoạn bằng b, nằm cùng phía với B so với đường thẳng CA. Gọi Q là giao điểm của hai đường thẳng này. Để ý rằng tia CQ đi ngang qua phần trong của tam giác ABC. Lấy điểm P' bất kỳ trên CQ, xét tỷ số hai khoảng cách từ P' đến đường thẳng BC và đường thẳng AB. Nếu P' trùng Q, tỷ số này bằng $\dfrac{a}{b}$. Vì tất cả các điểm P' đều là ảnh của nhau qua phép vị tự tâm C nên tỷ số này độc lập với P' và luôn bằng $\dfrac{a}{b}$.

Cũng theo cách như vậy, từ A ta cũng dựng được tia hướng vào tam giác ABC sao cho với mọi điểm P' nằm trên tia này thì tỷ số hai khoảng cách từ P' đến đường thẳng AB và đường thẳng CA luôn bằng $\dfrac{c}{b}$.

Hai tia nói trên cắt nhau tại một điểm P nằm bên trong tam giác. Kí hiệu các khoảng cách như trên, ta có: $\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y}$ và $\dfrac{b}{y} = \dfrac{c}{z}$.

Từ đó theo 5 mệnh đề tương đương trên, P là điểm phải dựng.

Nhận xét. Rất tiếc là không có bạn nào tham gia giải bài này.

NHƯ HOÀNG

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 29.2.2024.

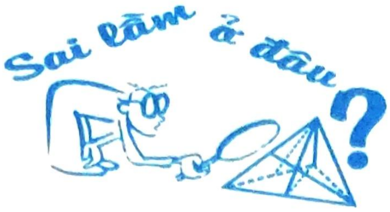
BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

BÀI TOÁN 90. *Tìm tất cả các giá trị của tham số thực p để miền giá trị của hàm số*

$$f(x) = \frac{2(1-p) + \cos x}{p - \sin^2 x}$$

chứa đoạn $[1; 2]$.

KHÁNH HỮU *(Hà Nội)*

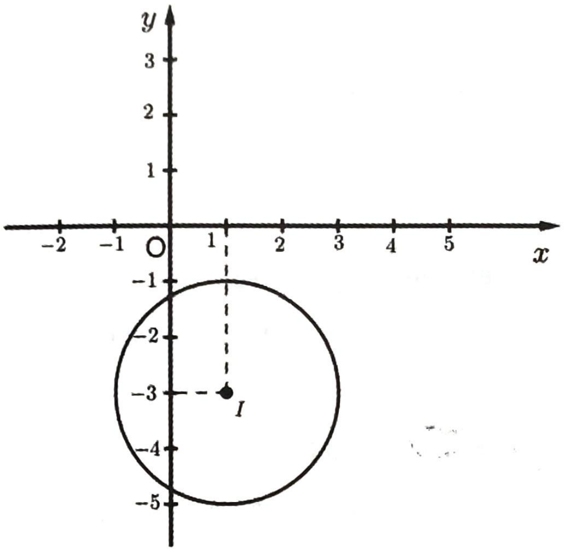


GIẢI ĐÁP: SAO LẠI THẾ NHỈ ?

(*Đề đăng trên TH&TT số 554, tháng 8 năm 2023*)

Phân tích sai lầm. Lời giải trên của bạn *Dương* sai do khi $|z-w|=4+2\sqrt{5}$ thì M,N,I,J thẳng hàng khi đó số phức w không thỏa mãn $w=iz$.

Lời giải đúng. Gọi M là điểm biểu diễn số phức z. Từ $|z-1+3i|=2$ suy ra điểm M nằm trên đường tròn tâm $I(1;-3)$ bán kính $R=2$.



Ta có $OI=\sqrt{10}>2 \Rightarrow OI>R \;\Rightarrow$ điểm O nằm ngoài đường tròn tâm $I(1;-3)$ bán kính $R=2$.

