TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

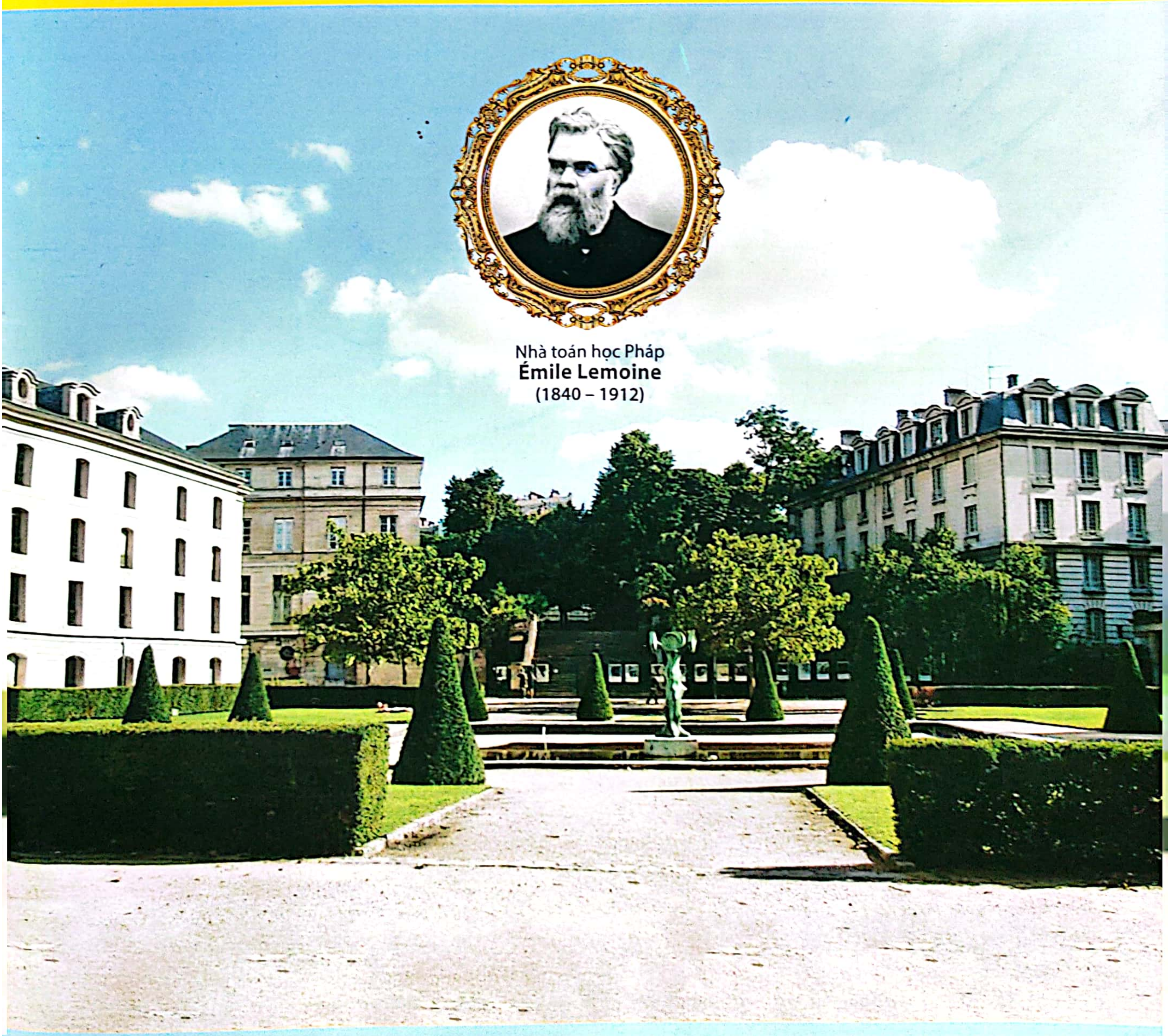
TẠP CHÍ Toán học & Văn học TRONG NHÀ TRƯỜNG

Số 562
Tháng 4 - 2024
ISSN: 2734-9284

VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 61 - XUẤT BẢN TỪ 1964 - DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT Biên tập: (024) 35121607; ĐT Phát hành: (024) 35142649;
ĐT-Fax Hành chính: (024) 35121606 - Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com - Website: viennghiencuusachgd.com



Nhà toán học Pháp
Émile Lemoine
(1840 – 1912)

Khuôn viên Trường Đại học École Polytechnique (Pháp)

THƯ NGỎ

Bạn đọc thân mến!

Trong 60 năm qua, Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ không ngừng phát triển và đã trở thành người bạn thân thiết của nhiều thế hệ học sinh, giáo viên và bạn đọc yêu toán trên cả nước. Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ đã nhận nhiều Bằng khen, Huân chương và những phần thưởng cao quý khác mà Đảng và Nhà nước trao tặng. Điều này có được là nhờ công sức của các nhà toán học, các nhà sư phạm, các ủy viên hội đồng biên tập, các công tác viên và bạn đọc yêu toán trên cả nước. Thay mặt Ban biên tập, chúng tôi xin cảm ơn bạn đọc gần xa, các nhà khoa học và các cộng tác viên về những đóng góp to lớn đó.

Để chào mừng 60 năm thành lập và phát triển Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ (dự kiến trong tháng 12 năm 2024), từ tháng 4.2024, Ban biên tập sẽ mở chuyên mục: ***Những hồi ức, những kỷ niệm về Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ.*** Nội dung các bài trong chuyên mục này sẽ viết về những hồi ức, những kỷ niệm, gắn bó của bạn đọc với Toán học và Tuổi trẻ; những ảnh hưởng, đóng góp của Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ đối với phong trào học toán, giải toán,... trên toàn quốc.

Bài viết có thể viết trên giấy hoặc đánh máy vi tính (nên bằng chương trình soạn thảo văn bản word). Trên bài viết cần ghi rõ: Họ tên, địa chỉ, số điện thoại. Bài viết không quá 4 trang đánh máy.

Bài viết có thể gửi về Tòa soạn:

- Gửi file word theo địa chỉ email: *toanhoctuoitrevietnam@gmail.com*

- Gửi bài theo đường Bưu điện. Phong bì có dán tem, gửi về địa chỉ: *Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, 187B Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội.*

- Hoặc đến Toà soạn Tạp chí gửi trực tiếp.

Ban biên tập mong muốn nhận được các bài viết từ bạn đọc. Trân trọng cám ơn!

TH&TT

CUỘC THI VIẾT CHUYÊN ĐỀ TOÁN CHÀO MỪNG 60 NĂM TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Để chào mừng 60 năm thành lập và phát triển Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, Ban biên tập tổ chức cuộc thi viết chuyên đề Toán cho bậc THCS và THPT.

• **Đối tượng dự thi:** Giáo viên đã hoặc đang dạy ở bậc THCS, THPT, Giảng viên, Sinh viên ở các trường Đại học, Cao đẳng và bạn đọc yêu thích Toán.

• **Nội dung bài dự thi:** Là các chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi toán; các chuyên đề ôn tập, ôn thi cuối cấp; những tìm tòi, sáng tạo trong việc dạy học Toán (bậc THCS, THPT).

• **Thể lệ cuộc thi:** Mỗi người tham gia cuộc thi được gửi không quá 3 bài dự thi khác nhau. Các bài dự thi có thể là các sáng kiến kinh nghiệm đã đăng ký, hoặc đạt giải ở Trường, Phòng, Sở,... nhưng chưa từng được xuất bản thành sách, báo, tạp chí và cũng chưa tham gia cuộc thi nào khác.

Kết quả cuộc thi sẽ được công bố trên TH&TT tháng 11 năm 2024 (Số 569). Các bài hay có thể được chọn đăng trên Tạp chí hoặc in thành sách. Các tác giả được hưởng nhuận bút theo quy định của Tạp chí. Bài viết tham dự cuộc thi thuộc bản quyền của TH&TT.

• **Thời hạn gửi bài dự thi:** Trước ngày 15/10/2024.

• **Quy cách bài dự thi:** Bài dự thi được đánh máy vi tính, nên dùng chương trình soạn thảo văn bản word (có file). Trên mỗi bài dự thi ghi rõ: Họ và tên, địa chỉ Trường, xã (phường), huyện (quận), tỉnh (thành phố), số điện thoại. Bài dự thi không quá 15 trang đánh máy. Trên cùng của trang 1 mỗi bài dự thi ghi rõ:

Bài dự thi viết chuyên đề Toán chào mừng 60 năm TH&TT.

• **Cách gửi bài dự thi:** Bài dự thi gửi về Tòa soạn TH&TT bằng cách:

- Gửi file word theo địa chỉ email:

toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

- Gửi bài theo đường Bưu điện. Phong bì có dán tem, gửi về địa chỉ:

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ
187B Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội.

- Hoặc đến Toà soạn Tạp chí gửi trực tiếp.

• **Giải thưởng:** Những người đoạt giải sẽ được nhận Giấy chứng nhận và Tặng phẩm của Tạp chí.

TH&TT

CON ĐƯỜNG ĐI ĐẾN TỔNG QUÁT TỪ MỘT BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC

NGUYỄN MINH THẮNG

(GV THCS Nguyễn Du, TP. Hà Tĩnh, Hà Tĩnh)

Trong toán học nói chung và chủ đề bất đẳng thức nói riêng "*Tìm cách khai thác bài toán và đưa ra dạng tổng quát của bài toán đó là con đường đúng đắn nhất trong học toán*".

Bài viết này tôi xin đưa ra một số bài toán làm ví dụ minh họa

I. BÀI TOÁN THỨ NHẤT

BÀI TOÁN 1.1 (Bài toán gốc). *Cho các số thực a,b,c không âm thỏa mãn: $a+b+c=6$. Tìm GTLN của biểu thức $M_1=a^2b+b^2c+c^2a$.*

Lời giải. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $a=\max\{a;b;c\}$. Ta có:

$$M_1=a^2b+b^2c+c^2a=a^2b+b.bc+\frac{c.ca}{2}+\frac{c^2a}{2}$$

$$\le a^2b+a.bc+\frac{a.ca}{2}+\frac{c^2a}{2}.$$

$$=ab(a+c)+\frac{ac}{2}(a+c)=a(a+c)\left(b+\frac{c}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 2M_1\le a(a+c)(2b+c).$$

Theo BĐT Cauchy ta có:

$$2M_1\le a(a+c)(2b+c)\le\left(\frac{a+a+c+2b+c}{3}\right)^3$$

$$=\left(\frac{2(a+b+c)}{3}\right)^3=\left(\frac{2.6}{3}\right)^3=64$$

$$\Rightarrow M_1\le 32;\ M_1=32 \text{ khi } \begin{cases} b^2c=abc\\ c^2a=a^2c\\ a=a+c=2b+a\\ a+b=c=6\end{cases}$$

$$\Rightarrow a=4,\ b=2,\ c=0.$$

Vậy $\max M_1=32$ khi $a=4$, $b=2$, $c=0$ và các hoán vị của nó.

Nhận xét 1. Giải xong bài toán 1.1, một cách tự nhiên chúng ta sẽ đặt câu hỏi: "*Với các số thực a,b,c không âm có tổng bằng 6 thì biểu thức $M_1=a^2b+b^2c+c^2a$ có GTLN bằng 32. Như vậy cũng với các số thực a,b,c không âm có tổng bằng 6 hoặc có tổng bằng k thì các biểu thức $M_2=a^3b+b^3c+c^3a$ hoặc $M_3=a^4b+b^4c+c^4a$, ... sẽ có GTLN bằng bao nhiêu?*"

Với câu hỏi trên trước tiên chúng ta sẽ giải bài toán sau.

BÀI TOÁN 1.2. *Cho các số thực a,b,c không âm thỏa mãn: $a+b+c=8$. Tìm GTLN của biểu thức*

$$M_2=a^3b+b^3c+c^3a.$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát của bài toán ta giả sử $a=\max\{a;b;c\}$. Ta có:

$$M_2=a^3b+b^3c+c^3a=a^3b+b^2.bc+\frac{c^2.ca}{2}+\frac{c.c^2a}{2}$$

$$\le a^3b+a^2.bc+\frac{a^2.ca}{2}+\frac{a.c^2a}{2}$$

$$=a^2b(a+c)+\frac{a^2c}{2}(a+c)$$

$$=a^2(a+c)\left(b+\frac{c}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 3M_2\le a^2(a+c)\left(3b+\frac{3c}{2}\right)$$

$$\le a.a.(a+c).(3b+2c)\ \ (2)\ \ \left(\text{do } \frac{3c}{2}\le 2c\right).$$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$3M_2 \le a.a.(a+c).(3b+2c)$$

$$\le \left(\frac{a+a+a+c+3b+2c}{4}\right)^4$$

$$=\left(\frac{3(a+b+c)}{4}\right)^4=\left(\frac{3.8}{4}\right)^4$$

$\Rightarrow 3M_2 \le 6^4 \Rightarrow M_2 \le 432$; $M_2 = 432$ khi

$$\begin{cases} b^3c=a^2bc \\ c^3a=a^3c \\ c^3a=a^2c^2 \\ a=a+c=3b+2c \\ a+b+c=8 \end{cases} \Rightarrow a=6,\, b=2,\, c=0.$$

Vậy $\max M_2 = 432$ khi $a=6$, $b=2$, $c=0$ và các hoán vị của nó.

Nhận xét 2. Ta thấy cách giải hai bài trên đều sử dụng một BĐT, và đều có điểm rơi giống nhau. Điều này cho phép chúng ta nghĩ đến bài toán tổng quát sau.

BÀI TOÁN 1.3 (Bài toán tổng quát 1).

Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn: $a+b+c=k$. Tìm GTLN của biểu thức

$$M=a^nb+b^nc+c^na \quad \text{với } n\in\mathbb{N},\, n\ge 2.$$

Lời giải.

Không mất tính tổng quát ta giả sử $a=\max\{a,b,c\}$. Ta có:

$$M=a^nb+b^nc+c^na$$

$$=a^nb+b^{n-1}bc+\frac{c^{n-1}.ca}{2}+\frac{c^{n-2}.c^2a}{2}$$

$$\le a^nb+a^{n-1}bc+\frac{a^{n-1}.ca}{2}+\frac{a^{n-2}.c^2a}{2}$$

$$\le a^{n-1}b(a+c)+\frac{a^{n-1}.c}{2}(a+c)$$

$$=a^{n-1}(a+c)\left(b+\frac{c}{2}\right)$$

$$\Rightarrow nM\le a^{n-1}(a+c)\left(nb+\frac{nc}{2}\right)$$

$$\le a^{n-1}\left(a+\frac{nc}{2}\right)\left(nb+\frac{nc}{2}\right) \text{ (do } c\le\frac{nc}{2} \text{ với } n\ge 2)$$

$$\Rightarrow nM\le \underbrace{a.a...a}_{n-1 \text{ thừa số } a}.\left(a+\frac{nc}{2}\right).\left[nb+\frac{nc}{2}\right].$$

Theo BĐT Cauchy ta có:

$$\Rightarrow nM\le \underbrace{a.a...a}_{n-1 \text{ thừa số } a}.\left(a+\frac{nc}{2}\right).\left(nb+\frac{nc}{2}\right)$$

$$\le\left(\frac{\underbrace{a+a+...+a}_{n-1 \text{ số hạng } a}+\left(a+\frac{nc}{2}\right)+\left(nb+\frac{nc}{2}\right)}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$=\left(\frac{n(a+b+c)}{n+1}\right)^{n+1}=\left(\frac{nk}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$\Rightarrow M\le\frac{1}{n}.\left(\frac{nk}{n+1}\right)^{n+1}.$$

$$M=\frac{1}{n}.\left(\frac{nk}{n+1}\right)^{n+1} \text{ khi } a=a+c=nb+(n-1)c$$

$$\Rightarrow c=0; b=\frac{k}{n+1}; a=\frac{nk}{n+1}.$$

Vậy $\max M=\frac{1}{n}.\left(\frac{nk}{n+1}\right)^{n+1}$.

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Cho các số thực a,b,c không âm thỏa mãn $a+b+c=9$. Tìm GTLN của biểu thức

$$M=a^2b+b^2c+c^2a.$$

Bài 2. Cho các số thực a,b,c không âm thỏa mãn $a+b+c=8$. Tìm GTLN của biểu thức

$$M=a^3b+b^3c+c^3a.$$

Bài 3. Cho các số thực a,b,c không âm thỏa mãn $a+b+c=10$. Tìm GTLN của biểu thức

$$M=a^4b+b^4c+c^4a.$$

Bài 4. Cho các số thực a,b,c không âm thỏa mãn $a+b+c=6$. Tìm GTLN của biểu thức

$$M=a^5b+b^5c+c^5a.$$

II. BÀI TOÁN THỨ HAI

BÀI TOÁN 2.1 (bài toán gốc). *Cho $a,b,c\in[0;2]$ thỏa mãn: $a+b+c=3$. Tìm GTLN của biểu thức:*

$$N_1=a^2+b^2+c^2.$$

Lời giải. Cách 1. Với $\forall a,b,c\in[0;2]$ ta luôn có:

$$\begin{cases}(2-a)(2-b)(2-c)\ge 0\\ abc\ge 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow(2-a)(2-b)(2-c)+abc\ge 0$$

$$\Rightarrow 8-4(a+b+c)+2(ab+bc+ca)\ge 0$$

$$\Rightarrow 8-4.3+2(ab+bc+ca)\ge 0$$

$$\Rightarrow 2(ab+bc+ca)-4\ge 0$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)-4\ge a^2+b^2+c^2$$

$$\Rightarrow(a+b+c)^2-4\ge a^2+b^2+c^2=N_1$$

$$\Rightarrow 3^2-4\ge N_1\Rightarrow N_1\le 5;\ N_1=5 \text{ khi}$$

$$\begin{cases}(2-a)(2-b)(2-c)=0\\ abc=0\\ a+b+c=3\end{cases}\Rightarrow a=2,\ b=1,\ c=0.$$

Vậy $\max N_1=5$ khi $a=2$, $b=1$, $c=0$ và các hoán vị của nó.

Cách 2. Với $\forall a,b,c\in[0;2]$ ta giả sử

$$a=\max\{a,\ b,\ c\}\Rightarrow 1\le a\le 2$$

$$\Rightarrow(a-1)(a-2)\le 0\Rightarrow a^2-3a+2\le 0\quad(1).$$

Ta có:

$$N_1=a^2+b^2+c^2=a^2+\left(b^2+c^2+2bc\right)-2bc$$

$$=a^2+(b+c)^2-2bc=a^2+(3-a)^2-2bc$$

$$=2a^2-6a+9-2bc\le 2a^2-6a+9$$

$$(\text{do } -2bc\le 0 \text{ với } \forall b,c\in[0;2])$$

$$=2\left(a^2-3a+2\right)+5\quad(2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $N_1\le 5$. $N_1=5$ khi $a=2$, $b=1$, $c=0$. Vậy $\max N_1=5$ khi $a=2$, $b=1$, $c=0$ và các hoán vị của nó.

Nhận xét 1. Sau khi giải bài toán 2.1 chúng ta cũng đặt câu hỏi:

"*Với các số thực $a,b,c\in[0;2]$ thỏa mãn: $a+b+c=3$ thì các biểu thức $N_2=a^3+b^3+c^3$, $N_3=a^4+b^4+c^4$, ... sẽ có GTLN bằng bao nhiêu?*"

Với câu hỏi trên chúng ta giải bài toán 2.2 sau.

BÀI TOÁN 2.2. *Cho $a,b,c\in[0;2]$ thỏa mãn: $a+b+c=3$. Tìm GTLN của biểu thức:*

$$N_2=a^3+b^3+c^3.$$

Lời giải.

Cách 1. Không mất tính tổng quát ta giả sử: $a\ge b\ge c\Rightarrow 1\le a\le 2$. Ta có:

$$(a-2)(a-1)\le 0\Rightarrow a^2-3a+2\le 0\quad(1).$$

Do đó: $N_2=a^3+b^3+c^3$

$$\le a^3+b^3+c^3+3bc(b+c)$$

$$(\text{do } 3bc(b+c)\ge 0)$$

$$\Rightarrow N_2\le a^3+(b+c)^3=a^3+(3-a)^3$$

$$=27-27a+9a^2=9\left(a^2-3a+2\right)+9\quad(2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $N_2\le 9$; $N_2=9$ khi $a=2$, $b=1$, $c=0$. Vậy $\max N_2=9$ khi $a=2$, $b=1$, $c=0$ và các hoán vị của nó.

Cách 2. Không mất tính tổng quát ta giả sử $a\ge b\ge c\Rightarrow 1\le a\le 2,\ 0\le c\le 1$.

Ta có: $(a-2)(a-1)\le 0\ \Rightarrow a^2\le 3a-2$

$$\Rightarrow a^3\le 3a^2-2a\le 3(3a-2)-2a\ (\text{do } a^2\le 3a-2)$$

$$\Rightarrow a^3\le 7a-6\quad(*).$$

Nếu $b\le 1$ thì $b^3\le b$; $c^3\le c$. Suy ra:

$$N_2=a^3+b^3+c^3\le 7a-6+b+c$$

$$=(a+b+c)+6a-6=3+6a-6$$

$= 6a - 3 \le 6.2 - 3 = 9 \quad (1).$

Nếu $b > 1$ thì ta có:

$$(b-2)(b-1) \le 0 \Rightarrow b^2 \le 3b - 2$$

$$\Rightarrow b^3 \le 3b^2 - 2b \le 3(3b-2) - 2b \text{ (do } b^2 \le 3b-2)$$

$$\Rightarrow b^3 \le 7b - 6 \quad (**).$$

Từ (*) và (**) suy ra:

$$N_2 = a^3 + b^3 + c^3 \le 7a - 6 + 7b - 6 + c$$
$$= 7(a+b+c) - 12 - 6c = 7.3 - 12 - 6c$$
$$= 9 - 6c \le 9 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $N_2 \le 9$; $N_2 = 9$ khi

$$\begin{cases}(a-2)(a-1)=0\\(b-2)(b-1)=0\\c=0\\a+b+c=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2\\b=1.\\c=0\end{cases}$$

Vậy $\max N_2 = 9$ khi $a = 2, b = 1, c = 0$ và các hoán vị của nó.

