TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

Số 560
Tháng 2 - 2024
ISSN: 2734-9284

VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 61 - XUẤT BẢN TỪ 1964 - DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT Biên tập: (024) 35121607; ĐT Phát hành: (024) 35162869
ĐT Fax Hành chính: (024) 35121606 - Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com - Website: viennghiencuusachhgd.com

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

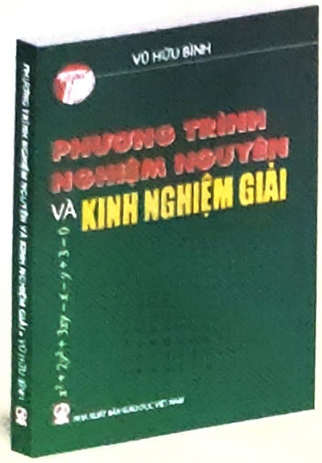
Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Cuốn sách

PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN VÀ KINH NGHIỆM GIẢI

(Tái bản lần thứ hai) Của tác giả NGND. VŨ HỮU BÌNH

Sách dày 224 trang, khổ 17 x 24 cm, giá bìa 42.000 đồng



Nội dung của sách trình bày các phương pháp giải phương trình với nghiệm nguyên, vốn là một đề tài lý thú của Số học và Đại số, từ các học sinh nhỏ với những bài toán như *Trăm trâu trăm cỏ* đến các chuyên gia toán học với những bài toán như *định lí lớn Fermat*.

Sách gồm 5 chương:

Chương I giới thiệu các phương pháp thường dùng để giải phương trình nghiệm nguyên.

Chương II giới thiệu những phương trình nghiệm nguyên được sắp xếp theo từng ngày.

Chương III giới thiệu những bài toán đưa về giải phương trình nghiệm nguyên, trong đó có những bài toán vui, bài toán thực tế.

Chương IV giới thiệu một số phương trình nghiệm nguyên mang tên các nhà toán học như *Pell*, *Pythagore*, *Fermat*, *Diophante*, ...

Chương V giới thiệu những phương trình nghiệm nguyên chưa được giải quyết và những bước tiến của Toán học để giải những phương trình nghiệm nguyên, trong đó có những đóng góp của *Andrew Wiles* chứng minh định lý lớn Fermat và Giáo sư *Ngô Bảo Châu* chứng minh Bổ đề cơ bản trong *Chương trình Langlands*.

Phương trình nghiệm nguyên có số phương trình ít hơn số ẩn nên đòi hỏi người giải toán phải vận dụng kiến thức sáng tạo, vì thế phương trình nghiệm nguyên thường có mặt trong các đề thi học sinh giỏi từ bậc tiểu học, trung học cơ sở đến trung học phổ thông. Cuốn sách dành một phần thích đáng nêu những kinh nghiệm giải toán về phương trình nghiệm nguyên như cách phân tích bài toán, cách suy luận để tìm hướng giải, cách phân chia bài toán thành những bài toán nhỏ dễ giải quyết hơn, cách "*đưa khó về dễ, đưa lạ về quen*", cách liên hệ tình huống đang giải quyết với những vấn đề mới, cách chọn hướng đi phù hợp với từng bài toán đặt ra ...tất cả những điều đó đều là những kĩ năng mà mỗi người cần có trong học tập, trong nghiên cứu và trong cuộc sống.

Với những câu thơ ở đầu mỗi chương, với cách trình bày rõ ràng, dễ hiểu, tươi mát, với những thông tin cập nhật, với những kinh nghiệm thực tế trong bồi dưỡng học sinh giỏi và viết sách, tác giả cuốn sách, NGND *Vũ Hữu Bình* sẽ đem đến cho bạn đọc những kiến thức hệ thống và những kinh nghiệm giải toán giúp giải quyết một loại toán khó ở bậc phổ thông.

Tin rằng cuốn sách không chỉ hữu ích cho học sinh và thầy cô giáo, mà còn là tài liệu tham khảo tốt cho sinh viên và giảng viên các trường Đại học và Cao đẳng ngành Toán, cùng các phụ huynh có nguyện vọng giúp con em mình học Toán tốt hơn.

BẠN ĐỌC CÓ THỂ MUA ẤN PHẨM TRÊN TẠI:

TÒA SOẠN TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

ĐỊA CHỈ: 187B, GIẢNG VÕ, HÀ NỘI

ĐIỆN THOẠI PHÁT HÀNH: 024.35142649 - 024.35682701

KHAI THÁC MỘT BÀI TOÁN HÌNH HỌC CƠ BẢN LỚP 8

LÊ VĂN TUẤN (*GV THCS Bạch Liêu, Yên Thành, Nghệ An*)
NGUYỄN ANH TUẤN (*GV THCS Hòa Hiếu 2, TX. Thái Hòa, Nghệ An*)

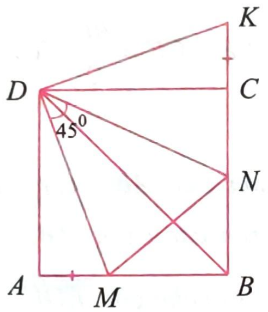
Trong Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ có bài toán sau:

"Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh a. Trên cạnh AB, BC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $\widehat{MDN} = 45^0$. Tìm vị trí của M, N để độ dài đoạn thẳng MN ngắn nhất"

(*Bài T4/456, TH&TT, tháng 6/2015*).

Để thuận tiện cho việc quan sát và so sánh chúng tôi xin phép đưa ra hai lời giải như sau:

Cách 1. (Hình 1.1)



Hình 1.1

Ta có:

$$\widehat{MDN} = 45° \Rightarrow \widehat{MDN} = \widehat{ADM} + \widehat{NDC} = 45°.$$

Trên tia đối của tia CB lấy điểm K sao cho $CK = AM$. Vì $AD = DC$ (cạnh hình vuông), $\widehat{DAM} = \widehat{DCK} = 90°$ nên $\Delta DAM = \Delta DCK$ (c.g.c)$\Rightarrow$

$$\begin{cases} DK = DM \\ \widehat{KDC} = \widehat{MDA} \Rightarrow \widehat{KDM} = 90^o \Rightarrow \widehat{KDN} = \widehat{MDN} = 45^o \end{cases} (1).$$

ΔKDN và ΔMDN có DN chung, kết hợp với (1) suy ra: $\Delta KDN = \Delta MDN$ (c.g.c) $\Rightarrow KN = MN$

$$\Rightarrow MN + BN + MB = (KC + CN) + BN + MB$$
$$= (AM + MB) + (CN + NB)$$
$$= 2a \text{ (không đổi).}$$

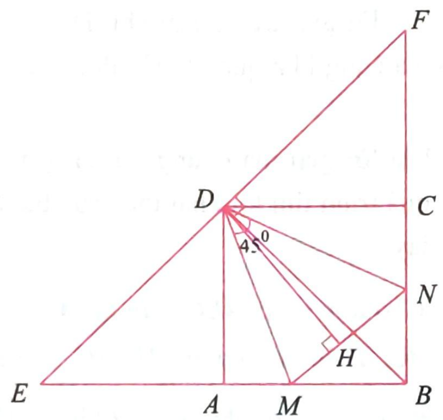
Đặt $MN = x, MB = y, BN = z$. Áp dụng bất đẳng thức $2(a^2 + b^2) \geq (a+b)^2$ và định lý Pythagore vào ΔBMN ta có:

$$2(y^2 + z^2) \geq (y+z)^2 \Rightarrow 2x^2 \geq (2a - x)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}.x \geq 2a - x \Rightarrow x \geq \frac{2a}{1+\sqrt{2}} = (2\sqrt{2} - 2)a.$$

Vậy $\min MN = (2\sqrt{2} - 2)a$ đạt được khi $y = z = \dfrac{x}{\sqrt{2}} = a(2 - \sqrt{2})$, khi đó DM, DN thứ tự là phân giác của các góc $\widehat{ADB}, \widehat{CDB}$.

Cách 2. (Hình 1.2)



Hình 1.2

Kẻ $DH \perp MN$ $(H \in MN)$ và qua D kẻ đường thẳng vuông góc với DB cắt các tia BA, BC lần lượt tại E, F. Khi đó ta có ΔBEF vuông cân tại B và $CF = AE = a$, $DE = DF = a\sqrt{2}$.

Ta có $\widehat{FDN} + \widehat{DNF} = \widehat{FDN} + \widehat{EDM}$ (cùng bằng $135°$) $\Rightarrow \widehat{DNF} = \widehat{EDM} \Rightarrow \Delta FDN \backsim \Delta EMD$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{DN}{MD} = \frac{FN}{ED} \Rightarrow \frac{DN}{MD} = \frac{FN}{FD} \text{ (vì } ED = FD\text{)}$$

$\Rightarrow \Delta NDM \backsim \Delta NFD$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{DNM} = \widehat{FND} \Rightarrow ND$ là tia phân giác của $\widehat{MDF} \Rightarrow NC = NH.$

Tương tự: $DH = DA$. Suy ra:

$MN = HN + HM = NC + AM$

$= NF + ME - (CF + AE) = NF + ME - 2a$ (1).

Ta có: $\Delta FDN \backsim \Delta EMD \Rightarrow \dfrac{FD}{ME} = \dfrac{FN}{ED}$

$\Rightarrow FN.ME = FD.ED = 2a^2.$

Áp dụng bất đẳng thức $(a+b)^2 \geq 4ab$ ta có:

$(ME + NF)^2 \geq 4ME.NF = 8a^2$

$\Rightarrow ME + NF \geq 2a\sqrt{2}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $MN \geq 2a(\sqrt{2} - 1)$.

Vậy $\min MN = 2a(\sqrt{2} - 1)$, đạt được khi $ME = NF = a\sqrt{2}.$

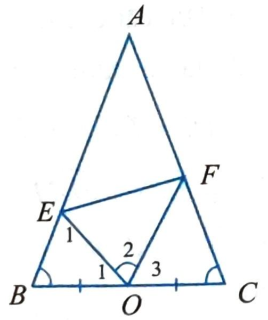
Nhận xét.

- Cách 1 là lời giải trong Tạp chí. Đây là một lời giải hay và cũng khá quen thuộc đối với nhiều người.

- Cách 2 là lời giải mà chúng tôi đã tự tìm ra được trong quá trình tìm tòi khai thác của bài toán cơ bản sau đây:

Bài toán 1. *Cho tam giác ABC cân tại A có O là trung điểm BC. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm E, F sao cho góc $\widehat{EOF} = \widehat{ABC}$. Chứng minh rằng $\Delta BEO \backsim \Delta COF$.*

Lời giải. (Hình 2)



Hình 2

Ta có:

$\widehat{B} + \widehat{E_1} + \widehat{O_1} = \widehat{O_1} + \widehat{O_2} + \widehat{O_3}$ (cùng bằng $180°$)

$\Rightarrow \widehat{B} + \widehat{E_1} = \widehat{O_2} + \widehat{O_3} \Rightarrow \widehat{E_1} = \widehat{O_3}$ (vì $\widehat{B} = \widehat{O_2}$).

Xét ΔBEO và ΔCOF có: $\widehat{E_1} = \widehat{O_3}$ và $\widehat{B} = \widehat{C}$

$\Rightarrow \Delta BEO \backsim \Delta COF$ (g.g).

Nhận xét 1.

Vì $\Delta BEO \backsim \Delta COF \Rightarrow \dfrac{BE}{CO} = \dfrac{BO}{CF}$

$\Rightarrow BE.CF = OB.OC = \dfrac{BC^2}{4}$ (1).

Mặt khác: $(BE + CF)^2 - 4BE.CF = (BE - CF)^2 \geq 0$

$\Rightarrow (BE + CF)^2 \geq 4BE.CF$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra:

$(BE + CF)^2 \geq BC^2 \Rightarrow BE + CF \geq BC$ (*).

Đẳng thức xảy ra $BE = CF = \dfrac{BC}{2}$. Từ đó ta có bài toán sau

Bài toán 2. *Cho tam giác ABC cân tại A có O là trung điểm BC. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm E, F sao cho góc $\widehat{EOF} = \widehat{ABC}$. Xác định vị trí của các điểm E, F để tổng $BE + CF$ nhỏ nhất.*

Nhận xét 2.

Ta có $AE + AF = (AB + AC) - (BE + CF)$ (xem hình 2), kết hợp với bất đẳng thức (*) ta được $AE + AF \leq (AB + AC) - BC$ (không đổi). Từ đó ta có bài toán sau

Bài toán 3. *Cho tam giác ABC cân tại A có O là trung điểm BC. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm E, F sao cho góc $\widehat{EOF} = \widehat{ABC}$. Xác định vị trí của các điểm E, F để tổng $AE + AF$ lớn nhất.*

Nhận xét 3.

Vì $\Delta BEO \backsim \Delta COF \Rightarrow \frac{BE}{CO} = \frac{OE}{OF} \Rightarrow \frac{BE}{BO} = \frac{OE}{OF}$

(vì $OB = OC$)

$\Rightarrow \Delta BEO \backsim \Delta OEF$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BEO} = \widehat{OEF}$ nên EO là phân giác của $\widehat{BEF}$.

Tương tự FO là phân giác của $\widehat{CFE}$.

Kẻ OH, OK, OI lần lượt vuông góc với AB, EF, AC $(H \in AB, K \in EF, I \in AC)$ (xem hình 3). Khi đó ta có $EH = EK, FK = FI$ và các điểm H, I cố định $\Rightarrow BH = CI$ (không đổi); $OH = OK = OI$ (không đổi).

Ta có: $EF = EK + KF = EH + FI$

$= (BE + CF) - (BH + CI) = (BE + CF) - 2BH.$

Kết hợp với bất đẳng thức (*) suy ra $EF \geq BC - 2BH$ (không đổi).

Mặt khác: $\Delta OEF \backsim \Delta BEO \Rightarrow \frac{OF}{BO} = \frac{EF}{EO}$

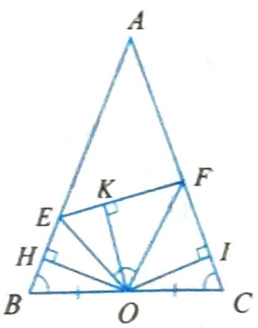
$\Rightarrow OE.OF = BO.EF = \frac{BC.EF}{2} \geq \frac{BC(BC - 2BH)}{2}.$

Từ đó ta có bài toán sau

Bài toán 4. *Cho tam giác ABC cân tại A có O là trung điểm BC. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm E, F sao cho góc $\widehat{EOF} = \widehat{ABC}$. Xác định vị trí của các điểm E, F để:*

a) *Độ dài đoạn thẳng EF ngắn nhất.*

b) *Tích $OE.OF$ nhỏ nhất.*



Hình 3

Nhận xét 4.

Vì $EK = EH; KF = FI$ nên ta có:

$AE + AF + EF = AE + AF + EK + KF$

$= AE + AF + EH + FI = AH + AI = 2AH$ (không đổi). Từ đó ta có bài toán sau:

Bài toán 5. *Cho tam giác ABC cân tại A có O là trung điểm BC. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm E, F sao cho góc $\widehat{EOF} = \widehat{ABC}$. Chứng minh rằng chu vi của tam giác AEF không phụ thuộc vào vị trí của các điểm E và F.*

Nhận xét 5.

Vì $EF = (BE + CF) - 2BH$

$\Rightarrow BC + BE + FC + EF = BC + 2(BE + CF) - 2BH,$

kết hợp với bất đẳng thức (*) ta có:

$$BC + BE + FC + EF \geq 3BC - 2BH.$$

Từ đó ta có bài toán sau:

Bài toán 6. *Cho tam giác ABC cân tại A có O là trung điểm BC. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm E, F sao cho góc $\widehat{EOF} = \widehat{ABC}$. Xác định vị trí của các điểm E, F để chu vi tứ giác $BEFC$ nhỏ nhất.*

Nhận xét 6.

Ta có: $OK = OH$ và $EF \geq BC - 2BH$

$$\Rightarrow S_{OEF} = \frac{1}{2}OK.EF \geq \frac{1}{2}OH(BC - 2BH) \quad (3).$$

Mặt khác: $S_{BEFC} = 2S_{OEF} + S_{BOH} + S_{COI}$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra:

$$S_{BEFC} \geq OK(BC - 2BH) + S_{BOH} + S_{COI} \quad (5).$$

Lại có: $S_{AEF} = S_{ABC} - S_{BEFC}$ (6)

Từ (5) và (6) suy ra:

$$S_{AEF} \leq S_{ABC} - OK(BC - 2BH) - S_{BOH} - S_{COI}$$

(không đổi) (7).

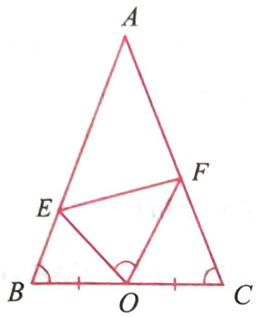
Từ đó ta có bài toán sau:

Bài toán 7. *Cho tam giác ABC cân tại A có O là trung điểm BC. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm E, F sao cho góc $\widehat{EOF} = \widehat{ABC}$. Xác định vị trí của các điểm E, F để:*

a) Diện tích tam giác OEF nhỏ nhất.

b) Diện tích tứ giác $BEFC$ nhỏ nhất.

c) Diện tích tam giác AEF lớn nhất.



Hình 4

Nhận xét 7.

Ta có $\dfrac{AE}{AB}.\dfrac{AF}{AC} = \dfrac{S_{AEF}}{S_{AFB}}.\dfrac{S_{AFB}}{S_{ABC}} = \dfrac{S_{AEF}}{S_{ABC}}$ (xem hình 4)

$\Rightarrow AE.AF = \dfrac{AB.AC.S_{AEF}}{S_{ABC}}$, kết hợp với (7) ta có:

$$AE.AF \le AB.AC\left(1 - \dfrac{OK(BC - BH - CI) - S_{BOH} - S_{COI}}{S_{ABC}}\right)$$

(không đổi). Từ đó ta có bài toán

Bài toán 8. *Cho tam giác ABC cân tại A có O là trung điểm BC. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm E, F sao cho góc $\widehat{EOF} = \widehat{ABC}$. Xác định vị trí của các điểm E, F để tích $AE.AF$ lớn nhất.*

Nhận xét 8.

Kẻ $AM \perp EF$ $(M \in EF)$, ta có $S_{AEF} = \dfrac{AM.EF}{2}$

$\Rightarrow AM = \dfrac{2S_{AEF}}{EF}$ (xem hình 5)

Ta lại có:

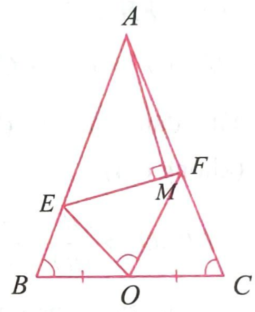
$$S_{AEF} \le S_{ABC} - OK(BC - 2BH) - S_{BOH} - S_{COI}$$

(theo nhận xét 6) và $EF \ge BC - 2BH$ (theo nhận xét 3). Từ đó suy ra:

$$AM \le \dfrac{S_{ABC} - OK(BC - 2BH) - S_{BOH} - S_{COI}}{BC - 2BH}$$

(không đổi). Từ đó ta có bài toán sau:

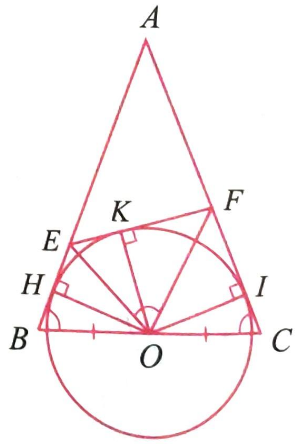
Bài toán 9. *Cho tam giác ABC cân tại A có O là trung điểm BC. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm E, F sao cho góc $\widehat{EOF} = \widehat{ABC}$.. Xác định vị trí của các điểm E, F để khoảng cách từ điểm A đến EF lớn nhất.*



Hình 5

Nhận xét 9.

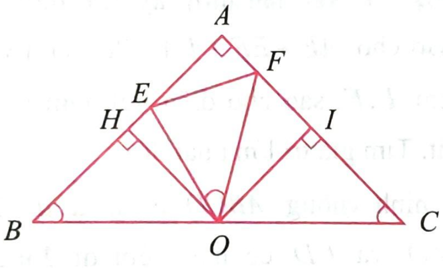
Vì $OH = OK = OI$ nên AB, AC, EF là các tiếp tuyến của đường tròn tâm O bán kính OH (xem hình 6). Từ đó ta có bài toán sau:



Hình 6

Bài toán 10 (Trích đề thi vào lớp 10 THPT Hà Nội năm học 2009 – 2010). *Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm A nằm bên ngoài đường tròn. Kẻ các tiếp tuyến AB, AC và cát tuyến ADE tới đường tròn (B, C là hai tiếp điểm). Trên cung nhỏ BC của đường tròn $(O;R)$ lấy điểm K bất kì (K khác B, C). Tiếp tuyến tại K của đường tròn $(O;R)$ cắt AB, AC theo thứ tự tại P, Q. Đường thẳng qua O và vuông góc với OA cắt các đường thẳng AB, AC theo thứ tự tại M, N. Chứng minh rằng $PM + QN \geq MN$.*

Bài 11 (Đề tuyển sinh vào lớp 10 THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An, năm học 2008 – 2009). *Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi O là trung điểm của BC. Đường tròn $(O;R)$ tiếp xúc với AB ở E, tiếp xúc với AC ở F. Điểm H chạy trên cung nhỏ EF (H khác E, F). Tiếp tuyến của đường tròn tại H cắt AB, AC lần lượt tại M, N. Xác định vị trí điểm H sao cho diện tích tam giác AMN lớn nhất.*



Hình 7

Nhận xét 10.

Chúng ta tiếp tục khai thác bài toán 1 bằng cách đặc biệt hóa góc $\widehat{A}$. Chẳng hạn:

- Nếu $\widehat{A} = 90^\circ$ và $AB = 2a$ thì tam giác ABC vuông cân tại A (xem hình 6). Khi đó ta có:

$OB = a\sqrt{2}$; $BC = 2\sqrt{2}.a$,

$BH = CI = OH = OI = OK = a$. Khi đó:

+) $EF \geq BC - 2BH = EF \geq 2a\sqrt{2} - 2a$

$$= 2a\left(\sqrt{2} - 1\right)$$

(đây là kết quả của bài toán **T4/456**).

+) $AE + AF \leq (AB + AC) - BC = 4a - 2a\sqrt{2}.$

+) $OE.OF \geq 2a^2\left(2 - \sqrt{2}\right).$

+) $AE + AF + EF = 2a.$

+) $BC + BE + FC + EF \geq 3BC - 2BH$

$$= 6\sqrt{2}a - 2a.$$

+) $S_{OEF} \geq \frac{1}{2}OH\left(BC - 2BH\right) = a^2\left(\sqrt{2} - 1\right).$

+) $S_{BEFC} \geq OK\left(BC - 2BH\right) + S_{BOH} + S_{COI}$

$$= a^2\left(2\sqrt{2} - 1\right).$$

+) $S_{AEF} \leq S_{ABC} - OK\left(BC - 2BH\right) - S_{BOH} - S_{COI}$

$$= a^2\left(3 - 2\sqrt{2}\right).$$

+) $AE.AF \leq AB.AC\left(1 - \dfrac{OK(BC - BH - CI) - S_{BOH} - S_{COI}}{S_{ABC}}\right)$

$$= \left(10 - 4\sqrt{2}\right)a^2.$$

+) $AM \leq \dfrac{S_{ABC} - OK\left(BC - 2BH\right) - S_{BOH} - S_{COI}}{BC - 2BH}$

$$= \frac{\left(\sqrt{2} - 1\right)a}{2}.$$

Từ đây chúng ta có thể tạo ra được một chùm bài toán cực trị về hình vuông giống như bài T4/456 TH&TT, tháng 6/2015.

- Tương tự khi cho góc $\widehat{A}$ nhận một số giá trị đặc biệt như $\widehat{A} = 60^\circ$ hay $\widehat{A} = 120^\circ$ thì chúng ta cũng thu được các bài toán cực trị tương ứng.

Nhận xét 11.

Vì $\Delta BEO \backsim \Delta COF$ (theo bài toán 1) suy ra:

$$\frac{BE}{CO} = \frac{BO}{CF} \Rightarrow BE.CF = BO.CO.$$

Kết quả này hoàn toàn không phụ thuộc vào vị trí của điểm O nằm trên cạnh BC.

• Nếu O là điểm cố định thì ta có:

$$(BE+CF)^2 \geq 4BE.CF = 4BO.CO$$

$\Rightarrow BE+CF \geq 2\sqrt{BO.CO}$ (không đổi).

Từ đó ta có bài toán:

Bài toán 12. *Cho tam giác ABC cân tại A và một điểm O cố định thuộc cạnh BC (O khác B,C). Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm E,F bất kì sao cho chúng không trùng với các đỉnh của tam giác và $\widehat{EOF}=\widehat{ABC}$. Xác định vị trí của các điểm E,F để tổng $BE+CF$ đạt giá trị nhỏ nhất.*

• Nếu O là một điểm bất kì thì ta có:

$BE.CF = BO.CO \leq \left(\dfrac{BO+CO}{2}\right)^2 = \dfrac{BC^2}{4}$ (không đổi). Từ đó ta có bài toán:

Bài toán 13. *Cho tam giác ABC cân tại A. Trên các cạnh AB, BC, AC lần lượt lấy các điểm E,O,F bất kì sao cho chúng không trùng với các đỉnh của tam giác và $\widehat{EOF}=\widehat{ABC}$. Xác định vị trí của điểm O trên cạnh BCđể tích $BE.CF$ đạt giá trị lớn nhất.*

BÀI TẬP VẬN DỤNG

1. Cho tam giác ABC đều có O là trung điểm BC. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm M,N sao cho góc $\widehat{MON}=60^0$. Chứng minh rằng chu vi của tam giác AMN không phụ thuộc vào vị trí của các điểm M và N.

2. Cho O là trung điểm đoạn AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ là cạnh AB vẽ tia Ax, By cùng vuông góc với AB. Trên tia Ax lấy điểm C khác A. Qua O vẽ đường thẳng vuông góc với OC cắt By tại D. Tìm vị trí điểm C trên tia Ax để diện tích tứ giác $ABDC$ nhỏ nhất.