Ta có: $w=iz \Rightarrow |z-w|=|z-iz|=|(1-i)z|$

$$=|z|\sqrt{2}=OM.\sqrt{2}\le(OI+R).\sqrt{2}$$

$\Rightarrow |z-w|\le\left(\sqrt{10}+2\right)\sqrt{2} \Leftrightarrow |z-w|\le 2\sqrt{5}+2\sqrt{2}.$

Vậy giá trị lớn nhất của $|z-w|$ bằng $2\sqrt{5}+2\sqrt{2}$.

Nhận xét. Hoan nghênh bạn *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định** đã phát hiện được sai lầm và đưa ra lời giải đúng.

KIHIVI

SỐ THUẦN ẢO !

Đề bài. *Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z-3i|=5$ và $\dfrac{z}{z-4}$ là số thuần ảo?*

A. 0 . **B.** Vô số. **C.** 1 . **D.** 2.

Lời giải của bạn Khánh Linh:

Gọi $z=x+iy$ với $x,y\in\mathbb{R}$ và i là đơn vị ảo.

Khi đó $|z-3i|=5$ trở thành $x^2+(y-3)^2=25$ (1).

Ta lại có:

$$\frac{z}{z-4}=\frac{x+iy}{x+iy-4}=\frac{(x+iy)(x-4-iy)}{(x-4+iy)(x-4-iy)}$$
$$=\frac{\left(x^2-4x+y^2\right)-4yi}{(x-4)^2+y^2}.$$

Số $\dfrac{z}{z-4}$ là số thuần ảo khi và chỉ khi

$$x^2-4x+y^2=0 \quad (2).$$

Xét hệ phương trình

$$\begin{cases}x^2+(y-3)^2=25\\ x^2-4x+y^2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x-3y=8\\ x^2-4x+y^2=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=\dfrac{2x-8}{3}\\ x^2-4x+\left(\dfrac{2x-8}{3}\right)^2=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=\dfrac{2x-8}{3}\\ 13x^2-68x+64=0 \ (3).\end{cases}$$

Phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt nên có hai số phức z thỏa mãn các yêu cầu của bài toán.

Chọn đáp **D**.

Lời giải của bạn Đăng Vinh:

Gọi $z=x+iy$ với $x,y\in\mathbb{R}$ và i là đơn vị ảo. Khi đó $|z-3i|=5$ trở thành $x^2+(y-3)^2=25$ (1).

(*Xem tiếp trang 44*)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 559 (1.2024)
Tòa soạn : 187B, Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607,
ĐT Phát hành: 024.35142649, 024.35682701
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TRONG SỐ NÀY