BÀI TOÁN 2.3. *Cho $a,b,c \in [0;2]$ thỏa mãn: $a+b+c=3$. Tìm GTLN của biểu thức:*

$$N_3 = a^4 + b^4 + c^4.$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát ta giả sử

$$2 \ge a \ge b \ge c \ge 0 \Rightarrow 1 \le a \le 2;\ 0 \le c \le 1.$$

Ta có: $(a-1)(a-2) \le 0$

$$\Rightarrow a^2 - 3a + 2 \le 0 \Rightarrow a^2 \le 3a - 2$$
$$\Rightarrow a^3 \le 3a^2 - 2a \le 3(3a-2) - 2a = 7a - 6$$
$$\Rightarrow a^4 \le 7a^2 - 6a \le 7(3a-2) - 6a = 15a - 14.$$

TH1: $0 \le b \le 1; 0 \le c \le 1$. Ta có:

$$N_3 = a^4 + b^4 + c^4 \le 15a - 14 + b + c$$
$$= 14a + (a+b+c) - 14$$
$$\le 14.2 + 3 - 14 = 17 \quad (1).$$

TH2: $2 \ge a \ge b \ge 1$. Lập luận tương tự với kết quả $a^4 \le 15a - 14$, ta cũng chứng minh được:

$$b^4 \le 15b - 14.$$

Từ đây ta suy ra:

$$N_3 = a^4 + b^4 + c^4$$
$$\le 15a - 14 + 15b - 14 + c$$
$$= 15(a+b+c) - 28 - 14c$$
$$= 15.3 - 28 - 14c$$
$$= 17 - 14c \le 17 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $N_3 \le 17$; $N_3 = 17$ khi $a = 2$, $b = 1$, $c = 0$. Vậy $\max N_3 = 17$ khi $a = 2$, $b = 1$, $c = 0$ và các hoán vị của nó.

Nhận xét 2. Sau khi giải xong ba bài toán trên chúng ta phát hiện thấy khi $n = 2$ thì biểu thức N_1 có GTLN là $\max N_1 = 2^2 + 1^2 + 0^2 = 5$, khi $n = 3$ thì biểu thức N_2 có GTLN là $\max N_2 = 2^3 + 1^3 + 0^3 = 9$ và khi $n = 4$ thì biểu thức N_3 có GTLN là $\max N_3 = 2^4 + 1^4 + 0^4 = 17, \ldots$

Từ quy luật trên chúng ta dự đoán được bài toán tổng quát của ba bài toán trên như sau.

BÀI TOÁN 2.4 (bài toán tổng quát 2). *Cho $a,b,c \in [0;2]$ thỏa mãn: $a+b+c=3$. Tìm GTLN của biểu thức:*

$$N = a^n + b^n + c^n \text{ với } n \in \mathbb{N}^*, n \ge 2.$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát của bài toán ta giả sử $a = \max\{a,b,c\}$ và $c = \min\{a,b,c\}$.

Ta có:

$$\begin{cases}1 \le a \le 2 \ (1)\\0 \le c \le 1 \ (2)\end{cases} \Rightarrow (a-1)(a-2) \le 0$$

$$\Rightarrow a^2 - 3a + 2 \le 0$$
$$\Rightarrow a^2 \le 3a - 2 = (2^2 - 1)a - (2^2 - 2) \quad (1)$$
$$\Rightarrow a^3 \le 3a^2 - 2a \le 3(3a-2) - 2a \text{ (do } a^2 \le 3a-2)$$
$$\Rightarrow a^3 \le 7a - 6 = (2^3 - 1)a - (2^3 - 2) \quad (2)$$
$$\Rightarrow a^4 \le 7a^2 - 6a \le 7(3a-2) - 6a \text{ (do } a^2 \le 3a-2)$$
$$\Rightarrow a^4 \le 15a - 14 = (2^4 - 1)a - (2^4 - 2) \quad (3).$$

Từ (1), (2) và (3) ta dự đoán BĐT tổng quát là:

$$a^n \le (2^n - 1)a - (2^n - 2).$$

Thật vậy, với mọi $a \in [1;2]$ và $n \in \mathbb{N}; n \geq 2$.

Ta có: $a^n \leq (2^n - 1)a - (2^n - 2)$

$\Leftrightarrow 2^n a - a^n - 2^n - a + 2 \geq 0$

$\Leftrightarrow 2.2^{n-1}a - a^n - 2^n - a + 2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (2^{n-1}a - a^n) + (2^{n-1}a - 2^n) + (2 - a) \geq 0$

$\Leftrightarrow a(2^{n-1} - a^{n-1}) - 2^{n-1}(2 - a) + (2 - a) \geq 0$

$\Leftrightarrow a(2-a)(2^{n-2} + 2^{n-3}a + \cdots + 2a^{n-3} + a^{n-2}) - 2^{n-1}(2-a) + (2-a) \geq 0$

(do $a^n - b^n = (a-b) \times (a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$ với $n \in \mathbb{N}^*$)

$\Leftrightarrow (2-a)\left[a(2^{n-2} + 2^{n-3}a + \cdots + 2a^{n-3} + a^{n-2}) - (2^{n-1} - 1)\right] \geq 0$ (4).

Xét biểu thức S trong dấu ngoặc vuông của (4) ta có:

$S = \left[a(2^{n-2} + 2^{n-3}a + \cdots + 2a^{n-3} + a^{n-2}) - (2^{n-1} - 1)\right]$

$= a(2^{n-2} + 2^{n-3}a + \cdots + 2.a^{n-3} + a^{n-2}) - (2-1)(2^{n-2} + 2^{n-3} + \cdots + 2 + 1)$

$= 2^{n-2}(a-1) + 2^{n-3}(a^2 - 1) + 2^{n-4}(a^3 - 1) + \cdots + 2(a^{n-2} - 1) + (a^{n-1} - 1)$.

Dễ thấy biểu thức $S \geq 0$ với $\forall a \in [1;2]$ và $n \geq 2$, và kết hợp với $(2-a) \geq 0$ với $\forall a \in [1;2]$, suy ra BĐT(4) được chứng minh.

Bây giờ ta xét hai trường hợp:

TH1: $0 \leq b \leq 1$. Ta có:

$N = a^n + b^n + c^n \leq (2^n - 1)a - (2^n - 2) + b^n + c^n$

$\Rightarrow N \leq a.2^n - a - 2^n + 2 + b + c$ (do $0 \leq c, b \leq 1$)

$\Rightarrow N \leq a.2^n - 2a - 2^n + 2 + a + b + c$

$= a(2^n - 2) - 2^n + 2 + 3$

$\Rightarrow N \leq 2(2^n - 2) - 2^n + 5$

$= 2.2^n - 4 - 2^n + 5 = 2^n + 1$ (5).

TH2: $1 \leq b \leq 2$.

Chứng minh tương tự như với biến a ta được:

$$b^n \leq (2^n - 1)b - (2^n - 2).$$

Suy ra:

$N = a^n + b^n + c^n \leq (2^n - 1)a - (2^n - 2) + (2^n - 1)b - (2^n - 2) + c^n$

$= (a.2^n - a - 2^n + 2) + (b.2^n - b - 2^n + 2) + c^n$

$\leq (a.2^n - a - 2^n + 2) + (b.2^n - b - 2^n + 2) + c.2^n - c$

(do $0 \leq c, b \leq 1$)

$\leq (2^n - 1)(a + b + c) - 2.2^n + 4$

$= (2^n - 1).3 - 2.2^n + 4$

$= 2^n + 1$ (6).

Từ (5) và (6) suy ra: $N \leq 2^n + 1$.

$N = 2^n + 1$ khi $a = 2, b = 1, c = 0$.

Vậy $\max N = 2^n + 1$ khi $a = 2, b = 1, c = 0$ và các hoán vị của nó.

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Cho các số thực $a, b, c \in [0;2]$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm GTLN của biểu thức

a) $N_4 = a^5 + b^5 + c^5$.

b) $N_5 = a^6 + b^6 + c^6$.

c) $N_6 = a^7 + b^7 + c^7$.

d) $N_7 = a^{2023} + b^{2023} + c^{2023}$.

Nhận xét 3. Tiếp tục khai thác bài toán theo một khía cạnh khác, cụ thể là khai thác bài toán theo cách giải thứ nhất, ta xem $a, b, c \in [0;2]$ là $a, b, c \in [m;n]$ và tổng $a + b + c = 3$ là $a + b + c = k$ thì ta được bài toán tổng quát như sau.

BÀI TOÁN 2.5 (bài toán tổng quát 3). *Cho $a,b,c\in[m;n]$ thỏa mãn: $a+b+c=k$. Tìm GTLN của biểu thức $P=a^2+b^2+c^2$.*

Lời giải. Từ

$$a,b,c\in[m;n]\Rightarrow\begin{cases}(a-m)(b-m)(c-m)\ge 0\\(n-a)(n-b)(n-c)\ge 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow(a-m)(b-m)(c-m)+(n-a)(n-b)(n-c)\ge 0$$

$$\Rightarrow abc-m(ab+bc+ca)+m^2(a+b+c)-m^3+n^3-n^2(a+b+c)+n(ab+bc+ca)-abc\ge 0$$

$$\Rightarrow(n-m)(ab+bc+ca)-(n^2-m^2)(a+b+c)+(n^3-m^3)\ge 0$$

$$\Rightarrow(n-m)(ab+bc+ca)-(n-m)(n+m)k+(n-m)(n^2+mn+m^2)\ge 0$$

$$\Rightarrow ab+bc+ca-(n+m)k+n^2+mn+m^2\ge 0$$

(chia 2 vế cho $n-m>0$)

$$\Rightarrow 2(ab+bc+ca)-2(nk+mk)+2n^2+2mn+2m^2\ge 0$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)-2(nk+mk)+2n^2+2mn+2m^2\ge a^2+b^2+c^2$$

$$\Rightarrow k^2-2(nk+mk)+2n^2+2mn+2m^2\ge a^2+b^2+c^2=P$$

$$\Rightarrow P\le(n^2+m^2+k^2+2nm-2nk-2mk)+m^2+n^2=(n+m-k)^2+m^2+n^2.$$

$P=(n+m-k)^2+m^2+n^2$ khi

$$\begin{cases}(a-m)(b-m)(c-m)=0\\(n-a)(n-b)(n-c)=0\\a+b+c=k\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=m\\b=n\\c=k-m-n\end{cases}.$$

Vậy $\max P=(n+m-k)^2+m^2+n^2$ khi $a=m$, $b=n$, $c=k-m-n$ và các hoán vị của nó.

Chú ý: Vì $m\le c=k-a-b\le k-m-m\Leftrightarrow m\le\frac{k}{3}$.

BÀI TẬP ÁP DỤNG

a) Cho các số thực $a,b,c\in[-1;5]$ thỏa mãn $a+b+c=7$. Tìm GTLN của biểu thức

$$P_1=a^2+b^2+c^2.$$

b) Cho các số thực $a,b,c\in[2;5]$ thỏa mãn $a+b+c=10$. Tìm GTLN của biểu thức

$$P_2=a^2+b^2+c^2.$$

c) Cho các số thực $a,b,c\in[-3;2]$ thỏa mãn $a+b+c=-2$. Tìm GTLN của biểu thức

$$P_3=a^2+b^2+c^2.$$

d) Cho các số thực $a,b,c\in[-2;7]$ thỏa mãn $a+b+c=10$. Tìm GTLN của biểu thức

$$P_4=a^2+b^2+c^2.$$

III. BÀI TOÁN THỨ BA

Bài toán 3.1 (bài toán gốc). *Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a+b=4$. Tìm GTLN của biểu thức: $Q_1=a^2b^2(a^2+b^2)$.*

Lời giải. Ta có: $32Q_1=4ab\left[4.(2ab).(a^2+b^2)\right]$.

Áp dụng BĐT: $(a+b)^2\ge 4ab$ với mọi a, b, ta có:

$$32Q_1=4ab\left[4.(2ab).(a^2+b^2)\right]\le(a+b)^2\left[(2ab)+(a^2+b^2)\right]^2=(a+b)^2\left[(a+b)^2\right]^2=(a+b)^6=4^6$$

$$\Rightarrow Q_1\le\frac{4^6}{32}=128;\ Q_1=128\text{ khi }\begin{cases}a=b\\2ab=a^2+b^2\\a+b=4\end{cases}\Leftrightarrow a=b=2.$$

Vậy $\max Q_1=128$ khi $a=b=2$.

(Xem tiếp trang 12)

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN, THÀNH PHỐ HÀ NỘI NĂM HỌC 2023-2024

Môn: Toán (chuyên Tin); Thời gian làm bài: 150 phút

Câu I. 1) *Giải phương trình*

$$2x+2=(5-x)\sqrt{3x-2} \quad (1).$$

2) *Giải hệ phương trình* $\begin{cases} x+y+3xy=9 \\ x^3+y^3=9 \end{cases}$.

Lời giải. 1) ĐKXĐ: $x \ge \frac{2}{3}$. Khi đó:

$(1) \Leftrightarrow 5x-3x+2=5\sqrt{3x-2}-x\sqrt{3x-2}$

$\Leftrightarrow 5x-5\sqrt{3x-2}+x\sqrt{3x-2}-3x+2=0$

$\Leftrightarrow 5\left(x-\sqrt{3x-2}\right)+\sqrt{3x-2}\left(x-\sqrt{3x-2}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{3x-2}\right)\left(5+\sqrt{3x-2}\right)=0.$

TH11: $x-\sqrt{3x-2}=0 \Rightarrow x^2-3x+2=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

TH2: $5+\sqrt{3x-2}=0$ (vô nghiệm).

Đối chiếu điều kiện ta được tập nghiệm của phương trình là $S=\{1;2\}$.

2) Đặt $S=x+y,\ P=x.y$.

Vì $(x+y)^2 \ge 4xy \Rightarrow S^2 \ge 4P$. Hệ phương trình trở thành $\begin{cases} S+3P=9 & (1) \\ S^3-3PS=9 & (2) \end{cases}$.

Thay $P=\frac{9-S}{3}$ vào (2), ta được:

$$S^3+S^2-9S-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} S=-1 \\ S=3 \\ S=-3 \end{array}\right. .$$

+ Với $S=-1 \Rightarrow P=\frac{10}{3}$ (loại vì $S^2<4P$).

+ Với $S=3 \Rightarrow P=2 \Rightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ x.y=2 \end{cases}$.

Từ đó tìm được $(x;y)=(1;2)$ hoặc $(x;y)=(2;1)$.

+ Với $S=-3 \Rightarrow P=4$ (loại vì $S^2<4P$).

Vậy tập nghiệm của hệ là $S=\{(1;2);(2;1)\}$.

Câu II. 1) *Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh số $A=2^{p^2+2}-8$ chia hết cho 21.*

2) *Tìm tất cả các số nguyên x và y thỏa mãn*

$$x^3-y^3=2(x-y)^2+17.$$

Lời giải. 1) Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p không chia hết cho 3 và p là số nguyên lẻ.

Suy ra p^2 chia 3 dư 1. Suy ra p^2+2 chia hết cho 3. Do đó $p^2+2=3n$ với $n \in \mathbb{N}$.

Ta có: $A=2^{3n}-8=(8^n-1)-7$. Suy ra $A \vdots 7$. Do p^2+2 là số nguyên lẻ nên $p^2+2=2k+1$ với $k \in \mathbb{N}$. Ta có: $A=2^{2k+1}-8=2(4^k-1)-6$. Suy ra $A \vdots 3$. Vì ƯCLN$(3;7)=1$ và $3.7=21$ nên $A \vdots 21$.

2) Ta có: $(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)=2(x-y)^2+17$.

Mà $2(x-y)^2+17>0$ với mọi x,y suy ra $x-y>0$. Dễ thấy rằng $x-y$ là ước của 17.

TH1: $x-y=1 \Rightarrow x^3-y^3=19$.

Tìm được $(x;y)=(3;2)$ hoặc $(x;y)=(-2;-3)$.

TH2: $x-y=17 \Rightarrow x^3-y^3=595 \Rightarrow xy=-\frac{254}{3}$ (loại).

Vậy $(x;y)=(3;2)$ hoặc $(x;y)=(-2;-3)$.

Câu III. 1) *Cho đa thức*

$$f(x)=x^4+2x^3+3x^2+2022x+2023.$$

Chứng minh đa thức $f(x)$ không có nghiệm hữu tỉ.

2) *Với các số thực a, b và c thỏa mãn $(a+1)(b+1)(c+1)=(a-1)(b-1)(c-1)$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=|a|+|b|+|c|$.*

Lời giải. 1) Đa thức $f(x)$ là đa thức có các hệ số nguyên có hệ số cao nhất là 1. Do đó nếu đa thức $f(x)$ có nghiệm hữu tỉ, nghiệm đó là nghiệm nguyên. Giả sử $x=a$ là một nghiệm hữu tỉ của đa thức $f(x)$. Khi đó $a\in\mathbb{Z}, a\neq 0$ và $f(a)=0$. Suy ra a là ước của 2023. Từ đó a là số nguyên lẻ. Suy ra a^4, $3a^2$ là các số nguyên lẻ.

Do đó $f(a)=a^4+2a^3+3a^2+2022a+2023$ là số nguyên lẻ. Điều này mâu thuẫn với $f(a)=0$. Suy ra điều giả sử là sai. Do đó đa thức $f(x)$ không có nghiệm nguyên.

2) Ta có $(a+1)(b+1)(c+1)=(a-1)(b-1)(c-1)$, suy ra $ab+bc+ca=-1$. Ta có:

$$A^2=a^2+b^2+c^2+2|ab|+2|bc|+2|ca|$$
$$=(a+b+c)^2+2(|ab|+|bc|+|ca|)+2;$$
$$|ab|+|bc|+|ca|\geq|ab+bc+ca|$$
$$\Rightarrow |ab|+|bc|+|ca|\geq 1\Rightarrow A^2\geq 4\overset{\text{do } A\geq 0}{\Rightarrow} A\geq 2.$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=1, b=-1, c=0\Rightarrow \min A=2$.

Câu IV. *Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B $(R<R'<OO')$. Gọi PQ là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O) và (O') với $P\in(O)$ và $Q\in(O')$. Đường thẳng PQ cắt đường thẳng OO' tại điểm S. Qua điểm S vẽ một đường thẳng cắt đường tròn (O) tại hai điểm E,F và cắt đường tròn (O') tại hai điểm G, H sao cho $SE<SF<SG<SH$.*

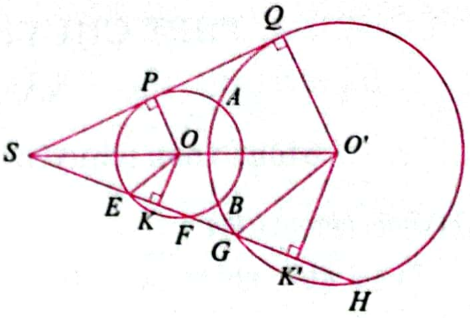
1) Chứng minh đường thẳng OE song song với đường thẳng $O'G$.

2) Chứng minh $SA^2=SP.SQ$.

3) Tiếp tuyến tại điểm A của đường tròn (O) cắt đường thẳng OO' tại điểm M. Tiếp tuyến tại điểm A của đường tròn (O') cắt đường thẳng OO' tại điểm N. Đường thẳng ME cắt đoạn thẳng AB tại điểm I. Chứng minh $\dfrac{EA^2}{EB^2}=\dfrac{IA}{IB}$ và ba điểm N, I, H là ba điểm thẳng hàng.

Lời giải.

1)



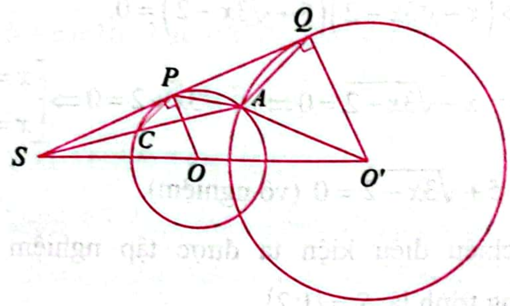
Gọi K và K' lần lượt là hình chiếu của O và O' trên đường thẳng SE.

Khi đó: $\dfrac{OK}{O'K'}=\dfrac{SO}{SO'}=\dfrac{OP}{O'Q}=\dfrac{R}{R'}=\dfrac{OE}{O'G}$.

Suy ra: $\Delta OEK \backsim \Delta O'GK'$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \widehat{OEK}=\widehat{O'GK'}\Rightarrow OE\parallel O'G.$$

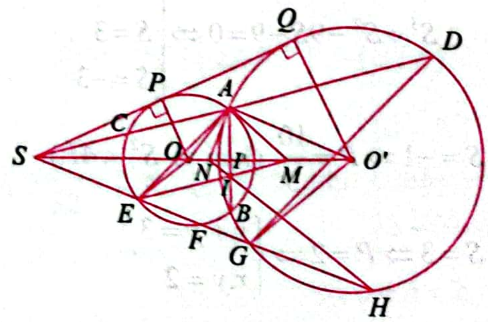
2)



Đường thẳng SA cắt lại (O) tại C. Chứng minh tương tự câu a, ta có $OC\parallel O'A$. Suy ra:

$$\frac{SC}{SA}=\frac{R}{R'}\Rightarrow\frac{SC}{SA}=\frac{SP}{SQ}\Rightarrow CP\parallel AQ$$
$$\Rightarrow \widehat{SQA}=\widehat{SPC}=\widehat{SAP}\Rightarrow \Delta SPA\backsim\Delta SAQ;$$
$$\Rightarrow SA^2=SP.SQ.$$

3)



Gọi X là giao điểm của ME và (O) $(X\neq E)$.