3. Cho ΔABC đều cố định và M là trung điểm của BC. Hai điểm E,F theo thứ tự di chuyển trên cạnh AB, AC sao cho góc $\widehat{EMF}=60^0$ ($E \neq A,B; F \neq A,C$). Xác định điểm E trên cạnh AB sao cho tổng $AE+AF$ lớn nhất.

4. Cho tam giác ABC vuông cân tại A và trung điểm M của cạnh BC. Từ đỉnh M vẽ góc có số đo bằng 45^0, các cạnh của góc này cắt hai cạnh góc vuông AB, AC của tam giác lần lượt tại E và F. Hãy xác định vị trí của E,F sao cho diện tích tam giác MEF là nhỏ nhất. Diện tích nhỏ nhất đó bằng bao nhiêu?

5. Cho tam giác đều ABC. Trên các cạnh BC, AB, AC theo thứ tự lấy ba điểm bất kỳ M,N,P sao cho N khác A,B và $\widehat{MNP}=60°$. Chứng minh $AB \geq 2\sqrt{AP.BM}$. Dấu "=" xảy ra khi nào?

(Thi HSG lớp 9 tỉnh Bình Phước năm học 2021-2022).

6. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh là a. Trên hai cạnh AB và AD lần lượt lấy hai điểm di động E,F sao cho $AE+EF+FA=2a$. Tìm vị trí của các điểm E,F sao cho diện tích tam giác CEF lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.

7. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh là a. Trên hai cạnh AD và CD có hai điểm di động M,N tương ứng sao cho $\widehat{MBN}=45^0$. Tìm vị trí của các điểm M,N sao cho diện tích tam giác MDN lớn nhất.

8. Cho tam giác ABC cân ở B và có $\widehat{ABC}=40^0$. Gọi O là trung điểm của AC, K là chân đường vuông góc hạ từ O xuống cạnh AB, (ω) là đường tròn tâm O bán kính OK, E là một điểm trên cạnh BA sao cho $\widehat{AOE}=\alpha\left(20^0<\alpha<90^0\right)$. Tính α để $AE+CF$ nhỏ nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN TỈNH BẮC GIANG NĂM HỌC 2023 - 2024

Câu 1. 1.1. *Rút gọn biểu thức*

$$Q=\left(\frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}+\frac{x-y}{\sqrt{x^2-y^2}-x+y}\right)\cdot\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2-y^2}}$$

với $x>y>0$.

1.2. *Cho đường thẳng d có phương trình:*

$$y=(3m+1)x-6m-1, m \text{ là tham số.}$$

Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng d là lớn nhất.

1.3. *Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình*

$$x^2-2(3m-1)x+m^2-m-4=0$$

có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn

$$\left|x_1+x_2+\sqrt{x_1x_2}\right|+\left|x_1+x_2-\sqrt{x_1x_2}\right|=2008.$$

Lời giải.

1.1. Ta có:

$$Q=\left(\frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}+\frac{\sqrt{(x-y)^2}}{\sqrt{(x+y)(x-y)}-\sqrt{(x-y)^2}}\right)\times\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2-y^2}}$$

$$=\sqrt{x-y}.\left(\frac{1}{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}+\frac{1}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}\right)\times\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2-y^2}}$$

$$=\sqrt{x-y}.\frac{\sqrt{x+y}}{y}.\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2-y^2}}=\frac{x^2+y^2}{y}.$$

1.2. Dễ thấy đường thẳng d luôn đi qua điểm $M(2;1)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên đường thẳng d. Suy ra $OH\le OM, \forall m$.

Ta có đường thẳng OM có phương trình là:

$$y=\frac{1}{2}x.$$

Do $OM\perp d$ nên

$$\frac{1}{2}(3m+1)=-1\Leftrightarrow 3m+1=-2\Leftrightarrow m=-1.$$

1.3. Phương trình

$$x^2-2(3m-1)x+m^2-m-4=0\ (1)$$

có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\Delta'>0\Leftrightarrow(3m-1)^2-\left(m^2-m-4\right)>0$$

$$\Leftrightarrow 8m^2-5m+5>0$$

$$\Leftrightarrow 8\left(m-\frac{5}{16}\right)^2+\frac{135}{32}>0;\forall m\in\mathbb{R}.$$

Vậy phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2.

Theo định lý Viète, ta có:

$$\begin{cases}x_1+x_2=2(3m-1)\\x_1x_2=m^2-m-4\end{cases}.$$

Đặt $A=x_1+x_2+\sqrt{x_1x_2}$; $B=x_1+x_2-\sqrt{x_1x_2}$.

Ta có: $A.B=(x_1+x_2)^2-x_1x_2$

$$=\left(x_1+\frac{x_2}{2}\right)^2+\frac{3x_2^2}{4}>0,\forall x_1,x_2.$$

Suy ra A và B luôn cùng dấu, do đó:

$$|A|+|B|=|A+B|.$$

Vì vậy:

$$\left|x_1+x_2+\sqrt{x_1x_2}\right|+\left|x_1+x_2-\sqrt{x_1x_2}\right|=2008$$

$$\Leftrightarrow\left|x_1+x_2+\sqrt{x_1x_2}+x_1+x_2-\sqrt{x_1x_2}\right|=2008$$

$$\Leftrightarrow|x_1+x_2|=1004\quad\Leftrightarrow 2|3m-1|=1004$$

$$\Leftrightarrow|3m-1|=502$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\dfrac{503}{3}\\m=-167\end{array}\right..$$

Câu 2. 2.1. *Giải phương trình*

$$4\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}=x+7.$$

2.2. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases}x^2+x-2xy=2\\ x^4+x^2-4x^3y=4-4x^2y^2\end{cases}$$

Lời giải.

2.1. ĐK: $x\ge 1$.

Ta có: (1) $\Leftrightarrow x+3-4\sqrt{x+3}+4+\sqrt{x-1}=0$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+3}-2)^2+\sqrt{x-1}=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x+3}=2\\ \sqrt{x-1}=0\end{cases}\Leftrightarrow x=1.$$

2.2. Ta có: $\begin{cases}x^2+x-2xy=2\\ x^4+x^2-4x^3y=4-4x^2y^2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-2xy=2-x\\ \left(x^4-4x^3y+4x^2y^2\right)+x^2-4=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-2xy=2-x\\ \left(x^2-2xy\right)^2+x^2-4=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-2xy=2-x\\ (2-x)^2+x^2-4=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-2xy=2-x\\ 2x^2-4x=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-2xy=2-x \ (*)\\ \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=2\end{array}\right.\end{cases}.$$

- Với $x=0$, thay vào (*) ta được $0=2$ (vô lý).
- Với $x=2$, thay vào (*) ta được $y=1$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(2;1)$.

Câu 3. 3.1. *Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương $(x;y;z)$ thỏa mãn phương trình sau*

$$x^3+y^3+x^2(3y+2z)+y^2(3x+2z)+z^2(x+y)+4xyz=2023$$

3.2.. *Trên mặt phẳng cho 2×2024 điểm phân biệt, trong đó không có bất kỳ 3 điểm nào thẳng hàng. Người ta tô 2024 điểm trong các điểm đã cho bằng màu đỏ và tô 2024 điểm còn lại bằng màu xanh. Chứng minh rằng, bao giờ cũng tồn tại một cách nối tất cả các điểm màu đỏ với tất cả các điểm màu xanh bởi 2024 đoạn thẳng (mỗi đoạn thẳng có hai điểm đầu mút là một cặp điểm đỏ - xanh) sao cho hai đoạn thẳng bất kỳ trong đó không có điểm chung.*

Lời giải.

3.1) Ta có:

$$x^3+y^3+x^2(3y+2z)+y^2(3x+2z)+z^2(x+y)+4xyz=2023$$

$$\Leftrightarrow x^3+y^3+3x^2y+2x^2z+3xy^2+2y^2z+z^2x+z^2y+4xyz=2023$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^3+2z(x+y)^2+z^2(x+y)=2023$$

$$\Leftrightarrow (x+y)\left[(x+y)^2+2z(x+y)+z^2\right]=2023$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(x+y+z)^2=7.17^2.$$

Vì x,y,z nguyên dương nên ta có:

$$x+y+z>x+y>0.$$

Do đó: $\begin{cases}x+y=7\\ x+y+z=17\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=7\\ z=10\end{cases}.$

Có $x+y=7$ mà x,y nguyên dương nên ta có:

x	1	2	3	4	5	6
y	6	5	4	3	2	1

Kết luận: Các bộ số cần tìm là: $(1;6;10)$; $(2;5;10)$; $(3;4;10)$; $(4;3;10)$; $(5;2;10)$; $(6;1;10)$.

3.2) Xét tất cả các cách nối 2024 cặp điểm (đỏ với xanh) bằng 2024 đoạn thẳng. Các cách nối như vậy luôn luôn tồn tại và do chỉ có 2024 cặp điểm nên số tất cả các cách nối như vậy là hữu hạn. Do đó, ắt tìm được một cách nối có tổng độ dài các đoạn thẳng là ngắn nhất.

Ta chứng minh rằng đây là cách nối phải tìm.

Thật vậy, giả sử ngược lại ta có hai đoạn thẳng AX và BY mà cắt nhau tại điểm O (Giả sử A và B tô màu đỏ, còn X và Y tô màu xanh). Khi đó, nếu ta thay đoạn thẳng AX và BY bằng hai đoạn thẳng AY và BX, các đoạn khác giữ nguyên thì ta có cách nối này có tính chất:

$$AY+BX<(AO+OY)+(BO+OX)$$
$$=(AO+OX)+(BO+OY)$$
$$\Rightarrow AY+BX<AX+BY.$$

Như vậy; việc thay hai đoạn thẳng AX và BY bằng hai đoạn thẳng AY và BX, ta nhận được một cách nối mới có tổng độ dài các đoạn thẳng là nhỏ hơn. Vô lý, vì trái với giả thiết là đã chọn một cách nối có tổng các độ dài là bé nhất.

Điều vô lý đó chứng tỏ: Cách nối có tổng độ dài các đoạn thẳng là ngắn nhất là không có điểm chung.

Câu 4. *Cho đường tròn $(O;R)$ và dây cung BC cố định của đường tròn thỏa mãn $BC<2R$. Một điểm A di chuyển trên $(O;R)$ sao cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H. Đường phân giác của $\widehat{CHE}$ kéo dài về hai phía cắt AB và AC lần lượt tại M và N.*

4.1. *Chứng minh tam giác AMN cân tại A.*

4.2. *Gọi I,P,Q,J lần lượt là hình chiếu của D trên các cạnh AB, BE, CF, AC. Chứng minh rằng bốn điểm I,P,Q,J cùng nằm trên một đường thẳng vuông góc với AO.*

4.3. *Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt đường phân giác trong của $\widehat{BAC}$ tại điểm thứ hai K. Chứng minh rằng HK luôn đi qua một điểm cố định.*

Lời giải.

4.1. Vì $BE\perp AC=E$ nên $\widehat{HEC}=90°$.

Vì $CF\perp AB=F$ nên $\widehat{HFB}=90°$. Suy ra:

$$\widehat{FMH}+\widehat{MHF}=90^o;\widehat{ENH}+\widehat{NHE}=90^o \text{ (1).}$$

Vì HN là phân giác của góc $\widehat{CHE}$ nên

$$\widehat{CHN}=\widehat{NHE}.$$

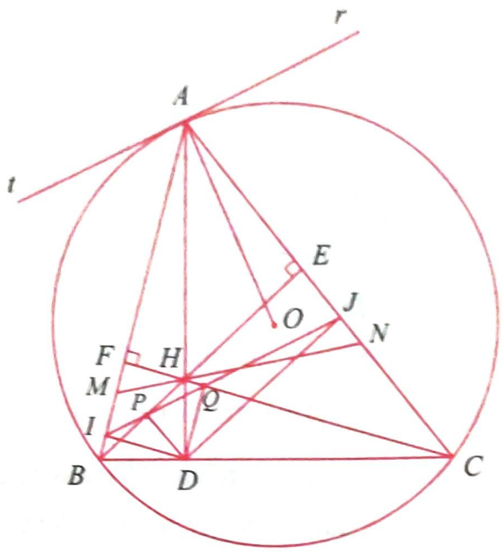
Lại có $\widehat{CHN}=\widehat{MHF}$ (đối đỉnh) nên

$$\widehat{NHE}=\widehat{MHF} \text{ (2).}$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\widehat{FMH}=\widehat{ENH} \text{ hay } \widehat{AMN}=\widehat{ANM}.$$

Vậy ΔAMN cân tại A.



4.2. Ta có: tứ giác $BIPD$ nội tiếp nên

$$\widehat{IBD}+\widehat{IPD}=180^o \text{ (3);}$$

$\widehat{IBD}=\widehat{FHA}$ (cùng phụ với góc $\widehat{FAH}$);

Lại có: $\widehat{FHA}=\widehat{QHD}$ (đối đỉnh) $\Rightarrow\widehat{IBD}=\widehat{QHD}$.

Vì tứ giác $DPHQ$ nội tiếp nên

$$\widehat{QHD}=\widehat{QPD}\Rightarrow\widehat{IBD}=\widehat{QPD} \text{ (4).}$$

Từ (3) và (4) suy ra: $\widehat{QPD}+\widehat{IPD}=180^o$ nên ba điểm I, P, Q thẳng hàng.

Chứng minh tương tự ta được P, Q, J thẳng hàng.

Vậy 4 điểm I, P, Q, J thẳng hàng.

Từ tứ giác $BIPD$ nội tiếp suy ra $\widehat{MIP}=\widehat{PDB}$.

Lại có $PD // AC$ (cùng vuông góc với BE) nên

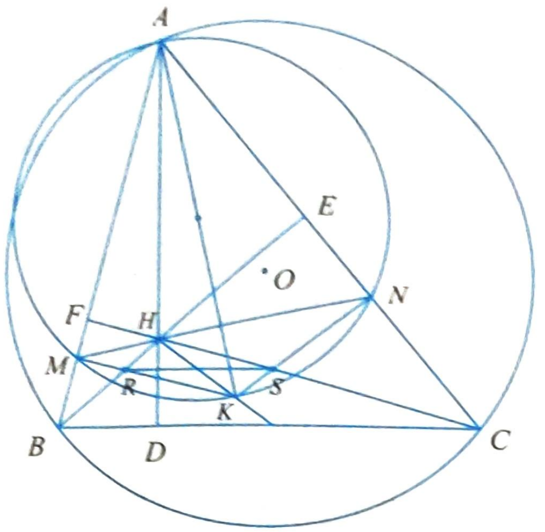
$$\widehat{PDB}=\widehat{ACB}.$$

Qua A kẻ tiếp tuyến tAt' của (O) suy ra:

$$AO\perp At;\ \widehat{tAB}=\widehat{ACB} \text{ (cùng bằng } \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AB}).$$

Suy ra $\widehat{tAI} = \widehat{AIP}$. Mà hai góc này ở vị trí so le trong nên $IP // At \Rightarrow IP \perp AO$ (đpcm).

4.3.



Vì ΔAMN cân tại A và AK là phân giác của góc $\widehat{MAN}$ nên AK là trung trực của MN, suy ra AK là đường kính của đường tròn ngoại tiếp ΔAMN. Do đó: $\widehat{AMK} = \widehat{ANK} = 90^o \Rightarrow KM // CF, KN // BE$.

Gọi $R = KM \cap BH$, $S = KN \cap HC$. Suy ra:

$HRKS$ là hình bình hành

$\Rightarrow HK$ đi qua trung điểm của RS (5).

Từ $MR // FH \Rightarrow \dfrac{HR}{RB} = \dfrac{FM}{MB}$.

Vì HN là phân giác của góc $\widehat{CHE}$ nên HM là phân giác của góc $\widehat{BHF} \Rightarrow \dfrac{FM}{MB} = \dfrac{FH}{HB}$.

Từ $SN // HE \Rightarrow \dfrac{HS}{SC} = \dfrac{EN}{NC}$.

Vì HN là phân giác của góc $\widehat{CHE}$ nên $\dfrac{EN}{NC} = \dfrac{HE}{HC}$.

Từ $\Delta FHB \sim \Delta EHC$ (g.g) suy ra:

$$\frac{FH}{HB} = \frac{HE}{HC} \Rightarrow \frac{HR}{RB} = \frac{HS}{SC}$$

$$\Rightarrow RS // BC \quad (6).$$

Từ (5) và (6) suy ra HK luôn đi qua trung điểm của đoạn BC (cố định).

Câu 5. *Cho x, y, z là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện $x + y + z = xyz$.*

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}.$$

Lời giải. Từ giả thiết $x + y + z = xyz$, ta có:

$$\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} = 1.$$

Đặt $a = \frac{1}{x}; b = \frac{1}{y}; c = \frac{1}{z} \Rightarrow a, b, c > 0$. Giả thiết trở thành: $ab + bc + ca = 1$;

$$P = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}.$$

Để ý rằng:

$$a^2 + 1 = a^2 + ab + bc + ca = (a+b)(a+c);$$
$$b^2 + 1 = b^2 + ab + bc + ca = (b+a)(b+c);$$
$$c^2 + 1 = c^2 + ab + bc + ca = (c+a)(c+b).$$

Lúc này ta có:

$$P = \frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{b}{\sqrt{(b+a)(b+c)}} + \frac{c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}$$
$$= \sqrt{\frac{a}{a+b}}.\sqrt{\frac{a}{a+c}} + \sqrt{\frac{b}{b+a}}.\sqrt{\frac{b}{b+c}} + \sqrt{\frac{c}{c+a}}.\sqrt{\frac{c}{c+b}}.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$P \le \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+a} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} + \frac{c}{c+b}\right)$$
$$= \frac{3}{2}.$$

Dấu $P = \frac{3}{2} =$ xảy ra khi và chỉ khi

$$a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ hay } x = y = z = \sqrt{3}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{3}{2}$ đạt được khi và chỉ khi $x = y = z = \sqrt{3}$.

NGUYỄN ANH TUẤN

(*Trường THPT chuyên Bắc Giang*)

Giới thiệu

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN HÀ NỘI

NĂM HỌC 2023 – 2024

Môn: TOÁN (chuyên Toán)

(*Thời gian làm bài: 150 phút*)

Câu I (2,0 *điểm*)

1) Giải phương trình

$$\sqrt{x-3}-\sqrt{2x-7}=2x-8.$$

2) Cho a,b và c là các số thực khác 0 thỏa mãn điều kiện $a^2-c^2=c, c^2-b^2=b$ và $b^2-a^2=a$. Chứng minh $(a-b)(b-c)(c-a)=1$.

Câu II (2,0 *điểm*)

1) Cho ba số nguyên a,b và c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2-2abc$ chia hết cho 6. Chứng minh abc chia hết cho 54.

2) Tìm tất cả cặp số nguyên dương (x,y) thỏa mãn $x^3y-x^2y-4x^2+5xy-y^2=0$.

Câu III (2,0 *điểm*)

1) Tìm tất cả cặp số nguyên (x,y) sao cho xy là số chính phương và x^2+xy+y^2 là số nguyên tố.

2) Với các số thực không âm a,b và c thỏa mãn $a+2b+3c=1$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=(a+6b+6c)(a+b+c).$$

Câu IV (3,0 *điểm*)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn $(AB<AC)$, nội tiếp đường tròn (O). Ba đường cao AD, BE và CF của tam giác ABC cùng đi qua điểm H. Đường thẳng EF cắt đường thẳng AD tại điểm Q. Gọi M và I lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC và AH. Đường thẳng IM cắt đường thẳng EF tại điểm K.

1) Chứng minh tam giác AEK đồng dạng với tam giác ABM.

2) Đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại điểm S, đường thẳng SI cắt đường thẳng MQ tại điểm T. Chứng minh bốn điểm A,T,H và M cùng thuộc một đường tròn.

3) Tia TH cắt đường tròn (O) tại điểm P. Chứng minh ba điểm A,K và P là ba điểm thẳng hàng.

Câu V (1,0 *điểm*)

Cho 2023 điểm nằm trong một hình vuông cạnh 1. Một tam giác đều được gọi là phủ điểm M nếu điểm M nằm trong tam giác hoặc nằm trên cạnh của tam giác.

1) Chứng minh tồn tại tam giác đều cạnh $\frac{1}{\sqrt{2}}$ phủ ít nhất 253 điểm trong 2023 điểm đã cho.

2) Chứng minh tồn tại tam giác đều cạnh $\frac{11}{12}$ phủ ít nhất 506 điểm trong 2023 điểm đã cho.

TRỊNH HOÀI DƯƠNG

(*GV THCS Giảng Võ, Hà Nội*)

Giới thiệu

DIỄN ĐÀN DẠY HỌC TOÁN

THEO CHƯƠNG TRÌNH VÀ SGK MỚI

PHÁT TRIỂN TƯ DUY VÀ KỸ NĂNG GIẢI TOÁN CHO HỌC SINH THÔNG QUA MỘT BÀI TOÁN HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

NGUYỄN THANH HẢI
(GV THPT Bắc Sơn, Thanh Hóa)

Trong chương trình môn Toán THPT trước đây và chương trình 2018 hiện nay, hình học không gian (HHKG) đóng một vai trò quan trọng, luôn xuất hiện trong những câu khó của các đề thi chọn học sinh giỏi cấp Tỉnh, hoặc là các câu vận dụng, vận dụng cao trong đề thi tốt nghiệp THPT. Tư duy lập luận quy lạ về quen luôn được đặt lên hàng đầu khi xử lý các bài toán này vì tính hiệu quả, thiết thực của phương pháp. Bài viết đưa ra một bài toán mà qua việc tìm hiểu và phát triển bài toán đó, hy vọng sẽ hình thành nên những hướng tư duy, phân tích lôgic, kỹ năng cần thiết cho học sinh khi giải toán HHKG. Từ đó gây dựng niềm đam mê Toán học nói chung và môn HHKG nói riêng.

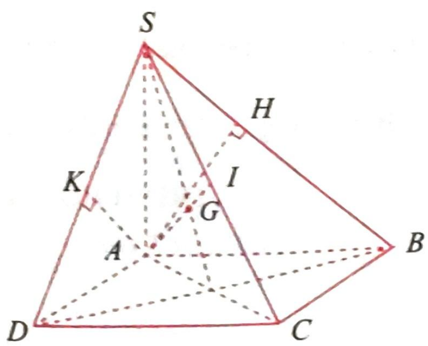
I. BÀI TOÁN MỞ ĐẦU

Bài toán. *Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các cạnh SB, SD.*

a) Chứng minh rằng $SC \perp (AHK)$.

b) Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABD$, G là trọng tâm tam giác SBD. Chứng minh $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.

Lời giải.



a) Ta có:

$$\begin{cases} AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC \\ AK \perp (SCD) \Rightarrow AK \perp SC \end{cases} \Rightarrow SC \perp (AHK).$$

b) Dễ thấy ba điểm A, B, D cùng nhìn SC dưới một góc vuông, do đó tâm I của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là trung điểm của cạnh SC.

Ta có: $$\begin{cases} \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 3.\overrightarrow{AG} \\ \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AC} = 2.\overrightarrow{AI} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}.$$

Trong ý này ta còn tìm được bán kính mặt cầu

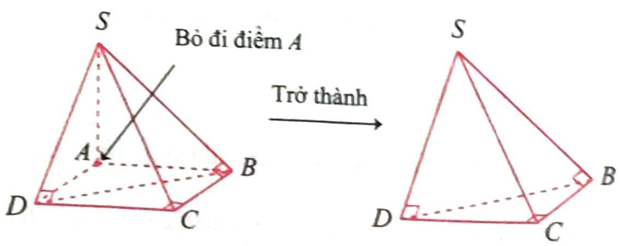
$$R = \frac{1}{2}\sqrt{AS^2 + AB^2 + AD^2}.$$

II. PHÁT TRIỂN BÀI TOÁN MỞ ĐẦU

Từ bài toán mở đầu (BTMĐ) là chóp tứ giác $S.ABCD$ ta bỏ đi điểm A để trở thành tứ diện $SBCD$, đồng thời thêm các giả thiết như:

- Thay giả thiết tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật bằng giả thiết tam giác BCD là vuông tại C.

- Thay giả thiết $SA \perp (ABCD)$ bằng giả thiết hai tam giác ΔSBC vuông ở B và ΔSDC vuông ở D.



- Với việc chân đường cao đã ẩn, thì bài toán trở nên rất khó, khó ngay từ bước vẽ hình để bắt đầu làm, vì chân đường cao là yếu tố quan trọng nhất của một bài toán hình học không gian, hầu hết

tính toán đều phải thông qua nó. Khi phát hiện ra những yếu tố bổ sung như vậy, ta xác định chân đường cao kẻ từ S đến mặt phẳng (BCD) như sau

Trong $mp(BCD)$ kẻ các đường thẳng $Dt//BC$, $Bt'//CD$. Đặt $A = Dt \cap Bt'$.

Dễ thấy tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật. Suy ra:

$$\begin{cases} CD \perp Dt \\ CD \perp SD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SDt) \Rightarrow (BCD) \perp (SDt) \ (*).$$

$$\begin{cases} CB \perp Bt' \\ CB \perp SB \end{cases} \Rightarrow CB \perp (SBt') \Rightarrow (BCD) \perp (SBt') (**).$$

Từ $(*)$, $(**)$ suy ra (SDt) và (SBt') cùng vuông góc với mặt đáy (BCD), nên giao tuyến $(SDt) \cap (SBt') = SA$ vuông góc với đáy (BCD) $\Leftrightarrow SA \perp (BCD)$.