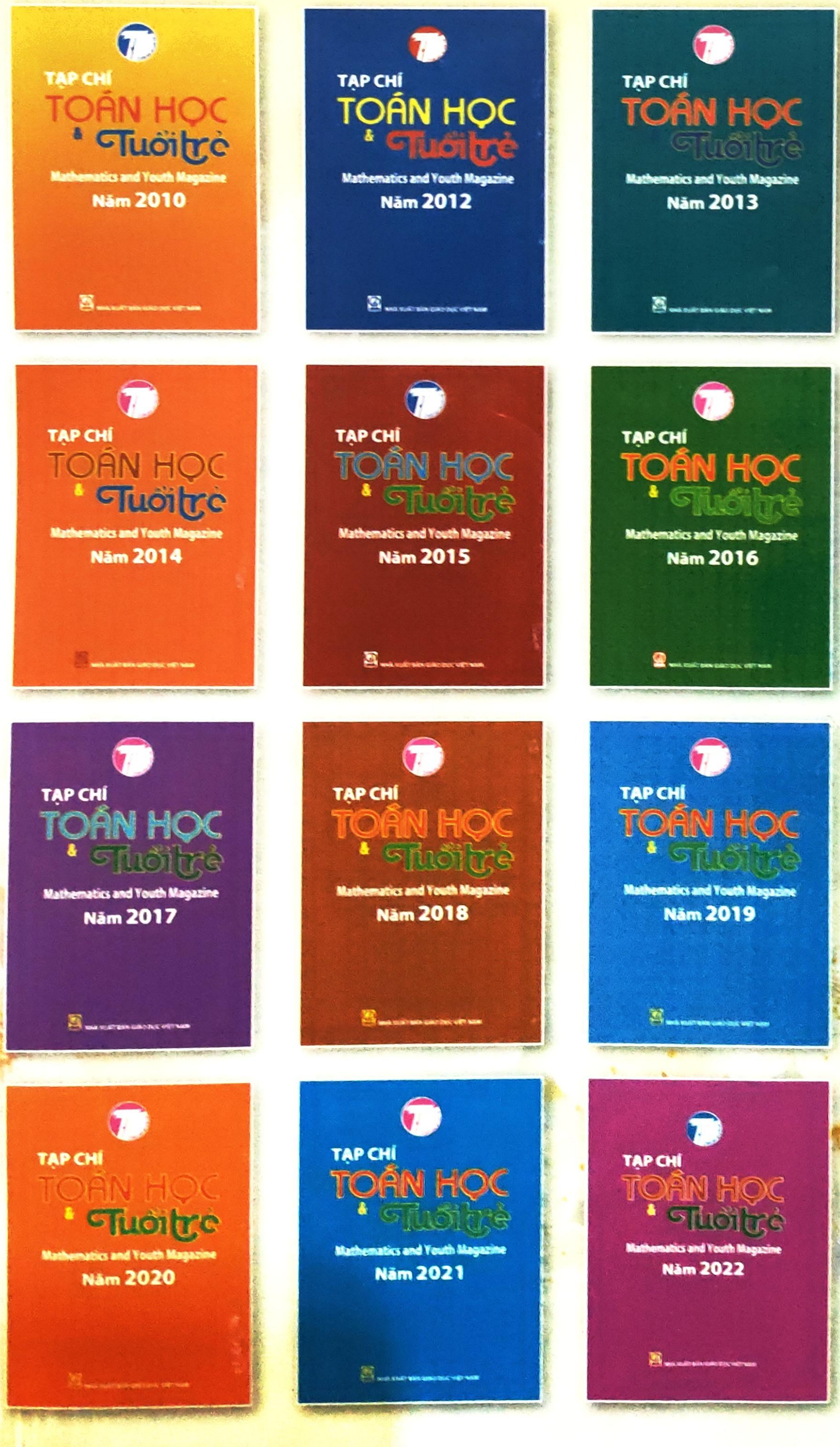
Biên tập: LÊ MAI, NHƯ HOÀNG
Trị sự, phát hành: HOÀNG THỊ KIM PHƯỢNG, TRẦN THỊ MINH HIỀN
Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG
Thiết kế, chế bản: MINH HÒA

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Bộ đóng tập

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ HÀNG NĂM



Năm 2010
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 99.000 đồng

Năm 2012
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 152.000 đồng

Năm 2013
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 175.000 đồng

Năm 2014
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 185.000 đồng

Năm 2015
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2016
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2017
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2018
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2019
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2020
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 210.000 đồng

Năm 2021
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 240.000 đồng

Năm 2022
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 260.000 đồng

Mọi chi tiết xin liên hệ:
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
Địa chỉ: 187B Giảng Võ, Hà Nội
- Điện thoại: 024.35121606 - 024.35121607
- Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

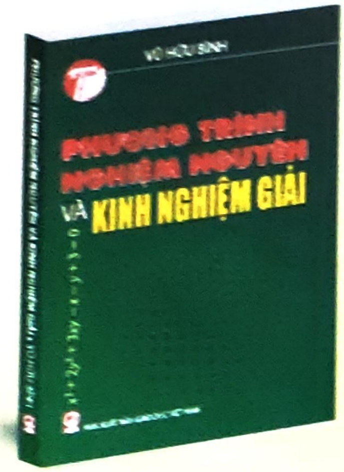
Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Cuốn sách

PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN VÀ KINH NGHIỆM GIẢI

(Tái bản lần thứ hai) Của tác giả NGND. VŨ HỮU BÌNH

Sách dày 224 trang, khổ 17 x 24 cm, giá bìa 42.000 đồng



Nội dung của sách trình bày các phương pháp giải phương trình với nghiệm nguyên, vốn là một đề tài lý thú của Số học và Đại số, từ các học sinh nhỏ với những bài toán như *Trăm trâu trăm cỏ* đến các chuyên gia toán học với những bài toán như *định lí lớn Fermat*.

Sách gồm 5 chương:

Chương I giới thiệu các phương pháp thường dùng để giải phương trình nghiệm nguyên.

Chương II giới thiệu những phương trình nghiệm nguyên được sắp xếp theo từng ngày.

Chương III giới thiệu những bài toán đưa về giải phương trình nghiệm nguyên, trong đó có những bài toán vui, bài toán thực tế.

Chương IV giới thiệu một số phương trình nghiệm nguyên mang tên các nhà toán học như *Pell, Pythagore, Fermat, Diophante*, …

Chương V giới thiệu những phương trình nghiệm nguyên chưa được giải quyết và những bước tiến của Toán học để giải những phương trình nghiệm nguyên, trong đó có những đóng góp của *Andrew Wiles* chứng minh định lý lớn Fermat và Giáo sư *Ngô Bảo Châu* chứng minh Bổ đề cơ bản trong *Chương trình Langlands*.

Phương trình nghiệm nguyên có số phương trình ít hơn số ẩn nên đòi hỏi người giải toán phải vận dụng kiến thức sáng tạo, vì thế phương trình nghiệm nguyên thường có mặt trong các đề thi học sinh giỏi từ bậc tiểu học, trung học cơ sở đến trung học phổ thông. Cuốn sách dành một phần thích đáng nêu những kinh nghiệm giải toán về phương trình nghiệm nguyên như cách phân tích bài toán, cách suy luận để tìm hướng giải, cách phân chia bài toán thành những bài toán nhỏ dễ giải quyết hơn, cách "*đưa khó về dễ, đưa lạ về quen*", cách liên hệ tình huống đang giải quyết với những vấn đề mới, cách chọn hướng đi phù hợp với từng bài toán đặt ra …tất cả những điều đó đều là những kĩ năng mà mỗi người cần có trong học tập, trong nghiên cứu và trong cuộc sống.

Với những câu thơ ở đầu mỗi chương, với cách trình bày rõ ràng, dễ hiểu, tươi mát, với những thông tin cập nhật, với những kinh nghiệm thực tế trong bồi dưỡng học sinh giỏi và viết sách, tác giả cuốn sách, NGND *Vũ Hữu Bình* sẽ đem đến cho bạn đọc những kiến thức hệ thống và những kinh nghiệm giải toán giúp giải quyết một loại toán khó ở bậc phổ thông.

Tin rằng cuốn sách không chỉ hữu ích cho học sinh và thầy cô giáo, mà còn là tài liệu tham khảo tốt cho sinh viên và giảng viên các trường Đại học và Cao đẳng ngành Toán, cùng các phụ huynh có nguyện vọng giúp con em mình học Toán tốt hơn.

BẠN ĐỌC CÓ THỂ MUA ẤN PHẨM TRÊN TẠI:

TÒA SOẠN TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

ĐỊA CHỈ: 187B, GIẢNG VÕ, HÀ NỘI

ĐIỆN THOẠI PHÁT HÀNH: 024.35142649 - 024.35682701

Giấy phép XB số 534/GP-BTTTT cấp ngày 19.11.2020; Mã số: 8BT1M24
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 1 năm 2024

Giá: 18.000 đồng
Mười tám nghìn đồng