Khi đó: $\Delta MAE\backsim\Delta MXA$ (g.g).

Suy ra $\frac{AE}{XA} = \frac{MA}{MX}$. Lại có: $\Delta IAE \backsim \Delta IXB$ (g.g),

Suy ra: $\frac{AE}{XB} = \frac{IA}{IX}$. Từ đó $\frac{AE^2}{XA.XB} = \frac{IA.MA}{IX.MX}$.

Chứng minh tương tự, ta được $\frac{BE^2}{XA.XB} = \frac{IB.MB}{IX.MX}$.

Vì $MA = MB$ nên $\frac{EA^2}{EB^2} = \frac{IA}{IB}$.

+ Gọi D là giao điểm của đường thẳng SA và (O') $(D \neq A)$. Ta chứng minh được:

$$\frac{AE}{GD} = \frac{R}{R'} \Rightarrow \Delta SGD \backsim \Delta SAH \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{GD}{AH} = \frac{SG}{SA} \Rightarrow \frac{AE}{AH} = \frac{R}{R'} \cdot \frac{SG}{SA}.$$

Tương tự: $\frac{BE}{BH} = \frac{R}{R'} \cdot \frac{SG}{SB}$.

Vì $SA = SB$ nên $\frac{AE}{AH} = \frac{EB}{HB} \Rightarrow \frac{EA}{EB} = \frac{HA}{HB}$.

Giả sử NH cắt AB tại I'. Chứng minh tương tự như ở trên, ta được $\frac{HA^2}{HB^2} = \frac{I'A}{I'B}$. Mà $\frac{EA}{EB} = \frac{HA}{HB}$ nên $\frac{EA^2}{EB^2} = \frac{I'A}{I'B}$. Suy ra $\frac{IA}{IB} = \frac{I'A}{I'B}$. Do đó $I \equiv I'$.

Suy ra N, I, H thẳng hàng.

Câu V. *Trên bàn có hai túi kẹo: túi thứ nhất có 18 viên kẹo, túi thứ hai có 21 viên kẹo. An và Bình cùng chơi một trò chơi như sau: mỗi lượt chơi, một bạn sẽ lấy đi 1 viên kẹo từ một túi bất kỳ hoặc là mỗi túi lấy đi 1 viên kẹo. Hai bạn luân phiên thực hiện lượt chơi của mình. Người đầu tiên không thể thực hiện được lượt chơi của mình là người thua cuộc, người còn lại là người thắng cuộc. Nếu An là người lấy kẹo trước, hãy chỉ ra chiến thuật chơi của An để An là người thắng cuộc.*

Lời giải. Ta định nghĩa lượt chơi chiến thắng là lượt chơi mà sau khi chơi, số viên kẹo còn lại trong mỗi túi đều là số chẵn.

Chiến thuật chơi như sau:

Lượt chơi đầu tiên, *An* lấy 1 viên ở túi kẹo thứ hai. Kết thúc lượt chơi này, số viên kẹo ở túi thứ nhất và túi thứ hai lần lượt là 18 viên và 20 viên. Như vậy *An* đã thực hiện lượt chơi chiến thắng.

Đến lượt chơi của *Bình*, *Bình* có thể lựa chọn 1 trong 3 cách chơi:

+ *Cách* 1: *Bình* chỉ chọn 1 viên ở túi kẹo thứ nhất, thì sau lượt chơi túi kẹo thứ nhất còn 17 viên, túi kẹo thứ hai còn 20 viên.

+ *Cách* 2: *Bình* chỉ chọn 1 viên ở túi kẹo thứ hai, thì sau lượt chơi túi kẹo thứ nhất còn 18 viên, túi kẹo thứ hai còn 19 viên.

+ *Cách* 3: *Bình* chọn 1 viên kẹo ở mỗi túi, thì sau lượt chơi túi kẹo thứ nhất còn 17 viên, túi kẹo thứ hai còn 19 viên.

Sau lượt chơi của *Bình*, có ít nhất một túi kẹo trên bàn có số viên kẹo còn lại là số lẻ.

Như vậy *Bình* không thực hiện được lượt chơi chiến thắng.

Tiếp đó, đến lượt chơi của *An*, *An* thực hiện được lượt chơi chiến thắng như sau:

+ Nếu số kẹo ở cả hai túi là số lẻ, *An* lấy mỗi túi một viên.

+ Nếu số kẹo ở một trong hai túi là số lẻ, túi còn lại có số kẹo là số chẵn thì *An* lấy 1 viên kẹo ở túi kẹo có số kẹo là số lẻ.

Như vậy *An* đã thực hiện được lượt chơi chiến thắng.

Cứ tiếp tục chơi như vậy, *An* luôn thực hiện được lượt chơi chiến thắng.

Vì số kẹo là hữu hạn nên sau một số lượt chơi thì *An* thực hiện *lượt chơi chiến thắng* để đưa số kẹo trong cả hai túi về bằng 0. Khi đó, đến lượt *Bình* lấy kẹo thì *Bình* không thể lấy được viên kẹo nào nên *An* là người thắng cuộc.

TRẦN QUANG THUẬN
(GV Trung học Vinschool Ocean Park Hà Nội)
Giới thiệu

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH BẮC GIANG
NĂM HỌC 2023-2024
Môn thi: Toán - Lớp 9; Mã đề: 191. Thời gian làm bài: 120 phút

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM (6,0 *điểm*).

Câu 1. Rút gọn biểu thức

$$P=\frac{4xy^2}{x^2-y^2}\sqrt{\frac{x^2-2xy+y^2}{16x^2y^4}}$$

với $x<y<0$ ta được

A. $P=\frac{-1}{x-y}$. B. $P=\frac{-1}{x+y}$.

C. $P=\frac{1}{x-y}$. D. $P=\frac{1}{x+y}$.

Câu 2. Cho đường tròn (O) có dây cung $AB=28$. Gọi M là điểm chính giữa của cung nhỏ AB. Biết khoảng cách từ M đến dây AB bằng 2. Bán kính của đường tròn (O) là

A. 40. B. 50. C. 30. D. 45.

Câu 3. Cho hình thang $ABCD$ có $\widehat{A}=\widehat{B}=90^0$, $\widehat{C}=60^0$, $AD=3$, $DB\perp DC$. Diện tích S của hình thang $ABCD$ là

A. $S=\frac{7\sqrt{3}}{2}$. B. $S=\frac{7\sqrt{3}}{4}$.

C. $S=14\sqrt{3}$. D. $S=7\sqrt{3}$.

Câu 4. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho hàm số $y=-x^2$ có đồ thị (P) và hàm số $y=(5m-6)x-15m+25$ (m là tham số) có đồ thị là đường thẳng d. Gọi m_0 là giá trị của tham số m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2=26$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $m_0<-3$. B. $-3\le m_0<-1$.

C. $m_0\ge 1$. D. $-1\le m_0<1$.

Câu 5. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=2x+8$. Gọi A,B là các giao điểm của (d) và (P). Toạ độ tất cả các điểm trên (P) cách đều hai điểm A,B là

A. $\left(\frac{7}{2};\frac{49}{4}\right),(-3;9)$. B. $\left(\frac{-7}{2};\frac{49}{4}\right),(-3;9)$.

C. $\left(\frac{-7}{2};\frac{49}{4}\right),(3;9)$. D. $\left(\frac{7}{2};\frac{49}{4}\right),(3;9)$.

Câu 6. Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB và M là điểm di động trên đường tròn $(M\ne A,B)$. Kẻ MH vuông góc với AB tại H. Diện tích tam giác MOH lớn nhất bằng

A. $\frac{R^2}{4}$. B. $\frac{R^2}{6}$. C. $\frac{R^2}{3}$. D. $\frac{R^2\sqrt{2}}{4}$.

Câu 7. Cho hai số thực x,y thỏa mãn $x\le 3, y\ge 0$ và $x^2-y^2=2x-1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-3y+3}$ bằng

A. $\sqrt{7}$. B. $2\sqrt{5}$. C. $\sqrt{14}$. D. $\sqrt{10}$.

Câu 8. Cho biểu thức $P=\frac{20}{10-5\sqrt{3}}$. Khi rút gọn P về dạng $P=a+b\sqrt{3}$, với a và b là các số nguyên, tính $a.b$.

A. $a.b=-8$. B. $a.b=8$.

C. $a.b=-32$. D. $a.b=32$.

Câu 9. Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính BC, điểm A thay đổi trên nửa đường tròn (A không trùng với B và C). Kẻ AH vuông góc với BC (H thuộc BC). Gọi I, K lần lượt là các điểm đối xứng với H qua AB và AC. Diện tích tứ giác $BIKC$ lớn nhất bằng

A. $\frac{3R^2}{4}$. B. $2R^2$. C. $\frac{2R^2}{3}$. D. R^2.

Câu 10. Cho hệ phương trình $\begin{cases}2x+y=5m-1\\x-2y=2\end{cases}$ (m là tham số). Số giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ thỏa mãn $x^2-2y=-2$ là

A. 2. B. 0. C. 1. D. 3.

Câu 11. Cho parabol $(P): y=\frac{1}{2}x^2$ và hai điểm $A(-2;2)$, $B(4;8)$ nằm trên (P). Gọi M là điểm thay đổi trên (P) và có hoành độ là $m\ (-2<m<4)$. Khi tam giác ABM có diện tích lớn nhất, độ dài của đoạn thẳng OM là

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$. B. $2\sqrt{2}$. C. $\sqrt{5}$. D. 0.

Câu 12. Tích các giá trị của tham số m để khoảng cách từ gốc toạ độ O đến đường thẳng $y=2x+m-1$ bằng 1 là

A. -4. B. 6. C. 24. D. -24.

Câu 13. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để các hàm số $y=(3-2m)x+\frac{5}{m}-m$ và $y=\frac{3}{\sqrt{2m+3}}x+m^2+1$ cùng đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 4. B. 1. C. 3. D. 2.

Câu 14. Cho các số thực dương a,b,c thoả mãn $ab+bc+ca=1$. Rút gọn biểu thức $Q=\frac{(b+c)\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{(b^2+1)(c^2+1)}}$, ta được

A. $Q=\frac{a+b+c}{\sqrt{3}}$. B. $Q=1$.

C. $Q=3bc$. D. $Q=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Câu 15. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x+my=m+1 \\ mx+y=3m-1 \end{cases}$ (m là tham số). Tổng bình phương các số nguyên m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)$ mà x, y đều là số nguyên là

A. 14. B. 9. C. 13. D. 0.

Câu 16. Cho tam giác ABC cân tại A với $AB=5$, $BC=6$. Kẻ đường cao BH của tam giác ABC. Tỉ số $\frac{AH}{AC}$ bằng

A. $\frac{7}{25}$. B. $\frac{2}{5}$. C. $\frac{3}{10}$. D. $\frac{2}{7}$.

Câu 17. Cho phương trình:

$$x^2+(m-2)x-m^2+2m-3=0$$

(x là ẩn, m là tham số). Tổng tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $2|x_1|-|x_2|=4$ (với $x_1<x_2$) là

A. 12. B. 3. C. 18. D. 15.

Câu 18. Cho hai số thực x,y thỏa mãn $x^2+y^2\neq 0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x^2+4xy+5y^2}{x^2+y^2}$ là $a-\sqrt{b}$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $2a+b=19$. B. $2a+b=17$.

C. $2a+b=8$. D. $2a+b=14$.

Câu 19. Cho đường tròn $(O;4\sqrt{3})$ có hai dây AB và CD vuông góc với nhau. Khi đó AD^2+BC^2 bằng

A. 80. B. 96. C. 192. D. $48\sqrt{3}$.

Câu 20. Cho phương trình

$$x^2-3(m+1)x+2m^2+5m+2=0.$$

Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 thỏa mãn $|x_1+x_2|=2|x_1-x_2|$?

A. 3. B. 0. C. 2. D. 1.

II. PHẦN TỰ LUẬN (14,0 điểm).

Câu 1. *(5,0 điểm)*

1) Rút gọn biểu thức

$$P=\frac{x-4\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+1}+\frac{1-3\sqrt{x}+x}{x^2+\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}-x+\sqrt{x}},$$

với $x>0$.

2) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường thẳng $d: y=(m-1)x+m-2\ (m\neq 1)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng d tạo với hai trục toạ độ một tam giác có diện tích bằng 2.

3) Giải phương trình

$$8x^3+26x^2+3\sqrt{5x+1}=13x+3.$$

Câu 2. *(4,0 điểm)*

1) Tìm các số nguyên dương a, b để $a^2b^2-4a-4b$ là số chính phương.

2) Cho đa thức

$$f(x)=x^{2024}+a_{2023}x^{2023}+a_{2022}x^{2022}+...+a_1x+a_0$$

$(a_0,a_1,...,a_{2023}\in\mathbb{Z})$ có $f(\sqrt{7}-2)=20$. Chứng minh $4f(-2-\sqrt{7})+3$ là một số nguyên tố.

Câu 3. (4,0 *điểm*) Cho đường tròn $(O;R)$ có dây BC cố định $(BC\neq 2R)$. Trên cung lớn BC của đường tròn lấy điểm A sao cho $AC>AB>BC$. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC, tiếp xúc với các cạnh AB,AC lần lượt tại D,E. Các tia BI,CI cắt DE theo thứ tự tại M,N.

1) Chứng minh tứ giác $BIND$ là tứ giác nội tiếp.

2) Qua điểm M kẻ đường thẳng song song với AB cắt cạnh BC tại điểm P. Gọi F là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IMN. Chứng minh $MN.PF=2MF.NP$.

3) Khi điểm A di chuyển trên cung lớn BC sao cho $AC>AB>BC$, chứng minh

$$\frac{AB+BC+CA}{MN+MD+NE}\text{ không đổi.}$$

Câu 4. (1,0 *điểm*) Cho ba số thực dương x,y,z thỏa mãn $x+y+z=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{x^2}{\sqrt{15x^2+26xy+8y^2}}+\frac{y^2}{\sqrt{15y^2+26yz+8z^2}}+\frac{z^2}{\sqrt{15z^2+26zx+8x^2}}.$$

NGUYỄN ANH TUẤN
(Trường THPT chuyên Bắc Giang)
Giới thiệu

****

CON ĐƯỜNG ... *(Tiếp theo trang 6)*

Nhận xét. Trong bài toán 3.1 nếu ta xem 2 ở số mũ của a^2b^2 là n, xem 1 ở số mũ của $(a^2+b^2)=(a^2+b^2)^1$ là m và xem 4 ở đẳng thức giả thiết là k thì ta có bài toán tổng quát như sau.

Bài toán 3.2 (bài toán tổng quát 4). *Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a+b=k>0$. Tìm GTLN của biểu thức: $Q=a^nb^n(a^2+b^2)^m$ với $m,n\in\mathbb{N}^*;n\geq m$.*

Lời giải. Ta có:

$$4^{n-m}.4^m2^mQ=[4ab]^{n-m}.\left[4.(2ab).(a^2+b^2)\right]^m.$$

Áp dụng BĐT $(x+y)^2\geq 4xy$ với mọi x,y, ta có:

$$4^{n-m}.4^m2^m.Q=[4ab]^{n-m}.\left[4.(2ab).(a^2+b^2)\right]^m$$

$$\leq\left[(a+b)^2\right]^{n-m}\left[\left((2ab)+(a^2+b^2)\right)^2\right]^m$$

$$\Rightarrow 2^{2n+m}.Q\leq(a+b)^{2(n-m)}\left[\left((a+b)^2\right)^2\right]^m$$

$$=(a+b)^{2(n-m)}.(a+b)^{4m}$$

$$\Rightarrow 2^{2n+m}Q\leq(a+b)^{2m+2n}=k^{2m+2n}$$

$$\Rightarrow Q\leq\frac{k^{2m+2n}}{2^{2n+m}};\ Q=\frac{k^{2m+2n}}{2^{2n+m}}\text{ khi }\begin{cases}a=b\\2ab=a^2+b^2\\a+b=k\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a=b=\frac{k}{2}$$

Vậy $\max Q=\dfrac{k^{2m+2n}}{2^{2n+m}}$ khi $a=b=\dfrac{k}{2}$.

BÀI TẬP ÁP DỤNG

a) Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a+b=2$. Tìm GTLN của biểu thức

$$Q_1=ab(a^2+b^2).$$

b) Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a+b=4$. Tìm GTLN của biểu thức

$$Q_2=a^3b^3(a^2+b^2)^2.$$

c) Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a+b=6$. Tìm GTLN của biểu thức

$$Q_3=a^4b^4(a^2+b^2)^3.$$

d) Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a+b=2$. Tìm GTLN của biểu thức

$$Q_4=a^{2023}b^{2023}(a^2+b^2)^4.$$

DIỄN ĐÀN DẠY HỌC TOÁN

THEO CHƯƠNG TRÌNH VÀ SGK MỚI

KHAI THÁC SÂU MỘT BÀI TOÁN THI ĐẠI HỌC

LÝ CHÍ HƯỚNG

(Trường THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang, Hưng Yên)

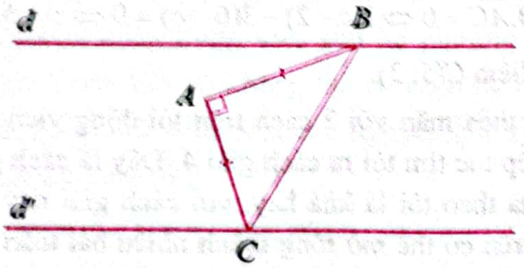
Chương trình giáo dục phổ thông 2018 môn Toán đã nhấn mạnh đến vấn đề phát triển năng lực tư duy cho học sinh, đặc biệt là tư duy sáng tạo toán học. Trong bài viết này tôi xin khai thác một bài toán thi tuyển sinh vào Đại học với những cách giải khác nhau, đồng thời đề xuất hướng giải cho một số bài toán khác. Hy vọng rằng bài viết sẽ giúp cho các em hứng thú học tập hơn với bộ môn Toán.

Trong đề thi Đại học khối B năm 2007 có bài toán sau:

Bài toán 1. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai đường thẳng: $d: x+y-2=0$; $d': x+y-8=0$; và điểm $A(2;2)$. Tìm trên đường thẳng d điểm B và trên đường thẳng d' điểm C sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.*

Đứng trước bài toán trên học sinh (HS) thường đưa ra hướng giải như sau.

Lời giải.



Cách 1. Gọi $B(b; 2-b)$; $C(c; 8-c)$ lần lượt là các điểm thuộc d và d'. Để tam giác ABC vuông cân tại A ta có hệ: $\begin{cases} AB = AC \\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (b-2; -b)$, $\overrightarrow{AC} = (c-2; 6-c)$. Hệ trở thành: $\begin{cases} (b-2)^2 + b^2 = (c-2)^2 + (6-c)^2 \\ (b-2)(c-2) - b(6-c) = 0 \end{cases}$ (1).

Đến đây thì HS gặp khó khăn trong việc giải hệ (1). Trong khi dạy bài này, tôi động viên và hướng dẫn các em hai hướng giải như sau:

Hướng 1: *Đặt ẩn phụ đưa về hệ đẳng cấp đã biết cách giải.*

Ta biến đổi hệ (1) thành:

$$\begin{cases} b^2 - 2b + 2 = c^2 - 8c + 20 \\ bc - 4b - c + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (b-1)^2 - (c-4)^2 = 3 \\ bc - 4b - c + 2 = 0 \end{cases} \quad (2).$$

Đặt $\begin{cases} b-1 = x \\ c-4 = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = x+1 \\ c = y+4 \end{cases}$ thay vào hệ (2) ta được: $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$. Đến đây ta được hệ đẳng cấp bậc 2 đã biết cách giải.

Hướng 2: *Sử dụng số phức.*

Ta biến đổi hệ (1) thành:

$$\begin{cases} b^2 - c^2 - 2b + 8c - 18 = 0 \\ 2bc - 8b - 2c + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (b^2 - c^2 - 2b + 8c - 18) + (2bc - 8b - 2c + 4)i = 0$$

$$\Leftrightarrow (b^2 + 2bci - c^2) - 2(b + ci) - 8(bi - c) - 18 + 4i = 0$$

$$\Leftrightarrow (b + ci)^2 - 2(1 + 4i)(b + ci) - 18 + 4i = 0.$$

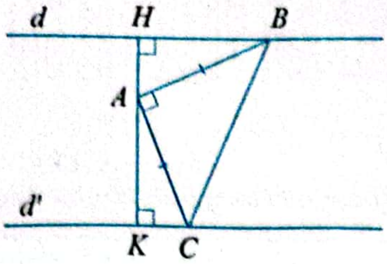
Đến đây ta được phương trình bậc 2 trong tập số phức các em dễ dàng tìm được nghiệm là:

$$\left[\begin{array}{l} b + ci = 3 + 5i \\ b + ci = -1 + 3i \end{array}\right.$$

và có điểm $B(3;-1)$, $C(5;3)$ hoặc $B(-1;3)$, $C(3;5)$.

Không dừng lại ở cách 1, tôi hướng dẫn HS làm cách khác.

Cách 2.



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên d và d' ta dễ dàng chứng minh được hai tam giác AHB và tam giác CKA bằng nhau khi tam giác ABC vuông cân tại A. Ta có hệ: $\begin{cases} AK = BH \\ CK = AH \end{cases}$.