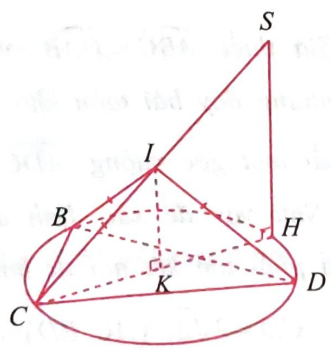
Tổng quát lên ta có kết quả:

• *Nếu hình chóp S.BCD có $\widehat{SDC} = \widehat{SBC} = 90°$ thì chân đường cao hạ từ S xuống đáy (BCD) là điểm đối xứng của C qua điểm K (với K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD).*

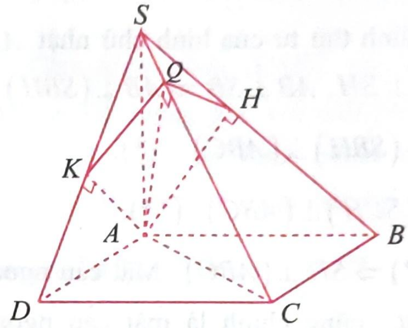
Lý giải điều này như sau:

- Gọi I là trung điểm của SC suy ra $BI = DI = CI = \frac{1}{2}SC$. *(Do hai tam giác SDC, SBC là vuông và BI, DI là các trung tuyến ứng với cạnh huyền SC).*

Xét hình chóp I.BCD có ba cạnh bên bằng nhau, nên chân đường cao hạ từ I xuống đáy chính là K tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD. Từ đó suy ra nếu gọi H là điểm đối xứng của C qua K thì dẫn đến $SH // IK \Rightarrow SH \perp (BCD)$.



• *Giả thiết như bài toán mở đầu, nếu gọi Q là hình chiếu vuông góc của A trên SC thì bốn điểm A, H, K, Q đồng phẳng, chúng cùng nằm trên mặt phẳng qua A và vuông góc với SC, nhận xét này có thể gặp trong các bài toán dựng thiết diện, mặt phẳng qua A và vuông góc với SC hoặc là các bài toán tính góc, ví dụ như góc giữa hai mặt phẳng (AHK) và $(ABCD)$,...*



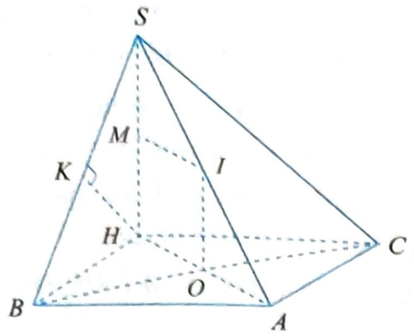
• *Cho hình chóp S.ABD có ba cạnh AS, AB, AD đôi một vuông góc ta luôn có A, G, I thẳng hàng và thoả mãn* $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$, *ngoài ra bán kính mặt cầu ngoại tiếp chóp* $R = \frac{1}{2}\sqrt{AS^2 + AB^2 + AD^2}$ *(với I tâm cầu, G trọng tâm tam giác BDC) - Kết quả này được rút ra từ ý b của BTMĐ.*

III. DỰA TRÊN NHỮNG Ý TƯỞNG NÀY, TA CÙNG ĐẾN VỚI MỘT SỐ BÀI TOÁN SAU

Bài 1. *Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông ở A,* $AB = 1$, $AC = \sqrt{3}$, *tam giác SAB vuông ở B, tam giác SAC vuông ở C. Biết rằng khoảng cách từ điểm C đến* $mp(SAB)$ *bằng* $\frac{\sqrt{3}}{2}$. *Tìm bán kính mặt cầu ngoại tiếp chóp S.ABC.*

Phân tích. *Bài toán chưa cho biết vị trí chân đường cao của chóp, nhưng đề bài có khá nhiều điểm tương đồng với BTMĐ như: đáy ABC là một tam giác vuông ở A, tam giác SAB vuông ở B, tam giác SAC vuông ở C. Điều này gợi cho chúng ta liên tưởng tới đỉnh còn lại của hình chữ nhật ABHC.*

Lời giải.



Gọi H là đỉnh thứ tư của hình chữ nhật $ABHC$, ta có: $AB \perp BH,\ AB \perp SB \Rightarrow AB \perp (SBH)$

$$\Rightarrow (SBH) \perp (ABC) \quad (*).$$

Tương tự: $(SCH) \perp (ABC) \quad (**)$.

Từ $(*), (**) \Rightarrow SH \perp (ABC)$. Mặt cầu ngoại tiếp chóp $S.ABC$ cũng chính là mặt cầu ngoại tiếp chóp $S.ABHC$.

Gọi K là hình chiếu của H trên SB. Ta có:

$$d(C,(SAB)) = d(H,(SAB)) = HK = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$KH.SB = SH.BH \Rightarrow SB = \frac{\sqrt{3}SH}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2SH.$$

Ta có: $SA^2 = SH^2 + AH^2 = SB^2 + AB^2 \Rightarrow SH^2 = 1$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{2}SA = \frac{1}{2}\sqrt{SH^2 + HA^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

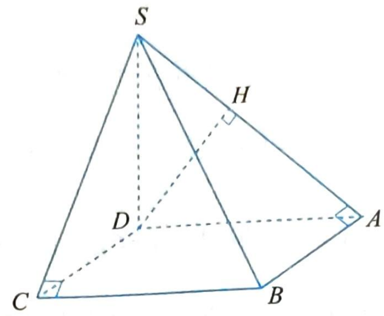
Bài 2. *Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là một tam giác vuông cân tại B, $AB = 2a$, $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90°$ và góc giữa đường thẳng BC và mặt phẳng (SAB) bằng $30°$. Tính khoảng cách từ S đến đường thẳng AB.*

Phân tích. *Bài toán có hai góc vuông nhưng lại ở hai điểm khác nhau, do đó ta phải kẻ thêm hình để dồn các góc vuông về một điểm, có như vậy mới tìm được đường thẳng vuông góc với mặt phẳng. Mặt khác bài toán có giả thiết $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90°$ cho ta xác định ra chân đường cao theo ý 1 của nhận xét.*

Lời giải.

Kẻ đường thẳng $CD // AB, CD = AB \Rightarrow BC \perp CD$. Mặt khác $BC \perp SC \Rightarrow BC \perp (SCD)$

$$\Rightarrow (SCD) \perp (ABC)\ (1).$$



Tương tự ta cũng suy ra được:

$$(SAD) \perp (ABC)\ (2).$$

Từ $(1), (2)$ suy ra $SD \perp (ABC)$ và $ABCD$ là hình vuông. Gọi $\alpha = (BC,(SAB))$. Suy ra:

$$\sin\alpha = \frac{d(C,(SAB))}{CB} = \frac{d(D,(SAB))}{CB} = \frac{d(D,(SAB))}{AD} = \frac{DH}{AD}.$$

$$\Leftrightarrow \sin 30° = \frac{DH}{AD} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{DH}{AD} \Rightarrow DH = \frac{1}{2}AD = a.$$

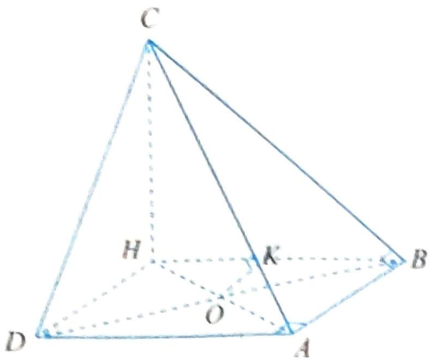
$$\frac{1}{DH^2} = \frac{1}{DA^2} + \frac{1}{DS^2} \Rightarrow SD = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow SA = \sqrt{SD^2 + AD^2} = \frac{4a\sqrt{3}}{3}.$$

Bài 3. *Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AD = 2$, $CD = 2\sqrt{2}$, $\widehat{ABC} = \widehat{DAB} = 90°$. Góc giữa AD và BC bằng $45°$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC, DB.*

Phân tích. *Giả thiết $\widehat{ABC} = \widehat{DAB} = 90°$ có vẻ quen thuộc, nhưng đây bài toán khó bởi lẽ giả thiết thiếu mất một góc vuông $\widehat{ADC} = 90°$ rất quan trọng. Như vậy để xác định được chân đường cao ta phải tìm kết nối từ hai giả thiết $AB = AD = 2$, $CD = 2\sqrt{2}$, $(AC,BD) = 45°$.*

Lời giải.



Dựng hình vuông $ADHB$, suy ra:

$$(AD, BC) = \widehat{CBH} = 45^\circ \text{ và } DH \perp (HCB).$$

Do đó: $DH \perp HC \Rightarrow \Delta HDC$ vuông cân $\Rightarrow CH = 2$.

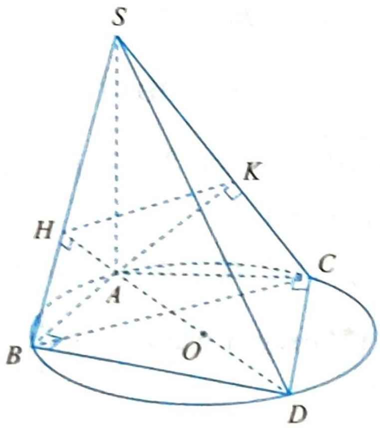
Xét ΔHBC có $\widehat{CBH} = 45^\circ, CH = HB = 2$ nên ΔHBC vuông cân tại H. Điều này dẫn đến:

$CH \perp (ADHB) \Rightarrow CH \perp BD$, mà $BD \perp AH$ suy ra: $BD \perp (CHA)$. Kẻ $OK \perp AC$ $(O = AH \cap BD)$ thì $d(AC, BD) = OK = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Bài 4. *Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy (ABC), $SA = 2BC$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SC. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AHK).*

Phân tích. *Bài toán đã biến tướng sang ý 2 của mục nhận xét từ BTMĐ.*

Lời giải.



Dựng đường kính AD của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Theo định lí sin trong tam giác ABC thì

$$AD = 2R = \frac{BC}{\sin 120^\circ} = \frac{2.BC}{\sqrt{3}}.$$

Theo BTMĐ ta có $SD \perp (AHK)$, $SA \perp (ABC)$.

Do đó: $((AHK), (ABC)) = (SD, SA) = \widehat{ASD}$.

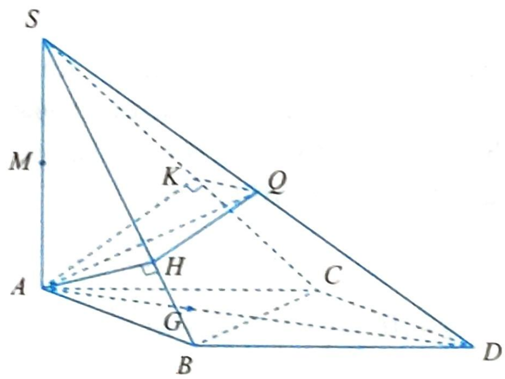
$$\tan \widehat{ASD} = \frac{AD}{SA} = \frac{\frac{2BC}{\sqrt{3}}}{2BC} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow \widehat{ASD} = 30^\circ \Rightarrow ((ABC), (AHK)) = 30^\circ.$$

Bài 5. *Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{BAC} = 90^\circ$, $SA = BC$ và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SC. Gọi M là trung điểm của SA, G là trọng tâm tam giác ABC. Tính tỉ số $\dfrac{V_{M.AHK}}{V_{G.AHK}}$.*

Phân tích. *Bài toán này chân đường cao hình chóp $S.ABC$ đã rõ, vấn đề là so sánh thể tích của hai khối chóp $M.AHK$ và $G.AHK$ trở thành so sánh chiều cao kẻ từ đỉnh M và G tới mặt phẳng (AHK), do đó dẫn đến việc xác định đường cao kẻ từ M và G tới mặt phẳng (AHK), tức là xác định ra đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (AHK). Theo BTMĐ thì $SD \perp (AHK)$ trong đó D là điểm sao cho $ABDC$ là hình chữ nhật. Từ đó ta có lời giải như sau*

Lời giải.



Dựng hình chữ nhật $ABDC$ và kẻ $AQ \perp SD$ tại Q, chứng minh được bốn điểm A, H, Q, K cùng nằm trên một mặt phẳng vuông góc với SD.

Khi đó ta có điều sau:

$$\frac{V_{M.AHK}}{V_{G.AHK}}=\frac{d(M;(AHK))}{d(G;(AHK))}=\frac{\frac{1}{2}d(S;(AHK))}{\frac{1}{3}d(D;(AHK))}$$

$$=\frac{3}{2}.\frac{SQ}{DQ} \quad (*).$$

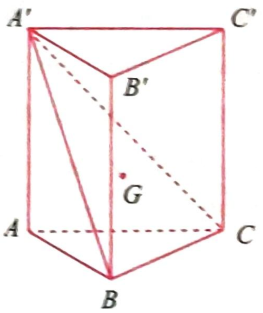
Mặt khác $SA=BC=AD$ nên tam giác SAD cân tại A, dẫn đến Q là trung điểm của SD.

Nên từ $(*)$ suy ra $\frac{V_{M.AHK}}{V_{G.AHK}}=\frac{3}{2}$.

Bài 6. *Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB=a$, $AC=a\sqrt{3}$, cạnh bên $AA'=2a$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ $ABC.A'B'C'$.*

Phân tích. *Mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ cũng chính là mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A'.ABC$ (qua 4 điểm không đồng phẳng luôn tồn tại và duy nhất một mặt cầu). Đến đây thì bài toán đã quay về ý b của bài toán mở đầu.*

Lời giải.



Mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ cũng chính là mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A'.ABC$. Gọi I là tâm mặt cầu đó, G là trọng tâm $\Delta A'BC$, theo BTMĐ thì:

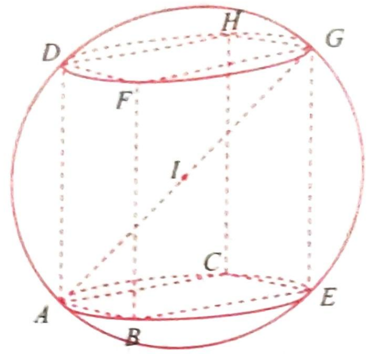
$$2.\overrightarrow{AI}=3\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow 4.\overrightarrow{AI}^2=\left(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)^2$$

hay $4R^2=AA'^2+AB^2+AC^2=4a^2+a^2+3a^2=8a^2$.

Suy ra: $R=a\sqrt{2}$.

Bài 7. *Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-1;0;2)$ đi qua điểm $A(0;1;1)$. Xét các điểm B, C, D thuộc (S) sao cho AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Tìm thể tích lớn nhất của tứ diện $ABCD$.*



Phân tích. *Thể tích của tứ diện $ABCD$ là $V=\frac{1}{6}.AB.AC.AD$, như vậy ta cần đánh giá max của tích $AB.AC.AD$. Kết nối mối quan hệ của AB, AC, AD và AI ta nhận thấy đó là ý b của BTMĐ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=2.\overrightarrow{AI}$, việc còn lại là đơn giản theo bất đẳng thức Cauchy.*

Lời giải. Ta có: $\overrightarrow{IA}=(1;1;-1)\Rightarrow R=IA=\sqrt{3}$.

Cũng từ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=2.\overrightarrow{AI}$ suy ra:

$$AB^2+AC^2+AD^2=4R^2,$$

tức là $AB^2+AC^2+AD^2=12 \quad (*)$.

Do tứ diện $ABCD$ có ba cạnh AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau nên có thể tích là:

$$V=\frac{1}{6}.AB.AC.AD \quad (**).$$

Từ $(*)$ ta có đánh giá theo BĐT Cauchy:

$$12\ge 3\sqrt[3]{AB^2.AC^2.AD^2}\Rightarrow 12^3\ge 27.(AB.AC.AD)^2.$$

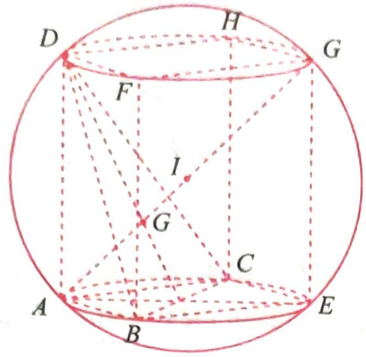
Suy ra: $AB.AC.AD\le 8$.

Dấu "=" xảy ra khi $AB=AC=AD=2$.

Vậy nên từ $(**)$ suy ra $\max V_{ABCD}=\frac{4}{3}$.

Bài 8. *Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=25$ và điểm $A(2;2;1)$. Xét các điểm B, C, D thuộc (S) sao cho AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau.*

Tính khoảng cách lớn nhất từ tâm của (S) đến mặt phẳng (BCD).



Phân tích. *Tâm mặt cầu đã xác định là $I(-1;2;-3)$, mặt phẳng (BCD) thì còn thay đổi, nhưng luôn đi qua một điểm cố định. Dựa vào yếu tố hai điểm đã cho là $A(2;2;1)$ và $I(-1;2;-3)$ để tìm điểm cố định đó.*

Lời giải. Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;-3)$, bán kính $R=5$. Nhận thấy mặt cầu

$$(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=25$$

đi qua điểm $A(2;2;1)$. Theo BTMĐ, gọi G là trọng tâm tam giác BCD thì $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}.\overrightarrow{AI}$, từ đây ta tìm được toạ độ điểm $G\left(0;2;-\frac{5}{3}\right)$. Dẫn đến mặt phẳng (BCD) luôn đi qua điểm cố định là $G\left(0;2;-\frac{5}{3}\right)$.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (BCD). Khi đó:

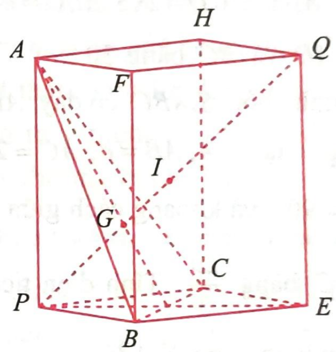
$$d\left(I;(BCD)\right)=IK\le IG=\frac{5}{3}.$$

Vậy $\max d\left(I;(BCD)\right)=\frac{5}{3}$, đạt được khi $K\equiv G$.

Bài 9. *Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ bán kính $R=5$ và điểm $P(2;4;5)$ nằm bên trong mặt cầu. Qua P dựng ba dây cung AA', BB', CC' của mặt cầu (S) đôi một vuông góc với nhau. Dựng hình hộp chữ nhật có ba kích thước là PA, PB, PC. Gọi PQ là đường chéo của hình hộp chữ nhật đó, biết rằng Q luôn chạy trên một mặt cầu cố định. Tìm bán kính của mặt cầu đó.*

Phân tích. *Theo kết quả của ý b bài toán mở đầu thì $\overrightarrow{PQ}=3\overrightarrow{PG}$ với G là trọng tâm tam giác ABC, suy ra phép vị tự tâm P tỉ số $k=3$ biến điểm G thành điểm Q. Do đó nếu tìm được mặt cầu cố định đi qua G thì ta sẽ suy ra được mặt cầu cố định đi qua Q. Mặt khác thì $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=3.\overrightarrow{IG}$ và $IA=IB=IC=5$, kết nối các giả thiết này lại ta đi tìm mặt cầu cố định đi qua G.*

Lời giải.



Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, khi đó

$$\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=3.\overrightarrow{IG}$$
$$\Rightarrow 9IG^2=3R^2+2\left(\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{IA}\right)$$
$$\Leftrightarrow 9IG^2=9R^2+4\overrightarrow{IP}.\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right)$$
$$\Leftrightarrow 3IG^2=3R^2+4\overrightarrow{IP}.\overrightarrow{PG}\quad (*).$$

Đặt $G(x;y;z)$, $R=5$, $I(1;2;3)$, $P(2;4;5)$ và biến đổi $(*)$ ta được:

$$x^2+y^2+z^2-\frac{10}{3}x-\frac{20}{3}y-\frac{26}{3}z+\frac{47}{3}=0.$$

Suy ra G thuộc mặt cầu tâm $J\left(\frac{5}{3};\frac{10}{3};\frac{13}{3}\right)$, bán kính $R'=\frac{\sqrt{153}}{3}$.

Mặt khác theo BTMĐ suy ra $\overrightarrow{PQ} = 3\overrightarrow{PG}$, dẫn đến có phép vị tự $V_{(P;k=3)}: G \mapsto Q$. Vậy điểm Q chạy trên mặt cầu cố định có bán kính

$$R'' = k.R' = 3.\frac{\sqrt{153}}{3} = \sqrt{153}.$$

IV. BÀI TẬP CỦNG CỐ

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, $SB > 2a$ và $\widehat{ABC} = \widehat{BAS} = \widehat{BCS} = 90°$. Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC), biết $\sin\alpha = \frac{\sqrt{11}}{11}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Bài 2. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ biết $AB = 2, CD = 2\sqrt{3}, \widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90°$ và góc giữa AD và BC bằng $30°$.

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $A, AB = a, AC = 2a$. Biết $\widehat{SBA} = \widehat{SCA} = 90°$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA, BC bằng $\frac{2a}{3}$. Tính diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Bài 4. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ biết $AB = 2, CD = 2\sqrt{2}, \widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90°$ và góc giữa AD và BC bằng $45°$.

Bài 5. Cho tứ diện $ABCD$ biết $AB = AC = \sqrt{2}$, $BC = 2, DB = DC = \sqrt{3}$. Góc giữa hai mặt phẳng $(ABC);(DBC)$ bằng $45°$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Bài 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = AC = a, \widehat{ABC} = 30°$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SC. Gọi α là góc giữa SA và mặt phẳng (AHK). Tính $\sin\alpha$.

Bài 7. Cho tứ diện $ABCD$ có $AD \perp (ABC)$, đáy ABC thỏa mãn điều kiện

$$\frac{\cot A + \cot B + \cot C}{2} = \frac{BC}{AB.AC} + \frac{CA}{BC.BA} + \frac{AB}{CA.CB}.$$

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên DB và DC. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp khối chóp $A.BCHK$.

Bài 8. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A, $AB = a, \widehat{BAC} = 120°$, $\widehat{SBA} = \widehat{SCA} = 90°$. Biết góc giữa SB và đáy (ABC) bằng $60°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Bài 9. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = BC = CD = 2$, $AC = BD = 1, AD = \sqrt{3}$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Bài 10. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$ và điểm $M(4;6;3)$. Qua điểm M kẻ các tia Mx, My, Mz đôi một vuông góc với nhau và cắt mặt cầu (S) tại các điểm tương ứng là A, B, C. Biết mặt phẳng (ABC) luôn đi qua một điểm cố định, tìm toạ độ điểm cố định đó.

Bài 11. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;-1)$ đi qua điểm $A(0;1;-1)$. Xét các điểm B, C, D thuộc (S) sao cho AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Tìm thể tích lớn nhất của tứ diện $ABCD$.

Bài 12. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-2;0;3)$ bán kính $R = 4$ và điểm $M(-1;0;1)$ nằm bên trong mặt cầu. Qua M dựng ba dây cung AA', BB', CC' của mặt cầu (S) đôi một vuông góc với nhau. Dựng hình hộp chữ nhật có cạnh là MA, MB, MC. Gọi MN là đường chéo của hình hộp chữ nhật đó, biết rằng N luôn chạy trên một mặt cầu cố định. Tìm bán kính của mặt cầu đó.

QUÁ TRÌNH HÌNH THÀNH VÀ PHÁT TRIỂN CỦA KHÁI NIỆM HÀM SỐ

NGUYỄN THỦY THANH
(Trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Khi nghiên cứu các quá trình diễn ra trong tự nhiên (chẳng hạn: quá trình vật lý, hóa học, sinh học,...) ta thường gặp những đại lượng đặc trưng biến thiên trong các quá trình đó. Ở đây, người ta thường thấy sự thay đổi của một đại lượng thường kéo theo sự biến đổi của một đại lượng khác. Trong những trường hợp đó người ta nói rằng giữa các đại lượng biến thiên này tồn tại *một sự phụ thuộc hàm* và *khái niệm hàm số* (thường gọi tắt là *hàm)* cũng bắt nguồn từ đó ....

1. Đại lượng là gì

Đại lượng là khái niệm nguyên thủy không định nghĩa được của toán học. Ví dụ về đại lượng có thể nêu là *đại lượng vô hướng* (đặc trưng bởi một số là *số đo* của nó) hay *đại lượng vectơ* như lực và vận tốc, ...

Trong thế giới mà chúng ta đang sống, chỉ cần thoáng nhìn cũng thấy ngay rằng giới tự nhiên và xã hội quanh ta luôn luôn vận động, biến đổi: đó là sự thay đổi nhiệt độ, độ ẩm không khí, lực thổi của gió, vận tốc của các phương tiện giao thông ...

Các đại lượng cố định (≡ không đổi ≡ bất biến) là cực kỳ hiếm gặp. Một số ví dụ hiếm hoi có thể nêu là: tỷ số độ dài đường tròn với đường kính của nó luôn luôn bằng π ; tổng các góc trong của một tam giác bằng π hay khi nén một chất khí lý tưởng thì theo Định luật Boyle - Mariotte (1627 - 1691) tích của thể tích khí với áp lực là đại lượng không đổi.

Các đại lượng biến thiên có thể phân thành hai nhóm. Nhóm thứ nhất gồm các đại lượng biến thiên một cách tùy ý, chúng được gọi là những *biến độc lập*. Nhóm thứ hai gồm những đại lượng biến thiên mà sự biến đổi của chúng phụ thuộc vào sự biến đổi cuả các đại lượng biến thiên nhóm thứ nhất. Các đại lượng này được gọi là *biến phụ thuộc*. Trong những trường hợp khi có một đại lượng phụ thuộc vào đại lượng khác thì người ta nói rằng giữa các đại lượng đó đã *tồn tại một sự phụ thuộc hàm*. Người ta cho rằng một thành tựu lớn lao (của toán học) là sự phát hiện ra ý niệm về *phụ thuộc hàm*, cái mà trước đây thường bị che lấp ...

2. Thời kỳ sơ khai: từ cổ đại đến thế kỷ XVII

Ngay từ thiên niên kỷ thứ hai Tr.CN, bên cạnh các kỳ quan, cung điện và vườn treo nguy nga ... người Babylon cũng đã đạt trình độ cao về toán học. Trong các bảng "*Văn tự hình nêm*" bằng đất sét nung còn lưu giữ được, người Babylon đã lập các *bảng nghịch đảo, bảng các bình phương, bảng các lập phương và bảng tổng các bình phương và lập phương*.

Nói theo ngôn ngữ ngày nay thì đó là bảng giá trị của hàm $y = \dfrac{1}{x}$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^2 + x^3$.

Nhờ các bảng này người ta có thể giải các bài toán ngược: khai căn và giải phương trình bậc hai. Từ đó họ tính được độ dài cạnh huyền tam giác vuông theo các cạnh góc vuông cũng tức là tính giá trị của hàm $f = \sqrt{x^2 + y^2}$ (định lý Pythagoras !)