Để tìm tọa độ của H và K ta lập phương trình đường thẳng đi qua A và vuông góc với d (cần chú ý rằng d và d' song song). Đường thẳng đó cắt d và d' tại H và $K \Rightarrow$ PT đường thẳng này là $x - y = 0$.

Ta có: $H(1; 1)$, $K(4; 4)$, $B(b; 2 - b)$, $C(c; 8 - c)$,

$AH^2 = 2, CK^2 = 2(c-4)^2, AK^2 = 8, BH^2 = 2(b-1)^2$.

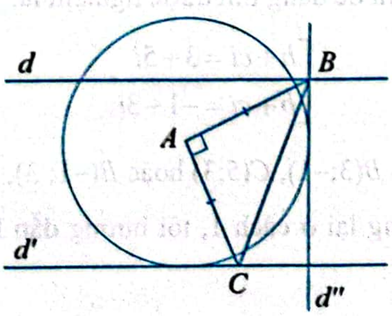
Hệ trở thành: $\begin{cases} (b-1)^2 = 4 \\ (c-4)^2 = 1 \end{cases}$. Hệ này được giải dễ dàng, tuy nhiên ta phải thử lại và kết luận.

Tam giác ABC vuông cân tại A khiến cho chúng ta nghĩ đến phép quay tâm A góc quay $\pm 90^0$. Do đó tôi hướng dẫn học sinh làm cách 3.

Cách 3. Giả sử ta có tam giác ABC vuông cân tại A thỏa mãn đề bài, vậy điểm B là ảnh của điểm C qua phép quay tâm A góc quay 90^0.

Ta dựng d'' là ảnh của d' qua phép quay tâm A góc quay 90^0. Giao điểm của d và d'' chính là điểm B. Có điểm B ta dễ dàng tìm được điểm C.

Cụ thể:



Tính khoảng cách từ A đến d': $d(A;d') = 2\sqrt{2}$.

Đường tròn tâm A bán kính $R = 2\sqrt{2}$ có phương trình là: $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 8$.

Đường thẳng d'' là tiếp tuyến của đường tròn và vuông góc với d'. Ta có d'' có dạng: $x - y + c = 0$.

Do d'' là tiếp tuyến của đường tròn:

$$d(A;d'') = R \Leftrightarrow \frac{|2-2+c|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow c = \pm 4.$$

Trường hợp 1.

d'' có phương trình: $x - y + 4 = 0$ ta có điểm $B(-1; 3)$ là giao điểm của d và d''.

Gọi $C(c, 8 - c)$, ta có:

$$\overrightarrow{AC} = (c-2, 6-c), \overrightarrow{AB} = (-3;1).$$

Mà tam giác ABC vuông tại A nên

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow -3(c-2) + 1(6-c) = 0 \Leftrightarrow c = 3.$$

Vậy điểm $C(3; 5)$.

Trường hợp 2.

d'' có phương trình: $x - y - 4 = 0$ ta có điểm $B(3; -1)$ là giao điểm của d và d''.

Gọi $C(c, 8 - c)$, ta có:

$$\overrightarrow{AC} = (c-2, 6-c), \overrightarrow{AB} = (1;-3).$$

Mà tam giác ABC vuông tại A nên

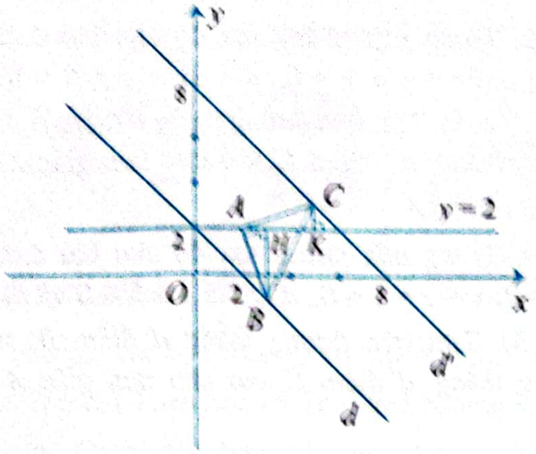
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow 1(c-2) - 3(6-c) = 0 \Leftrightarrow c = 5.$$

Vậy điểm $C(5; 3)$.

Chưa thỏa mãn với 3 cách trên tôi động viên các em tiếp tục tìm tòi ra cách giải 4. Đây là cách giải mà mà theo tôi là khá hay, với cách giải này bài toán trên có thể mở rộng thành nhiều bài toán thú vị và một số bài nếu không làm theo cách này gần như bế tắc.

Cách 4. Qua A kẻ đường thẳng $y = 2$ song song với trục hoành. Giả sử có tam giác ABC vuông cân tại A thỏa mãn đề bài.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của B, C trên đường thẳng $y = 2$. Dễ dàng chứng minh được $\Delta AHB = \Delta CKA$. Ta có hệ: $\begin{cases} AK = BH \\ CK = AH \end{cases}$.



Mà $A(2;\ 2)$, $B(b;\ 2-b)$, $C(c;\ 8-c)$, $H(b;\ 2)$, $K(c;\ 2)$ nên: $AK^2=(c-2)^2, BH^2=b^2,$

$$CK^2=(c-6)^2, AH^2=(b-2)^2$$

Hệ trở thành: $\begin{cases}(c-2)^2=b^2\\(c-6)^2=(b-2)^2\end{cases}$.

Hệ này được giải dễ dàng, tuy nhiên ta phải thử lại và kết luận.

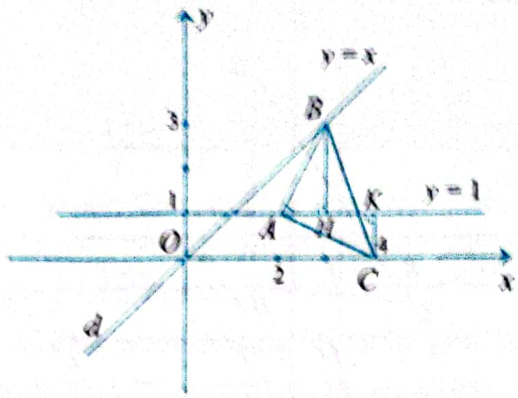
Tiếp tục đào sâu suy nghĩ tôi nhận thấy giả thiết 2 đường thẳng d và d' song song với nhau rất đặc biệt, gợi ý cho tôi ra được các bài toán tương tự một cách dễ dàng và thành công ngay trong tất cả các lời giải của 4 cách làm trên.

Nhưng nếu thay đổi giả thiết cho hai đường thẳng d và d' cắt nhau (không vuông góc) thì cách 1 mà đa số học sinh suy nghĩ và làm theo thì gặp rất nhiều khó khăn trong việc giải hệ phương trình. Và tất nhiên khi đó không thể có cách làm số 2. Cách 3 và cách 4 thì vẫn còn nguyên giá trị. Sau đây là bài toán số 2.

Bài toán 2. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng d có phương trình: $x-y=0$ và điểm $A(2;\ 1)$. Tìm trên đường thẳng d điểm B, trên trục hoành điểm C sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.*

Khi đưa bài tập này cho học sinh đa số các em suy nghĩ và làm theo cách 1. Và tôi cũng mất rất nhiều thời gian vào phương án này vì thách thức đặt ra là giải hệ phương trình. Tất nhiên sử dụng phương pháp thế đưa về phương trình bậc 4 có hai nghiệm hữu tỷ cũng đi tới kết quả.

Cách khác.



Qua A kẻ đường thẳng song song với trục hoành có phương trình là: $y=1$. Giả sử có tam giác ABC vuông cân tại A thỏa mãn đề bài.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của B, C trên đường thẳng $y=1$. Dễ dàng chứng minh được $\Delta AHB=\Delta CKA$.

Ta có hệ: $\begin{cases}AK=BH\\CK=AH\end{cases}$. Mà $A(2;\ 1)$, $B(b;\ b)$, $C(c;\ 0)$, $H(b;\ 1)$, $K(c;\ 1)$ nên

$$AK^2=(c-2)^2, BH^2=(b-1)^2,$$
$$CK^2=1,\ AH^2=(b-2)^2.$$

Hệ trở thành: $\begin{cases}(c-2)^2=(b-1)^2\\1=(b-2)^2\end{cases}$. Hệ này được giải dễ dàng, tuy nhiên ta phải thử lại và kết luận.

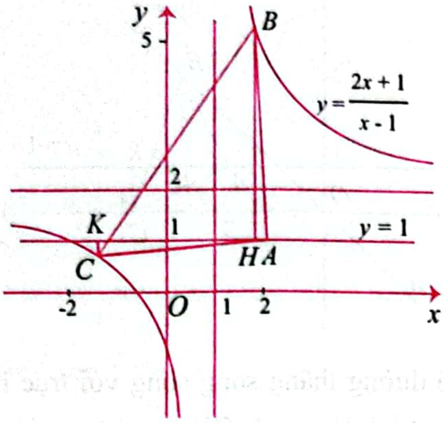
Bây giờ nếu d và d' là hai nhánh của một đồ thị "cong", chẳng hạn hai nhánh của đồ thị hàm phân thức bậc 1 trên bậc 1 thì kết quả bài toán 1 như thế nào! Chúng ta sang bài toán số 3.

Bài toán 3. *Cho điểm $A(2;\ 1)$, tìm trên hai nhánh đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ các điểm B, C sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.*

Nhận xét. Đây là một câu hỏi phụ cho bài khảo sát hàm số tương đối khó, đa số học sinh làm theo cách 1 và gặp nhiều khó khăn trong khi giải hệ phương trình. Hướng giải sử dụng phép quay tâm

A với góc quay $\pm 90^0$ cũng không gặp thuận lợi. Tuy nhiên cách giải 4 vẫn còn nguyên giá trị.

Lời giải.



Qua A kẻ đường thẳng song song với trục hoành có phương trình là: $y = 1$.

Giả sử có tam giác ABC vuông cân tại A thỏa mãn đề bài. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của B, C trên đường thẳng $y = 1$.

Dễ dàng chứng minh được $\Delta AHB = \Delta CKA$. Ta có hệ: $\begin{cases} AK = BH \\ CK = AH \end{cases}$ và $A(2;\ 1)$, $B\left(b;\dfrac{2b+1}{b-1}\right)$, $C\left(c;\dfrac{2c+1}{c-1}\right)$, $H(b;\ 1), K(c;\ 1)$,

Hệ trở thành: $\begin{cases} (c-2)^2 = \left(\dfrac{b+2}{b-1}\right)^2 \\ \left(\dfrac{c+2}{c-1}\right)^2 = (b-2)^2 \end{cases}$. Giải hệ phương trình trên ta được 2 điểm cần tìm là $(2;\ 5)$ và $(-2;\ 1)$.

Chú ý. Do vai trò của B, C như nhau và thuộc hai nhánh đồ thị hàm số do đó chúng ta có thể giả sử $b > 1$ và $c < 1$ để kiểm tra điều kiện.

BÀI TẬP THAM KHẢO

Bài 1. Trong mặt phẳng tọa độ cho hai đường thẳng d: $x + y + 1 = 0$, d': $x + y + 5 = 0$ và điểm $A(1;\ 1)$. Tìm trên đường thẳng d điểm B, trên đường thẳng d' điểm C sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.

Bài 2. Trong mặt phẳng tọa độ cho hai đường thẳng d: $2x + y + 1 = 0$, d': $2x + y + 5 = 0$ và điểm $A(2;\ 1)$. Tìm trên đường thẳng d điểm B, trên đường thẳng d' điểm C sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.

Bài 3. Trong mặt phẳng tọa độ cho hai đường thẳng d: $x + y + 1 = 0$, d': $x + y + 5 = 0$ và điểm $A(2;\ 3)$. Tìm trên đường thẳng d điểm B, trên đường thẳng d' điểm C sao cho tam giác ABC đều.

Bài 4. Trong mặt phẳng tọa độ cho hai đường thẳng d: $2x + y + 1 = 0$, d': $x + y + 5 = 0$ và điểm $A(1;\ 2)$. Tìm trên đường thẳng d điểm B, trên đường thẳng d' điểm C sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.

Bài 5. Trong mặt phẳng tọa độ cho hai đường thẳng d: $x + y + 1 = 0$, d': $x - 2y + 5 = 0$ và điểm $A(3;\ 1)$. Tìm trên đường thẳng d điểm B, trên đường thẳng d' điểm C sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.

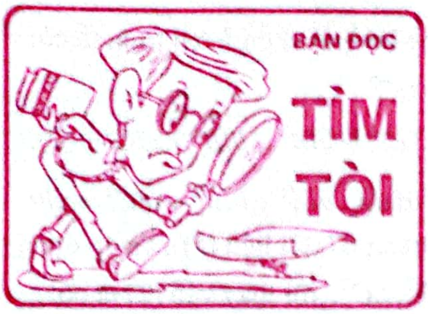
Bài 6. Cho đồ thị hàm số (H): $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ và đường thẳng d: $x + y - 5 = 0$, điểm $A(2;\ 2)$. Tìm trên đường thẳng d điểm B, trên đồ thị hàm số (H) điểm C sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.

Bài 7. Cho đồ thị hàm số (H): $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ và đường thẳng d: $x + y - 5 = 0$, điểm $A(2;\ 1)$ Tìm trên đường thẳng d điểm B, trên đồ thị hàm số (H) điểm C sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.

Bài 8. Cho đồ thị hàm số (H): $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$ và đường thẳng d: $x - y + 1 = 0$, điểm $A(2;\ 1)$. Tìm trên đường thẳng d điểm B, trên đồ thị hàm số (H) điểm C sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.

Bài 9. Cho đồ thị hàm số (H): $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ và đường thẳng d: $x + y - 5 = 0$, điểm $A(2;\ 2)$. Tìm trên đường thẳng d điểm B, trên đồ thị hàm số (H) điểm C sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.

Bài 10. Cho đường thẳng d: $2x + y - 1 = 0$ và parabol (P): $y = x^2$, điểm $A(1;\ 2)$. Tìm trên đường thẳng d điểm B, trên parabol (P) điểm C sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.



ĐI TÌM LỜI GIẢI CHO NHỮNG TRĂN TRỞ VỀ ĐIỂM LEMOINE

NGUYỄN VIẾT CHƯƠNG
(Cựu học sinh THPT chuyên Hà Tĩnh)

Đã bao giờ các bạn trăn trở với những câu hỏi mở trên Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ? Nhưng với tôi thì có. Cách đây hơn 15 năm, trong số 375, chuyên mục *Bạn đọc tìm tòi* đã có những nghiên cứu về mối tương quan vị trí hình học giữa trọng tâm G và điểm Lemoine (mà ta ký hiệu là L) trong tam giác ABC. Ở cuối bài, tác giả có một mong mỏi hết sức mới mẻ:"*Giá như có được một hệ thức định lượng hoặc một bất đẳng thức nào đó giữa chúng thì tuyệt biết bao*!". Mong mỏi đó làm tôi rất ấn tượng và cứ trăn trở mãi.

Suốt 15 năm qua, tôi đã nhiều lần cố gắng đi tìm câu trả lời, nhưng không thành công. Hôm nay tôi đã mở từng trang cuốn sách "Bài tập nâng cao và một số chuyên đề hình học 10 - tác giả TS. *Nguyễn Minh Hà*" (*) như muốn tìm ra một manh mối nào đó. Và thật may mắn, tôi bắt gặp ví dụ 5.6 (trang 65), phát biểu như sau:

Cho tam giác ABC, trọng tâm G. Chứng minh rằng với mọi điểm M, ta có:

$$MA^2+MB^2+MC^2=GA^2+GB^2+GC^2+3MG^2.$$

Lời giải. Ta có: $MA^2+MB^2+MC^2$

$=\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2$

$=3MG^2+2\overrightarrow{MG}\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)+GA^2+GB^2+GC^2$

$=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2$ (đpcm).

Và nếu như ta cho M trùng với L, ta có:

$$LA^2+LB^2+LC^2=3LG^2+GA^2+GB^2+GC^2.$$

Để ý rằng $GA^2+GB^2+GC^2=\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)$ (với $a=BC$, $b=CA$, $c=AB$) (hệ thức Leibniz), vậy là, để tính LG, ta chỉ cần tính được LA, LB, LC. Nhưng tính như thế nào đây, không hề đơn giản chút nào!

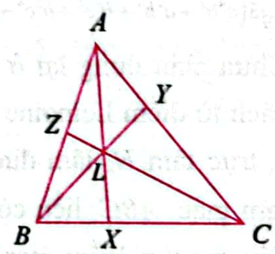
Tôi đã dành nhiều thời gian để lật lại hàng trăm tờ Tạp chí TH&TT trước đây, và trong số 451 đã tìm thấy Định lí Van-Aubel, nội dung như sau:

Nếu trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC lấy các điểm X, Y, Z, tương ứng sao cho AX, BY, CZ đồng quy tại J thì ta có hệ thức:

$$\frac{JA}{JX}=\frac{ZA}{ZB}+\frac{YA}{YC}.$$

(Bạn đọc xem phép chứng minh trên TH&TT số 451, tháng 1 năm 2015, trang 2).

Tới đây, ta quay trở lại bài viết ở số 375 để xem mô tả về đường đối trung: "*Đường đối trung là tập hợp những điểm thuộc miền tam giác ABC sao cho khoảng cách từ điểm đó đến hai cạnh AB và AC tỉ lệ thuận với độ dài AB và AC*".



Tức là $\frac{AB}{AC}=\frac{d(X;AB)}{d(X;AC)}=\frac{XB.\sin B}{XC.\sin C}$. Suy ra:

$$\frac{XB}{XC}=\frac{AB.\sin C}{AC.\sin B}=\frac{AB^2}{AC^2}=\frac{c^2}{b^2},$$

do đó: $\frac{XB}{BC}=\frac{c^2}{b^2+c^2}$. Tương tự cũng có:

$$\frac{ZA}{ZB}=\frac{b^2}{a^2};\ \frac{YC}{YA}=\frac{a^2}{c^2}.$$

Từ đó áp dụng định lý Van-Aubel ta có:

$$\frac{LA}{LX}=\frac{ZA}{ZB}+\frac{YA}{YC}=\frac{b^2+c^2}{a^2}.$$

Suy ra: $\dfrac{LA}{AX}=\dfrac{b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}$. Mà theo định lý côsin trong tam giác ABX ta có:

$$AX^2=AB^2+BX^2-2AB.BX.\cos B$$

$$=c^2+\left(a.\frac{c^2}{b^2+c^2}\right)^2-2c.\left(a.\frac{c^2}{b^2+c^2}\right).\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

$$=c^2+\left(a.\frac{c^2}{b^2+c^2}\right)^2-\left(\frac{c^2}{b^2+c^2}\right)\left(c^2+a^2-b^2\right)$$

Suy ra: $LA^2=AX^2.\left(\dfrac{b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}\right)^2$

$$=\frac{1}{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}\Big[\left(b^2+c^2\right)^2c^2+a^2c^4-$$
$$-\left(b^2+c^2\right)c^2\left(c^2+a^2-b^2\right)\Big]$$

$$=\frac{1}{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}\left(2b^4c^2+2b^2c^4-a^2b^2c^2\right).$$

Tính toán tương tự cho LB^2 và LC^2, từ đó ta rút ra được: $LG=\dfrac{1}{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}\times$

$$\times\sqrt{3\left(a^4b^2+a^2b^4+b^4c^2+b^2c^4+c^4a^2+c^2a^4\right)-a^6-b^6-c^6-15a^2b^2c^2}$$

Chưa chịu dừng lại ở đó, tôi tự hỏi rằng khoảng cách từ điểm Lemoine tới tâm đường tròn nội tiếp I, trực tâm H, tâm đường tròn ngoại tiếp O của tam giác ABC liệu có tính được hay không? Tôi tiếp tục tìm kiếm manh mối trong tài liệu (*), và may mắn khi gặp ví dụ 1.21 (trang 19), phát biểu như sau:

Cho tam giác ABC và một điểm M bất kỳ trong tam giác. Đặt $S_{MBC}=S_a, S_{MCA}=S_b, S_{MAB}=S_c$. Chứng minh rằng:

$$S_a\overrightarrow{MA}+S_b\overrightarrow{MB}+S_c\overrightarrow{MC}=\vec{0}\quad(1).$$

(Nếu M nằm ngoài tam giác ABC, chẳng hạn M thuộc góc $\widehat{BAC}$, tương tự ta cũng có kết quả:

$$-S_a\overrightarrow{MA}+S_b\overrightarrow{MB}+S_c\overrightarrow{MC}=\vec{0}).$$

Tính LI. Cho M trùng với I và chia 2 vế của (1) cho nửa bán kính đường tròn nội tiếp, ta có:

$$a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\vec{0}.$$

Từ đó làm tương tự lời giải ví dụ 5.6 ở trên, ta có:

$$aLA^2+bLB^2+cLC^2$$
$$=(a+b+c)LI^2+aIA^2+bIB^2+cIC^2\quad(2).$$

Trong đó, để ý rằng $aIA^2+bIB^2+cIC^2=abc$ (Xem ví dụ 5.10, trang 67, tài liệu (*)), và áp dụng công thức LA^2, LB^2, LC^2, rồi thay vào (2) ta có:

$$(a+b+c)LI^2=\frac{\sum a\left(2b^4c^2+2b^2c^4-a^2b^2c^2\right)}{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}-abc.$$

Từ đây rút gọn ra được:

$$LI=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{\frac{abc}{a+b+c}}\times$$
$$\times\sqrt{\begin{pmatrix}2a^3b+2a^3c+2b^3c+2b^3a+2c^3a+2c^3b-a^4-b^4-\\-c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2-a^2bc-b^2ca-c^2ab\end{pmatrix}}$$

Tính LH. Xét trường hợp tam giác ABC nhọn (các trường hợp khác làm tương tự), cho M trùng với H và đặt $S_{HBC}=S_a, S_{HAC}=S_b, S_{HAB}=S_c$. Chia 2 vế của (1) cho S_{ABC} (ta gọi tắt là S), ta có:

$$\frac{S_a}{S}\overrightarrow{HA}+\frac{S_b}{S}\overrightarrow{HB}+\frac{S_c}{S}\overrightarrow{HC}=\vec{0}.$$

Từ đó làm tương tự lời giải ví dụ 5.6 ở trên, ta cũng có: $\dfrac{S_a}{S}LA^2+\dfrac{S_b}{S}LB^2+\dfrac{S_c}{S}LC^2$

$$=LH^2+\frac{S_a}{S}HA^2+\frac{S_b}{S}HB^2+\frac{S_c}{S}HC^2\quad(3).$$

Nhận thấy hai tam giác ABC và HBC có cùng bán kính đường tròn ngoại tiếp là R, suy ra:

$$\frac{S_a}{S}=\frac{S_{HBC}}{S_{ABC}}=\frac{\dfrac{HB.HC.BC}{4R}}{\dfrac{AB.BC.CA}{4R}}=\frac{HB.HC}{AB.AC}$$

$$=\frac{2R\sin\widehat{HCB}.2R\sin\widehat{HBC}}{bc}$$

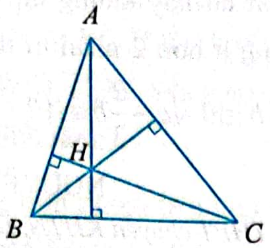
$$=\frac{4R^2\cos B\cos C}{bc}$$

$$=\frac{\left(c^2+a^2-b^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)}{\dfrac{(abc)^2}{R^2}}$$

$$=\frac{\left(c^2+a^2-b^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)}{16S^2}.$$

Hơn nữa: $HA^2=\left(2R\sin\widehat{HCA}\right)^2=\left(2R\cos A\right)^2$

$$=\left(2.\frac{abc}{4S}.\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2=\frac{a^2\left(b^2+c^2-a^2\right)^2}{16S^2}.$$



Tính toán tương tự cho $\frac{S_b}{S},\frac{S_c}{S},HB^2,HC^2$ và áp dụng công thức LA^2,LB^2,LC^2, rồi thay vào (3) ta được:

$$LH^2=\frac{S_a}{S}\left(LA^2-HA^2\right)+\frac{S_b}{S}\left(LB^2-HB^2\right)+\frac{S_c}{S}\left(LC^2-HC^2\right)$$

$$=\frac{1}{16S^2\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}\times$$

$$\times\left\{\left[\sum\left(c^2+a^2-b^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)\left(2b^4c^2+2b^2c^4-a^2b^2c^2\right)\right]\right.$$

$$\left.-\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\left(c^2+a^2-b^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)\left(b^2+c^2-a^2\right).\frac{\sum a^2\left(b^2+c^2-a^2\right)}{16S^2}\right\}$$

Từ công thức Heron dễ thấy $\frac{\sum a^2\left(b^2+c^2-a^2\right)}{16S^2}=1,$ từ đó rút gọn ta được:

$$LH=\frac{1}{4S\left(a^2+b^2+c^2\right)}\times$$

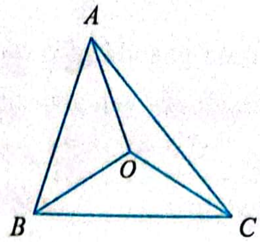
$$\times\sqrt{\begin{pmatrix}a^{10}+b^{10}+c^{10}+a^6b^2c^2+a^2b^6c^2+a^2b^2c^6\\-a^8b^2-a^8c^2-b^8c^2-b^8a^2-c^8a^2-c^8b^2\end{pmatrix}}.$$

Tính LO. Xét trường hợp tam giác ABC nhọn (các trường hợp khác làm tương tự), cho M trùng với O và đặt $S_{OBC}=S_a,S_{OAC}=S_b,S_{OAB}=S_c$. Chia 2 vế của (1) cho S_{ABC} (gọi tắt là S), ta có:

$$\frac{S_a}{S}\overrightarrow{OA}+\frac{S_b}{S}\overrightarrow{OB}+\frac{S_c}{S}\overrightarrow{OC}=\vec{0}.$$

Từ đó làm tương tự lời giải ví dụ 5.6 ở tài liệu (*), ta cũng có: $\frac{S_a}{S}LA^2+\frac{S_b}{S}LB^2+\frac{S_c}{S}LC^2$

$$=LO^2+\frac{S_a}{S}OA^2+\frac{S_b}{S}OB^2+\frac{S_c}{S}OC^2\quad(4).$$



Ta có: $S_a=S_{OBC}=\frac{1}{2}OB.OC.\sin\widehat{BOC}$

$$=R^2\sin A\cos A=4R^2\sin^2 A.\frac{1}{4}\cot A$$

$$=\frac{a^2\left(b^2+c^2-a^2\right)}{16S}\text{ (lưu ý }\cot A=\frac{b^2+c^2-a^2}{4S}\text{)},$$

suy ra: $\frac{S_a}{S}=\frac{S_{OBC}}{S}=\frac{a^2\left(b^2+c^2-a^2\right)}{16S^2}.$

Tính toán tương tự cho $\frac{S_b}{S},\frac{S_c}{S}$, chú ý rằng $OA^2=OB^2=OC^2=R^2=\frac{a^2b^2c^2}{16S^2}$ và áp dụng công thức LA^2,LB^2,LC^2 rồi thay vào (4) ta được:

$$LO^2=\frac{S_a}{S}\left(LA^2-OA^2\right)+\frac{S_b}{S}\left(LB^2-OB^2\right)+\frac{S_c}{S}\left(LC^2-OC^2\right)$$

$$=\frac{a^2b^2c^2}{16S^2\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}\left\{\left[\sum\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(2b^2+2c^2-a^2\right)\right]-\right.$$

$$\left.-\left(a^2+b^2+c^2\right)^2.\frac{\sum a^2\left(b^2+c^2-a^2\right)}{16S^2}\right\}$$

$$=\frac{a^2b^2c^2}{16S^2\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}.4\left(a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2\right).$$

$\left(\frac{\sum a^2\left(b^2+c^2-a^2\right)}{16S^2}=1\right)$. Do đó:

$$LO=\frac{abc}{2S\left(a^2+b^2+c^2\right)}.\sqrt{\left(a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2\right)}.$$

Các bạn cảm thấy thế nào nếu đặt dấu chấm hết ở đây! Được không, cũng được, nhưng không thoải mái. Bởi vì, ngoài các điểm G,I,H,O còn có rất nhiều điểm khác, ví dụ như *điểm Gergone*, *điểm Naghen*, *điểm Mittenpunkt*, *điểm Spieker*, *điểm Fermat*, *điểm Schiffler*, ... Khoảng cách từ *điểm Lemoine* tới chúng liệu có tính được không, và nếu có thì tính như thế nào? Câu trả lời xin dành cho các bạn trẻ yêu toán!

CÁC LỚP THCS

Bài T1/562 (Lớp 6). Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn

$$(x+y)^4+y\le 64x.$$

NGUYỄN ĐỨC TẤN

(TP. Hồ Chí Minh)

Bài T2/562 (Lớp 7). Tìm tất cả các số tự nhiên M có 3 chữ số mà M^n có 3 chữ số tận cùng là M với mọi số nguyên dương n.

NGUYỄN KIM SỐ

(TT BD&PT tài năng Toán học Nam Sáng - SMATH)

Bài T3/562. Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn

$$(x^2+1)(2y^3+1)=2y^2(x^3+x+1).$$

NGUYỄN VIỆT HÙNG

(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T4/562. Qua trung điểm của một cạnh bên của một hình thang, hãy dựng đường thẳng chia hình thang thành hai phần có diện tích bằng nhau.

ĐOÀN NHƯ TRIỆU

(Số 11/2A6 Chương Dương, TP. Hải Dương)

Bài T5/562. Cho các số thực a, b, c đôi một khác nhau và thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{(a-b)^4}+\frac{1}{(b-c)^4}+\frac{1}{(c-a)^4}.$$

ĐÀO VĂN TRUNG

(GV THPT Huỳnh Thúc Kháng, Nghệ An)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/562. Cho a, b, c là các số không âm thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=2$. Chứng minh rằng

$$a^3(1+bc)+b^3(1+ca)+c^3(1+ab)\le 2\sqrt{2}.$$

NGUYỄN NGỌC PHÚC

(GV THPT Nguyễn Khuyến, TP. Hồ Chí Minh)

Bài T7/562. Tồn tại hay không tập hợp hữu hạn $A\subset\mathbb{R}^+$ có không ít hơn 2 phần tử thỏa mãn: Với mọi $a,b\in A, a\ne b$ thì $\sqrt{a}-\frac{2}{3}b\in A$?

NGUYỄN TIẾN LÂM

(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T8/562. Chứng minh rằng trong mọi tam giác nhọn ABC ta luôn có

$$h_a^2\left(\frac{1}{m_b^2}+\frac{1}{m_c^2}\right)+h_b^2\left(\frac{1}{m_c^2}+\frac{1}{m_a^2}\right)+h_c^2\left(\frac{1}{m_a^2}+\frac{1}{m_b^2}\right)\ge 6$$

trong đó $h_a,h_b,h_c;m_a,m_b,m_c$ lần lượt là độ dài các đường cao và trung tuyến vẽ từ A, B, C của tam giác ABC.

NGUYỄN HÙNG CƯỜNG

(Xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, Bình Định)

Bài T9/562. Tìm m để phương trình sau đây có hai nghiệm thực phân biệt

$$3^{x^2-2x+1}-\log_5(x^2-2x+6)^8+10-\sqrt{-x^2+2x+m}=0.$$

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/562. Cho dãy số (a_n) được định nghĩa bởi

$$a_1=9 \text{ và } a_{n+1}=\frac{(n+5)a_n+22}{n+3},\ n\in\mathbb{N}^*.$$

Tìm tất cả các số nguyên dương n

a) Mà a_n là bình phương của một số nguyên.

b) Mà a_n chia hết cho 2023.

NGUYỄN ĐỨC TƯỞNG *(Pleiku)*

Bài T11/562. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(x+y)-f(x)f(y)=f(xy)-2xy-1$$

với mọi $x,y\in\mathbb{R}$.

ĐỖ LÊ HẢI THỤY

(GV THPT chuyên Bảo Lộc, Lâm Đồng)

Bài T12/562. Cho tam giác ABC có đường tròn ngoại tiếp (O) và đường tròn nội tiếp (I). D, E lần lượt là tiếp điểm của (I) với AB, AC; BI, CI theo thứ tự cắt lại (O) tại M, N; P, Q lần lượt đối xứng với B, C qua N, M; K, H lần lượt là trực tâm của các tam giác BPD, CQE. S là giao điểm của KQ và HP. Chứng minh rằng

a) Các đường tròn ngoại tiếp tam giác SQH, SPK cùng đi qua một điểm trên MN.

b) AS vuông góc với BC.

LƯU CÔNG ĐÔNG
(GV THPT chuyên ĐHSP Hà Nội)

Bài L1/562. Trong thí nghiệm giao thoa ánh sáng với khe Y-âng, nguồn sáng S phát bức xạ đơn sắc λ, màn quan sát cách mặt phẳng hai khe một khoảng không đổi D, khoảng cách giữa hai khe $S_1S_2 = a$ có thể thay đổi (nhưng S_1, S_2 luôn cách đều S). Xét điểm M trên màn, lúc đầu là vân tối thứ 3. Nếu lần lượt giảm hoặc tăng khoảng cách S_1S_2 một lượng Δa thì tại M là vân sáng bậc n và bậc $3n$. Nếu tăng khoảng cách S_1S_2 thêm $2\Delta a$ thì tại M là vân sáng hay vân tối, bậc hoặc thứ bao nhiêu?

VIỆT CƯƠNG (*Hà Nội*)

Bài L2/562. Đoạn mạch điện AB gồm hai đoạn mạch AM và MB nối tiếp nhau. Trên đoạn AM chứa điện trở và cuộn dây thuần cảm, trên đoạn MB chỉ chứa tụ điện có điện dung thay đổi được. Đặt vào hai đầu A, B một điện áp xoay chiều $u = U\sqrt{2}\cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$(V) và điều chỉnh điện dung của tụ sao cho điện áp hiệu dụng trên đoạn mạch MB đạt cực đại. Biết rằng khi đó điện áp trên đoạn mạch MB có biểu thức là $u_{MB} = 120\sqrt{2}\cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$(V) và công suất tiêu thụ trên đoạn mạch AB là $\mathcal{P} = 18\sqrt{3}$ (W). Tính độ tự cảm của cuộn dây.

THANH LÂM (*Hà Nội*)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/562 (For 6th grade). Find all positive integers x, y so that

$$(x+y)^4 + y \le 64x.$$

Problem T2/562 (For 7th grade). Find all 3-digit natural numbers M so that the last 3 digits of M^n form the number M exactly for any positive integer n.

Problem T3/562. Find all pairs of integers (x, y) satisfying

$$(x^2+1)(2y^3+1) = 2y^2(x^3+x+1).$$

Problem T4/562. Through the midpoint of one leg of a trapezium, draw a line that divides the trapezium into two parts with equal areas.

Problem T5/562. Given different real numbers a, b, c such that $a^2+b^2+c^2=2$. Find the minimum value of the expression

$$P = \frac{1}{(a-b)^4} + \frac{1}{(b-c)^4} + \frac{1}{(c-a)^4}.$$

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/562. Given non-negative numbers a, b, c such that $a^2+b^2+c^2=2$. Prove that

$$a^3(1+bc) + b^3(1+ca) + c^3(1+ab) \le 2\sqrt{2}.$$

Problem T7/562. Does there exist a finite set $A \subset \mathbb{R}^+$ having at least 2 elements satisfying: for any pair $a, b \in A, a \ne b$ then $\sqrt{a} - \frac{2}{3}b \in A$?

Problem T8/562. Show that, for any acute triangle ABC, we always have

(Xem tiếp theo trang 33)

Bài T1/558. *Tìm các số nguyên a, b, c sao cho*
$$a - bc = 8 \text{ và } ac + b = 6.$$

Lời giải. Cách **1.** Từ $a - bc = 8$ ta có:

$$a(a - bc) = 8a \text{ hay là } a^2 - abc = 8a \ (1).$$

Từ $ac + b = 6$ ta có:

$$b(ac + b) = 6b \text{ hay là } b^2 + abc = 6b \ (2).$$

Cộng theo từng vế của (1) và (2) được:

$$a^2 + b^2 = 8a + 6b$$

hay là $a^2 - 8a + 16 + b^2 - 6b + 9 = 25$,

hay là $(a - 4)^2 + (b - 3)^2 = 25$ (3).

Số 25 phân tích được thành tổng hai số chính phương là: $25 = 5^2 + 0^2 = 4^2 + 3^2 = (-5)^2 + 0^2$
$= (-4)^2 + (-3)^2 = (-4)^2 + 3^2$
$= 4^2 + (-3)^2$ (4).

Xét các số nguyên a, b thỏa mãn (3) và (4). Với $a - 4 = 0$ hay là $a = 4$ và $b - 3 = -5$ hay là $b = -2$, tìm số nguyên c thỏa mãn $a - bc = 8$ tức là

$$4 + 2c = 8, \text{ và } ac + b = 6 \text{ tức là } 4c - 2 = 6,$$

ta được $c = 2$ và có nghiệm (a, b, c) là $(4; -2; 2)$.

Tương tự như thế ta tìm được 6 nghiệm (a, b, c) là
$(4; -2; 2), (8; 6; 0), (7; -1; 1), (1; 7; -1),$
$(1; -1; 7), (-1; 3; -3).$

Cách **2.** Từ $a - bc = 8$ có $a = bc + 8$, thay vào $ac + b = 6$ được $(bc + 8)c + b = 6$, hay là $bc^2 + b = 6 - 8c$, hay là $b(c^2 + 1) = 6 - 8c$ (5).

Từ $ac + b = 6$ có $b = 6 - ac$, thay vào $a - bc = 8$ được $a - (6 - ac)c = 8$, hay là $ac^2 + a = 8 + 6c$, hay là $a(c^2 + 1) = 8 + 6c$ (6).

Nhân hai vế của (5) với 3 và nhân hai vế của (6) với 4 được:

$$3b(c^2 + 1) = 18 - 24c \text{ và } 4a(c^2 + 1) = 32 + 24c.$$

Cộng theo từng vế của hai đẳng thức này được:

$$(4a + 3b)(c^2 + 1) = 50 \quad (7).$$

Số 50 phân tích được thành tích hai số nguyên là:

$$50 = 1.50 = 2.25 = 5.10 = (-1)(-50)$$
$$= (-2)(-25) = (-5)(-10) \quad (8).$$

Xét các số nguyên a, b, c thỏa mãn (7) và (8). Với $c^2 + 1 = 1$ hay là $c = 0$ và $4a + 3b = 50$, đồng thời xét $a - bc = 8$ và $ac + b = 6$ thì có $a = 8$ và $b = 6$, ta được nghiệm (a, b, c) là $(8; 6; 0)$.

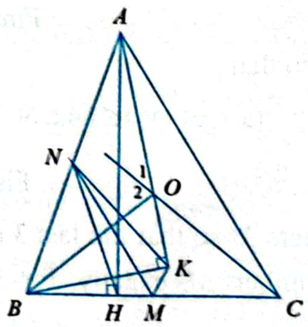
Tương tự như thế ta tìm được 6 nghiệm (a, b, c) là: $(8; 6; 0), (7; -1; 1), (4; -2; 2), (1; 7; -1),$
$(1; -1; 7), (-1; 3; -3).$

Nhận xét. Một số bạn tìm được đẳng thức (3), nhưng tính sai hoặc thiếu nghiệm. Một số bạn khác tìm được các đẳng thức (5) và (6) và khẳng định rằng $c^2 + 1$ là ước của số 50 mà không chú ý xét trường hợp $b = 0$ hoặc $a = 0$. Các bạn sau có đáp số đúng: **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Quang Đại*, 6A6, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Nghệ An:** *Nguyễn Sỹ Bảo Long*, 6B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Hoàng Đức Minh*, 6C, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; **Hà Tĩnh:** *Dương Gia Bảo, Trần Sỹ Anh Khôi, Hoàng Lê Anh Tuấn, Nguyễn Thùy Trang*, 7A, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ; *Nguyễn Trần Khôi*, 7A, THCS Nguyễn Du, TP. Hà Tĩnh.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/558. *Cho tam giác nhọn ABC (AB < AC) và O là giao điểm của ba đường trung trực của ba cạnh. Kẻ AH vuông góc với cạnh BC tại H. Kẻ BK vuông góc với tia AO tại K. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh MH = MK.*

Lời giải. Kéo dài tia CO và ký hiệu như hình vẽ.



• Trước hết xin nêu hai bổ đề quen thuộc sau (bạn đọc tự chứng minh):

+ Nếu tam giác ABC vuông tại A và M là trung điểm của cạnh huyền BC thì $AM = \dfrac{BC}{2}$.

+ Nếu tam giác ABC có M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AC thì $MN \,//\, BC$.

• *Trở lại với bài toán đã cho.*

Do $AB < AC$ nên $\widehat{ACB} < \widehat{ABC}$.

Gọi N là trung điểm của cạnh AB, theo các bổ đề trên ta có: $MN // AC, HN = KN \left(=\frac{1}{2}AB\right)$.

Vì O là giao điểm của ba đường trung trực của ba cạnh tam giác ABC nên $OA = OB = OC$.

Do đó các tam giác OAC, OBC cân tại O. Theo tính chất góc ngoài ở đỉnh tam giác cân ta có:

$$\widehat{O}_1 = 2.\widehat{OCA},\ \widehat{O}_2 = 2.\widehat{OCB} \Rightarrow \widehat{AOB} = 2\widehat{ACB}.$$

Vì tam giác OAB cũng cân tại O nên:

$$2.\widehat{OAB} = 180^0 - \widehat{AOB} = 180^0 - 2\widehat{ACB}.$$

Ta cũng có:

$$\widehat{KNH} = \widehat{KNB} - \widehat{HNB} = 2.\widehat{OAB} - 2.\widehat{HAB}$$
$$= 180^0 - 2.\widehat{ACB} - 2(90^0 - \widehat{ABC})$$
$$= 2(\widehat{ABC} - \widehat{ACB})\ \ (1).$$

Sử dụng $MN // AC$ và tam giác NBH cân tại N, ta có: $\widehat{HNM} = \widehat{BNM} - \widehat{BNH} = \widehat{BAC} - (180^0 - 2.\widehat{ABC})$

$$= \widehat{BAC} - (\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} - 2.\widehat{ABC})$$
$$= \widehat{ABC} - \widehat{ACB}\ \ (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{KNM} = \widehat{HNM}$, dẫn đến $\Delta KNM = \Delta HNM$ (c.g.c), suy ra $MH = MK$.

Nhận xét. Bài toán không khó nhưng cần một số kết quả bổ trợ. Rất tiếc là Tòa soạn không nhận được lời giải nào của bài này.

NHƯ HOÀNG

Bài T3/558. *Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, y) thỏa mãn $x^3 + 2x^2 - 7x - 221 = 5^y$.*

Lời giải. Ta có: $x^3 + 2x^2 - 7x - 221 = 5^y$

$$\Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - 7x + 4 = 5^y + 225$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2(x+4) = 5^y + 225.$$

Vì $5^y + 225$ là số nguyên dương chia hết cho 5 nên $(x-1)^2(x+4)$ là số nguyên dương chia hết cho 5. Lại có $(x+4)-(x-1) = 5$ nên $x+4$ và $x-1$ là các số nguyên dương cùng chia hết cho 5, suy ra $(x-1)^2(x+4) = 5^y + 225 \vdots 5^3$.