Các nhà toán học Cổ Hy Lạp thì lại *cố gắng không biểu diễn các đại lượng bằng số* vì họ biết rằng tồn tại những đoạn thẳng vô ước mà họ chưa có khái niệm về số vô tỷ. Mặc dù vậy, nhiều nghiên cứu của họ rất hữu ích cho khái niệm hàm hai nghìn năm sau. Đặc biệt, họ lập được bảng phụ thuộc giữa đại lượng cung và độ dài dây cung tương ứng của nó. Thực chất thì đó là bảng giá trị của hàm $y = \sin x$ (vì độ dài dây cung căng cung $2x$ (độ) bằng $2R\sin x$, R là bán kính đường tròn).

Việc nghiên cứu sự phụ thuộc tổng quát giữa các đại lượng được bắt đầu từ thế kỷ XIV bởi nhà toán học Pháp *N. Oresme* (1323 - 1382). Nhưng bước tiến chỉ có được khi *F. Viète* (1540 - 1603) phát triển các nguyên lý của *Đại số chữ* trong thế kỷ XVI, cái mà trước đó hơn một nghìn năm *Diophantus* đã đề cập trong tuyệt phẩm "*Số học*" của ông.

3. Toán học các đại lượng biến thiên

Trong khoảng thế kỷ XVI - XVII một quan điểm mới mẻ được hình thành là thế giới này được điều khiển bởi các quy luật của giới tự nhiên và của xã hội. Các quy luật đó có thể nhận thức được. Để hiểu rõ các quy luật đó và giải quyết các bài toán được đặt ra, cần phải có những phương pháp và khái niệm toán học mới. Và, chính lúc này một phát hiện thiên tài của *R. Descartes* (1596 - 1650) đã xuất hiện và đã thâm nhập vào toán học, tạo nên một bước nhảy vọt trong khoa học nói chung: *đó là đại lượng biến thiên Descartes*. Nó đã *đánh dấu một bước ngoặc* trong toán học. Nhờ *Đại số chữ* của *F.Viète* và phát minh này, toán học mới có phương pháp tổng quát để nghiên cứu sự phụ thuộc lẫn nhau giữa các đại lượng.

René Descartes
(1596-1650)

Để biểu diễn các đại lượng, *Descartes* đã áp dụng các chữ, còn mối quan hệ giữa các đại lượng đã biết và chưa biết thì Ông biểu diễn dưới dạng phương trình. Tiếp nữa, bằng cách chọn đơn vị đo xác định, có thể biểu diễn mọi đại lượng được nghiên cứu bởi *các số*. Từ đó *sự phụ thuộc giữa các đại lượng chuyển thành sự phụ thuộc giữa các số*.

Đối với cả *Descartes*, *Fermat*, *Newton* và *Leibniz* thực chất khái niệm hàm mới chỉ mang *đặc tính trực giác* và nó thường gắn liền hoặc với hình học hoặc với cơ học: tung độ của điểm trên đường cong là hàm của hoành độ, quãng đường và vận tốc là hàm của thời gian.

4. Sự xuất hiện thuật ngữ hàm. Quan điểm giải tích

Bản thân thuật ngữ "hàm" (tiếng Latinh: functio ≡ tiến hành, hoàn thành) lần đầu tiên được nhà toán học vĩ đại Đức *Leibniz* sử dụng năm 1673 trong bức thư ông gửi cho nhà toán học *C. Huygens* (1629 - 1693). Trong các tài liệu khoa học thuật ngữ hàm được ông đưa vào từ năm 1694. Bắt đầu từ năm 1698 *Leibniz* cũng đưa vào thuật ngữ *đại lượng "biến thiên"* và *"không đổi"*.

G. W. Leibniz
(1646-1716)

Trong thế kỷ XVIII đã xuất hiện một quan điểm mới: Xem hàm như một công thức liên kết đại lượng này với đại lượng khác. Đó là *quan điểm giải tích về khái niệm hàm*. Lần đầu tiên cách tiếp cận đó được nhà toán học Thụy Sỹ là *J. Bernoulli* (1667 - 1748) thể hiện trong định nghĩa hàm mà ông nêu ra năm 1718 rất gần với định nghĩa hiện đại.

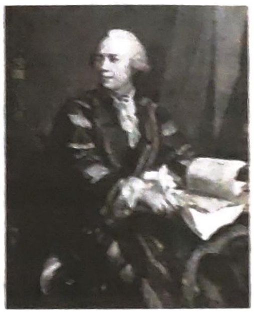
Hàm của đại lượng biến thiên là đại lượng được cấu thành bất luận bằng cách nào từ đại lượng biến thiên đó và các hằng số.

Johann Bernoulli
(1667-1748)

Định nghĩa này của *J. Bernoulli* đã mang lại cho thầy ông (nhà bác học cao niên vĩ đại *Leibniz*) một sự hứng khởi. Điều đó đã gợi cho *Leibniz* một phỏng đoán rằng việc thoát khỏi hệ thuật ngữ hình học sẽ đánh dấu một thời kỳ mới của toán học - thời kỳ nghiên cứu các hàm như những đối tượng độc lập dựa trên các số chứ không phải dựa trên hình học.

Sự diễn đạt một cách dứt khoát định nghĩa hàm với quan điểm giải tích ra đời năm 1748 bởi học trò của *J. Bernoulli* là *L. Euler*:

Hàm của đại lượng biến thiên là một biểu thức giải tích được thành lập bằng một cách nào đó từ đại lượng biến thiên ấy và các số hoặc các đại lượng không đổi.



L. Euler
(1707-1783)

Nhận thức như vậy về hàm đã kéo dài suốt cả thế kỷ XVIII. Một vấn đề gây nhiều tranh cãi đã nảy ra là: hàm có thể được cho bởi các công thức khác nhau trên các phần khác nhau của miền xác định hay không?

J. Fourier
(1768-1830)

Điều khúc mắc này cũng đã qua đi khi vào khoảng 1807 - 1811 tại Viện Hàn lâm Khoa học (VHLKH) Paris nhà toán học Pháp *J. Fourier* (1768 - 1830) trình bày một báo cáo nghiên cứu lý thuyết truyền nhiệt trong chất rắn. Trong báo cáo này *Fourier* đã đưa ra những ví dụ đầu tiên về hàm được cho trên nhiều phần khác nhau bởi các biểu thức giải tích khác nhau.

Thế nhưng do ngại va chạm, một thời gian dài về sau nhiều nhà toán học vẫn cố tránh nói đến việc cho hàm thế nào. Chẳng hạn, nhà toán học Pháp *S. F. Lacroix* (1765 - 1843) đã định nghĩa hàm như sau:

"Một đại lượng bất kỳ mà giá trị của nó phụ thuộc vào một hay nhiều đại lượng khác đều được gọi là hàm của các đại lượng ấy bất luận có cho biết hay không những phép toán nào được áp dụng để từ các đại lượng ấy thu được giá trị đại lượng thứ nhất".

Đến khoảng giữa thế kỷ XIX khái niệm hàm đã thoát khỏi khuôn khổ của biểu thức giải tích cũng như sự ngự trị của các công thức.

5. *Ý niệm về luật tương ứng*

Trước hết ta nói rõ thế nào là luật tương ứng. Giả sử cho hai tập hợp D và D^* gồm những phần tử tùy ý. Người ta nói rằng giữa các phần tử của D và các phần tử của D^* được *thiết lập một luật tương ứng* hoặc *phép tương ứng* nếu ta thiết lập được một quy tắc ghép chúng thành từng cặp sao cho mỗi cặp gồm một phần tử của D và một phần tử của D^*. Hai phần tử trong cùng một cặp được gọi là *tương ứng với nhau* trong phép tương ứng đó.

Trong các định nghĩa hàm mà ta đã nêu (nhất là trong định nghĩa có sử dụng phương pháp giải tích) người ta thấy thấp thoáng ý niệm về một luật tương ứng .... Về sau người ta đã chứng tỏ rằng: *"Hàm là một phép tương ứng"* [1].

Trong nửa đầu thế kỷ XIX các nhà toán học hàng đầu *B. Bolzano* (1781 - 1848), *N. I. Lobachevski* (1792 - 1856), *L. Dirichlet* (1805 - 1859) …gần như có chung quan điểm rằng

1) Xem L. D. Kudriavsev, *Giải tích toán học*, 1973 (Mos).

cần hoàn thiện định nghĩa mới về hàm. Trong định nghĩa đó cần thể hiện nội dung: hàm là một luật tương ứng giữa các tập hợp số, trong đó luật tương ứng cần được hiểu hoặc là *sự liệt kê* hoặc *một quy tắc* tổng quát nào đó. Nếu ký hiệu quy luật tương ứng là f, tập xác định là D và tập giá trị là D^* thì nội dung trên có thể mô tả đơn giản là: $D \xrightarrow{f} D^*$

B.Bolzalo
(1781-1848)

hay $x \overset{f}{\mapsto} y$ (1)

và thông thường từ (1) người ta ký hiệu hàm là

$$y = f(x),\ x \in D,\ y \in D^*.$$

L. *Dirichlet*
(1805-1859)

Vào năm 1837, nhà toán học Đức *L. Dirichlet* đã phát biểu định nghĩa tổng quát hơn về hàm với sự xuất hiện thuật ngữ "luật tương ứng":

Đại lượng y được gọi là hàm của đại lượng biến thiên x (trên đoạn $a \le x \le b$) nếu mỗi giá trị của x giữa a và b đều tương ứng với một giá trị hoàn toàn xác định y bất luận phép tương ứng đó được xác lập bằng cách nào: bằng công thức giải tích, bằng đồ thị, bằng bảng hoặc thậm chí bằng lời.

Theo định nghĩa này, kho hàm số được mở rộng hơn rất nhiều. trong đó có cả những hàm được cho nhờ *sự diễn đạt bằng lời*.

Chẳng hạn, hàm Dirichlet bằng 1 khi x là số hữu tỷ và bằng 0 khi x là vô tỷ. Chính *Dirichlet* cũng nhận xét rằng tuy hình thức có vẻ "bất thường" nhưng đó là hàm chân chính vì nó thỏa mãn định nghĩa đã phát biểu.

Trong kho tàng vô tận các hàm có thể có. Lịch sử toán học đã chứng tỏ rằng chỉ một nhóm rất ít các hàm là thường gặp trong các quá trình vận động của Giới tự nhiên và chúng được khảo sát đầu tiên.

Đó là các hàm: hàm hằng $y = c = \text{const}$; hàm lũy thừa; hàm mũ và hàm lôgarit; các hàm lượng giác và hàm lượng giác ngược. Các hàm này được gọi là *hàm sơ cấp cơ bản* hay *hàm sơ cấp cơ sở*. Mọi hàm thu được nhờ áp dụng một số hữu hạn lần các phép tính số học và phép hợp hàm (hàm số của hàm số $f(g(x))$) thực hiện trên các hàm sơ cấp cơ bản được gọi là *hàm sơ cấp*.

6. Khái niệm tổng quát về hàm.

Từ nửa sau thế kỷ XIX khi lý thuyết tổng quát về tập hợp đã được kiến tạo người ta mới vỡ lẽ ra rằng trong khái niệm hàm cả x lẫn y hoàn toàn không nhất thiết phải là các số.

Giờ đây định nghĩa mới về hàm được người ta phát biểu như sau.

Nếu mỗi phần tử x của tập hợp D đều tương ứng với một phần tử xác định y nào đó của tập hợp D^* thì người ta nói rằng trên tập hợp D đã cho hàm $y = f(x)$; hoặc nói rằng tập hợp D được ánh xạ lên tập hợp D^*.

Ký hiệu: $f : D \to D^*$

$$x \mapsto y = f(x) \qquad (2)$$

Trong trường hợp thứ nhất các phần tử của D được gọi là các *giá trị của biến độc lập* (hay đối số) còn phần tử y của tập hợp D^* được gọi là *giá trị của hàm*; trong trường hợp thứ hai thì x được gọi là *nghịch ảnh* và y được gọi là *ảnh* của x qua ánh xạ f.

Trong ký hiệu (2) cả D lẫn D^* đều là những tập hợp các phần tử có bản chất tùy ý. Nếu D^* là tập hợp số (số thực hoặc số phức) thì f được gọi là *hàm số*; nếu D^* gồm các vectơ thì f được gọi là *hàm vectơ*, nếu D^* là tập hợp các phần tử tùy ý thì f được gọi là *ánh xạ*.

Với nghĩa hiện đại, các hàm được xét xác định đối với tập hợp giá trị x có thể không lấp hết đoạn $a \le x \le b$ được nói đến trong định nghĩa của *Dirichlet*. Chẳng hạn nếu $D = \mathbb{N}, D^* = \mathbb{R}$ và luật tương ứng là: mỗi số tự nhiên nếu $n \in \mathbb{N}$ đều tương ứng với một số thực $a_n = f(n)$ thì $a_n = f(n)$ là *dãy số* quen thuộc. Như vậy *dãy số là hàm của đối số tự nhiên.*

Từ định nghĩa mới về hàm cũng suy rằng *thuật ngữ "hàm" và "ánh xạ" là đồng nghĩa và đó là hai tên gọi của cùng một khái niệm.*

Sang thế kỷ XX, do sự phát triển như vũ bão của Giải tích và Giải tích hàm mà khái niệm cốt lõi về hàm - ánh xạ lại được các nhà toán học hàng đầu lưu tâm đặc biệt.

Chẳng hạn, trong cuốn chuyên khảo "*Nhập môn lý thuyết tập hợp và tôpô đại cương*" (Mos.1977) của mình, Viện sĩ VHLKH Liên Xô *P.S. Aleksandrov* (1896 - 1982) đã phát biểu định nghĩa hàm - ánh xạ dưới dạng:

Nếu bằng một phương thức nào đó mỗi phần tử x của tập hợp D nào đó đều được đặt tương ứng với phần tử y xác định của tập hợp D nào đó thì ta viết $f: D \to D^*$ và nói rằng đã xác định được một ánh xạ từ tập hợp D đến tập hợp D*; hoặc nói rằng đã xác định một hàm f mà đối số của nó chạy trên tập hợp D còn giá trị của nó thuộc tập hợp D*.*

Để chỉ rằng phần tử y đã cho tương ứng với phần tử x ta viết $y = f(x)$ và nói rằng y là ảnh của phần tử x qua ánh xạ f.

Trước khi nêu vài ví dụ ta lưu ý rằng để kiểm tra tương ứng $f: D \to D^*$ có là ánh xạ hay không ta cần kiểm tra hai điều kiện sau đây:

A_1. *Sự tồn tại*: Với mọi $x \in D$ tồn tại $y \in D^*$ sao cho $y = f(x)$.

A_2. *Tính duy nhất*: Với mỗi phần tử $x \in D$ thì phần tử $y = f(x)$ là duy nhất.

Ta xét vài ví dụ.

Ví dụ 1. *Giả sử $D = \mathbb{R}$ và $D^* = \mathbb{R}$. Khi đó luật tương ứng $f: D \to D^*$ cho bởi hệ thức $f(x) = x$ là một ánh xạ.*

1. Sự tồn tại: với mọi $x \in D$ cho trước bao giờ cũng tồn tại $y \in D^*$ để $y = f(x) = x$.

2. Tính duy nhất: Giả sử $x_1, x_2 \in D$ và $x_1 = x_2$. Ta cần chứng minh rằng $f(x_1) = f(x_2)$. Thật vậy, theo định nghĩa tương ứng f ta có:

$$f(x_1) = x_1 \text{ và } f(x_2) = x_2.$$

Nhưng vì $x_1 = x_2$ nên $f(x_1) = f(x_2)$ và tính duy nhất được chứng minh. Vậy f là ánh xạ.

Ví dụ 2. *Giả sử D và D* như trong ví dụ 1 và luật tương ứng f được cho bởi hệ thức $x^2 = y^2$. Khi đó f không là ánh xạ.*

Rõ ràng là điều kiện tồn tại được thỏa mãn. Nhưng điều kiện duy nhất không thỏa mãn. Thật vậy, với $x = 1 \in D$ thì sẽ có hai giá trị $y_1 = 1$ và $y_2 = -1$ thuộc D* cùng thỏa mãn hệ thức $x^2 = y^2$. Do đó f không là ánh xạ.

Ví dụ 3. *Giả sử cho đoạn thẳng $D = [0; 2\pi] \in \mathbb{R}$ và luật tương ứng f cho ứng mỗi giá trị $\alpha \in [0; 2\pi]$ với điểm của mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ (với hệ tọa độ Descartes) có hoành độ $\sin\alpha$ và tung độ $\cos\alpha$. Khi đó f là ánh xạ.*

Trước hết cả hai điều kiện A_1 và A_2 đều thỏa mãn. Do đó f là ánh xạ. Tiếp theo ta xem D* là gì. Vì $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ nên ảnh $(\sin\alpha, \cos\alpha)$ của điểm α thuộc đường tròn đơn vị và chạy hết đường tròn đó khi $0 \le \alpha \le 2\pi$. Như vậy f là ánh xạ đoạn thẳng $[0, 2\pi]$ lên đường tròn đơn vị.

Như vậy ta đã lần theo sự phát triển khái niệm hàm từ cội nguồn đến những khái quát hóa hiện đại. Giới tự nhiên vận động không ngừng và cùng với nó khái niệm hàm và toán học nói chung cũng tiến hóa không bao giờ ngừng ...

CÁC LỚP THCS

Bài T1/560 (Lớp 6). Cho tổng $A = p^2 + 95$, trong đó p là số nguyên tố. Tìm p sao cho A có đúng 8 ước số nguyên dương.

NGUYỄN TẤN NGỌC
(GV THCS P. Bình Định, An Nhơn, Bình Định)

Bài T2/560 (Lớp 7). Cho

$$A = \frac{3}{1.2.4.5} + \frac{4}{2.3.5.6} + \frac{5}{3.4.6.7} + \ldots + \frac{2023}{2021.2022.2024.2025}.$$

So sánh A và $\frac{1}{8}$.

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(TP. Hồ Chí Minh)

Bài T3/560. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì hiệu $(2n)^{2022n} - 1$ không thể là lũy thừa của một số tự nhiên với số mũ nguyên dương và lớn hơn 1.

ĐÀO VĂN NAM
(GV TH&THCS May Academy, Hà Nội)

Bài T4/560. Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Qua A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với (O) (B, C thuộc (O)). Kẻ đường kính CD của (O). Tiếp tuyến tại D của (O) cắt đường thẳng BC tại E, AD cắt BC tại I. Chứng minh OI vuông góc với AE.

BÙI VĂN CHI
(Số nhà 21/2, đường Lê Hồng Phong, TP. Quy Nhơn, Bình Định)

Bài T5/560. Cho x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện $2x^2 - 3xy + 4y^2 = 6$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + 2y^2$.

NGUYỄN MINH THỌ
(214 Điện Biên Phủ, Q.3, TP. Hồ Chí Minh)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/560. Cho các số thực a, b, c lớn hơn 1 thỏa mãn $2(a+b+c) = ab + bc + ca$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{b^2-1}} + \frac{b}{\sqrt{c^2-1}} + \frac{c}{\sqrt{a^2-1}} \geq 2\sqrt{3}.$$

PHẠM DUY KHÁNH
(GV THPT Quỳ Châu, Nghệ An)

Bài T7/560. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức

$$P = |a + b + 3c| + |a + 3b + c| + |3a + b + c|.$$

VŨ HỒNG PHONG
(GV THPT Tiên Du 1, Bắc Ninh)

Bài T8/560. Cho điểm M nằm trong tam giác nhọn ABC. Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên AB, BC, CA. Chứng minh

$$MD^2 + ME^2 + MF^2 \geq \left(MA.\sin\frac{A}{2}\right)^2 + \left(MB.\sin\frac{B}{2}\right)^2 + \left(MC.\sin\frac{C}{2}\right)^2.$$

LA ĐẠI CƯƠNG
(GV THPT Cam Lộ, Quảng Trị)

Bài T9/560. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{bc}{(a+b)(a+c)} + \frac{ca}{(b+c)(b+a)} + \frac{ab}{(c+a)(c+b)} \leq \frac{3}{4} + \frac{3M(M-m)^2}{4(a+b)(b+c)(c+a)}$$

trong đó $M = \max\{a,b,c\}$, $m = \min\{a,b,c\}$.

NGUYỄN VIỆT HÙNG
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/560. Tìm tất cả các số nguyên tố p, q sao cho $\begin{cases} p^2+1 \mid 2023^q + 1 \\ q^2+1 \mid 2023^p + 1 \end{cases}$.

NGUYỄN TUẤN NGỌC
(GV THPT chuyên Tiền Giang)

Bài T11/560. Cho hàm số $f:(0;+\infty)\to(0;+\infty)$ thỏa mãn điều kiện: $f(3x)\ge f\left(\frac{1}{2}f(2x)\right)+2x$ với mọi $x>0$. Chứng minh rằng $f(x)\ge x$ với mọi $x>0$.

LÊ XUÂN ĐẠI
(GV THPT chuyên Vĩnh phúc)

Bài T12/560. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và một điểm P bất kỳ nằm trong tam giác ABC. Giả sử BP cắt AC tại E, CP cắt AB tại F, EF cắt BC tại D và AD cắt lại (O) tại một điểm Q khác A. Gọi R là giao điểm của PQ và EF. Chứng minh rằng đường tròn đường kính DR và đường tròn (O) trực giao.

(Hai đường tròn được gọi là trực giao nếu chúng cắt nhau và tiếp tuyến của hai đường tròn tại mỗi giao điểm vuông góc với nhau).

PHẠM GIA HƯNG
(SV Đại học Bách Khoa Hà Nội)

Bài L1/560. Một con lắc lò xo đặt trên mặt phẳng nằm ngang gồm lò xo nhẹ có độ cứng 20 N/m và vật nhỏ khối lượng 400 g. Hệ số ma sát trượt giữa vật và mặt phẳng ngang là 0,1. Ban đầu giữ vật ở vị trí lò xo bị dãn 6 cm rồi buông nhẹ để con lắc dao động tắt dần. Lấy g = 10 m/s^2. Kể từ lúc buông vật cho đến thời điểm tốc độ của vật bắt đầu giảm, thế năng của con lắc lò xo đã giảm một lượng bằng bao nhiêu?

VIỆT CƯỜNG *(Hà Nội)*

Bài L2/560. Chiếu ánh sáng trắng có bước sóng từ 0,38 μm đến 0,76 πm vào hai khe trong thí nghiệm Y-âng. Tại vị trí ứng với vân sáng bậc 3 của ánh sáng tím có bước sóng λ = 0,4 πm còn có vân sáng của ánh sáng có bước sóng bằng bao nhiêu?

THANH LÂM *(Hà Nội)*

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/560 (For 6th grade). Let $A=p^2+95$, where p is some prime number. Find p so that A has exactly 8 positive factors.

Problem T2/560 (For 7th grade). Let

$$A=\frac{3}{1.2.4.5}+\frac{4}{2.3.5.6}+\frac{5}{3.4.6.7}+\ldots+\frac{2023}{2021.2022.2024.2025}.$$

Compare A and $\frac{1}{8}$.

Problem T3/560. Show that, for every natural number n, the difference $(2n)^{2022n}-1$ cannot be a power of some natural number with the integer exponent which is greater than 1.

Problem T4/560. Suppose that A is a point lying outside a circle (O). Draw two tangents AB, AC to (O), (B, C belong to (O)). Draw the diameter CD. The tangent at D of (O) intersects the line BC at E, and AD intersects BC at I. Show that OI is perpendicular to AE.

Problem T5/560. Suppose that x, y are real numbers satisfying $2x^2-3xy+4y^2=6$.

Find the minimum and maximum values of the expression $P=x^2+2y^2$.

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/560. Given real numbers a, b, c which are greater than 1 and satisfy

$$2(a+b+c)=ab+bc+ca.$$

Show that $\frac{a}{\sqrt{b^2-1}}+\frac{b}{\sqrt{c^2-1}}+\frac{c}{\sqrt{a^2-1}}\ge 2\sqrt{3}$.

Problem T7/560. Give real numbers a, b, c satisfying $a^2+b^2+c^2=3$. Find the minimum and maximum values of the expression

$$P=|a+b+3c|+|a+3b+c|+|3a+b+c|.$$

(Xem tiếp theo trang 35)

Bài T1/556. *Cho a và b là các số nguyên dương thay đổi sao cho tổng $A = a^2 + b^2$ chia hết cho 147. Tìm giá trị nhỏ nhất của A.*

Lời giải. Giả sử a và b là các số nguyên dương mà tổng $A = a^2 + b^2$ chia hết cho $147 = 3.7^2$.

Đặt $a = 3c + r$ với số tự nhiên c và số dư r bằng 0; 1; 2 thì $a^2 = (3c + r)^2 = 9c^2 + 6cr + r^2$

$$= 3(3c^2 + 2cr) + r^2.$$

Số r^2 chia cho 3 cho số dư là 0 hoặc 1, như thế $a^2 = 3d + s$ với d là số nguyên dương và s bằng 0 hoặc 1. Tương tự xét số $b = 3e + t$ với số tự nhiên e, số dư t ta có $b^2 = 3g + v$ với g là số nguyên dương và v bằng 0 hoặc 1. Lúc đó

$$a^2 + b^2 = 3(d + g) + s + v.$$

Do $a^2 + b^2$ chia hết cho 3 thì $s + v$ chia hết cho 3, nhưng $s + v \le 2$ nên điều này chỉ xảy ra khi $s = v = 0$, do đó $r = t = 0$, tức là $a = 3c$ và $b = 3e$ với c, e là số nguyên dương. Tiếp theo có hai cách giải.

Cách 1. Từ $a = 3c$ và $b = 3e$ thì

$$a^2 + b^2 = 9c^2 + 9e^2 = 9(c^2 + e^2)$$

chia hết cho $147 = 3.7^2$ mà $(9, 7) = 1$ nên $c^2 + e^2$ chia hết cho 7^2, tức là $c^2 + e^2 = 7^2k$ với k là số nguyên dương.

Nếu $k = 1$ thì $c^2 + e^2 = 7^2$ và $1 \le c \le 7$, $1 \le e \le 7$.

Lúc đó: $c^2 = 7^2 - e^2 = (7 - e)(7 + e)$.

Điều này chỉ xảy ra khi $c = 0$ và $e = 7$ hoặc $c = 7$ và $e = 0$, không thỏa mãn.

Nếu $k = 2$ thì $c^2 + e^2 = 7^2.2 = 7^2 + 7^2$, lúc đó $c = e = 7$ và $a^2 + b^2 = 21^2 + 21^2 = 882 = 6.147$.

Vậy số $A = a^2 + b^2$ nhỏ nhất chia hết cho 147 là

$$A = a^2 + b^2 = 21^2 + 21^2 = 882.$$

Cách 2. Đặt $a = 7h + r$ với số tự nhiên h và số dư r bằng 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6 thì

$$a^2 = (7h + r)^2 = 49h^2 + 14hr + r^2$$
$$= 7(7h^2 + 2hr) + r^2.$$

Số r^2 chia cho 7 cho số dư là 0; 1; 2; 4, như thế $a^2 = 7k + s$ với k là số nguyên dương và s bằng 0; 1; 2; 4. Tương tự xét số $b = 7m + t$ với số tự nhiên m, số dư t ta có $b^2 = 7n + v$ với n là số nguyên dương và v bằng 0; 1; 2; 4. Lúc đó

$$a^2 + b^2 = 7(k + n) + s + v.$$

Do $a^2 + b^2$ chia hết cho 7 thì $s + v$ chia hết cho 7, nhưng $s + v$ chỉ có thể là: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 nên điều này chỉ xảy ra khi $s = v = 0$, do đó $r = t = 0$, tức là $a = 7h$ và $b = 7m$.

Do $(3, 7) = 1$ thì $a = 3.7p = 21p$ và $b = 3.7q = 21q$ với p và q là các số nguyên dương, lúc đó:

$$a^2 + b^2 = 21^2p^2 + 21^2q^2 = 21^2(p^2 + q^2)$$
$$= 3.147(p^2 + q^2).$$

Số $A = a^2 + b^2$ nhỏ nhất chia hết cho 147 khi p và q là các số nguyên dương nhỏ nhất, tức là $p = q = 1$, lúc đó $A = a^2 + b^2 = 3.147.2 = 882$.

Vậy số $A = a^2 + b^2$ nhỏ nhất chia hết cho 147 là $A = a^2 + b^2 = 21^2 + 21^2 = 882$.

Nhận xét. Sử dụng cách chứng minh thứ hai ta thấy bài toán vẫn đúng khi thay số nguyên tố 3 hoặc 7 bởi số nguyên tố dạng $4k + 3$ với k là số nguyên dương. Các bạn sau có lời giải đúng. **Nghệ An**: *Hoàng Đức Minh*, 6C, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; *Nguyễn Sỹ Bảo Long, Nguyễn Đình Gia Hưng, Phan Trọng Khải*, 6B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Ngãi**: *Nguyễn Thị Thùy Dương*, 7A, THCS Nguyễn Kim Vang, Nghĩa Hành; **Nước Cộng Hòa Áo**, TP Grar: *Lê Bạch Hải Đăng*, lớp 1B, trường Quốc tế song ngữ cấp 2, 3 GIBS.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/556. *Tìm phần nguyên của tích 2014 số hạng sau* $P = \left(1+\frac{1}{1^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2014^2}\right)$.

Lời giải. Đặt $P_n = \left(1+\frac{1}{1^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$.

Ta có $\left(1+\frac{1}{(k-1)(k+1)}\right) > \left(1+\frac{1}{k^2}\right)$, $(k > 1)$ nên

$$P_n = \left(1+\frac{1}{1^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$$
$$< 2\left(1+\frac{1}{(2-1)(2+1)}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{(n-1)(n+1)}\right)$$
$$= 2\frac{2^2.3^2.\cdots n^2}{(1.3).(2.4)\cdots(n-1)(n+1)}$$

$$= 2.\frac{2^2 3^2 \ldots n^2}{1.2.3^2 4^2 \cdots (n-1)^2 n(n+1)} = \frac{2^2.n}{n+1} = \frac{4n}{n+1} \text{ (1).}$$

Mặt khác $P_n = \left(1+\frac{1}{1^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$

$$> \left(1+\frac{1}{1^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{5^2}\right) \text{ khi } n > 5 \text{ (2).}$$

Cho nên, từ (1) ta có:

$$P_{2014} = \left(1+\frac{1}{1^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2014^2}\right)$$

$$< \frac{4.2014}{2015} = \frac{8056}{2015} < 4.$$

Từ (2) ta có:

$$P_{2014} = \left(1+\frac{1}{1^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2014^2}\right)$$

$$> \left(1+\frac{1}{1^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{5^2}\right) = \frac{221}{72} > 3.$$

Suy ra phần nguyên của

$$P = P_{2014} = \left(1+\frac{1}{1^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2014^2}\right) \text{ là 3.}$$

Nhận xét. Có hai bạn gửi bài kỳ này đều có đáp số đúng: **Nghệ An:** *Hoàng Đức Minh*, 6C THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; **Phú Thọ:** *Cao Duy Hưng*, 7A THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông.

Có một bạn gửi bài giải không ghi tên họ cũng không ghi tên trường lớp.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T3/556. *Đặt*

$$M = \left(1+\frac{1}{1}+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2013}+\frac{1}{2015}\right).$$

Chứng minh rằng $43 < M < 51$.

Lời giải. Với số tự nhiên a, ta có

$$\left(1+\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+3}\right)^2 = \frac{\left(a^2+6a+7\right)^2}{(a+1)^2(a+3)^2} > \frac{\left(a^2+6a+7\right)^2-4}{(a+1)^2(a+3)^2}$$

$$= \frac{\left(a^2+6a+5\right)\left(a^2+6a+9\right)}{(a+1)^2(a+3)^2} = \frac{a+5}{a+1}.$$

Lần lượt thay $a = 0, 4, 8, \ldots, 2012$ ta có:

$$M^2 = \left(1+\frac{1}{1}+\frac{1}{3}\right)^2\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)^2\ldots\left(1+\frac{1}{2013}+\frac{1}{2015}\right)^2$$

$$> \frac{5}{1}.\frac{9}{5}.\frac{13}{9}\ldots\frac{2017}{2013} = 2017.$$

Suy ra $M > \sqrt{2017} > 43$ (1). Đặt

$$N = \left(1+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}\right)\left(1+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2013}+\frac{1}{2015}\right)$$

$$\Rightarrow M = \left(1+\frac{1}{1}+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right).N = \frac{47}{15}.N.$$

Với số nguyên dương a, ta có:

$$\left(1+\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+3}\right)^2 = \frac{\left(a^2+6a+7\right)^2}{(a+1)^2(a+3)^2}$$

$$< \frac{\left(a^2+6a+8\right)^2}{\left[(a+1)^2-1\right]\left[(a+3)^2-1\right]} = \frac{(a+2)^2(a+4)^2}{a.(a+2)^2(a+4)} = \frac{a+4}{a}.$$

Lần lượt thay $a = 8, 12, \ldots, 2012$ ta có:

$$N^2 = \left(1+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}\right)^2\left(1+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}\right)^2\ldots\left(1+\frac{1}{2013}+\frac{1}{2015}\right)^2$$

$$< \frac{12}{8}.\frac{16}{12}\ldots\frac{2016}{2012} = 252 \Rightarrow N < \sqrt{252}.$$

Ta có: $M = \frac{47}{15}.N < \frac{47}{15}.\sqrt{252} < 51$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

Nhận xét. 1) Điều then chốt của lời giải này là chứng minh $\frac{a+5}{a+1} < \left(1+\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+3}\right)^2 < \frac{a+4}{a}$

với a là số tự nhiên để biểu thức có nghĩa.

2) Kết quả $43 < M < 51$ là ước lượng quá rộng đối với M. Chẳng hạn, nếu sử dụng bất đẳng thức

$$\left(1+\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+3}\right)^2 > \frac{a+5}{a+1}$$

với $N^2 = \left(1+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}\right)^2\left(1+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}\right)^2 \times \ldots$

$$\times\left(1+\frac{1}{2013}+\frac{1}{2015}\right)^2$$

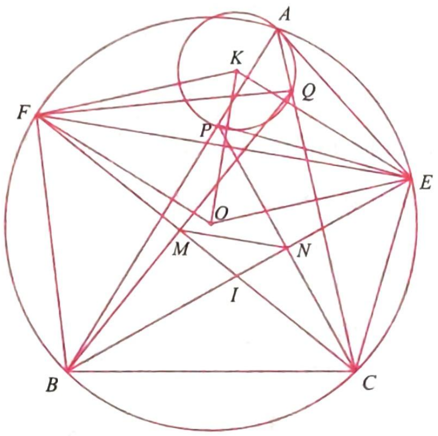
rồi thay $M = \frac{47}{15}.N$, ta sẽ được ước lượng tốt hơn.

Các bạn sau đây có bài giải tốt:

Hà Nội: *Ngô Minh Chấn*, 9A3, TH&THCS Archimedes Đông Anh; **Nghệ An:** *Phạm Quang Thắng*, 7C, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Chánh Thiện*, 9/12, THCS Lê Quý Đôn, quận 3. Hai bạn *Ngô Minh Chấn* và *Phạm Quang Thắng* tìm ra kết quả $46 < M < 50$.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T4/556. *Cho tam giác ABC có BC < CA < AB nội tiếp đường tròn (O). Đường phân giác trong của các góc B và C lần lượt cắt đường tròn (O) tại E và F. Lấy K đối xứng với O qua EF. Đường tròn (K; KA) cắt AB, AC lần lượt tại điểm thứ hai P, Q; CF cắt BQ ở M; BE cắt CP ở N. Chứng minh tứ giác BMNC nội tiếp.*



Lời giải. Rõ ràng $EA = EC$. Từ $OK \perp EF$ nên OK là trung trực của EF (tính chất đường kính – dây cung), suy ra $OEKF$ là hình thoi. Do đó: $OF // EK$, $OE // FK$. Do $OF \perp AB$ nên $EK \perp AB$, từ đó suy ra EK là trung trực của đoạn AP, nên $EA = EP$. Vậy $EP = EC$ (1).

Lại có: $\widehat{BPE} = 180° - \widehat{APE} = 180° - \widehat{PAE} = \widehat{BCE}$.

Mặt khác: $\widehat{PBE} = \widehat{CBE}$ nên $\widehat{PEB} = \widehat{CEB}$. Suy ra: $\Delta BPE = \Delta BCE$ (g.c.g) $\Rightarrow BP = BC$ (2). Từ (1) và (2) suy ra: $BE \perp PC$.

Tương tự ta có: $CQ = CB$, $FQ = FB$ nên $CF \perp QB$.

Từ $\widehat{BMC} = \widehat{BNC} = 90°$ nên tứ giác $BCNM$ là tứ giác nội tiếp.

Nhận xét. Chỉ có bạn *Trịnh Bá Hiếu*, 9A, THCS Lê Hồng Phong, Hưng Nguyên, **Nghệ An** cho lời giải tốt.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/556. *Cho a, b, c là ba số thuộc đoạn [1; 4]. Chứng minh* $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) < \frac{225}{16}$.

Lời giải. *Cách 1.* Vì $1 \le a \le 4$ nên $(a-1)(a-4) \le 0$, tức là $a^2 + 4 \le 5a$ (1).

Vì $a > 0$ nên chia hai vế của (1) cho a, ta có:

$$a + \frac{4}{a} \le 5.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = 1$ hoặc $a = 4$.

Lập luận hoàn toàn tương tự, ta cũng có:

$$b + \frac{4}{b} \le 5;\ c + \frac{4}{c} \le 5.$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên, ta được

$$a + b + c + \frac{4}{a} + \frac{4}{b} + \frac{4}{c} \le 15.$$

Áp dụng bất đẳng thức: $xy \le \frac{(x+y)^2}{4}$ (dấu bằng xảy ra khi $x = y$), ta có:

$$(a+b+c)\left(\frac{4}{a}+\frac{4}{b}+\frac{4}{c}\right) \le \frac{\left(a+b+c+\frac{4}{a}+\frac{4}{b}+\frac{4}{c}\right)^2}{4} \le \frac{15^2}{4}$$

hay $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \le \frac{225}{16}$ (2).

Dấu bằng ở bất đẳng thức (2) xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a, b, c \in \{1; 4\} \\ a + b + c = \frac{4}{a} + \frac{4}{b} + \frac{4}{c} \quad (3) \end{cases}.$$

Nhưng không có giá trị nào của a, b, c $\in \{1; 4\}$ thoả mãn (3). Vì vậy dấu bằng ở bất đẳng thức (2) không xảy ra. Vậy $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) < \frac{225}{16}$.

Bài toán đã được chứng minh.

Cách 2. Ta sẽ chứng minh một bất đẳng thức mạnh hơn: $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \le \frac{27}{2} \left(< \frac{225}{16}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} \le \frac{21}{2} \quad (*).$$

Thật vậy, vai trò a, b, c như nhau nên không giảm tổng quát ta có thể giả sử $a \ge b \ge c$. Khi đó:

$(a-b)(b-c) \ge 0 \Leftrightarrow b^2 + ac \le ab + bc$ (1).

Vì $ab > 0$ và $bc > 0$ nên lần lượt chia hai vế của (1) cho ab và bc, ta nhận được:

$$\frac{b}{a} + \frac{c}{b} \le 1 + \frac{c}{a} \ (2);\ \frac{b}{c} + \frac{a}{b} \le 1 + \frac{a}{c} \ (3).$$

Cộng theo vế của (2) và (3), ta được:

$$\frac{b}{c} + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} \le 2 + \frac{a}{c} + \frac{c}{a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b}{c} + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} \le 2 + 2\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) \quad (4).$$

Đặt $t=\frac{a}{c}$, thì $\frac{a}{c}+\frac{c}{a}=t+\frac{1}{t}$.

Do $1\le c\le a\le 4$ nên $1\le t\le 4$, suy ra:

$$(t-4)(4t-1)\le 0 \Leftrightarrow 4t^2-17t+4\le 0$$

$$\Leftrightarrow 4\left(t+\frac{1}{t}\right)\le 17 \Leftrightarrow t+\frac{1}{t}\le\frac{17}{4}\Rightarrow \frac{a}{c}+\frac{c}{a}\le\frac{17}{4}\quad(5).$$

Từ (4) và (5) suy ra:

$$\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\le 2+2.\frac{17}{4}=\frac{21}{2}.$$

Bất đẳng thức (*) đã được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi trong ba số a, b, c có hai số bằng 1 và một số bằng 4, hoặc có hai số bằng 4 và một số bằng 1.

Nhận xét. Bài này các bạn tham gia gửi bài đều cho lời giải tương tự theo một trong hai cách trên. Tuyên dương các bạn sau có lời giải lập luận chặt chẽ và ngắn gọn: **TP. Hồ Chí Minh**: *Nguyễn Chánh Thiện*, 9/12, THCS Lê Quý Đôn; **Nghệ An**: *Trịnh Bá Hiếu*, 9A, THCS Lê Hồng Phong, Hưng Nguyên; **Hưng Yên:** *Lê Tuấn Hiệp*, 8C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T6/556. *Giải phương trình*

$$2\sqrt{x^3-2x^2+5x+5}-\sqrt[3]{2x-2}+x^3-3x^2-4=0.$$

Lời giải. Điều kiện: $x^3-2x^2+5x+5\ge 0$. Điều kiện này cho ta $x>-2$.

Thật vậy hàm số $f(x)=x^3-2x^2+5x+5$ có $f'(x)=3x^2-4x+5>0$ với mọi x nên $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Vì $f(-2)=-21<0$ nên từ điều kiện $f(x)\ge 0>f(-2)$ ta có ngay $x>-2$. Như vậy ta chỉ cần giải phương trình trên khoảng $(-2,+\infty)$. Kiểm tra trực tiếp $x=1$ là nghiệm của phương trình. Bây giờ ta xét với $x>-2, x\ne 1$ và viết lại phương trình ban đầu như sau:

$$2\left[\sqrt{x^3-2x^2+5x+5}-(x+2)\right]+$$
$$+\left[(x-1)-\sqrt[3]{2x-2}\right]+x^3-3x^2+x+1=0\quad(1).$$

Chú ý là: $\sqrt{x^3-2x^2+5x+5}-(x+2)$

$$=\frac{x^3-2x^2+5x+5-(x+2)^2}{\sqrt{x^3-2x^2+5x+5}+(x+2)};$$

$$(x-1)-\sqrt[3]{2x-2}=\frac{(x-1)^3-(2x-2)}{(x-1)^2+(x-1)\sqrt[3]{2x-2}+\sqrt[3]{(2x-2)^2}}$$

nên nếu khai triển và rút gọn tử số ở các phân thức trên thì ta có thể viết lại (1) thành

$$\left(x^3-3x^2+x+1\right)A(x)=0\qquad(2)$$

trong đó $A(x)=\frac{2}{\sqrt{x^3-2x^2+5x+5}+(x+2)}+$

$$+\frac{1}{(x-1)^2+(x-1)\sqrt[3]{2x-2}+\sqrt[3]{(2x-2)^2}}+1>0$$

với mọi $x>-2, x\ne 1$. Do đó, phương trình (2) tương đương với: $x^3-3x^2+x+1=0$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2-2x-1\right)=0.$$

Giải với điều kiện $x\ne 1$, ta tìm được hai nghiệm là $x=1-\sqrt{2}$ và $x=1+\sqrt{2}$. Các nghiệm này đều thoả mãn phương trình. Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\left\{1,1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}\right\}$.

Nhận xét. Đây là bài toán giải phương trình cơ bản, sử dụng lượng liên hợp để khử căn, từ đó đưa được phương trình đã cho về phương trình tích. Đáng tiếc trong tất cả các lời giải gửi tới Toà soạn, không có lời giải nào hoàn chỉnh. Đa số các bạn đều mắc một trong các lỗi sau:

- Khi sử dụng lượng liên hợp để viết

$$\sqrt{A}-\sqrt{B}=\frac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}},\ \sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}=\frac{A-B}{\sqrt[3]{A^2}+\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2}}$$

các bạn đều quên mất rằng các mẫu số có thể bằng 0. Phải chắc chắn mẫu khác 0 mới viết được như trên.

- Một số bạn không chỉ ra $x>-2$ mà kết luận ngay $A(x)>0$ là chưa chặt chẽ.

NGUYỄN TIẾN LÂM

Bài T7/556. *Tìm tất cả các số tự nhiên x và số nguyên y thỏa mãn đẳng thức*

$$\log_2\frac{x^5+y^{2024}}{2xy^{2024}+2}=x(y^{2024}-x^4)-y^{2024}$$

đồng thời x^3+y^3 là lập phương của một số nguyên.

Lời giải. Rõ ràng $x=y=0$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán. Với các số tự nhiên x và số nguyên y

không đồng thời bằng 0 thì $2xy^{2024}+2>0,\ x^5+y^{2024}>0$. Khi đó:

$$(1)\Leftrightarrow \log_2(x^5+y^{2024})+x^5+y^{2024}$$
$$=\log_2(xy^{2024}+1)+xy^{2024}+1$$

$\Leftrightarrow x^5+y^{2024}=xy^{2024}+1$ (2) (do hàm số $f(t)=\log_2 t+t$ có $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+1>0,\forall t>0$ nên đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$).

• Nếu $x=1$ thì (2) đúng với mọi y. Do đó các cặp số nguyên $(x;y)=(1;k)$ thỏa mãn (2), $k\in\mathbb{Z}$.

Xét $1^3+k^3=a^3$ với $a\in\mathbb{Z}$. Khi đó ta có: $(a-k)(a^2+ak+k^2)=1$. Dẫn tới:

$$\left[\begin{array}{l}a-k=a^2+ak+k^2=1\\ a-k=a^2+ak+k^2=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3k^2+3k=1\\ 3k^2-3k+2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k=0\\ k=-1\end{array}\right.$$

Thử lại ta thấy các cặp số $(x;y)$ bằng $(1;0)$, $(1;-1)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

• Nếu $x\neq 1$ thì (2) trở thành: $x^5-1=(x-1)y^{2024}$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=(x-1)y^{2024}$$
$$\Leftrightarrow x^4+x^3+x^2+x+1=y^{2024}\ (3).$$

Với $x\in\mathbb{N}$ thì $x^4+x^3+x^2+x+1>0$ và $3x^3+5x^2+3x\geq 0$. Dẫn tới:

$$x^4<x^4+x^3+x^2+x+1\leq x^4+4x^3+6x^2+4x+1$$
$$=(x+1)^4\ (4).$$

Từ (3) và (4) ta có: $x^4<(y^{506})^4\leq(x+1)^4$.

Mà $x\in\mathbb{N},y\in\mathbb{Z}$ nên $(y^{506})^4=(x+1)^4$. Thay vào (3) ta được: $x^4+x^3+x^2+x+1=(x+1)^4$

$$\Leftrightarrow 3x^3+5x^2+3x=0\Leftrightarrow x=0.$$

Khi $x=0$ ta được: $y^{2024}=1\Leftrightarrow y=\pm1$. Hiển nhiên lúc này x^3+y^3 là lập phương của một số nguyên.

Ta được thêm hai cặp số $(x;y)$ là $(0;1)$ và $(0;-1)$ thỏa mãn bài toán.

Vậy có tất cả 4 cặp số $(x;y)$ là $(1;0)$, $(1;-1)$, $(0;1)$, $(0;-1)$ thỏa mãn bài toán.

Nhận xét. Bài toán không quá khó nhưng hay. Điểm mấu chốt trong lời giải bài toán là biến đổi đẳng thức điều kiện về dạng hàm đặc trưng, từ đó tìm được đẳng thức (2). Đa số các bạn có lời giải tương tự như trên. Một số bạn không tìm đủ nghiệm vì có những đánh giá không đúng. Các bạn có lời giải tốt là: **Quảng Bình:** *Đoàn Ngọc Duy, Nguyễn Thanh Hải, Đỗ Thị Thanh Thảo*, 12 Toán 1, *Phạm Thị Mỹ Hạnh*, 12 Toán 2, *Hoàng Kim Lộc*, 11 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Phú Yên:** *Huỳnh Trần Gia Huy*, 10 Toán 1, THPT chuyên Lương Văn Chánh.

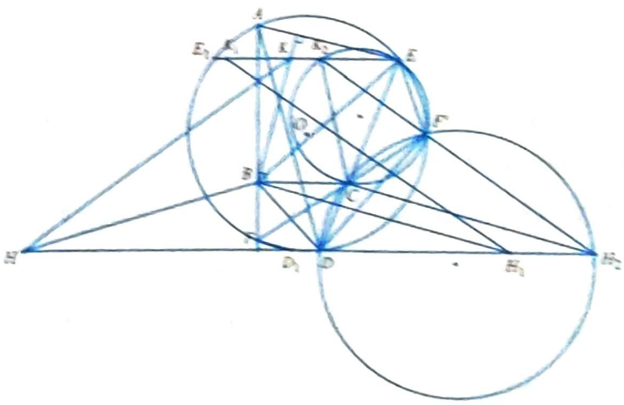
TRẦN HỮU NAM

Bài T8/556. *Cho một điểm A nằm trên đường tròn (O). Hai điểm B, C nằm trong (O) sao cho $\widehat{ABC}=90^0$. Một đường thẳng chuyển động qua C cắt (O) tại D, E. Gọi H, K lần lượt là trực tâm của tam giác ABD, ABE. Chứng minh HK luôn đi qua một điểm cố định.*

Lời giải. (Theo bạn *Nguyễn An Thịnh*, Trường THPT chuyên Trần Phú, **Hải Phòng**).

Gọi H_1, K_1 theo thứ tự là các điểm đối xứng với H, K qua AB; H_2, K_2 là các điểm thoả mãn:

$$\overrightarrow{H_1H_2}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{K_1K_2}.$$



Để ý rằng H_2K_2 là ảnh của HK qua hợp của phép đối xứng trục AB và phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{BC}$ (phép đối xứng trục AB được thực hiện trước). Ta sẽ chứng minh H_2K_2 luôn đi qua một điểm cố định. Thật vậy, gọi F là giao điểm của AB với đường tròn (O), giả sử FC cắt đường tròn (O) tại F'. Ta có: $\widehat{CH_2D}=\widehat{BH_1D}=\widehat{BHD}=\widehat{BAD}=\widehat{FF'D}$.

Suy ra tứ giác $CF'H_2D$ nội tiếp. Mặt khác:

$$\widehat{EK_2C}=\widehat{K_1CB}=\widehat{KBC}=\widehat{BAE}=180^0-\widehat{EF'C},$$

suy ra tứ giác $K_2EF'C$ nội tiếp. Từ đó nếu gọi E_1

là giao điểm của EK với đường tròn (O) (E_1 khác E) thì $\widehat{CF'K_2}=\widehat{E_1ED}=\widehat{EDH_2}=180^0-\widehat{CF'H_2}$.

Suy ra ba điểm K_2, F', H_2 thẳng hàng. Do đó H_2K_2 đi qua điểm F' cố định.

Kết luận: HK luôn đi qua ảnh của điểm F' qua hợp của phép đối xứng trục AB và phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{BC}$. Rõ ràng điểm này là điểm cố định. Ta có điều cần chứng minh.

Nhận xét. Ngoài lời giải của bạn *Nguyễn An Thịnh*, Toà soạn không nhận được thêm lời giải nào của các bạn đọc trên cả nước gửi về.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/556. ***Cho ba số thực dương a, b, c và n, m là hai số tự nhiên thỏa mãn $n \ge m$. Chứng minh rằng:***

$$\frac{a^n}{(b+c)^n}+\frac{b^n}{(c+a)^n}+\frac{c^n}{(a+b)^n} \ge \frac{1}{2^{n-m}}\left[\frac{a^m}{(b+c)^m}+\frac{b^m}{(c+a)^m}+\frac{c^m}{(a+b)^m}\right] \quad (1).$$

Lời giải (Của bạn *Tiết Trọng Khiêm*)

Bổ đề 1. (Bất đẳng thức Chebyshev) *Cho hai dãy bất đẳng thức đơn điệu cùng chiều:*

$a_1 \ge a_2 \ge .... \ge a_n > 0$ *và* $b_1 \ge b_2 \ge b_3 \ge .... \ge b_n > 0$.