Dễ thấy $y = 1$ không thỏa mãn vì $5^1 + 225$ không chia hết cho 5^3. Do đó $y \geq 2$. Ta được:

$$5^y + 225 = 25(5^{y-2} + 9) \vdots 5^3$$
$$\Rightarrow 5^{y-2} + 9 \vdots 5 \Rightarrow y - 2 = 0 \text{ hay } y = 2$$

(nếu $y \geq 3$ thì $5^{y-2} + 9$ không chia hết cho 5).

Thay $y = 2$ vào giả thiết, ta được:

$$x^3 + 2x^2 - 7x - 221 = 25$$
$$\Leftrightarrow x^2(x-6) + 8x(x-6) + 41(x-6) = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-6)(x^2 + 8x + 41) = 0 \Leftrightarrow x = 6$$

(vì $x^2 + 8x + 41 = (x+4)^2 + 25 > 0$).

Vậy chỉ có duy nhất cặp số nguyên dương $(x, y) = (6, 2)$ thỏa mãn bài toán.

Nhận xét. 1) Điều then chốt của lời giải này là phân tích giả thiết thành $(x-1)^2(x+4) = 5^y + 225$ và suy luận để được $y = 2$.

2) Có thể biến đổi: $x^3 + 2x^2 - 7x + 4 = 5^y + 225$

$$\Leftrightarrow (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + 5x^2 - 10x + 5 = 5^y + 225$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^3 + 5(x-1)^2 = 5^y + 225 \text{ suy ra } x - 1 \vdots 5.$$

Nếu $y \geq 2$ ta có: $(x-1)^3 + 5(x-1)^2 = 25(5^{y-2} + 9) \vdots 5^3$

$$\Rightarrow 5^{y-2} + 9 \vdots 5 \Rightarrow y = 2.$$

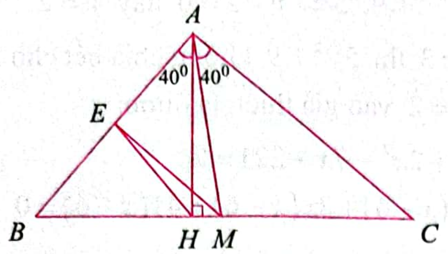
Các bạn sau đây có bài giải tốt :

Nghệ An: *Phạm Xuân Hoàng, Hoàng Thái Thượng, Nguyễn Công Dũng, Nguyễn Văn Lâm*, 9A, *Phan Trọng Hiếu*, 8C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Hoàng Đức Minh*, 6C, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; **Hà Tĩnh:** *Trần Sỹ Anh Khôi, Dương Gia Bảo*, 6D, *Hoàng Lê Anh Tuấn*, 7A, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, *Nguyễn Trần Khôi*, 7A, THCS Nguyễn Du, TP. Hà Tĩnh; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Phương Hoàng Minh*, 10E2, TH, THCS, THPT Lê Thánh Tông, *Nguyễn Chánh Thiện*, 9/12, THCS Lê Quý Đôn, Quận 3; **Hà Nội:** *Nguyễn Sỹ Toàn*, THCS Hoàng Liệt, Q. Hoàng Mai; **Hải Phòng:** *Đặng Đình Minh Trí*, 8C2, THCS Lạc Viên, TP. Hải Phòng; **Hưng Yên:** *Lê Tuấn Hiệp*, 8C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T4/558. *Cho tam giác ABC có đường cao AH (H thuộc cạnh BC). Gọi M là trung điểm cạnh BC ($M \neq H$). Biết $\widehat{BAH} = \widehat{CAM} = 40^0$. Tính số đo góc $\widehat{MAH}$.*

Lời giải. TH1: H nằm giữa B và M (hình vẽ).



Gọi E là trung điểm của cạnh AB. Khi đó theo tính chất đường trung bình ta có:

$$\widehat{EMA} = \widehat{MAC} = 40° = \widehat{HAB} = \widehat{EHA}.$$

Do đó $\widehat{EHA} = \widehat{EMA}$, suy ra tứ giác $AEMH$ nội tiếp.

Ta có: $\widehat{EHB} = \widehat{EAM} = \widehat{EAH} + \widehat{HAM}$ (1).

Lại có: $\widehat{EHB} = \widehat{EBH} = 90° - \widehat{BAH} = 50°$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{MAH} = \widehat{EHB} - \widehat{BAH} = 10^0$.

TH2: M nằm giữa H và B (bạn đọc tự vẽ hình).

Ta có: $\widehat{AEH} = \widehat{AMH}$. Mà $\widehat{AMH} < 90°$, trong khi $\widehat{AEH} = 100° > 90°$, vô lý.

Như vậy $\widehat{MAH} = 10°$.

Nhận xét. Tất cả các bạn tham gia đều cho lời giải đúng, tuy nhiên đều chưa loại trường hợp M nằm giữa H và B, dẫn đến lời giải thiếu chặt chẽ, phụ thuộc hình vẽ. Các bạn dưới đây có lời giải tốt.

Nghệ An: *Hoàng Văn Nhân*, 8C, *Hoàng Thái Thượng*, *Phạm Xuân Hoàng*, 9A THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hải Phòng:** *Đặng Đình Minh Trí*, 8C2, THCS Lạc Viên, Ngô Quyền; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Chánh Thiện*, 9/12, THCS Lê Quý Đôn, Q.3.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/558. *Giải phương trình*

$$\sqrt{16-x^2} + \sqrt[3]{19683 - x^3} = 31.$$

Lời giải. Điều kiện: $-4 \le x \le 4$.

Cách 1. Viết phương trình đã cho thành:

$$\sqrt{4^2 - x^2} + \sqrt[3]{27^3 - x^3} = 31. \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân, ta có:

$$\sqrt{(4^2 - x^2).4^2} \le \frac{4^2 - x^2 + 4^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4^2 - x^2} \le 4 - \frac{x^2}{8} \quad (2);$$

$$\sqrt[3]{(27^3 - x^3).27^3.27^3} \le \frac{27^3 - x^3 + 27^3 + 27^3}{3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{27^3 - x^3} \le 27 - \frac{x^3}{3.27^2} \quad (3).$$

Từ (2) và (3) suy ra:

$$\sqrt{4^2 - x^2} + \sqrt[3]{27^3 - x^3} \le 31 - x^2\left(\frac{1}{8} + \frac{x}{3.27^2}\right).$$

Lại có $x \ge -4$ nên $-x^2\left(\frac{1}{8} + \frac{x}{3.27^2}\right) \le 0$. Do đó:

$$\sqrt{4^2 - x^2} + \sqrt[3]{27^3 - x^3} \le 31 \quad (4).$$

Dấu "=" xảy ra khi tất cả các bất đẳng thức (2), (3), (4) đều xảy ra dấu "=", tức là:

$$\begin{cases} 4^2 - x^2 = 4^2 \\ 27^3 - x^3 = 27^3 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (thỏa mãn điều kiện).} \\ x^2 = 0 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Cách 2. Viết phương trình đã cho về dạng:

$$\left(4 - \sqrt{16 - x^2}\right) + \left(27 - \sqrt[3]{27^3 - x^3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{4 + \sqrt{16 - x^2}} + \frac{x^3}{27^2 + 27\sqrt[3]{27^3 - x^3} + \sqrt[3]{\left(27^3 - x^3\right)^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(\frac{1}{4 + \sqrt{16 - x^2}} + \frac{x}{27^2 + 27\sqrt[3]{27^3 - x^3} + \sqrt[3]{\left(27^3 - x^3\right)^2}}\right) = 0 \ (*).$$

Xảy ra hai trường hợp:

+ Nếu $x = 0$ thì thỏa mãn (*).

+ Nếu $x \ne 0$ và $-4 < x < 4$ thì ta chia hai vế của (*) cho x^2 và quy đồng mẫu thức biểu thức trong dấu ngoặc, ta sẽ nhận được phương trình:

$$\left(27^2 + 27\sqrt[3]{27^3 - x^3} + \sqrt[3]{(27^3 - x^3)^2}\right) + x\left(4 + \sqrt{16 - x^2}\right) = 0 \ (**).$$

- Với $0 < x < 4$ thì VT(**) luôn dương.

- Với $-4 < x < 0$ thì đặt $y = -x$ $(0 < y < 4)$, khi đó $x^2 = y^2$, (**) trở thành:

$$\left(27^2 + 27\sqrt[3]{27^3 + y^3} + \sqrt[3]{(27^3 + y^3)^2}\right) - y\left(4 + \sqrt{16 - y^2}\right) = 0 \ (***).$$

Ta có: $y\left(\sqrt{16 - y^2} + 4\right) < 4\left(\sqrt{16} + 4\right) = 32 < 27^2$.

và $27\sqrt[3]{27^3 + y^3} + \sqrt[3]{\left(27^3 + y^3\right)^2} > 0$

nên VT(***) lớn hơn 0. PT(***) vô nghiệm.

Vậy PT đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Nhận xét. Đây là bài toán giải phương trình vô tỉ chứa ẩn trong căn bậc hai và căn bậc ba. Đa số các bạn tham gia giải bài này đều cho kết quả đúng và lời giải tương tự như hai cách trên. Tuyên dương các bạn sau có lời giải có lập luận chặt chẽ và ngắn gọn.

Hà Nội: *Nguyễn Sỹ Toàn*, 9A1, THCS Hoàng Liệt, Q. Hoàng Mai; **Phú Thọ:** *Nguyễn Tiến Mạnh*, 8A, *Nguyễn Xuân Hồng*, 9A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông; **Nghệ An:** *Nguyễn Tất Han*, *Nguyễn Tất Hoàng Anh*, 8C, *Nguyễn Văn Lâm*, *Hoàng Thái Phượng*, 9A, THCS Lý Nhật Quang; **Sóc Trăng:** *Nguyễn Tấn Phát*, 9/11, THCS Lý Thường Kiệt; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Chánh Thiện*, 9/12, THCS Lê Quý Đôn, Quận 3.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T6/558. *Giả sử $P(x)$ và $Q(x)$ là các đa thức với hệ số nguyên sao cho a và $a + 2023$ đều là nghiệm của $P(x)$ (a là số nguyên). Biết rằng $Q(2022) = 2024$, chứng minh không tồn tại số nguyên b sao cho $Q(P(b)) = 1$.*

Lời giải. Từ giả thiết suy ra:

$$P(x)=(x-a)(x-a-2023)R(x)$$

với $R(x)$ là đa thức với hệ số nguyên. Giả sử rằng tồn tại số nguyên b sao cho $Q(P(b))=1$. Khi đó:

$$Q(x)=(x-P(b)).S(x)+1$$

với $S(x)$ là đa thức với hệ số nguyên. Do đó:

$Q(2022)=(2022-P(b)).S(2022)+1=2024$ (*).

Để ý rằng $P(b)=(b-a)(b-a-2023)R(b)$ và từ $b-a$ và $b-a-2023$ là hai số nguyên khác tính chẵn lẻ nên $P(b)$ là số chẵn. Do đó $(2022-P(b)).S(2022)+1$ là số lẻ, điều này mâu thuẫn với (*). Vậy không tồn tại số nguyên b để $Q(P(b))=1$.

Nhận xét. Bài toán không khó, hầu hết các bạn tham có lời giải giải tương tự như trên. Các bạn có lời giải ngắn gọn và chặt chẽ là:

Vĩnh Phúc: *Bạch Thái Sơn*, 11A2, *Trần Hà Trang*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Tĩnh:** *Trần Duy Hưng*, 10T2, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Hải Phòng:** *Đặng Đinh Minh Trí*, 8C2, THCS Lạc Viên, TP. Hải Phòng; **Nam Định:** *Phạm Mạnh Định*, 10T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Nam Định; **Nghệ An:** *Trịnh Bá Hiếu*, 9A, THCS Lê Hồng Phong, Hưng Nguyên.

TRẦN HỮU NAM

Bài T7/558. *Giải phương trình*

$$4x^3=\sqrt[3]{8x^3+\frac{72}{x}+\frac{54}{x^3}}.$$

Lời giải. Điều kiện xác định: $x\neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với $\left(4x^3\right)^3=8x^3+\dfrac{72}{x}+\dfrac{54}{x^3}$.

Quy đồng ta được: $\left(4x^4\right)^3=8x^6+72x^2+54$.

Viết lại phương trình trên dưới dạng:

$$\left(4x^4\right)^3=\left(2x^2\right)^3+36x^4+54x^2+27 +\left(27+18x^2-36x^4\right)$$

hay $\left(4x^4\right)^3=\left(2x^2+3\right)^3-9\left(4x^4-2x^2-3\right)$.

Như vậy nếu đặt $a=4x^4, b=2x^2+3$ thì phương trình trên trở thành: $a^3=b^3-9(a-b)$

$$\Leftrightarrow (a-b)\left(a^2+ab+b^2+9\right)=0.$$

Vì $a^2+ab+b^2+9=\left(a+\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}b^2+9>0$ nên phương trình trên tương đương với phương trình $a-b=0$, tức là $4x^4-2x^2-3=0$.

Coi phương trình trên là phương trình bậc hai ẩn x^2, giải tìm được $x^2=\dfrac{1+\sqrt{13}}{4}$. Từ đó, phương trình đã có có hai nghiệm phân biệt $x=\pm\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{13}}}{2}$ (chú ý các nghiệm này đều thoả mãn điều kiện xác định).

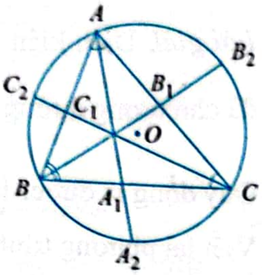
Nhận xét. Tất cả các bạn tham gia giải đều gửi lời giải đúng, tuy nhiên đa số đều đưa về phương trình bậc 12 rồi phân tích ra nhân tử ngay. Việc làm này có thể thực hiện tại nhà, nhờ sự trợ giúp của công nghệ nhưng trong phòng thi việc phân tích như thế là không đơn giản.

Tuyên dương bạn *Võ Hải Yến*, 11H, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp** đưa ra lời giải tự nhiên (tương tự như lời giải được trình bày ở trên).

NGUYỄN TIẾN LÂM

Bài T8/558. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. Các đường phân giác trong AA_1, BB_1, CC_1 của tam giác ABC lần lượt cắt lại đường tròn tâm O tại A_2, B_2, C_2. Chứng minh rằng*

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2\ge\frac{3R}{2}.$$



Lời giải. Đặt $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$. Theo tính chất đường phân giác trong tam giác ta có:

$$\frac{BA_1}{BA}=\frac{CA_1}{CA}=\frac{BA_1+CA_1}{BA+CA}=\frac{BC}{BA+CA}=\frac{a}{b+c}.$$

Từ đó suy ra : $BA_1=\dfrac{ac}{b+c}$ và $CA_1=\dfrac{ab}{b+c}$.

Sử dụng công thức đường phân giác trong đối với tam giác ABC: $AA_1=\dfrac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$ và kết quả $AA_1.A_1A_2=BA_1.CA_1$, ta thấy:

$$A_1A_2=\frac{BA_1.CA_1}{AA_1}=\frac{a^2bc}{(b+c)^2}\cdot\frac{b+c}{2bc\cos\frac{A}{2}}=\frac{a^2}{2(b+c)\cos\frac{A}{2}}.$$

Hoàn toàn tương tự ta cũng có:

$$B_1B_2=\frac{b^2}{2(c+a)\cos\frac{B}{2}},C_1C_2=\frac{c^2}{2(a+b)\cos\frac{C}{2}}.$$

Mặt khác: $A_1A_2=\dfrac{a^2}{2(b+c)\cos\frac{A}{2}}=\dfrac{16R^2\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2}}{8R\cos\frac{B-C}{2}\cos^2\frac{A}{2}}$

$$=\frac{2R\sin^2\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}\ge 2R\sin^2\frac{A}{2}.$$

Tương tự: $B_1B_2\ge 2R\sin^2\dfrac{B}{2},C_1C_2\ge 2R\sin^2\dfrac{C}{2}.$

Từ đó ta được BĐT: $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2$

$$\ge 2R\left(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\right).$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$2R\left(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\right)\ge\frac{3R}{2}$$

$$\Leftrightarrow\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\ge\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}.$$

Bất đẳng thức này đúng. Thật vậy:

$$\cos A+\cos B+\cos C=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+1-2\sin^2\frac{C}{2}$$

$$=1-2\sin^2\frac{C}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$=\frac{3}{2}-2\sin^2\frac{C}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}-\frac{1}{2}\cos^2\frac{A-B}{2}-\frac{1}{2}\sin^2\frac{A-B}{2}$$

$$=\frac{3}{2}-2\left(\sin^2\frac{C}{2}-\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{A-B}{2}+\frac{1}{4}\cos^2\frac{A-B}{2}\right)-\frac{1}{2}\sin^2\frac{A-B}{2}$$

$$=\frac{3}{2}-2\left(\sin\frac{C}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\sin^2\frac{A-B}{2}\le\frac{3}{2}.$$

Dễ thấy đẳng thức xảy ra khi tam giác ABC đều.

Nhận xét. Các bài giải gửi về Toà soạn đều đúng. Các bạn sau có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Trần Hà Trang*, 11A1, *Bạch Thái Sơn*, 11A2, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Nghệ An:** *Ngô Văn Trường*, 10A1, THPT Hoàng Mai, TX. Hoàng Mai; **Quảng Bình:** *Nguyễn Thanh Hải*, *Đỗ Thị Thanh Thảo*, 12 Toán 1, *Phạm Thị Mỹ Hạnh*, 12 Toán 2, *Hoàng Kim Lộc*, 11 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới. **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Đỗ Tiến Dũng*, 10T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/558. *Giải hệ phương trình:*

$$(\mathrm{I})\begin{cases}\sqrt{2^{2^x}}=2(y+1) & (1)\\ 2^{2^y}=2x & (2)\end{cases},x,y\in\mathbb{R}.$$

Lời giải (Của *Phan Trần Ngọc Hải* và nhiều bạn)

Giả sử (x,y) là nghiệm của hệ (I). Với điều kiện $x>0,y>-1$ ta có: (1) $\Leftrightarrow 2^{2^{x-1}}=2y+2$ (3).

Từ (2) và (3) suy ra: $2^{2^{x-1}}-2^{2^y}=2y+2-2x$

hay $2^{2^{x-1}}+2(x-1)=2^{2^y}+2y$ (4).

Xét hàm số $f(t)=2^{2^t}+2t$ với $t\in\mathbb{R}$. PT(4) có thể viết lại thành $f(x-1)=f(y)$ (5).

Vì $f'(t)=(\ln 2)^2 2^t 2^{2^t}+2>0, \forall t\in\mathbb{R}$ nên $f(t)$ tăng trên $\mathbb{R}$. Suy ra: (5) $\Leftrightarrow x-1=y$.

Do đó (2) trở thành: $2^{2^{x-1}}=2x$ (6). Xét hàm số $g(x)=2^{2^{x-1}}-2x$ với $x>0$, ta có:

$$g'(x)=(\ln 2)^2 2^{x-1}2^{2^{x-1}}-2 \text{ với } x>0.$$

Hơn nữa, với mọi $x>0$ ta có:

$$g''(x)=(\ln 2)^3 2^{x-1}2^{2^{x-1}}\left(1+(\ln 2)2^{x-1}\right)>0.$$

Vậy $g'(x)$ tăng trên $(0,+\infty)$. Ngoài ra, ta có: $g'(1)=2\left((\ln 2)^2-1\right)<0$ và

$$g'(2)=2\left(4(\ln 2)^2-1\right)=2\left((2\ln 2)^2-1\right)$$
$$=2\left((\ln 2^2)^2-1\right)=2\left((\ln 4)^2-1\right)>0.$$

Xét các trường hợp sau:

1) $0<x<1$: $g'(x)<g'(1)<0$. Vậy hàm số $g(x)$ giảm trên khoảng $(0;1)$. PT(6) vô nghiệm.

2) $x=1$: $g(1)=0$. Vậy $x=1$ là nghiệm của (6).

3) $1<x<2$: Ta có $g'(x)$ tăng trên $(1;2)$; $g'(1)<0$ và $g'(2)>0$ nên $g'(x)$ có duy nhất một nghiệm $x_0\in(1;2)$. Vì $g'(1)<0$ nên $g'(x)<0$ trên $(1;x_0)$. Do đó hàm số $g(x)$ giảm trên khoảng $(1;x_0)$. Vì $g'(2)>0$ nên $g'(x>0$ trên $(x_0;2)$. Do đó hàm số $g(x)$ tăng trên khoảng $(x_0;2)$. Chứng tỏ hàm số có một cực tiểu duy nhất là x_0 trên $(1;2)$ và $\max\limits_{x\in[1;2]} g(x)=g(1)=g(2)=0$. PT(6) vô nghiệm trên khoảng $(1;2)$.

4) $x=2$: $g(2)=0$. Vậy $x=2$ là nghiệm của (6).

5) $x>2$: Vì $g'(x)>g'(2)>0$ nên $g(x)$ tăng trên $(2;+\infty)$. Do đó $g(x)>g(2)=0$. PT(6) vô nghiệm trên khoảng $(2;+\infty)$.

Tóm lại, PT(6) chỉ có hai nghiệm $x_1=1$ và $x_2=2$. Suy ra $y_1=0$ và $y_2=1$.

Hệ (1) có hai nghiệm $(1;0)$ và $(2;1)$.

Nhận xét. Tất cả các bạn dưới đây đã gửi bài có lời giải tốt: **Đồng Tháp:** *Võ Hải Yến*, 11H, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Gia Lai:** *Phan Trần Ngọc Hải*, 10A7, THPT Chi Lăng; **Nghệ An:** *Phan Đại Hoàng*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Quảng Bình:** *Nguyễn Thanh Hải*, *Đỗ Thị Thanh Thảo*, 12 Toán 1, *Phạm Thị Mỹ Hạnh*, 12 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp.

TẠ DUY PHƯỢNG

Bài T10/558. *Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $\varphi(n)=12$, ở đây ký hiệu $\varphi(n)$ là hàm Euler của n.*

(Nhắc lại rằng hàm số Euler của một số nguyên dương n, ký hiệu là $\varphi(n)$, là số các số nguyên dương nhỏ hơn n và nguyên tố cùng nhau với n. Ví dụ: $\varphi(9)=6$ vì có 6 số: 1, 2, 4, 5, 7, 8 nhỏ hơn 9 và nguyên tố cùng nhau với 9).

Lời giải. (Dựa trên lời giải của bạn *Bạch Thái Sơn*, 11A2, THPT chuyên Vĩnh Phúc, Vĩnh Phúc)

Dễ thấy $n>1$.

Với $n=2^s$ thì $\varphi(n)=\varphi(2^s)=2^{s-1}=12$ không thỏa mãn.

Giả sử $n=2^s p_1^{s_1}p_2^{s_2}...p_k^{s_k}$ với p_i $(1\le i\le k)$ là các số nguyên tố lẻ phân biệt. Khi đó:

$$\varphi(n)=\varphi(2^s)\varphi(p_1^{s_1})\varphi(p_2^{s_2})...\varphi(p_k^{s_k})$$
$$=\varphi(2^s)p_1^{s_1-1}p_2^{s_2-1}...p_k^{s_k-1}(p_1-1)(p_2-1)...(p_k-1)$$

a) Nếu $s\in\{0;1\}$ thì $\varphi(2^s)=1$, suy ra:

$$\varphi(n)=p_1^{s_1-1}p_2^{s_2-1}...p_k^{s_k-1}(p_1-1)(p_2-1)...(p_k-1)=12$$
$$\Rightarrow 1\le k\le 2.$$

+) Với $k=1$ thì $n=2^s p_1^{s_1}\Rightarrow p_1^{s_1-1}(p_1-1)=12$.

- Nếu $s_1=1\Rightarrow p_1-1=12\Rightarrow p_1=13$.

Với $s=0$ thì $n=13$, với $s=1$ thì $n=2.13=26$.

- Nếu $s_1>1$ thì $p_1|12\Rightarrow p_1=3\Rightarrow 3^{s_1-1}2=12$
$\Rightarrow 3^{s_1-1}=6$, không thỏa mãn.

+) Với $k=2$ thì $n=2^s p_1^{s_1}p_2^{s_2}$

$$\Rightarrow p_1^{s_1-1}p_2^{s_2-1}(p_1-1)(p_2-1)=12=2.6.$$

Giả sử $p_1<p_2\Rightarrow p_1-1=2,\ p_2-1=6$
$$\Rightarrow p_1=3, p_2=7$$
$$\Rightarrow 3^{s_1-1}7^{s_2-1}=1\Rightarrow s_1=s_2=1.$$

Với $s=0$ thì $n=3.7=21$;

Với $s=1$ thì $n=2.3.7=42$.

b) Nếu $s\ge 2$ ta có:

$$\varphi(n)=2^{s-1}p_1^{s_1-1}p_2^{s_2-1}...p_k^{s_k-1}(p_1-1)(p_2-1)...(p_k-1)=12$$
$$\Rightarrow s-1+k\le 2$$

$\Rightarrow s+k\le 3\Rightarrow s=2,k=1\Rightarrow n=2^2p_1^{s_1}$.

Khi đó: $\varphi(n)=2p_1^{s_1-1}(p_1-1)=12\Rightarrow p_1^{s_1-1}(p_1-1)=6$.

- Nếu $s_1=1\Rightarrow p_1=7\Rightarrow n=2^27=28$.

- Nếu $s_1>1\Rightarrow p_1\mid 6\Rightarrow p_1=3\Rightarrow 3^{s_1-1}2=6$

$$\Rightarrow s_1=2\Rightarrow n=2^2.3^2=36.$$

Đáp số: $n\in\{13; 21; 26; 28; 36; 42\}$.

Nhận xét. Ngoài bạn *Sơn*, các bạn sau đây cũng có lời giải đúng: **Quảng Bình:** *Phạm Thị Mỹ Hạnh*, 12T2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Hà Tĩnh:** *Trần Duy Hưng*, 10T2, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Vĩnh Phúc:** *Trần Hà Trang*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Nghệ An:** *Phan Đại Hoàng*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/558. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ thỏa mãn*

$$f(2f(a)+f(b))=2a+b-4\quad (1), \forall a,b\in\mathbb{Z}.$$

Lời giải. Giả sử hàm f thỏa mãn (1). Thay $b=4$ vào (1) ta thu được:

$$f(2f(a)+f(4))=2a, \forall a\in\mathbb{Z}\quad (2).$$

Nhận xét rằng f là đơn ánh. Thật vậy, nếu $f(a_1)=f(a_2)$ với $a_1,a_2\in\mathbb{Z}$ thì theo (2), ta có:

$$f(2f(a_1)+f(4))=f(2f(a_2)+f(4))$$

$$\Leftrightarrow 2a_1=2a_2\Leftrightarrow a_1=a_2.$$

Để ý rằng $2a+b-4=2(a-1)+(b+2)-4$ nên theo (1) thì

$$f(2f(a-1)+f(b+2))=2a+b-4, \forall a,b\in\mathbb{Z}.$$

Kết hợp với (1) và tính đơn ánh của f suy ra:

$f(2f(a)+f(b))=f(2f(a-1)+f(b+2)), \forall a,b\in\mathbb{Z}.$

$\Leftrightarrow 2f(a)+f(b)=2f(a-1)+$

$+f(b+2), \forall a,b\in\mathbb{Z}\quad (3).$

Thay $a=b+2$ trong (3), ta thu được:

$$2f(b+2)+f(b)=2f(b+1)+f(b+2)$$

$\Leftrightarrow f(b+2)-f(b+1)=f(b+1)-f(b), \forall b\in\mathbb{Z},$

tức dãy số $x_n:=f(n)$ là một cấp số cộng trên $\mathbb{Z}$ nên $f(n)=pn+q$ với $p,q\in\mathbb{Z}$ (do $f(0),f(1)\in\mathbb{Z}$). Thay $f(n)=pn+q$ vào (1), ta thu được $An+B=0, \forall n\in\mathbb{Z}$, tức $A=0,B=0$ hay $\left[\begin{array}{l}p=1,q=-1\\ p=-1,q=2\end{array}\right.$.

Kết luận: Tất cả các hàm số $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ thỏa mãn điều kiện (1) là $f(x)=x-1$ và $f(x)=-x+2$.

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải đúng: **Bình Định:** *Trần Ngọc Tuyên*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Hà Tĩnh:** *Trần Duy Hưng*, 10T2, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Nghệ An:** *Phan Đại Hoàng*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Quảng Bình:** *Phạm Thị Mỹ Hạnh*, 12T2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Vĩnh Phúc:** *Bạch Thái Sơn*, 11A2, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T12/558. *Cho tam giác ABC có trực tâm H. M, N lần lượt là trung điểm của AC, AB. Đường tròn ngoại tiếp tam giác HMN cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC tại K khác H. HK cắt BC tại J. Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác BHN tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác CHM. Chứng minh rằng JA = JK.*

Lời giải. Ta cần có bốn bổ đề.

Bổ đề 1. *Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cùng đi qua T. Các điểm A, B thuộc (O_1) và các điểm C, D thuộc (O_2). Khi đó (O_1) và (O_2) tiếp xúc với nhau tại T khi và chỉ khi*

$$(BA,BT)+(CT,CD)\equiv(TA,TD)\,(\mathrm{mod}\,\pi).$$

Bổ đề 2. *Cho tứ giác ABCD (có thể lõm) và điểm M (có thể nằm ngoài tứ giác). Khi đó tồn tại điểm N sao cho M và N là hai điểm liên hợp đẳng giác đối với ABCD khi và chỉ khi*

$$(MA,MB)+(MC,MD)\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\pi).$$

Phép chứng minh các bổ đề 1, 2 rất đơn giản, không trình bày ở đây.

Bổ đề 3. *Cho tam giác ABC không vuông tại A với trực tâm H, nội tiếp đường tròn (O). Các điểm P, Q theo thứ tự thuộc AC, AB sao cho $(HP,HQ)\equiv(AB,AC)$. J là giao điểm của BC và PQ. Khi đó O và H là hai điểm liên hợp đẳng giác của các tam giác JBQ và JCP.*

Chứng minh. Vì HB, HC theo thứ tự vuông góc với AC, AB và $(HP,HQ)\equiv(AB,AC)$ nên

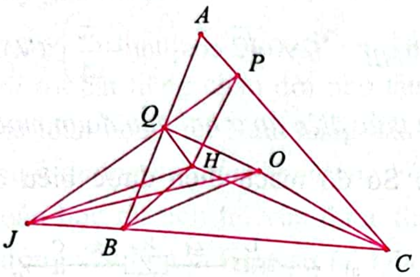
$$(HP,HQ)+(HB,HC)\equiv(AB,AC)+(AC,AB)$$
$$\equiv 0\,(\bmod\,\pi).$$

Do đó, theo bổ đề 2, H có điểm liên hợp đẳng giác đối với tứ giác (có thể lõm) $BCPQ$.

Dễ thấy O, H là hai điểm liên hợp đẳng giác đối với các góc (BC,BQ) và (CB,CP).

Vậy O, H là hai điểm liên hợp đẳng giác đối với tứ giác $BCPQ$.

Do đó đó O và H là hai điểm liên hợp đẳng giác của các tam giác JBQ và JCP.



Bổ đề 4. *Cho tam giác ABC không vuông tại A, (O) là đường tròn ngoại tiếp, H là trực tâm. Các điểm P, Q theo thứ tự thuộc AC, AB sao cho $(HP,HQ)\equiv(AB,AC)(\bmod\,\pi)$. L là điểm đối xứng của H qua PQ. Khi đó L thuộc (O).*

Chứng minh. Gọi (O') là ảnh đối xứng của (O) qua BC; $J=PQ\cap BC$; (J) là đường tròn tâm J đi qua H và L. Dễ thấy: $2(HB,HC)\equiv 2(AC,AB)$

$$\equiv(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB})\equiv(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})(\bmod\,\pi).$$

Do đó H thuộc (O').

Gọi K là giao điểm khác H của (O') và (J).

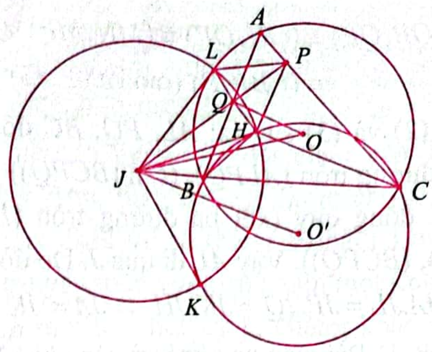
Theo bổ đề 3, JO, JH là hai đường liên hợp đẳng giác của góc (JC,JP).

Từ đó, chú ý rằng L và H đối xứng với nhau qua JP; O và O' đối xứng với nhau qua JC, suy ra:

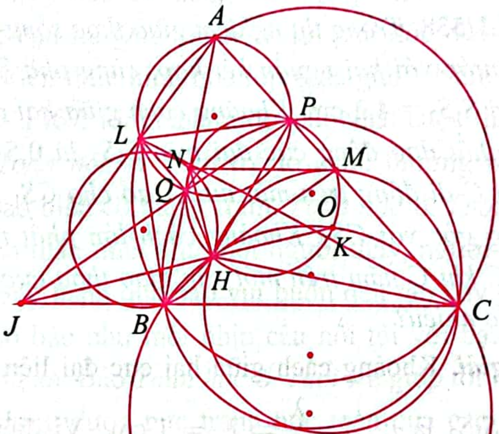
$$(\overrightarrow{JL},\overrightarrow{JK})\equiv(\overrightarrow{JL},\overrightarrow{JH})+(\overrightarrow{JH},\overrightarrow{JK})$$
$$\equiv 2(JL,JP)+2(JH,JO')(\bmod\,\pi)$$
$$\equiv 2(JL,JP)+2(JH,JC)+2(JC,JO')(\bmod\,\pi)$$
$$\equiv 2(JL,JP)+2(JP,JO)+2(JO,JC)$$
$$\equiv 2(JL,JC)(\bmod\,\pi).$$

Kết hợp với $JL=JK$, suy ra L và K đối xứng với nhau qua BC.

Từ đó, chú ý rằng (O) và (O') đối xứng với nhau qua BC, suy ra L thuộc (O).



Trở lại giải bài toán T12. Gọi P, Q theo thứ tự là giao điểm thứ hai của đường tròn (HMN) và AC, AB; L là điểm đối xứng của H qua PQ; $J=PQ\cap BC$.



Chú ý rằng H, M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn; (BHN) và (CHM) tiếp xúc với nhau tại H; BH, CH theo thứ tự vuông góc với AC, AB; theo bổ đề 1, ta có:

$$(HP,HQ)+(AB,AC)\equiv(HP,AC)+(AB,HQ)(\bmod\,\pi)$$
$$\equiv(HP,MP)+(NQ,HQ)(\bmod\,\pi)$$
$$\equiv(HN,MN)+(NM,HM)\equiv(HN,HM)(\bmod\,\pi)$$
$$\equiv(BN,BH)+(CH,CM)(\bmod\,\pi)$$
$$\equiv(BN,CM)+(CH,BH)(\bmod\,\pi)$$
$$\equiv(AB,AC)+(AB,AC)(\bmod\,\pi).$$

Từ đó, chú ý rằng L là điểm đối xứng của H qua PQ, suy ra: $(LQ,LP)\equiv(HP,HQ)\equiv(AB,AC)$

$$\equiv(AQ,AP)(\bmod\,\pi).$$

Do đó L thuộc đường tròn (APQ) (1).

Vì $(HP,HQ)\equiv(AB,AC)(\bmod\,\pi)$ nên, theo bổ đề 4, L thuộc (O) (2). Chú ý rằng $MN\,//\,BC$, ta có:

$$(QB,QP) \equiv (QN,QP) \equiv (MN,MP)$$
$$\equiv (CB,CP) \pmod{\pi} \quad (3).$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra: AL, PQ, BC đồng quy (xét ba đường tròn $(ALPQ)$, (O), $(BCPQ)$) và HK, PQ, BC đồng quy (xét ba đường tròn $(HKBC)$, $(HKPQ)$, $(BCPQ)$). Vậy AL đi qua J. Do đó:

$$JA.JL = JP.JQ = JK.JH \Rightarrow JA = JK.$$

Nhận xét. 1) Bài toán này khó và càng khó hơn khi ta cố gắng tìm một lời giải không phụ thuộc hình vẽ
2) Không bạn nào tham gia giải.
3) Cần có thêm giả thiết tam giác ABC không vuông.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/558. *Trong thí nghiệm giao thoa sóng trên mặt nước với hai nguồn kết hợp, cùng pha S_1 và S_2 với $S_1S_2 = 4{,}2$ cm. Khoảng cách giữa hai điểm gần nhất dao động cực đại trên S_1S_2 là 0,5 cm. Điểm C di động trên mặt nước sao cho CS_1 luôn vuông góc với CS_2. Khoảng cách lớn nhất từ S_1 đến C khi C nằm trên một vân giao thoa cực tiểu là bao nhiêu?*

Lời giải. Khoảng cách giữa hai cực đại liên tiếp trên S_1S_2 là i: $i = \dfrac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = 1$ cm. Vì điểm C cần tìm có CS_1 luôn vuông góc với CS_2 nên:

$$d_1^2 + d_2^2 = S_1S_2^2.$$

Điểm C nằm trên vân giao thoa cực tiểu nên: $d_1 - d_2 = k\lambda$ với k bán nguyên.

$$\begin{cases} d_1 - d_2 = k\lambda \\ d_1^2 + d_2^2 = 4{,}2^2 \end{cases} \quad (1).$$

Vì M xa S_1 nhất nên k là số bán nguyên gần $\left[\dfrac{4{,}2}{1}\right] = 4$ nhất $\Rightarrow k = 3{,}5$.

Thay k vào (1): $\begin{cases} d_1 - d_2 = 3{,}5 \\ d_1^2 + d_2^2 = 4{,}2^2 \end{cases}$ (2).

Giải (2) ta được $d_1 = 4{,}150$ cm.

Nhận xét. Chúc mừng các bạn *Phạm Xuân Khánh*, 11A2, THPT Tam Phước, Biên Hoà, Đồng Nai; *Hoàng Ngọc Gia Huy*, 11 Lý 2, THPT chuyên Quốc học Huế, Thừa Thiên Huế; *Đỗ Thị Thanh Thảo*, 12 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, Quảng Bình đã có lời giải đúng cho đề ra kì này.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

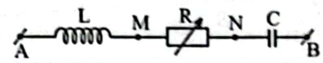
Bài L2/558. *Đoạn mạch điện AB mắc nối tiếp theo thứ tự lần lượt gồm cuộn dây thuần cảm, biến trở và tụ điện. Đặt vào hai đầu đoạn mạch điện áp xoay chiều có giá trị hiệu dụng không đổi và tần số góc ω (với $5\omega^2 LC = 3$). Khi $R = R_0$ thì công suất tiêu thụ trên đoạn mạch đạt cực đại. Gọi M và N lần lượt là điểm nối giữa cuộn cảm thuần với biến trở và biến trở với tụ điện. Biết điện áp ở hai đầu MB có biểu thức là*

$$u_{MB} = 290\sqrt{2}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) \text{ (V)}.$$

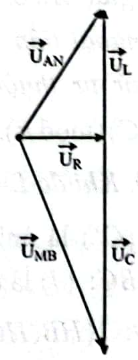
Viết biểu thức điện áp ở hai đầu đoạn mạch AN.

Lời giải. Sơ đồ mạch điện được biểu diễn như hình a.

a)



b)



Theo giản đồ vectơ hình b: Độ lệch pha giữa u_{AN} và u_R là φ_{AN} : $\tan\varphi_{AN} = \dfrac{Z_L}{R} = 1{,}5 \Rightarrow \varphi_{MB} \approx 56{,}3^\circ$.

Độ lệch pha giữa u_{MB} và u_R là:

$$\tan\varphi_{MB} = \frac{-Z_C}{R} = -2{,}5 \Rightarrow \varphi_{MB} \approx 68{,}2^\circ;$$

$$\varphi_{AN} = \varphi_{MB} + 124{,}5^\circ = \omega t + 0{,}44\pi \text{ (rad)}.$$

$$\frac{U_{AN}}{U_{MB}} = \sqrt{\frac{R^2 + Z_L^2}{R^2 + Z_C^2}} = \sqrt{\frac{1 + 1{,}5^2}{1 + 2{,}5^2}} = \frac{\sqrt{337}}{29}$$

$$\Rightarrow U_{0AN} = U_{0MB}\frac{\sqrt{337}}{29} = 290\sqrt{2}.\frac{\sqrt{337}}{29}$$

$$= 10\sqrt{674} \approx 259{,}6 \text{ (V)}$$

$$\Rightarrow u_{AN} = 259{,}6\cos(\omega t + 0{,}44\pi) \text{ (V)}.$$

Nhận xét. Rất tiếc là Tòa soạn không nhận được lời giải nào của bài này.

NGUYỄN XUÂN QUANG

TRI ÂM

(Nhân 60 năm, Toán học & Tuổi trẻ ra số đầu tiên, 1964 – 2024)

Thủy chung tình bạn chùm hoa tím (*Tố Hữu*)

Tri âm tri kỷ gần suốt đời tôi là một tờ báo!

Còn nhớ ngày 15 tháng 10 năm 1964, báo *Toán học & Tuổi trẻ* cất tiếng chào đời nhờ tâm huyết của các nhà toán học Việt Nam hàng đầu lúc đó. Nó được nuôi dưỡng bởi *Hội Toán học Việt Nam*, một Hội toán học rất non trẻ vừa được thành lập với Hội trưởng đầu tiên là Giáo sư *Lê Văn Thiêm*. Một tờ báo dành cho "Các bạn trẻ yêu Toán", thực tế dành cho "Những ai có năng khiếu Toán học thực sự". Nó nghiêng về Tạp chí *Kvant* hơn Tạp chí *Toán học trong nhà trường* của Nga rất thịnh hành ở Việt Nam thời đó. Nhiều nhà toán học hàng đầu: *Lê Văn Thiêm*, *Hoàng Tụy*, *Phan Đình Diệu*, *Hoàng Xuân Sính*,... dành nhiều thời gian viết những bài tâm huyết cho *Toán học & Tuổi trẻ*. Để tờ báo đứng vững và có sức lan tỏa trong một thời gian dài như vậy nhờ sự kiên trì, bền bỉ của đội ngũ các Thầy các Cô trong Tòa soạn, người Tổng Biên tập đầu tiên và lâu năm nhất là GS. *Nguyễn Cảnh Toàn* rồi các Tổng biên tập, Phó Tổng biên tập tiếp theo: *Phan Đức Chính*, *Ngô Đạt Tứ*, *Phan Doãn Thoại*, *Phạm Thị Bạch Ngọc*, *Trần Hữu Nam*; các Thư ký: *Hoàng Chúng*, *Trần Thành Trai*, *Vũ Kim Thủy*, *Lê Thống Nhất*, *Hồ Quang Vinh*. Cũng không thể quên công lao miệt mài đóng góp của đội ngũ biên tập viên và cộng tác viên, tiêu biểu là các thầy: *Phan Đức Chính*, *Nguyễn Công Quỳ*, *Nguyễn Đăng Phất*, *Lê Đình Thịnh*,.... Rồi những thế hệ nối tiếp: *Nguyễn Văn Mậu*, *Lê Quốc Hán*, *Lê Thống Nhất*, *Đặng Hùng Thắng*, *Nguyễn Minh Hà*, *Nguyễn Minh Đức*, *Trần Nam Dũng*, *Hồ Quang Vinh*, *Nguyễn Đức Tấn*, ...