Khi đó: $a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n$

$$\ge \frac{1}{m}(a_1+a_2+...+a_n)(b_1+b_1+...+b_n) \quad (2).$$

Bổ đề 2. Ta có $a^n+b^n+c^n \ge 3\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^n$ (3)

với mọi số dương a, b, c *và* $n \in \mathbb{N}$.

Chứng minh. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho n số dương ta có:

$$a^n+(n-1)\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^n \ge n\sqrt[n]{a^n\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{n(n-1)}} = na\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{n-1};$$

$$b^n+(n-1)\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^n \ge n\sqrt[n]{b^n\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{n(n-1)}} = nb\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{n-1};$$

$$c^n+(n-1)\left(\frac{a+b+c}{m}\right)^n \ge n\sqrt[n]{c^n\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{n(n-1)}} = nc\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{n-1}.$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức ta được:

$$a^n+b^n+c^n+3(n-1)\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^n \ge n\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{n-1}(a+b+c).$$ Suy ra (3).

Bổ đề 3. (Bất đẳng thức Nesbitt) *Với a, b, c dương ta có*: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}$.

Áp dụng. Không hạn chế tổng quát, coi $a \ge b \ge c$. Ta có bộ các bất đẳng thức đơn điệu cùng chiều

$$\begin{cases} \frac{a^m}{(b+c)^m} \ge \frac{b^m}{(c+a)^m} \ge \frac{c^m}{(a+b)^m} \\ \frac{a^{n-m}}{(b+c)^{n-m}} \ge \frac{b^{n-m}}{(c+a)^{n-m}} \ge \frac{c^{n-m}}{(a+b)^{n-m}}. \end{cases}$$

Áp dụng BĐT Chebyshev cho bộ ba số, ta được:

$$\frac{a^n}{(b+c)^n}+\frac{b^n}{(c+a)^n}+\frac{c^n}{(a+b)^n} = \frac{a^m}{(b+c)^m}.\frac{a^{n-m}}{(b+c)^{n-m}} + \frac{b^m}{(c+a)^m}.\frac{b^{n-m}}{(c+a)^{n-m}} + \frac{c^m}{(a+b)^m}.\frac{c^{n-m}}{(a+b)^{n-m}}$$

$$\ge \frac{1}{3}\left(\frac{a^m}{(b+c)^m}+\frac{b^m}{(c+a)^m}+\frac{c^m}{(a+b)^m}\right) \times \left(\frac{a^{n-m}}{(b+c)^{n-m}}+\frac{b^{n-m}}{(c+a)^{n-m}}+\frac{c^{n-m}}{(a+b)^{n-m}}\right) = (*).$$

Áp dụng bất đẳng thức (3) ta được:

$$(*) \ge \frac{1}{3}\left(\frac{a^m}{(b+c)^m}+\frac{b^m}{(c+a)^m}+\frac{c^m}{(a+b)^m}\right) \times 3\left(\frac{\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}}{3}\right)^{n-m} = (**).$$

Theo bất đẳng thức Nesbitt (4) ta được:

$$(**) \ge \left(\frac{a^m}{(b+c)^m}+\frac{b^m}{(c+a)^m}+\frac{c^m}{(a+b)^m}\right)\left(\frac{3}{2}\right)^{n-m}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-m} = \frac{1}{2^{n-m}}\left[\frac{a^m}{(b+c)^m}+\frac{b^m}{(c+a)^m}+\frac{c^m}{(a+b)^m}\right].$$

Vậy (1) được chứng minh.

Nhận xét. Một số bạn chứng minh hơi khác, có phần dài hơn lời giải của *Tiết Trọng Khiêm*. Tất cả các bạn dưới đây đã gửi bài có lời giải tốt:

Bình Định: *Trần Ngọc Tuyên*, 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn. **Nghệ An**: *Phan Đại Hoàng*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu. **Phú Yên**: *Huỳnh Trần Gia Huy*, 10 T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh. **Quảng Bình**: *Nguyễn Thanh Hải*, 12 Toán 1, *Phạm Thị Mỹ Hạnh*, 12 Toán 2, *Hoàng Kim Lộc*, 11 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp. **Sóc Trăng**: *Tiết Trọng Khiêm*, 12A2, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai.

TẠ DUY PHƯỢNG

Bài T10/556. *Cho dãy số (x_n) xác định bởi*

$$\begin{cases} x_1 = 4, x_2 = 10 \\ x_{n+2} = 4x_{n+1} - 3x_n, \forall n \geq 1 \end{cases}$$

Tìm tất cả các bộ số nguyên dương $(m; n)$ sao cho $mn|(x_m, x_n)$.

Lời giải. (Dựa theo lời giải của bạn *Phạm Thị Mỹ Hạnh*, 12T2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình**). Từ quy tắc tìm số hạng tổng quát của dãy truy hồi cấp 2 tuyến tính ta dễ tìm được $x_n = 3^n + 1$. Nếu $m = 1$ thì $mn|\ (x_n, x_m)$

$$\Rightarrow n\,|\,x_1 = 4, n\,|\,x_n = 3^n + 1 \Rightarrow n \in \{1, 2\}.$$

Tương tự nếu $n = 1$ thì $m \in \{1, 2\}$.

Vậy $(m, n) = (1, 1); (1, 2); (2, 1)$.

Thử lại ta thấy thỏa mãn điều kiện bài toán .

Xét $m, n \geq 2$:

i) Nếu m, n cùng chẵn. Khi đó:

$$4|\,mn\,|\,x_n = 3^n + 1 \Rightarrow 3^n \equiv -1 \pmod 4$$

$\Rightarrow (-1)^n \equiv -1 \pmod 4 \Rightarrow 2 \equiv 0 \pmod 4$, mâu thuẫn.

ii) Vậy phải có ít nhất một số lẻ, chẳng hạn n lẻ. Gọi p là ước nguyên tố nhỏ nhất của n. Khi đó p lẻ. Ta có: $p\,|\,mn\,|\,(x_n, x_m) \Rightarrow p\,|\,x_n = 3^n + 1$

$$\Rightarrow 3^n \equiv -1 \pmod 4 \Rightarrow (-3)^n \equiv 1 \pmod 4 \quad (1).$$

Từ đó $(3, p) = (-3, p) = 1$. Gọi h là số nguyên dương bé nhất thỏa mãn $(-3)^h \equiv 1 \pmod p$, h được gọi là cấp của $(-3) \pmod p$. Theo định lý Fermat nhỏ ta có:

$$3^{p-1} \equiv 1 \pmod p \Rightarrow (-3)^{p-1} \equiv 1 \pmod p \quad (2).$$

Do tính chất của cấp, từ (1) và (2) ta suy ra: $h\,|\,n$ và $h\,|\,p-1$. Vậy $h\,|\,(n, p-1)$. Do p là ước nguyên tố nhỏ nhất của n nên từ đó dễ thấy $h = 1$. Vậy $(-3)^h \equiv 1 \pmod p \Rightarrow -3 \equiv 1 \pmod p \Rightarrow 4 \equiv 0 \pmod p$, vô lý vì $p > 2$. Thành thử tất các cặp (m, n) thỏa mãn đề bài là: $(1, 1); (1, 2); (2, 1)$.

Nhận xét. Chỉ có 4 bạn tham gia giải bài toán này và đều ở THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình**: *Phạm Thị Mỹ Hạnh*, 12T2, *Đoàn Ngọc Duy*, *Nguyễn Thanh Hải*, 12T1, *Hoàng Kim Lộc*, 11T1.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/556. *Cho hàm số $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ là tập số thực) thỏa mãn các tính chất sau:*

i) $f(0) = 1$; ii) $f(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$;

iii) $f\left(x + \frac{11}{24}\right) + f(x) = f\left(x + \frac{1}{8}\right) + f\left(x + \frac{1}{3}\right)$.

Đặt $F(x) = \sum_{n=0}^{2024} f(x+n)$. Hãy tính $F(2024)$.

Lời giải. (Theo đa số các bạn).

Nhận xét rằng từ đẳng thức $\frac{11}{24} = \frac{1}{8} + \frac{1}{3}$, ứng với mỗi x cố định, xét dãy số $A_{k,l}(x) = f\left(x + \frac{k}{8} + \frac{l}{3}\right)$, $k, l \in \mathbb{N}$. Khi đó theo tính chất i) ta có:

$$A_{k,l+1}(x) + A_{k+1,l}(x) = f\left(x + \frac{k}{8} + \frac{l+1}{3}\right) + f\left(x + \frac{k+1}{8} + \frac{l}{3}\right)$$

$$= f\left(x + \frac{k}{8} + \frac{l}{3} + \frac{1}{3}\right) + f\left(x + \frac{k}{8} + \frac{l}{3} + \frac{1}{8}\right)$$

$$= f\left(x + \frac{k}{8} + \frac{l}{3}\right) + f\left(x + \frac{k}{8} + \frac{l}{3} + \frac{11}{24}\right)$$

$$= f\left(x + \frac{k}{8} + \frac{l}{3}\right) + f\left(x + \frac{k+1}{8} + \frac{l+1}{3}\right)$$

$= A_{k,l}(x) + A_{k+1,l+1}(x)$ hay

$$A_{k,l+1}(x) + A_{k+1,l}(x) = A_{k,l}(x) + A_{k+1,l+1}(x), k, l \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R} \ (1).$$

Lấy tổng hai vế của (1) theo k, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, $1 < m \in \mathbb{N}$, ta thu được:

$$\sum_{k=0}^{m-1} (A_{k,l+1}(x) + A_{k+1,l}(x)) = \sum_{k=0}^{m-1} (A_{k,l}(x) + A_{k+1,l+1}(x))$$

$$\Leftrightarrow (A_{0,l+1}(x)+A_{1,l+1}(x)+\ldots+A_{m-1,l+1}(x))+(A_{1,l}(x)+A_{2,l}(x)+\ldots+A_{m,l}(x))$$

$$=(A_{0,l}(x)+A_{1,l}(x)+\ldots+A_{m-1,l}(x))+(A_{1,l+1}(x)+A_{2,l+1}(x)+\ldots+A_{m,l+1}(x))$$

$$\Leftrightarrow A_{0,l+1}(x)+A_{m,l}(x)=A_{0,l}(x)+A_{m,l+1}(x), l\in\mathbb{N},\ x\in\mathbb{R}\ (2).$$

Tiếp theo ta lấy tổng của (2) theo l, $l<n\in\mathbb{N}$:

$$\sum_{l=0}^{n-1}(A_{0,l+1}(x)+A_{m,l}(x))=\sum_{l=0}^{n-1}A_{0,l}(x)+A_{m,l+1}(x)$$

$$\Leftrightarrow A_{0,n}(x)+A_{m,0}(x)=A_{0,0}(x)+A_{m,n}(x), m,n\in\mathbb{N}, x\in\mathbb{R}\ (3).$$

Trở lại đề bài, trong (3) cho $m=8$, $n=3$, ta thu được: $A_{0,3}(x)+A_{8,0}(x)=A_{0,0}(x)+A_{8,3}(x)$

hay $\qquad 2f(x+1)=f(x)+f(x+2), \forall x\in\mathbb{R}.$

Suy ra: $2f(x+j)=f(x+j-1)+f(x+j+1)$, $j=1,2,\ldots$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Vậy ứng với mỗi x cố định, dãy số $(f(x+j))$ là cấp số cộng với công sai $d(x)$ nên $f(x+j)=f(x)+d(x)j$, $j=0,1,2,\ldots$ (4).

Ta chứng minh $d(x)=0$ do giả thiết (i). Thật vậy, từ (4) nếu $d(x)>0$ thì khi đó $\lim\limits_{j\to+\infty}f(x+j)=+\infty$ và nếu $d(x)<0$ thì khi đó $\lim\limits_{j\to-\infty}f(x+j)=+\infty$, trái với (i). Vậy $f(x+j)=f(x)$, $j=1,2,\ldots$

Do đó $F(x)=\sum\limits_{n=0}^{2024}f(x+n)=2025f(x)$.

Suy ra $F(2024)=\sum\limits_{n=0}^{2024}f(2024+n)=2025f(2024)$

$=2025f(2023)=2025f(2022)=\ldots=2025f(0)=2025.$

Nhận xét. Đây là dạng toán về tính toán dãy số tuần hoàn. Nhiều bạn giải bằng phương pháp quy nạp cũng cho kết quả đúng.

Các bạn sau đây có lời giải đúng: **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Thanh Bảo*, 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Phú Yên:** *Trần Gia Huy*, 10T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Quảng Bình:** *Hoàng Kim Lộc*, 11T1, *Nguyễn Thanh Hải*, *Đoàn Ngọc Duy*, 12T1, *Phạm Thị Mỹ Hạnh*, 12T2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T12/556. *Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) (AB < AC), H là trực tâm tam giác. Gọi M là trung điểm của BC, đoạn AM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC tại N. Gọi X là điểm đối xứng với A qua BC và AO cắt lại đường tròn ngoại tiếp tam giác BOC tại T. Gọi U là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác AON với đường tròn ngoại tiếp tam giác AXT. Chứng minh AU song song với BC.*

Lời giải. (Theo bạn *Nguyễn Phúc Lương*, 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**).

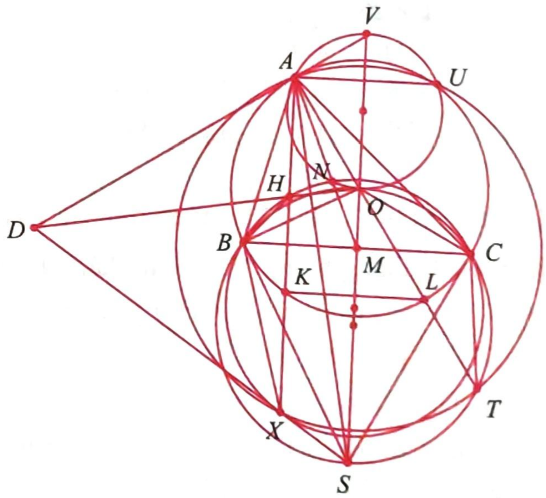
Ta cần có ba bổ đề.

Bổ đề 1. *Nếu H là trực tâm của tam giác ABC thì các đường tròn (ABC) và (HBC) đối xứng với nhau qua BC.*

Bổ đề 2. *Nếu O, H theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp và trực tâm của tam giác ABC thì AO, AH là hai đường đẳng giác của góc (AB, AC).*

Bổ đề 3. *Nếu M là trung điểm của BC và S là giao điểm của các tiếp tuyến với đường tròn (ABC) tại B và C thì AM, AS là hai đường đẳng giác của góc (AB, AC).*

Phép chứng minh các bổ đề trên rất đơn giản, không trình bày ở đây. *Trở lại giải bài toán T12.*



Gọi S là giao điểm của các tiếp tuyến với (O) tại B và C; D là giao điểm của SX và OH; V là giao điểm của SO và tiếp tuyến với (O) tại A; K là giao điểm thứ hai của AH và (O).

Vì A và X đối xứng với nhau qua BC nên

$$(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BX})\equiv 2(BA,BC)\equiv(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})\ (\text{mod}\ 2\pi).$$

Kết hợp với $\dfrac{BA}{BX}=1=\dfrac{OA}{OC}$, suy ra các tam giác ABX, AOC đồng dạng (cùng hướng).

Do đó $AX.AO=AB.AC$. Theo bổ đề 2:

$$(AT,AC)\equiv(AO,AC)\equiv(AB,AH)\ (\text{mod}\ \pi).$$

Theo bổ đề 1 thì $X \in (HBC)$. Từ đó và bổ đề 2 có: $(XA, XC) \equiv (XO, XC) \equiv (BO, BC) \equiv (BA, BH) (\bmod \pi)$.

Vậy các tam giác ATC và ABH đồng dạng (cùng hướng). Do đó $AH.AT = AB.AC$.

Gọi $\mathbb{I}_A^{AB.AC}$ là phép nghịch đảo tâm A và phương tích $AB.AC$; Δ là phân giác của góc $\widehat{BAC}$; $\mathbb{R}_\Delta$ là phép đối xứng trục qua Δ; $\mathbb{F} = \mathbb{R}_\Delta \circ \mathbb{I}_A^{AB.AC}$; D là giao điểm của SX và OH.

Dễ thấy qua $\mathbb{F}$ thì $B \leftrightarrow C; O \leftrightarrow X$;

$$(BNC) = (BXC) \leftrightarrow (BOC) = (BSC); H \leftrightarrow T.$$

Từ đó, theo bổ đề 3, suy ra qua $\mathbb{F}$, $N \leftrightarrow S$.

Vậy qua $\mathbb{F}$, $(AXT) \leftrightarrow OH; (ANO) \leftrightarrow SX$.

Do đó, qua $\mathbb{F}$, $U \leftrightarrow D; AU \leftrightarrow AD$ (1).

Gọi L là giao điểm thứ hai của AO và (O). Dễ thấy: $\dfrac{OV}{OS} = \dfrac{\dfrac{AO}{\cos\widehat{AOV}}}{\dfrac{BO}{\cos\widehat{BOS}}} = \dfrac{\cos\widehat{BOS}}{\cos\widehat{AOV}} = \dfrac{\cos\widehat{BAC}}{\cos\widehat{HAO}}$

$$= \frac{\dfrac{OM}{OB}}{\dfrac{AK}{AL}} = \frac{\dfrac{AH}{AL}}{\dfrac{AK}{AL}} = \frac{AH}{AK} = \frac{AH}{XH}.$$

Từ đó, chú ý rằng $AX // VS$, theo định lí Thalès, suy ra V, A, D thẳng hàng. Nói cách khác, AD tiếp xúc với (O) (2). Từ (1) và (2), chu ý rằng qua $\mathbb{F}$, $(O) \leftrightarrow BC$, suy ra $AU // BC$.

Nhận xét. 1) Bài toán này tương đối khó, chỉ có 5 bạn tham gia giải. Một vài bạn cho lời giải không sử dụng phép nghịch đảo nhưng khá phức tạp.

2) Ngoài bạn *Lương*, 4 bạn cũng tham gia giải bài và có lời giải đúng: **Quảng Bình:** *Nguyễn Thanh Hải*, 12T1, *Phạm Thị Mỹ Hạnh*, 12T2, *Hoàng Kim Lộc*; 11T1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Bình Định:** *Trần Ngọc Tuyên*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/556. *Một con lắc lò xo gồm lò xo có độ cứng* $k = 160$ N/m *và vật nặng có khối lượng* $m = 400$ g, *đặt trên mặt phẳng nằm ngang. Hệ số ma sát trượt giữa vật và mặt phẳng nằm ngang là* $\mu = 0{,}0005$. *Lấy* $g = 10$ m/s^2. *Kéo vật lệch khỏi vị trí cân bằng một đoạn* 5 cm (*theo phương của trục lò xo*). *Tại* $t = 0$, *buông nhẹ để vật dao động, xem rằng tần số dao động không đổi. Tính thời gian kể từ lúc vật bắt đầu dao động cho đến khi vật dừng hẳn.*

Lời giải. Giả sử biên độ lúc đầu là A_1, biên độ lần tiếp theo là A_2. Trong thời gian chuyển động giữa hai vị trí biên đó, công của lực ma sát gây ra độ biến đổi cơ năng của vật nặng là:

$$-\mu mg(A_1 + A_2) = \frac{kA_2^2}{2} - \frac{kA_1^2}{2}$$

$$\Rightarrow A_2 - A_1 = -\frac{2\mu mg}{k} = -\frac{2.0{,}0005.0{,}4.10}{160}$$

$$= -2{,}5.10^{-5}\text{ m} = -0{,}0025\text{ cm}.$$

Tức là biên độ của dao động là một cấp số cộng lùi. Mỗi lần đi từ một vị trí biên này sang vị trí biên ở bên kia, biên độ lại giảm bớt 0,0025 cm. Vậy số lần qua lại để biên độ giảm đến 0 là:

$$N = \frac{A_1}{0{,}0025} = \frac{5}{0{,}0025} = 2000\text{ lần}.$$

Cứ mỗi chu kì có hai lần vật qua vị trí đó. Vậy thời gian để vật qua vị trí đó 2000 lần bằng 1000 lần chu kì: $\Delta t = 1000T = 1000.2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

$$= 1000.2\pi\sqrt{\frac{0{,}4}{160}} = 314\text{ s}.$$

Nhận xét. Chúc mừng các bạn *Phạm Văn Anh*, 12 Lý, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp**; *Lê Nhật Nam*, 11 lý, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Bình Định**; *Đỗ Thị Thanh Thảo*, 12T1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình** đã có lời giải đúng cho đề ra kì này.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/556. *Nhà máy điện gió được coi là thân thiện với môi trường hơn nhiều so với các nhà máy nhiệt điện, thủy điện. Gió làm quay cánh quạt của các cột điện gió, từ đó làm quay rôto của máy phát điện và tạo ra điện năng. Máy phát điện gió thường sử dụng là loại máy phát điện xoay chiều một pha. Nối hai cực của một máy phát điện gió với hai đầu đoạn mạch mắc nối tiếp gồm điện trở thuần R, cuộn cảm thuần L và tụ điện C. Khi rôto quay với tốc độ 1200 (vòng/phút) thì điện áp hiệu dụng giữa hai đầu điện trở đạt giá trị cực đại. Khi rôto của máy phát quay với tốc độ 900* *(vòng/phút) thì điện áp hiệu dụng giữa hai đầu điện trở có giá trị bằng U. Để điện áp hiệu dụng giữa hai đầu điện trở cũng có giá trị bằng U thì rôto của máy phát quay với tốc độ bằng bao nhiêu?*

Lời giải. Theo đề bài, khi rôto của máy phát quay với tốc độ $n_1 = \dfrac{900}{60} = 15$ (vòng/s) hoặc n_2 (vòng/s) thì $U_{1_R} = U_{2_R} = U$ (khi đó $I_1 = I_2$), và khi rôto quay với tốc độ $n_0 = \dfrac{1200}{60} = 20$ (vòng/s) thì U_R đạt cực đại.

Ta có: $\begin{cases} E = \dfrac{E_0}{\sqrt{2}} = \dfrac{N\Phi_0}{\sqrt{2}}\omega \\ \omega = 2\pi f = 2\pi np \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \frac{E}{Z} = \frac{N\Phi_0}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\omega}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$= \frac{N\Phi_0}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\omega}{\sqrt{\dfrac{1}{C^2}\cdot\dfrac{1}{\omega^4} - 2\left(\dfrac{L}{2} - \dfrac{R^2}{C}\right)^2 \dfrac{1}{\omega^2} + 1}} = \frac{N\Phi_0}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\omega}{\sqrt{y}}.$$

Đặt $y = \dfrac{1}{C^2}\cdot\dfrac{1}{\omega^4} - 2\left(\dfrac{L}{2} - \dfrac{R^2}{C}\right)^2 \dfrac{1}{\omega^2} + 1$, thì hàm số y có dạng: $y = ax^2 + bx + c$, với $x = \dfrac{1}{\omega^2}$.

Gọi x_0 là nghiệm ứng với $y = y_{\min}$ để có $I_{\max}$ và x_1, x_2 là hai nghiệm sao cho $y_1 = y_2$ (tương ứng với $\omega_1 = 2\pi n_1 p$; $\omega_2 = 2\pi n_2 p$, sao cho $I_1 = I_2$).

Theo định lí Viète ta có:

$$x_0 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \Rightarrow \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2}\right).$$

Như vậy, ta có hệ thức:

$$\frac{2}{n_0^2} = \frac{1}{n_1^2} + \frac{1}{n_2^2} \Rightarrow n_2^2 = \frac{n_0^2\, n_1^2}{2n_1^2 - n_0^2}.$$

Thay số: $n_2^2 = \dfrac{n_0^2\, n_1^2}{2n_1^2 - n_0^2} = \dfrac{(20)^2.(15)^2}{2(20)^2 - (15)^2} = \dfrac{3600}{23}$

$$\Rightarrow n_2 \approx 12,5 \text{ vòng/s} \approx 750 \text{ vòng/phút}.$$

Nhận xét. Một số bạn tham gia giải bài này nhưng lời giải chưa đúng.

NGUYỄN XUÂN QUANG

PROBLEMS . . . *(Tiếp theo trang 25)*

Problem T8/560. Let M be a point lying inside an acute triangle ABC. Let D, E, F respectively be the perpendicular projections of M on AB, BC, CA. Prove that $MD^2 + ME^2 + MF^2 \geq \left(MA.\sin\dfrac{A}{2}\right)^2$

$$+\left(MB.\sin\frac{B}{2}\right)^2 + \left(MC.\sin\frac{C}{2}\right)^2.$$

Problem T9/560. Given positive real numbers a, b, c. Show that

$$\frac{bc}{(a+b)(a+c)} + \frac{ca}{(b+c)(b+a)} + \frac{ab}{(c+a)(c+b)} \leq \frac{3}{4} + \frac{3M(M-m)^2}{4(a+b)(b+c)(c+a)}$$

where $M = \max\{a,b,c\}$, $m = \min\{a,b,c\}$.

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/560. Find all prime numbers p, q so that $\begin{cases} p^2 + 1 \mid 2023^q + 1 \\ q^2 + 1 \mid 2023^p + 1 \end{cases}$.

Problem T11/560. Given a function $f:(0;+\infty) \to (0;+\infty)$ satisfying

$f(3x) \geq f\left(\dfrac{1}{2}f(2x)\right) + 2x$ for every $x > 0$. Prove that $f(x) \geq x$ for every $x > 0$.

Problem T12/560. Given a triangle ABC inscribed in a circle (O) and an arbitrary point P lying inside the triangle ABC. Assume that BP intersects AC at E, CP intersects AB at F, EF intersects BC at D and AD intersects (O) at the second point Q. Let R be the intersection between PQ and EF. Show that the circile with the diameter DR and the circle (O) are orthogonal.

(Two circles are called orthogonal if they intersect and the their tangents at each intersection point are perpendicular).

Dr. NGUYEN PHU HOANG LAN
(University of Education, VNU, Hanoi)

CĂN NGUYÊN THỦY MÔ ĐUN NGUYÊN TỐ

TRẦN XUÂN ĐÁNG
(Nguyên GV THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định)

Căn nguyên thủy là một lí thuyết rất mạnh, có tính ứng dụng cao trong việc giải các bài toán số học.Trong bài viết này, tác giả xin trình bày định lí về sự tồn tại căn nguyên thủy mô đun nguyên tố và một số bài toán ứng dụng của định lí đó.

Cho số nguyên $n > 1$ và số nguyên x. Nếu $(x, n) = 1$ thì theo định lí Euler ta có:

$$x^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n,$$

trong đó hàm Euler $\varphi(n)$ là số các số nguyên dương nhỏ hơn n, nguyên tố cùng nhau với n. Nếu d là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho $x^d \equiv 1 \pmod n$ thì ta nói d là cấp của $x \pmod n$ và kí hiệu là $d = \mathrm{ord}_n(x)$.

Một câu hỏi được đặt ra một cách tự nhiên là với số nguyên tố p, hỏi có tồn tại hay không số nguyên x sao cho $\mathrm{ord}_p(x) = p-1$? Số nguyên x như thế được gọi là căn nguyên thủy $\pmod p$.

Định lí Lagrange. *Cho số nguyên tố p và đa thức $f(x)$ với các hệ số nguyên, có bậc bằng n $(n \in \mathbb{N}^*)$, hệ số của x^n không chia hết cho p. Khi đó phương trình $f(x) \equiv 0 \pmod p$ có không quá n nghiệm $\pmod p$.*

Định lí này được chứng minh bằng quy nạp theo n.

Hệ quả. *Cho số nguyên tố p và số nguyên dương d sao cho $p-1$ chia hết cho d. Khi đó phương trình $x^d - 1 \equiv 0 \pmod p$ có đúng d nghiệm $\pmod p$.*

Thật vậy, đặt $n = \dfrac{p-1}{d}$ ta có $n \in \mathbb{N}^*$ và $p - 1 = nd$. Lại có:

$$x^{p-1} - 1 = (x^d - 1)(x^{(n-1)d} + x^{(n-2)d} + \ldots + 1).$$

Phương trình $x^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod p$ có đúng $p-1$ nghiệm $\pmod p$ (theo định lí nhỏ Fermat). Giả sử phương trình $x^d - 1 \equiv 0 \pmod p$ có ít hơn d nghiệm $\pmod p$. Khi đó phương trình

$$(x^d - 1)(x^{(n-1)d} + x^{(n-2)d} + \ldots + 1) \equiv 0 \pmod p$$

có ít hơn $d + (n-1)d = nd = p - 1$ nghiệm $\pmod p$. Đó là điều vô lí.

Định lí 1. *Với mỗi số nguyên tố p, tồn tại căn nguyên thủy $\pmod p$.*

Bổ đề. *Cho số nguyên tố p và các số nguyên a, b nguyên tố cùng nhau với p. Giả sử r_1 là cấp của $a \pmod p$, r_2 là cấp của $b \pmod p$ và $(r_1, r_2) = 1$. Khi đó $r_1 r_2$ là cấp của $ab \pmod p$.*

Chứng minh. Gọi r là cấp của $ab \pmod p$. Ta có:

$b^{rr_1} \equiv (a^{r_1})^r b^{rr_1} \equiv (ab)^{rr_1} \equiv 1 \pmod p$.

Suy ra r_1r_2 chia hết cho r_2. Vì r_1, r_2 nguyên tố cùng nhau nên r chia hết cho r_2.

Tương tự r chia hết cho r_1. Vì r_1, r_2 nguyên tố cùng nhau nên r chia hết cho r_1r_2.

Mặt khác vì $(ab)^{r_1r_2} \equiv 1 \pmod p$ nên r_1r_2 chia hết cho r. Vậy $r = r_1r_2$.

Sau đây là chứng minh định lí 1:

Giả sử p là số nguyên tố lẻ. Khi đó $p-1>1$. Suy ra tồn tại số nguyên dương k và k số nguyên tố $p_1, p_2, ..., p_k$ khác nhau sao cho:

$$p-1 = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}...\ p_k^{\alpha_k}$$

trong đó $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ là các số nguyên dương.

Đặt $m_i = p_i^{\alpha_i}$ $(1 \le i \le k)$. Ta có $m_i - \frac{m_i}{p_i} \ge 1$ và tồn tại $m_i - \frac{m_i}{p_i}$ nghiệm x_i của phương trình $x^{m_i} \equiv 1 \pmod p$ mà không là nghiệm của phương trình $x^{\frac{m_i}{p_i}} \equiv 1 \pmod p$. Suy ra số nguyên dương d nhỏ nhất sao cho $x_i^d - 1 \equiv 0 \pmod p$ là $m_i = p_i^{\alpha_i}$. Suy ra x_i có cấp là $m_i = p_i^{\alpha_i} \pmod p$. Theo bổ đề trên thì cấp của $x = x_1x_2...x_k \pmod p$ là

$$p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}...\ p_k^{\alpha_k} = p-1.$$

Suy ra x là căn nguyên thủy $\pmod p$.

Hệ quả. *Cho số nguyên tố p và số nguyên x sao cho x là căn nguyên thủy $\pmod p$. Khi đó $\{1, x, ..., x^{p-2}\}$ là hệ thặng dư thu gọn $\pmod p$.*

Bài toán 1. *Cho số nguyên tố $p>2$. Tìm tất cả các số nguyên dương k sao cho*

$$S_k = 1^k + 2^k + ... + (p-1)^k$$

chia hết cho p.

Lời giải. Giả sử x căn nguyên thủy $\pmod p$. Khi đó: $S_k \equiv x^k + x^k + ... + x^{(p-2)k} \pmod p$.

Nếu k chia hết cho $p-1$ thì khi đó

$$S_k \equiv 1+1+...+1 \equiv p-1 \pmod p.$$

Nếu k không chia hết cho $p-1$ thì $x^k - 1$ không chia hết cho p.

Ta có $(x^k-1)S_k = x^{(p-1)k} - 1 \equiv 0 \pmod p$ và $x^k - 1$ không chia hết cho p nên

$$S_k \equiv 0 \pmod p.$$

Suy ra S_k chia hết cho p. Vì vậy tất cả các số nguyên dương k thỏa mãn yêu cầu bài toán là tất cả các số nguyên dương k không chia hết cho $p-1$.

Bài toán 2. *Cho đa thức $P(x)$ có các hệ số nguyên, có bậc 10 và hệ số của x^{10} là 1. Hỏi các số $P(0), P(1), ..., P(100)$ có cho các số dư khác nhau từng đôi một khi chia cho 101 hay không?*

Lời giải. Để giải bài toán này ta cần bổ đề sau

Bổ đề. *Cho số nguyên tố $p>2$ và số nguyên dương k không chia hết cho $p-1$. Khi đó $1^k + 2^k + ... + (p-1)^k$ chia hết cho p.*

Bổ đề này đã được chứng minh trong lời giải của bài toán 1. *Quay trở lại bài toán 2.*

Giả sử $P(0), P(1), ..., P(100)$ cho các số dư khác nhau từng đôi một khi chia cho 101. Ta thấy rằng đa thức $P(P(x))$ có bậc 100 và $P(P(0)), P(P(1)), \ldots, P(P(100))$ cho các số dư khác nhau từng đôi một khi chia cho 101. Thật vậy với $i \in \{0;1;2;\ldots;100\}$, tồn tại $x_i \in \{0;1;2;\ldots;100\}$ sao cho

$$P(x_i) \equiv i \pmod{101}.$$

Suy ra: $P(P(x_{x_i})) \equiv P(x_i) \equiv i \pmod{101}$. Khi đó:

$$P(P(0)) + P(P(1)) + \ldots + P(P(100)) \equiv 0 + 1 + \ldots + 100 \equiv 0 \pmod{101}.$$

Mặt khác ta có:

$$P(P(x)) = x^{100} + a_{99}x^{99} + \ldots + a_1x + a_0$$

trong đó $a_0, a_1, \ldots, a_{99}$ là các số nguyên.

Suy ra: $P(P(0)) + P(P(1)) + \ldots + (P(P(100))$

$$\equiv (0^{100} + 1^{100} + \ldots + 100^{100}) + a_{99}(0^{99} + 1^{99} + \ldots + 100^{99}) + \ldots + a_1(0^1 + 1^1 + \ldots + 100^1) + 101a_0$$

$\equiv 100 \pmod{101}$

(theo bổ đề và định lí nhỏ Fermat).

Hiển nhiên $100 \not\equiv 0 \pmod{101}$. Vậy

$$P(0), P(1), \ldots, P(100)$$

không thể cho các số dư khác nhau từng đôi một khi chia cho 101.

Bài toán 3 (Định lí Wilson). *Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố thì $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.*

Lời giải.

Trường hợp $p = 2$, định lí hiển nhiên đúng.

Giả sử $p > 2$ và x là căn nguyên thủy $\pmod{p}$.

Khi đó: $(p-1)! \equiv x.x^2 \ldots x^{p-1} \equiv x^{\frac{p(p-1)}{2}} \pmod{p}$.

Đặt $w = x^{\frac{p-1}{2}}$. Khi đó $w-1$ không chia hết cho p; $w^2 \equiv 1 \pmod{p}$. Suy ra $w \equiv -1 \pmod{p}$.

Suy ra $(p-1)! \equiv x^{\frac{p(p-1)}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$.

Bài toán 4. *Cho các số nguyên không âm a, b sao cho $2^a \equiv 2^b \pmod{101}$. Chứng minh rằng*

$$a \equiv b \pmod{100}.$$

Lời giải. Ta chứng minh rằng 2 là căn nguyên thủy $\pmod{101}$. Thật vậy giả sử d là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho $2^d \equiv 1 \pmod{101}$. Khi đó 100 chia hết cho d. Ta có:

$$2^{10} \equiv 1024 \equiv 14 \pmod{101}.$$

Suy ra: $2^{20} \equiv 14^2 \equiv -6 \pmod{101}$

$$\Rightarrow 2^{50} \equiv 14(-6)^2 \equiv -1 \pmod{101}.$$

Giả sử $d < 100$. Khi đó 50 chia hết cho d hoặc 20 chia hết cho d. Suy ra:

$$2^{50} \equiv 1 \pmod{101} \text{ hoặc } 2^{20} \equiv 1 \pmod{101}.$$

Đó là điều vô lí. Vậy $d = 100$.

Suy ra 2 là căn nguyên thủy $\pmod{101}$.

Giả sử $a \geq b$. Vì $(2^b, 101) = 1$ nên $2^{a-b} \equiv 1 \pmod{101}$. Suy ra $a - b$ chia hết cho 100. Suy ra:

$$a \equiv b \pmod{100}.$$

Bài toán 5. *Với mỗi số nguyên dương n, đặt $n_a = 101a - 100.2^a$. Cho các số nguyên a, b, c, d thỏa mãn $0 \leq a, b, c, d \leq 9$ $(a \neq b, c \neq d)$ và $n_a + n_b \equiv n_c + n_d \pmod{10100}$. Chứng minh rằng $\{a;b\} = \{c;d\}$.*

Lời giải. Vì $n_a + n_b \equiv n_c + n_d \pmod{10100}$ nên

$$n_a + n_b \equiv n_c + n_d \pmod{100}$$

và $\quad n_a + n_b \equiv n_c + n_d \pmod{101}$.

Vì $n_a \equiv a \pmod{100}$ và $\quad n_a \equiv 2^a \pmod{101}$

nên $\quad a + b \equiv c + d \pmod{100}$ (*)

và $\quad 2^a + 2^b \equiv 2^c + 2^d \pmod{101}$.

Vì $2^{100} \equiv 1 \pmod{101}$ và (*) nên

$$2^a 2^b \equiv 2^{a+b} \equiv 2^{c+d} \equiv 2^c 2^d \pmod{101}.$$

Vì $2^b \equiv 2^c + 2^d - 2^a \pmod{101}$ nên

$$2^a(2^c + 2^d - 2^a) \equiv 2^c 2^d \pmod{101}.$$

Suy ra: $(2^a - 2^c)(2^a - 2^d) \equiv 0 \pmod{101}$. Suy ra: $2^a \equiv 2^c \pmod{101}$ hoặc $2^a \equiv 2^d \pmod{101}$. Theo bài toán 4 ta có:

$$a \equiv c \pmod{100} \text{ hoặc } a \equiv d \pmod{100}.$$

Vì $a + b \equiv c + d \pmod{100}$ nên

$$\{a; b\} = \{c; d\}.$$

Bài toán 6. *Tìm tất cả các số nguyên dương $n > 1$ sao cho $a^{25} - a$ chia hết cho n với mọi số nguyên a.*

Lời giải. Giả sử n là số nguyên dương lớn hơn 1 sao cho $a^{25} - a$ chia hết cho n với mọi số nguyên a. Giả sử p là một ước nguyên tố của n; x là căn nguyên thủy $\pmod p$. Suy ra $p - 1 = \operatorname{ord}_p(x)$ và $(x, p) = 1$. Suy ra $x^{24} - 1$ chia hết cho p. Suy ra 24 chia hết cho $p - 1$. Suy ra $p \in \{2; 3; 5; 7; 13\}$.

Với $\quad p \in \{2; 3; 5; 7; 13\}$, chọn $\quad a = p \quad$ thì $\quad a^{25} - a$ không chia hết cho p^2.

Đặt $k = 2.3.5.7.13$ ta có n là ước của k. Ngược lại nếu n là ước của k thì $a^{25} - a$ chia hết cho n với mọi số nguyên a.

Bài toán 7. *Với mỗi số nguyên tố lẻ p, đặt $F(p) = \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} k^{120}$ và $f(p) = \frac{1}{2} - \left\{\frac{F(p)}{p}\right\}$. Tìm giá trị của $f(p)$.*

Lời giải. Giả sử x là căn nguyên thủy $\pmod p$. Nếu 120 không chia hết cho $p - 1$ thì $x^{120} - 1$ không chia hết cho p và $x^{120(p-1)} \equiv 1 \pmod p$.

Ta có: $F(p) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p-1} x^{120i}$ và

$(x^{120} - 1)\sum_{i=1}^{p-1} x^{120i} = x^{120}(x^{120(p-1)} - 1) \equiv 0 \pmod p$. Vì $2(x^{120} - 1)$ không chia hết cho p nên $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p-1} x^{120i}$ chia hết cho p. Suy ra $F(p)$ chia hết cho p. Suy ra $f(p) = \frac{1}{2}$.

Nếu 120 chia hết cho $p - 1$. Khi đó:

$$p \in \{3; 5; 7; 11; 13; 31; 41; 61\}$$

và $\quad x^{120} \equiv 1 \pmod p$.

Suy ra: $F(p) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p-1} x^{120i} \equiv \frac{p-1}{2} \pmod p$.

Suy ra: $f(p) = \frac{1}{2} - \frac{p-1}{2p} = \frac{1}{2p}$.

Bài toán 8. *Tìm tất cả các cặp số nguyên tố (p, q) sao cho $a^{3pq} \equiv a \pmod{3pq}, \forall a \in \mathbb{Z}$.*

Lời giải. Giả sử tồn tại các số nguyên tố p, q sao cho $a^{3pq} \equiv a \pmod{3pq}, \forall a \in \mathbb{Z}$.

Giả sử g là căn nguyên thủy $\pmod p$. Suy ra g không chia hết cho p.

Suy ra: $g^{3pq-1}-1\equiv 0 \pmod{p}$. Suy ra $3pq-1$ chia hết cho $p-1$. Suy ra $3(p-1)q+3q-1$ chia hết cho $p-1$. Suy ra $3q-1$ chia hết cho $p-1$.

Tương tự: $3p-1$ chia hết cho $q-1$.

Giả sử $p\le q$. Suy ra: $3p-1\le 3q-1$.

Nếu $p=2$ thì $q=2$. Nếu $p=3$ thì $q=3$ hoặc $q=5$. Giả sử $p>3$. Khi đó $q\ge 5$.

Suy ra: $4(q-1)>3q-1$. Suy ra $3p-1=q-1$ hoặc $3p-1=2(q-1)$ hoặc $3p-1=3(q-1)$. Các trường hợp $3p-1=q-1$ và $3p-1=3(q-1)$ không xảy ra vì p,q là các số nguyên tố.

Vậy $3p-1=2(q-1)$. Suy ra $2q=3p+1$. Suy ra $6q-2=9p+1$. Mặt khác $3q-1$ chia hết cho $p-1$ nên $9p+1$ chia hết cho $p-1$. Suy ra 10 chia hết cho $p-1$. Suy ra $p=11$. Suy ra $q=17$.

Thử lại ta thấy chỉ có $(p,q)=(11,17)$ và $(p,q)=(17,11)$ thỏa mãn đề bài.

Bài toán 9 (Đề thi chọn đội tuyển Việt Nam dự thi IMO 2010).

Với mỗi số nguyên dương n, xét tập hợp sau:

$$T_n=\left\{11(k+h)+10(n^k+n^h \mid 1\le k,h\le 10; k,h\in\mathbb{N}\right\}.$$

Tìm tất cả các giá trị của n sao cho không tồn tại $a,b\in T_n$, $a\ne b$ mà $a-b$ chia hết cho 110.

Lời giải. Giả sử $g\in\{1;2;...;10\}$ sao cho g là căn nguyên thủy $\pmod{11}$.

Giả sử $n\in\mathbb{N}^*$ sao cho $n\equiv g \pmod{11}$. Giả sử $a,b\in T_n$ sao cho $a-b$ chia hết cho 110. Khi đó tồn tại $h_1,h_2,k_1,k_2\in\{1;2;...;10\}$ sao cho

$$a=11(h_1+k_1)+10(n^{h_1}+n^{k_1}),$$

$b=11(h_2+k_2)+10(n^{h_2}+n^{k_2})$ và $a-b$ chia hết cho 110. Chúng ta chứng minh $a=b$. Thật vậy, không mất tính tổng quát, giả sử $h_1\le h_2$. Ta có:

$$a\equiv b \pmod{10} \text{ và } a\equiv b \pmod{11}.$$

Suy ra: $h_1+k_1\equiv h_2+k_2 \pmod{10}$

$$\text{và } g^{h_1}+g^{k_1}\equiv g^{h_2}+g^{k_2} \pmod{11}.$$

Tồn tại các số tự nhiên p_1,p_2,r sao cho

$$0\le p_1,p_2\le 2;\ 0\le r\le 9$$

và $h_1+k_1=10p_1+r,\ h_2+k_2=10p_2+r.$

Ta có:

$$g^{h_1}+g^{10p_1+r-h_1}\equiv g^{h_2}+g^{10p_2+r-h_2} \pmod{11}.$$

Suy ra:

$$g^{h_1}+g^{20+r-h_1}\equiv g^{h_2}+g^{20+r-h_2} \pmod{11}.$$

Suy ra:

$$(g^{h_2-h_1}-1)(1-g^{20+r-h_2-h_1})\equiv 0 \pmod{11}.$$

Suy ra: $g^{h_2-h_1}\equiv 1 \pmod{11}$

hoặc $g^{20+r-h_1-h_2}\equiv 1 \pmod{11}$.

Suy ra h_2-h_1 chia hết cho 10 hoặc $r-h_2-h_1$ chia hết cho 10.

Nếu h_2-h_1 chia hết cho 10 thì $h_1=h_2$. Suy ra $k_1=k_2$. Suy ra $a=b$.

Nếu $r-h_2-h_1$ chia hết cho 10 thì k_2-h_1 chia hết cho 10. Suy ra $h_1=k_2$. Suy ra $k_1=h_2$. Suy ra $a=b$.

Nếu $n\in\mathbb{N}^*$ sao cho $n\equiv 0 \pmod{11}$. Khi đó n không thỏa mãn điều kiện đề bài.

Nếu $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $n \equiv 1 \pmod{11}$. Khi đó n không thỏa mãn điều kiện đề bài.

Giả sử $c \in \{3,4,5,9\}$. Khi đó $c^5 \equiv 1 \pmod{11}$.

Chọn $h_1, k_1, h_2, k_2 \in \{1;2;...;10\}$ sao cho

$$h_1, k_1 \in \{1;2;3;4;5\};\ h_2 \equiv 5 + h_1;\ k_2 = k_1 + 5.$$

Khi đó $h_1 + k_1 \equiv h_2 + k_2 \pmod{10}$

và $c^{h_1} + c^{k_1} \equiv c^{h_2} + c^{k_2} \pmod{11}$.

Vậy nếu $n \in \mathbb{N}^*$ và $n \equiv c \pmod{11}$ thì n không thỏa mãn điều kiện đề bài.

Nếu $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $n \equiv 10 \pmod{11}$. Khi đó:

$$n^2 \equiv 1 \pmod{11} \text{ và } n^8 \equiv 1 \pmod{11}.$$

Chọn $h_1 = 1, k_1 = 2, h_2 = 3, k_2 = 10$. Khi đó:

$$h_1 + k_1 \equiv h_2 + k_2 \pmod{10}$$

và $10^{h_1} + 10^{k_1} \equiv 10^{h_2} + 10^{k_2} \pmod{11}$.

Vậy nếu $n \in \mathbb{N}^*$ và $n \equiv 10 \pmod{11}$ thì n không thỏa mãn đề bài. Dễ dàng chứng minh được $2,6,7,8$ là các căn nguyên thủy (mod 11). Vậy số tự nhiên n thỏa mãn đề bài khi và chỉ khi $n \equiv g \pmod{11}$ trong đó $g \in \{2;6;7;8\}$.

Bài toán 10. *Chứng minh rằng tồn tại một phân hoạch của tập hợp $\{1.2,...,2010\}$ thành các tập con rời nhau sao cho mỗi tập con có 5 phần tử và tổng các phần tử trong mỗi tập con chia hết cho 2011.*

Lời giải. Vì 2011 là số nguyên tố nên tồn tại căn nguyên thủy (mod 2011), tức là tồn tại số nguyên g sao cho g không chia hết cho 2011 và cấp của g (mod 2011) là 2010. Khi đó $g-1$ không chia hết cho 2011 và $1, g, ..., g^{2009}$ là hệ thặng dư thu gọn (mod 2011).

Xét các tập hợp

$$A_1 = \{1, g^{402}, g^{402.2}, g^{402.3}, g^{402.4}\},$$

$$A_2 = \{g, g^{402+1}, g^{402.2+1}, g^{402.3+1}, g^{402.4+1}\},$$

....

$$A_{402} = \{g^{401}, g^{402+401}, g^{402.2+401}, g^{402.3+401}, g^{402.4+401}\}.$$

Ta có:

$$(1 + g^{402} + g^{402.2} + g^{402.3} + g^{402.4})(g-1) = g^{2010} - 1.$$

Vì $g^{2010} \equiv 1 \pmod{2011}$ và $g-1$ không chia hết cho 2011 nên

$$1 + g^{402} + g^{402.2} + g^{402.3} + g^{402.4} \equiv 0 \pmod{2011}.$$

Vì $1, g, ..., g^{2009}$ là hệ thặng dư thu gọn (mod 2011) nên với mỗi số nguyên k thỏa mãn $0 \le k \le 2009$ tồn tại $a_k \in \{1;2;...;2010\}$ sao cho

$$g^k \equiv a_k \pmod{2011}.$$

Ta có $a_i \ne a_j$ với $i, j \in \{1;2;...;402\}$ và $i \ne j$.

Xét các tập hợp

$$B_1 = \{1, a_{402}, a_{402.2}, a_{402.3}, a_{402.4}\}$$

$$B_2 = \{a_1, a_{402+1}, a_{402.2+1}, a_{402.3+1}, a_{402.4+1}\}$$

....

$$B_{402} = \{a_{401}, a_{402+401}, a_{402.2+401}, a_{402.3+401}, a_{402.4+401}\}.$$

Khi đó $B_i \cap B_j = \varnothing$ với $i, j \in \{1;2;...;402\}$ và $i \ne j$ đồng thời $\bigcup_{i=1}^{402} B_i = \{1;2;...;2010\}$.

Vậy tồn tại một phân hoạch của tập hợp $\{1;2;...;2010\}$ thành các tập con rời nhau sao cho mỗi tập con có 5 phần tử và tổng các phần tử trong mỗi tập con chia hết cho 2011.

• Cho số nguyên $n > 1$ và số nguyên x nguyên tố cùng nhau với n. Một cách tương tự, chúng ta định nghĩa x là căn nguyên thủy $(\bmod n)$ khi và chỉ khi số nguyên dương d nhỏ nhất thỏa mãn

$$x^d \equiv 1 \pmod n \text{ là } \varphi(n).$$

Một câu hỏi được đặt ra một cách tự nhiên là với những số nguyên dương n nào thì tồn tại căn nguyên thủy $(\bmod n)$. Người ta đã chứng minh được rằng nếu số nguyên dương n có dạng p^k hoặc $2p^k$, trong đó p là số nguyên tố lẻ và k là số nguyên dương hoặc $n \in \{2,4\}$ thì n có căn nguyên thủy.

Cuối cùng là một số bài tập dành để luyện tập.

BÀI TẬP

Bài 1. Cho số nguyên dương $n > 1$sao cho $p = 2^n + 1$ là số nguyên tố. Chứng minh rằng 3 là căn nguyên thủy $(\bmod p)$.

Bài 2. Cho số tự nhiên k sao cho $p = 4k+3$ là số nguyên tố. Giả sử g là một căn nguyên thủy $(\bmod p)$ thỏa mãn $g^2 \equiv g+1 \pmod p$. Chứng minh rằng $g-2$ cũng là một căn nguyên thủy $(\bmod p)$.

Bài 3. Tìm tất cả các số tự nhiên n có hai chữ số (nghĩa là $n = 10a + b$, trong đó $a, b \in \{0;1,\ldots,9\}$ và $a \neq 0$) sao cho với mọi số nguyên k $(k \neq 0)$ ta có $k^a - k^b$ chia hết cho n.

Bài 4. Cho số nguyên tố lẻ p. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

i) nếu $m, n \in \mathbb{Z}$ và $m \equiv n \pmod p$ thì

$$f(m) = f(n).$$

ii) $f(mn) = f(m) f(n)$ với mọi $m, n \in \mathbb{Z}$.

Bài 5. Cho số nguyên tố lẻ p và tập hợp $S = \{n_1; n_2; \ldots; n_k\}$ gồm các số chính phương nguyên tố cùng nhau với p. Tìm số k nhỏ nhất sao cho tồn tại một tập con A của tập hợp S mà tích các phần tử của A đồng dư với $1 \pmod p$.

Bài 6. Chứng minh rằng tồn tại một phân hoạch của tập hợp $S = \{1^3; 2^3; \ldots; 2000^3\}$ thành 25 tập hợp con sao cho tổng tất cả các phần tử của mỗi tập con chia hết cho 2001^2.

Bài 7. Cho số nguyên tố $p > 3$. Với tập con S khác rỗng bất kì của $\mathbb{Z}$ và $a \in \mathbb{Z}$, đặt $S_a = \{x \in \{0, 1, \ldots, p-1\} \mid \exists s \in S : x \equiv as \pmod p\}$.

a) Tìm tất cả các giá trị của $k \in \mathbb{N}^*$ $(k \geq 2)$ sao cho tồn tại tập con S khác rỗng của tập hợp $\{1, 2, \ldots, p-1\}$ mà trong số các tập hợp $S_1, S_2, \ldots, S_{p-1}$ có đúng k tập hợp khác nhau từng đôi một.

b) Hỏi có bao nhiêu tập con S khác rỗng của tập hợp $\{1, 2, \ldots, p-1\}$ mà trong số các tập hợp $S_1, S_2, \ldots, S_{p-1}$ có đúng hai tập hợp khác nhau?

(Đề thi chọn đội tuyển Serbia dự thi IMO 2013)

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 101

PROBLEM: *Prove that in any set of 27 different odd numbers, all less than 100, there is a pair of numbers whose sum is 102.*

Solution. We list the odd numbers which are less than 100 in the following pattern:

1; (3, 99); (5, 97);…; (n, $102 - n$);…; (49, 53); 51, where n is an odd number and $n < 100$.

There are two numbers 1; 51; and 24 pairs.

By pigeonhole principle, if we choose 27 odd numbers which is less than 100, there must be two numbers of the form n and $102 - n$; and hence we are done.

Remark: The exercise is selected from the book "A first step to Mathematical Olympiad Problems" – Derek Holton.

TỪ VỰNG

pigeonhole : *lồng chim, hòm thư*

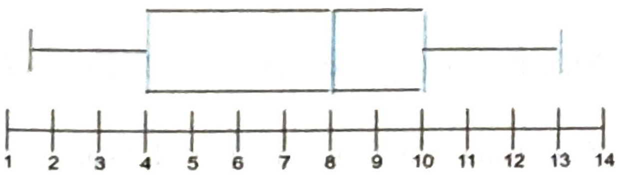
principle : *nguyên lý*

NGUYEN PHU HOANG LAN
(*University of Education, VNU, Hanoi*)

****

BÀI DỊCH SỐ 99.

BÀI TOÁN. *Biểu đồ hộp và ria ở bên dưới mô tả thông tin về cỡ các đôi giày của những người trong một cộng đồng. Xác định tứ phân vị thứ nhất và tứ phân vị thứ ba, đồng thời xác định những phần tử ngoại biên theo tiêu chuẩn 1,5 IQR.*



Shoes sizes

Lời giải. Từ biểu đồ hộp và ria ta có:

+) Tứ phân vị thứ nhất $Q_1 = 4$;

+) Tứ phân vị thứ ba $Q_3 = 10$;

+) Khi đó 1,5 $IQR = 1{,}5(Q_3 - Q_1) = 9$.

Các đôi giày có cỡ nhỏ hơn $Q_1 - 1{,}5\ IQR$ hoặc lớn hơn $Q_3 + 1{,}5\ IQR$ được xem là những phần tử ngoại biên. Trong trường hợp này những đôi giày có cỡ lớn hơn 19 là những phần tử ngoại biên.

Nhận xét. Hai bạn *Nguyễn Quốc Hoàng Anh*, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An** và bạn *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định** có bài dịch tốt, gửi bài về Toà soạn sớm. Xin hoan nghênh hai bạn.

HỒ HẢI (*Hà Nội*)

****

SAI LẦM …. (*Tiếp theo trang 47*)

$$= \lim_{x\to+\infty}\left\{\left[(a-2)x-4\right](\sqrt{x^2+1}+x)\right\}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^2\left(a-2-\frac{4}{x}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right).$$

Mà $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(a-2-\frac{4}{x}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right) = (a-2)2\,.$$

Do đó, để $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(a-2)x-4}{\sqrt{x^2+1}-x} = -\infty$ thì

$$(a-2)2 < 0 \Leftrightarrow a < 2.$$

Vậy tất cả các giá trị a cần tìm là $a < 2$.

Sau khi bạn *Anh Khoa* giải xong, các bạn trong lớp 11 Anh thấy hai cách giải đều ra đáp số giống nhau, nên đã tỏ thái độ đồng ý với kết quả của hai bạn. Khi thầy giáo hỏi, các em có nghi ngờ gì về kết quả của hai bạn *Anh Quân* và *Anh Khoa* không? Cả lớp trả lời đồng thanh, dạ không ạ!, đúng rồi ạ.

Ý kiến của bạn thế nào?

NGUYỄN ANH VŨ
(*GV THPT chuyên Chu Văn An, Bình Định*)

NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN

BÀI TOÁN 80. *Giải phương trình*

$$x+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=2\sqrt{2}\quad(1).$$

Lời giải. ĐK: $x^2-1>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>1 \\ x<-1 \end{array}\right.$.

Cách 1. Nếu $x<-1$ thì $x+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}<0<2\sqrt{2}$ nên $x<-1$ không là nghiệm của (1).

Ta xét trường hợp $x>1$. Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow x^2+\frac{2x^2}{\sqrt{x^2-1}}+\frac{x^2}{x^2-1}=8$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^4}{x^2-1}+\frac{2x^2}{\sqrt{x^2-1}}+1=9 \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}+1\right)^2=9$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}+1=3 \Leftrightarrow x^2=2\sqrt{x^2-1} \Leftrightarrow x^4=4\left(x^2-1\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-2\right)^2=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{2}\ (\text{do } x>1).$$

Vậy (1) có tập nghiệm là $S=\left\{\sqrt{2}\right\}$.

Cách 2. Nếu $x<-1$ thì $x+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}<0<2\sqrt{2}$ nên $x<-1$ không là nghiệm của (1).

Ta xét trường hợp $x>1$. Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow x=\left(2\sqrt{2}-x\right)\sqrt{x^2-1}.$$

Rõ ràng $x \geq 2\sqrt{2}$ không là nghiệm của (1).

Với $1<x<2\sqrt{2}$ thì

$$(1) \Leftrightarrow x^2=\left(2\sqrt{2}-x\right)^2\left(x^2-1\right)$$

$$\Leftrightarrow x^4-4\sqrt{2}x^3+6x^2+4\sqrt{2}x-8=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{2}\right)^2\left(x^2-2\sqrt{2}x-4\right)=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{2}$$

$$\left(\text{do } x^2-2\sqrt{2}x-4<0, \forall x \in \left(1;2\sqrt{2}\right)\right).$$

Vậy (1) có tập nghiệm là $S=\left\{\sqrt{2}\right\}$.

Cách 3. Xét hàm số $f(x)=x+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ có tập xác định $D=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$ và đạo hàm

$$f'(x)=1-\frac{1}{\left(x^2-1\right)\sqrt{x^2-1}}.$$

Nhận thấy $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2-1}\right)^3=1 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$.

Ta có bảng biến thiên của $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		-1		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$				$-$	0	$+$	
$f(x)$			$-2\sqrt{2}$				$+\infty$				$+\infty$
	$-\infty$				$-\infty$				$2\sqrt{2}$		

Chứng tỏ phương trình $x+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=m$:

- Vô nghiệm khi $-2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$;
- Có nghiệm duy nhất khi $m=\pm 2\sqrt{2}$, cụ thể, nếu $m=2\sqrt{2}$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x=\sqrt{2}$, nếu $m=-2\sqrt{2}$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x=-\sqrt{2}$;
- Có hai nghiệm phân biệt khi $|m|>2\sqrt{2}$, cụ thể, nếu $m>2\sqrt{2}$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $1<x_1<\sqrt{2}<x_2$, nếu

$m < -2\sqrt{2}$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $-1 > x_1 > -\sqrt{2} > x_2$.

Như vậy phương trình $x + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = 2\sqrt{2}$ có tập nghiệm là $S = \{\sqrt{2}\}$.

Cách 4. Nếu $x < -1$ thì $x + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} < 0 < 2\sqrt{2}$ nên $x < -1$ không là nghiệm của (1).

Ta xét trường hợp $x > 1$. Biến đổi:

$$(1) \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{2\sqrt{2}}{x} \ (2).$$

Đặt $\begin{cases} u = \dfrac{\sqrt{2}}{x} < \sqrt{2} \\ v = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} > 0 \end{cases}$ thì $\begin{cases} x^2 = \dfrac{2}{u^2} \\ x^2 - 1 = \dfrac{1}{v^2} \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{2}{u^2} - \frac{1}{v^2} = 1 \Rightarrow 2v^2 - u^2 = u^2v^2 \ (3).$$

Từ (2) ta có $1 + v = 2u \Leftrightarrow v = 2u - 1$ (4).

Từ $\begin{cases} u < \sqrt{2} \\ v > 0 \\ v = 2u - 1 \end{cases}$ ta có: $\dfrac{1}{2} < u < \sqrt{2}$.

Thế (4) vào (3) ta được:

$$2(2u-1)^2 - u^2 = u^2(2u-1)^2$$

$$\Leftrightarrow 2u^4 - 2u^3 - 3u^2 + 4u - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (u-1)^2(2u^2 + 2u - 1) = 0 \Leftrightarrow u = 1$$

$$(\text{do } 2u^2 + 2u - 1 > 0, \forall u \in \left(\tfrac{1}{2}; \sqrt{2}\right)).$$

Với $u = 1$ thì $x = \sqrt{2}$. Thử lại thấy $x = \sqrt{2}$ thỏa mãn (1). Vậy (1) có tập nghiệm là $S = \{\sqrt{2}\}$.

Cách 5. Nếu $x < -1$ thì $x + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} < 0 < 2\sqrt{2}$ nên $x < -1$ không là nghiệm của (1).

Ta xét trường hợp $x > 1$. Biến đổi:

$$(1) \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{2\sqrt{2}}{x} \ (2).$$

Đặt $x = \dfrac{1}{\sin t}$ với $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ thì (2) trở thành

$$1 + \frac{\sin t}{\cos t} = 2\sqrt{2}\sin t \ (\text{do } t \in \left(0; \tfrac{\pi}{2}\right))$$

$$\Leftrightarrow \sin t + \cos t = \sqrt{2}\sin 2t$$

$$\Leftrightarrow 1 + \sin 2t = 2\sin^2 2t \ (\text{do } t \in \left(0; \tfrac{\pi}{2}\right))$$

$$\Leftrightarrow (\sin 2t - 1)(2\sin 2t + 1) = 0 \Leftrightarrow \sin 2t = 1$$

$$(\text{do } 2\sin 2t + 1 > 0, t \in \left(0; \tfrac{\pi}{2}\right))$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} \ (\text{do } t \in \left(0; \tfrac{\pi}{2}\right)).$$

Với $t = \dfrac{\pi}{4}$ thì $x = \sqrt{2}$. Thử lại thấy $x = \sqrt{2}$ thỏa mãn (1). Vậy (1) có tập nghiệm là $S = \{\sqrt{2}\}$.

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)

Nhận xét. Một số cách giải khác của bài toán này các bạn có thể tham khảo bài viết của bạn *Trần Đức Phương* (GV THPT Giao Thủy, **Nam Định**) trên TH&TT số 548 tháng 2/2023 (trang 43, 44) cùng chuyên mục. Ngoài những cách giải của bạn *Nguyễn Văn Xá* và *Trần Đức Phương*, các bạn sau cũng có đóng góp một số cách giải tương tự: *Nguyễn Tiến Mạnh*, 8A, *Nguyễn Xuân Hồng*, 9A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông, *Hà Phương Anh*, *Trương Nhật Nam*, 10CT, THPT chuyên Hùng Vương, TP. *Việt Trì*, **Phú Thọ**; *Phạm Xuân Hoàng*, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Nguyễn Văn Đức Thắng*, 9A, THCS Quỳnh Trang, TX. Hoàng Mai, **Nghệ An**. *Trần Anh Thư*, 10A1, TH, THCS&THPT Lê Thánh Tông, Q. Tân Phú, **TP. Hồ Chí Minh**. Xin hoan nghênh các bạn.

LÊ MAI (*Hà Nội*)

Mời các bạn gửi lời giải bài toán 82 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 31.3.2024.

BÀI TOÁN 82. *Giải phương trình*

$$\frac{1}{3x^2} + \frac{1}{x^2 - 12x + 2024} = \frac{1}{x^2 - 3x + 506}.$$

TRẦN VĂN HẠNH

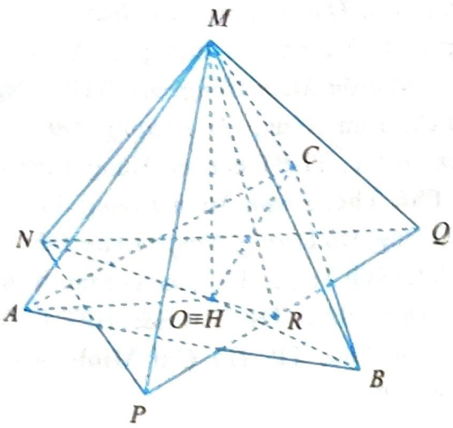
(GV Đại học Phạm Văn Đồng, Quảng Ngãi)

BÀI TOÁN 89 (Thi chọn đội tuyển IMO của Romania, 1999). *Cho O, A, B, C là các điểm di động trong mặt phẳng sao cho* $OA = 4$, $OB = 2\sqrt{3}, OC = \sqrt{22}$. *Tìm diện tích lớn nhất có thể có của tam giác ABC.*

Lời giải. Trước tiên xét tứ diện $MNPQ$ thỏa mãn các tính chất sau:

a) Nếu H là chân đường vuông góc kẻ từ M xuống mặt phẳng (NPQ) thì ta có $HN = 4$, $HP = 2\sqrt{3}$, $HQ = \sqrt{22}$.

b) Các đường thẳng MN, MP, MQ vuông góc với nhau từng đôi một.



Nếu tứ diện như trên tồn tại thì ta lấy điểm O trùng với điểm H, rồi vẽ tam giác ABC tùy ý thỏa mãn giả thiết trong mặt phẳng (NPQ). Khi đó ta có: $MA = \sqrt{MO^2 + OA^2} = \sqrt{MH^2 + HN^2} = MN$.

Tương tự: $MB = MP$, $MC = MQ$.

$$V_{ABCM} \le \frac{1}{3} S_{ABM}.MC \le \frac{1}{3}.\frac{1}{2} MA.MB.MC$$
$$= \frac{1}{3}.\frac{1}{2} MN.MP.MQ = V_{MNPQ}.$$

Vậy ΔABC có diện tích lớn nhất bằng diện tích ΔNPQ. Vấn đề còn lại là xác định tứ diện $MNPQ$.

Đặt $x = MH$, ta có:

$MN = \sqrt{x^2 + 16}$, $MP = \sqrt{x^2 + 12}$, $MQ = \sqrt{x^2 + 22}$.

Gọi R là giao điểm của NH và PQ. Ta có hai tam giác vuông MHN và RMN đồng dạng với nhau, do đó: $\dfrac{MR}{MH} = \dfrac{MN}{NH} \Rightarrow MR = \dfrac{x\sqrt{x^2 + 16}}{4}$.

Dễ thấy $MR \perp PQ$, do đó: $MR.PQ = MP.MQ$ hay

$$\sqrt{\frac{x^2(x^2 + 16)}{16}}\sqrt{x^2 + 12 + x^2 + 22}$$
$$= \sqrt{x^2 + 12}\sqrt{x^2 + 22} \quad (1).$$

Đặt $4y = x^2 + 16$, bình phương hai vế ta được:

$$(y^2 - 4y)(8y + 2) = (4y - 4)(4y + 6)$$
$$\Leftrightarrow (y - 6)(4y^2 + y - 2) = 0 \quad (2).$$

Vì $y = \frac{1}{4}(x^2 + 16) > 4$ nên (2) có nghiệm duy nhất là $y = 6$, suy ra $x = \sqrt{8}$. Từ đó chọn $MN = \sqrt{24}, MP = \sqrt{20}, MQ = \sqrt{30}$ thì ta được tứ diện $MNPQ$ thỏa mãn yêu cầu. Lúc đó:

$$V_{MNPQ} = \frac{1}{3} MH.S_{NPQ} = \frac{1}{6} MN.MP.MQ.$$

Từ đẳng thức này ta tìm được diện tích lớn nhất của tam giác ABC là

$$\max S_{ABC} = S_{NPQ} = \frac{MN.MP.MQ}{2MH} = 15\sqrt{2}.$$

Nhận xét. Rất tiếc là không có bạn nào tham gia giải bài này.

NHƯ HOÀNG

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 31.3.2024.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

BÀI TOÁN 91. *Tìm bộ ba các số hữu tỷ (a, b, c) sao cho* $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2} - 1} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$.

KHÁNH HỮU (*Hà Nội*)

GIẢI ĐÁP: GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT BẰNG BAO NHIÊU?

(*Đề đăng trên TH&TT số* 554, *tháng* 10 *năm* 2023)

Phân tích sai lầm. Lời giải đã không tìm đúng miền giá trị của t khi đặt $t=4^{\sqrt{1-x^2}}$ với $x\in[-1;1]$.

Hơn nữa $f(t)=-57$ khi $t=8$ hay $4^{\sqrt{1-x^2}}=8$ $\Leftrightarrow 2^{\sqrt{1-x^2}}=2^3 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2}=3 \Leftrightarrow x^2=-8$ (không có x), như vậy hàm số không nhận giá trị -57.

Lời giải đúng như sau. Đặt $t=4^{\sqrt{1-x^2}}$ khi đó xét

$$h(x)=\sqrt{1-x^2};\ h'(x)=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}=0\Leftrightarrow x=0.$$

x		-1		0		1	
$h'(x)$			$+$	0	$-$		
$h(x)$		0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	

Do đó: $0\le\sqrt{1-x^2}\le 1\Rightarrow 4^0\le 4^{\sqrt{1-x^2}}\le 4^1\Rightarrow 1\le t\le 4.$

Xét hàm số $f(t)=t^2-16t+13$ trên $[1;4]$ có:

$$f'(t)=2t-16;\ f'(t)=0\Leftrightarrow t=8.$$

t		1		4	
$f'(t)$			$-$		
$f(t)$		-2	$\searrow$	-35	

Do đó $\min\limits_{[-1;1]} y=\min\limits_{[1;4]} f(t)=-35$ khi $t=4$ hay

$$4^{\sqrt{1-x^2}}=4\Leftrightarrow\sqrt{1-x^2}=1\Leftrightarrow x=0$$

Vậy $\min\limits_{[-1;1]} y=-35.$

Nhận xét. Rất tiếc là không có bạn nào phát hiện được sai lầm trong lời giải bài này.

KIHIVI

GIÁ TRỊ NÀO CỦA a ĐỂ GIỚI HẠN LÀ $-\infty$!

Trong giờ ôn tập cuối học kì 1 về phần giới hạn hàm số ở lớp 11 Anh, thầy giáo có nêu bài toán sau: *Tìm tất cả các giá trị của số a để*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(a-2)x-4}{\sqrt{x^2+1}-x}=-\infty.$$

Sau khi ghi đề bài lên bảng , bạn *Anh Quân* xung phong lên bảng giải, sau đây là lời giải của bạn *Anh Quân*:

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(a-2)x-4}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(a-2-\frac{4}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1\right)}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{a-2-\frac{4}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1}$$

mà $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(a-2-\dfrac{4}{x}\right)=a-2,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-1\right)=0$

và $x\to+\infty\Rightarrow x>0$ nên $\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-1>0,\forall x>0.$

Từ đó, ta có để $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(a-2)x-4}{\sqrt{x^2+1}-x}=-\infty$ thì $a-2<0\Leftrightarrow a<2$. Vậy tất cả các giá trị a cần tìm là $a<2$.

Trong lúc thầy giáo cùng các bạn trong lớp 11 Anh đang xem xét lời giải của bạn *Anh Quân*, thì bạn *Anh Khoa* ý kiến, em có cách giải khác. Sau đây là lời giải của bạn *Anh Khoa*:

Ta có:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(a-2)x-4}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{[(a-2)x-4](\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}$$

(Xem tiếp trang 43)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 560 (2.2024)
Tòa soạn : 187B, Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607,
ĐT Phát hành: 024.35142648, 024.35682701
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TRONG SỐ NÀY

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM
TẶNG HỌC BỔNG CHO HỌC SINH CÓ HOÀN CẢNH KHÓ KHĂN TẠI HẬU GIANG

Ngày 3/1/2024, tại điểm trường Vàm Đình thuộc Trường Tiểu học Tân Phú 1, xã Tân Phú, thị xã Long Mỹ, tỉnh Hậu Giang và Khu di tích căn cứ Tỉnh ủy Cần Thơ, xã Phương Bình, huyện Phụng Hiệp, tỉnh Hậu Giang, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam (NXBGDVN) đã đồng hành cùng Báo điện tử Đảng Cộng sản Việt Nam, Ngân hàng TMCP Ngoại thương Việt Nam – Vietcombank trao kinh phí tu sửa trường, trang thiết bị học tập và học bổng cho học sinh có hoàn cảnh khó khăn. Hoạt động này nằm trong khuôn khổ Chương trình "*Xuân Trường Sa*" lần thứ 12 nhân dịp đón năm mới 2024.

Tham dự Chương trình có các đồng chí *Phan Xuân Thủy*, Phó Trưởng Ban Tuyên giáo Trung ương (TGTW); *Trần Văn Huyến*, Phó Bí thư Thường trực Tỉnh ủy, Chủ tịch Hội đồng Nhân dân tỉnh Hậu Giang; *Nguyễn Công Dũng*, Tổng biên tập Báo điện tử Đảng Cộng sản Việt Nam, ... Đại diện cho NXBGDVN có ông *Phạm Văn Thắng*, Phụ trách Hội đồng Thành viên trực tiếp tham gia Chương trình.

Tại buổi lễ trao tặng, NXBGDVN đã tài trợ 60 suất học bổng (mỗi suất 2 triệu đồng) cho học sinh có hoàn cảnh khó khăn trên địa bàn tỉnh Hậu Giang. Phát biểu tại Chương trình, đồng chí *Phan Xuân Thủy*, Phó Trưởng Ban TGTW cho biết: Chương trình "*Xuân Trường Sa*" được Ban TGTW giao cho Báo điện tử Đảng Cộng sản Việt Nam tổ chức thường niên (từ năm 2013). Trong 11 năm qua, Chương trình "*Xuân Trường Sa*" đã nhận được sự quan tâm, đồng hành và ủng hộ của các đơn vị, doanh nghiệp, cá nhân trong công tác chăm lo cho các gia đình chính sách và những hoàn cảnh khó khăn của cán bộ, chiến sĩ trong lực lượng Hải quân, đặc biệt là các em học sinh, thế hệ tương lai của đất nước. Chương trình "*Xuân Trường Sa*" cũng là cầu nối những tấm lòng hảo tâm, qua đó thể hiện sự tri ân sâu sắc với những đóng góp to lớn của các anh hùng liệt sĩ đã hy sinh vì sự nghiệp bảo vệ chủ quyền biển, đảo thiêng liêng của Tổ quốc.

Đồng chí *Phạm Văn Thắng*, Phụ trách Hội đồng Thành viên NXBGDVN thông tin: Tại Hậu Giang, cuối năm 2023 vừa qua, NXBGDVN đã trao tặng 12340 bản sách giáo khoa cho học sinh có hoàn cảnh khó khăn, 21030 bản sách giáo khoa cho tủ sách dùng chung của các nhà trường trên địa bàn tỉnh, tổng trị giá gần 600 triệu đồng và 120 triệu đồng tiền học bổng trao tặng cho học sinh vượt khó - học tốt. Việc tham gia Chương trình "*Xuân Trường Sa*" lần thứ 12 cũng thể hiện tấm lòng của cán bộ, công nhân viên NXBGDVN với mong muốn được tiếp tục đồng hành, chia sẻ những khó khăn với các em học sinh nơi đây. Thông qua các chương trình hỗ trợ, tài trợ trong năm 2023 như Tặng sách cho trẻ em có hoàn cảnh khó khăn mang tên "*Cùng tiếp bước em đến trường*", "*Tặng tủ sách giáo khoa dùng chung*", "*Tặng học bổng cho học sinh vượt khó - học tốt*", và mở đầu năm 2024 với sự đồng hành cùng "*Xuân Trường Sa*", NXBGDVN chúc các em vượt mọi khó khăn, học tập tốt để sau này trở thành công dân hữu ích cho quê hương, đất nước.

Tại Chương trình, đồng chí *Nguyễn Thanh Đạt*, Hiệu trưởng Trường Tiểu học Tân Phú 1 cảm ơn lãnh đạo Ban Tuyên giáo Trung ương, Thường trực Tỉnh ủy, Ban Tuyên giáo Tỉnh ủy, Báo điện tử Đảng Cộng sản Việt Nam, NXBGDVN đã dành những nghĩa cử cao đẹp, những điều tốt đẹp nhất đến với các em học sinh có hoàn cảnh khó khăn. Mong các em phát huy tinh thần hiếu học và hy vọng với những món quà của các nhà tài trợ sẽ tiếp sức thêm để các em tiếp tục với ước mơ đến trường.

Một số hình ảnh của Chương trình:

Đồng chí Phan Xuân Thủy, Phó trưởng Ban TGTW phát biểu tại Chương trình

Ông Phạm Văn Thắng cùng Lãnh đạo Ban TGTW trao học bổng cho các em học sinh có hoàn cảnh khó khăn

Các đồng chí lãnh đạo Ban TGTW và đoàn công tác chụp ảnh lưu niệm cùng các em học sinh

Giấy phép XB số 534/GP-BTTTT cấp ngày 19.11.2020; Mã số: 8BT...
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
...ong và nộp lưu chiểu tháng 2 năm 2024
Giá: 18.000 ...