Tôi nhớ như in ngày vừa đặt chân vào Trường Cấp ba Kỳ Anh, thầy *Hoàng Thám* cho xem báo *Toán học & Tuổi trẻ* số tháng 10 năm 1965. Với một học trò yêu toán vùng cực nam một tỉnh lẻ, nó thật sự có một sức hút kỳ lạ chẳng khác gì một thanh nam châm. Rồi tôi được nhắc tên đầu tiên trên *Toán học & Tuổi trẻ* ở số báo tháng 6 năm 1966 trong mục "Giải bài kỳ trước". Thầy *Nguyễn Đăng Phất*, người chấm bài nhận xét: "Tất cả lời giải đúng đều sử dụng *bất đẳng thức Cauchy*. Riêng bạn *Lê Quốc Hán* có lời giải độc đáo: chỉ dùng kiến thức hình học lớp 6 để giải". Năm học 1966 - 1967, tôi giành được giải Nhất cuộc thi do Báo *Toán học & Tuổi trẻ* tổ chức thường niên. Sau bao biến cố thăng trầm, *Toán học & Tuổi trẻ* trở nên thân thiết như một người thầy, người bạn lớn đồng hành qua bao vui buồn đến tận bây giờ. Mỗi số báo như mỗi nhịp cầu nối tôi với bạn bè phương xa. Báo *Toán học & Tuổi trẻ* giúp tôi luôn hình dung được bức tranh học toán của các bạn cùng trang lứa trên mọi miền đất nước.

Nhớ nhất các bạn có lời giải hay và đạt giải cao trong các cuộc thi hàng năm do báo tổ chức. Cái tên thứ nhất chắc chắn là *Nguyễn Tố Như*, người đầu tiên đạt giải Nhất (hai lần liên tiếp) - ngày ấy chưa có giải Đặc biệt như bây giờ. Đáng quý là anh học ở Nghệ An, một tỉnh xa trung tâm Thủ đô. Hiện anh là Giáo sư Tiến sĩ khoa học chuyên ngành Tôpô. Một cặp tên cũng khá ấn tượng: *Trần Văn Vàng* và *Trần Văn Vuông*. Anh *Vàng* ghi địa chỉ Thanh Ba, Phú Thọ. Anh cùng thế hệ với anh *Như* và từng đạt giải Nhì. Anh thường xuyên có lời giải hay. Tốt nghiệp phổ thông anh vào Đại học Sư phạm Hà Nội rồi trở thành giáo viên giỏi Phú Thọ. Anh *Vuông* ở Hưng Yên. Sau biết anh thuộc thế hệ trước, là thầy dạy lớp 8 chuyên Toán (Hưng Yên) của anh *Đỗ Ngọc Diệp*. Anh *Diệp* với tôi cùng đạt giải năm học 1965 -1966. Hiện anh *Diệp* là Giáo sư Tiến sĩ khoa học chuyên ngành Lý thuyết biểu diễn. Anh *Vuông* sau là Phó giáo sư Tiến sĩ chuyên ngành Giải tích, công tác ở Viện Khoa học Giáo dục, có thời gian là Thư ký của Phó Chủ tịch nước *Nguyễn Thị Bình*. Nay đã qua đời. Thương lắm!

Là người Hà Tĩnh, tôi quan tâm nhất đến các bạn đồng hương. Trước tôi có các anh *Phan Văn Ban*, *Đinh Văn Huỳnh* và *Nguyễn Xuân Kỳ*. Anh *Ban* người Đức Thọ, con Nghệ sĩ Ưu tú *Phan Thoan* - tác giả bức ảnh nổi tiếng "Cô du kích nhỏ dương cao súng/ thằng Mỹ lênh khênh bước cúi đầu…". Sau này anh *Ban* là Phó giáo sư Tiến sĩ Toán học. Anh *Huỳnh* người cùng xã *Đức Thủy*, học cùng trường cấp ba Trần Phú với anh *Ban* nhưng sau một lớp, hiện là Giáo sư Tiến sĩ khoa học chuyên ngành Lý thuyết vành. Nhiều bạn khoa tôi là học trò của anh *Huỳnh*: *Phan Dân*, *Ngô Sĩ Tùng*, *Chu Trọng Thanh*, *Đinh Đức Tài*,…Anh *Kỳ* người Nghi Xuân, học cấp ba ở Can Lộc. Nghe tin anh du học và làm luận án Phó tiến sĩ về Số học ở Hungari rồi định cư bên đó.

Vì những lý do khác nhau, nhiều người giỏi toán thời ấy không tham gia giải toán hoặc dự thi trên báo, đặc biệt là các bạn học trường Chuyên. Nhưng cũng không ít bạn say sưa giải toán và đạt giải cao. Học trước tôi có anh *Trần Văn Nhung*, sau tôi có anh *Cao Long Vân*. Anh *Nhung* người gốc Nam Định sinh ở Ninh Bình, học chuyên Toán Đại học Tổng hợp Hà Nội khóa đầu tiên. Giáo sư Tiến sĩ khoa học chuyên ngành Giải tích. Từng giữ chức Thứ trưởng Bộ Giáo dục & Đào tạo, Tổng Thư ký Hội đồng chức danh Giáo sư Nhà nước. Anh *Vân* học Chuyên toán Đại học Sư phạm Hà Nội khóa hai. Giáo sư Tiến sĩ khoa học ngành Vật lý, công tác ở Ba Lan. Có công đào tạo nhiều Tiến sĩ, Thạc sĩ Vật lý cho trường tôi.

Thời ấy, Khối chuyên Toán Trường Đại học Sư phạm Vinh có phong trào tham gia giải toán trên báo và rất nhiều bạn đoạt giải cao. Ấn tượng nhất là *Trịnh Tuấn Tú*. Anh có nhiều lời giải hay, độc đáo. Tốt nghiệp phổ thông, anh về quê chữa xe đạp. Sau thi đậu vào Đại học Bách khoa Hà Nội và ra làm Tổng Giám đốc một công ty lớn. Các lớp chuyên Toán ở trường khác: Chu Văn An (Hà Nội), Thái Phiên (Hải Phòng), Hùng Vương (Phú Thọ), Lê Hồng Phong (Nam Định), Lam Sơn (Thanh Hóa),… có nhiều người tham gia giải và đạt giải cao. Lâu rồi chỉ còn nhớ vài cái tên: *Trương An Quốc* (Lê Hồng Phong), *Mỵ Duy Thọ* (Lam Sơn),…

Cũng như tâm lý những người khác, tôi quan tâm nhiều đến các bạn cùng đoạt giải với mình. Năm học 1966 -1967 có ba người đoạt giải Nhất: *Lê Văn Hốt* (lớp 10), *Lê Quốc Hán* (lớp 9) và *Trần Huy Cang* (lớp 8). Anh *Hốt* sau là Phó giáo sư Tiến sĩ chuyên ngành Giải tích, dạy ở TP. Hồ Chí Minh. Theo thông tin của các bạn đồng nghiệp anh *Cang* sau dạy học và hiện nghỉ hưu ở Bình Dương. Các khóa sau nhiều bạn đạt giải xuất sắc, chẳng hạn *Lê Trường Tùng*. Anh học trường Lam Sơn (Thanh Hóa). Hiện là Phó Giáo sư Tiến sĩ, Tổng Giám đốc FPT.

Một điều rất thú vị hàng năm Báo *Toán học & Tuổi trẻ* đăng danh sách các bạn đạt giải *Kỳ thi học sinh giỏi miền Bắc* lớp 10. Thời ấy số người đạt giải rất ít, chỉ năm sáu bạn, thường không có giải Nhất. Năm học 1968 - 1969 anh *Ngô Việt Trung* đoạt giải Nhất được các GS. *Hoàng Tụy* và GS. *Nguyễn Cảnh Toàn* viết bài khen ngợi. Hai năm sau (1970 - 1971), anh *Nguyễn Hữu Việt Hưng* đoạt giải Nhất với bài hình đạt điểm tuyệt đối. Cả hai giờ là Giáo sư Tiến sĩ khoa học ngành toán, được Giải thưởng Tạ Quang Bửu về nghiên cứu khoa học.

Về nhà cày ruộng hay dạy trường làng, vào đại học hay trở thành cán bộ giảng dạy bộ môn thuộc Toán học hiện đại, Báo *Toán học & Tuổi trẻ* luôn là sách gối đầu giường, là người bạn thủy chung, là người thầy thân thiết. Với tầm nhìn hiểu biết sâu rộng hơn, tôi thường xuyên ra đề và viết bài cho báo. Trong dịp kỷ niệm 30 năm *Toán học & Tuổi trẻ*, Tòa soạn trưng cầu ý kiến bạn đọc cả nước: "Bài báo nào bạn thích nhất ?", *Ẩn sau định lý Ptôlêmê* của tôi nhận được số phiếu cao nhất. Với *Toán học & Tuổi trẻ*, có hai kỷ niệm đẹp. Kỷ niệm thứ nhất là vào năm 1974, khi đoàn học sinh Việt Nam lần đầu tiên tham dự kỳ thi Olympic

Toán Quốc tế, Tòa soạn đăng đề ra và đáp án kỳ thi. Đọc qua tôi thấy lời giải bài 4 quá dài (trình bày hết một trang báo). Chỉ cần vẽ thêm đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC* và sử dụng *Hệ thức lượng trong đường tròn*, lời giải chỉ còn một phần tư trang. Tôi gửi nhận xét ra và được Tòa soạn đăng trong số báo tiếp theo với lời khen ngợi động viên. Kỷ niệm thứ hai, đọc bài "*Về bất đẳng thức Nesbitt cho ba số dương*" thấy thầy *Phan Đức Chính* nêu vấn đề: "*trong trường hợp bất đẳng thức Nesbitt cho bốn số thực dương, nếu bạn chứng minh được thì hãy vui mừng về bản lĩnh toán học của mình, rất nhiều nhà toán học thực thụ đã phải hết sức chật vật mới chứng minh được nó*". Tôi gửi thư với lời giải ra được báo đăng cùng lời khen của Thầy.

Kỷ niệm này nhắc đến bạn sẽ bảo tôi khoe khoang, nhưng có thực "trăm phần trăm". Khi tôi gọi không ít các Giáo sư (*Ngô Bảo Châu, Phùng Hồ Hải, Nguyễn Quốc Thắng, …*) bằng *Thầy*, các vị đã ngắt lời tôi: Sao thầy lại gọi em bằng thầy, ngày trước em thường giải các bài toán thầy ra trên báo *Toán học & Tuổi trẻ.* Kể chuyện này không chỉ để ngợi ca đức tính khiêm tốn của những tài năng đích thực, còn nói lên ảnh hưởng của tờ báo *Toán học & Tuổi trẻ* đối với các thế hệ yêu toán một thời điều kiện học tập khó khăn và thông tin cập nhập quá thiếu thốn.

Bước sang tuổi "thất thập cổ lai hy", tôi vẫn tham gia cộng tác thường xuyên với báo. Các thầy cô trong Tòa soạn qua bao thế hệ luôn xem tôi như người nhà, thường trao đổi những ý tưởng mới để phát triển hay những khó khăn báo cần vượt qua. Tòa soạn còn dành tâm sức đỡ đầu để ba cuốn sách về toán sơ cấp của tôi được ra mắt bạn đọc.

Sáu mươi năm trôi qua, Báo *Toán học & Tuổi trẻ* luôn chắp cánh cho tôi bay vào bầu trời hằng mơ ước: *Học toán và Giải toán*!

LÊ QUỐC HÁN
(Khoa Toán, Đại học Vinh)

****

PROBLEMS … *(Tiếp theo trang 21)*

$$h_a^2\left(\frac{1}{m_b^2}+\frac{1}{m_c^2}\right)+h_b^2\left(\frac{1}{m_c^2}+\frac{1}{m_a^2}\right)+h_c^2\left(\frac{1}{m_a^2}+\frac{1}{m_b^2}\right)\ge 6$$

where $h_a, h_b, h_c; m_a, m_b, m_c$ respectively the lengths of the altitudes and the medians from *A*, *B*, *C*.

Problem T9/562. Find the values for the parameter *m* so that the following equation has two distinguished real solutions

$$3^{x^2-2x+1}-\log_5(x^2-2x+6)^8+10-\sqrt{-x^2+2x+m}=0.$$

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/562. Consider the sequence (a_n) determined as follows

$$a_1=9 \text{ and } a_{n+1}=\frac{(n+5)a_n+22}{n+3}, n\in\mathbb{N}^*.$$

Find all positive integers *n*

a) so that a_n is a perfect square.

b) so that a_n is divisible by 2023.

Problem T11/562. Find all functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ satisfying

$$f(x+y)-f(x)f(y)=f(xy)-2xy-1$$

for every $x, y\in\mathbb{R}$.

Problem T12/562. Given a triangle *ABC* with the circumcircle (*O*) and the incircle (*I*). Let *D*, *E* respectively be the touch points between (*I*) and *AB*, *AC*. Assume that *BI*, *CI* intersect (*O*) again at *M*, *N* respectively; and *P*, *Q* be the reflections of *B*, *C* in *N*, *M* respectively. Denote *K*, *H* the orthocenters of the triangles *BPD*, *CQE* respectively. Let *S* be the intersection between *KQ* and *HP*. Show that

a) The circumcircles of *SQH*, *SPK* both pass through a same point on *MN*.

b) *AS* is perpendicular to *BC*.

DR. NGUYEN PHU HOANG LAN
(University of Education, VNU, Hanoi)

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

TƯ TƯỞNG GIẢM BIẾN TRONG GIẢI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC

TRẦN QUỐC LUẬT
(GV THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Hồ Chí Minh)

Bất đẳng thức là một dạng toán phổ biến và hấp dẫn bởi sự đơn giản, đẹp đẽ về hình thức cũng như bởi sự ngắn gọn bất ngờ trong lời giải. Vì vậy đây là một dạng toán nhận được sự quan tâm lớn của nhiều giáo viên và học sinh yêu toán. Trong các đề thi học sinh giỏi ở Việt Nam cũng như khu vực, quốc tế các bài toán bất đẳng thức thường xuyên xuất hiện. Trong bài viết này, tác giả xin trao đổi về một tư tưởng mà trong quá trình làm toán và dạy toán tác giả thường sử dụng, đó là tư tưởng giảm biến. Nhìn chung, bất đẳng thức càng ít biến thì càng dễ chứng minh (trường hợp 1 biến thì có công cụ đạo hàm hoặc biến đổi tương đương), vì vậy trong quá trình tìm lời giải, nếu ta cố gắng "giảm biến" được để đưa bất đẳng thức cần chứng minh về ít biến hơn thì lời giải sẽ dễ dàng được tìm ra hơn. Chúng ta hãy bắt đầu từ các bài toán trong Kỳ thi Đại học (ĐH), Kỳ thi Trung học phổ thông Quốc gia (THPTQG) sau đó là các bài toán trong Kỳ thi Học sinh giỏi Quốc gia (VMO), Kỳ thi Chọn Đội tuyển Việt Nam dự thi Olympic Quốc tế (VN TST).

Bài 1 (THPTQG, 2015). *Cho các số thực $a,b,c\in[1;3]$ thỏa mãn điều kiện $a+b+c=6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$\mathbb{P}=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+12abc+72}{ab+bc+ca}-\frac{abc}{2}.$$

Lời giải. Đặt $a=1+x; b=1+y; c=1+z$ ta có: $0\le x,y,z\le 2$ và $x+y+z=3$.

Ta có: $ab+bc+ca=xy+yz+zx+9=t+9$;

$$abc=xyz+xy+yz+zx+4=xyz+t+4;$$
$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=t^2-12xyz+6t+33$$

với $t=xy+yz+zx$. Do vậy:

$$\mathbb{P}=\frac{t^2+18t+153}{t+9}-\frac{xyz+t+4}{2}\le\frac{t^2+18t+153}{t+9}-\frac{t+4}{2}.$$

Chú ý rằng $3t\le(x+y+z)^2=9\Rightarrow t\le 3$.

Giả sử $x\ge y\ge z$ thì $0\le z\le 1$. Khi đó:

$$t\ge 2(x+y)-4+z(x+y)=(2+z)(3-z)-4$$
$$=2+z(1-z)\ge 2.$$
$$(\text{do } (x-2)(y-2)\ge 0).$$

Do vậy $t\in[2;3]$. Xét $h(t)=\dfrac{t^2+18t+153}{t+9}-\dfrac{t+4}{2}$ trên $[2;3]$ được $\max\limits_{[2;3]}h(t)=\dfrac{160}{11}$. Suy ra $\mathbb{P}\le\dfrac{160}{11}$.

Khi $a=1,b=2$ thì $\mathbb{P}=\dfrac{160}{11}$. Vậy $\max\mathbb{P}=\dfrac{160}{11}$.

Bài 2 (ĐH A, A1, 2014). *Cho các số thực không âm x,y,z thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$\mathbb{P}=\frac{x^2}{x^2+yz+x+1}+\frac{y+z}{x+y+z+1}-\frac{1+yz}{9}.$$

Lời giải. Đặt $S=y+z; P=yz$ thì

$$S^2-2P=y^2+z^2=2-x^2.$$

Ta viết lại biểu thức thành:

$$\mathbb{P}=\frac{2x^2}{3x^2+2x+S^2}+\frac{S}{S+x+1}-\frac{x^2+S^2}{18}.$$

Do đó: $\mathbb{P}\le\dfrac{2x^2}{3x^2+2x+S^2}+\dfrac{S}{S+x+1}-\dfrac{(x+S)^2}{36}$.

Đặt $t=S+x$ thì $S=t-x$ và $t\in[\sqrt{2};\sqrt{6}]$. Ta có:

$$\mathbb{P}\le\frac{2x^2}{3x^2+2x+(t-x)^2}+\frac{t-x}{t+1}-\frac{t^2}{36}.$$

Suy ra: $\mathbb{P}\le\dfrac{2x^2}{4x^2+2(1-t)x+t^2}+\dfrac{t-x}{t+1}-\dfrac{t^2}{36}$

$$=x\frac{f(x)}{(t+1)(4x^2+2(1-t)x+t^2)}+g(t)$$

với $f(x)=2x(t+1)-(4x^2+2(1-t)x+t^2)$;

$$g(t)=\frac{t}{t+1}-\frac{t^2}{36}.$$

Ta có $f'(x)=-8x+4t=0\Leftrightarrow x=\frac{t}{2}$.

Khi đó $f(x)\le f\left(\frac{t}{2}\right)=0$. Do đó $\mathbb{P}\le g(t)$.

Ta lại có $g'(t)=\frac{1}{(t+1)^2}-\frac{t}{18}\le 0\Leftrightarrow t\ge 2$.

Do vậy $\mathbb{P}\le g(t)\le g(2)=\frac{5}{9}$. Khi $x=y=1; z=0$ thì $\mathbb{P}=\frac{5}{9}$. Vậy $\max\mathbb{P}=\frac{5}{9}$.

Bài 3 (ĐH A,A1-2013). *Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn điều kiện $(a+c)(b+c)=4c^2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$\mathbb{P}=\frac{32a^3}{(b+3c)^3}+\frac{32b^3}{(a+3c)^3}-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}.$$

Lời giải. Đặt $x=\frac{a}{c}>0, y=\frac{b}{c}>0$ ta có:

$$(x+1)(y+1)=4 \text{ và } \mathbb{P}=\frac{32x^3}{(y+3)^3}+\frac{32y^3}{(x+3)^3}-\sqrt{x^2+y^2}.$$

Đặt $S=x+y>0;\ T=xy>0\ \ (S^2\ge 4T)$ ta có $T=3-S$. Do $0<4T\le S^2$ nên $S\in[2;3)$. Khi đó

$$\mathbb{P}=32\left[\frac{x^3(x+3)^3+y^3(y+3)^3}{(x+3)^3(y+3)^3}\right]-\sqrt{x^2+y^2}$$

$$=4(S-1)^3+24\frac{(S-3)(S-1)}{S+6}-\sqrt{S^2+2S-6}.$$

Xét hàm số $\mathbb{P}=f(S)$ trên $[2;3)$. Ta có

$$f'(S)>12-\frac{S+1}{\sqrt{S^2+2S-6}}>0;\forall S\in[2;3).$$

Do đó $\mathbb{P}=f(S)\ge f(2)=1-\sqrt{2}$. Khi $a=b=c$ thì $\mathbb{P}=1-\sqrt{2}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của $\mathbb{P}$ là $1-\sqrt{2}$.

Bài 4 (ĐH A, A1, 2012). *Cho các số thực $x;y;z$ thỏa mãn điều kiện $x+y+z=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$\mathbb{P}=3^{|x-y|}+3^{|y-z|}+3^{|z-x|}-\sqrt{6x^2+6y^2+6z^2}.$$

Lời giải. Giả sử $x\ge y\ge z$. Khi đó $x\ge 0\ge z$ và $y=-z-x$. Ta có:

$$\mathbb{P}=3^{2x+z}+3^{-2z-x}+3^{x-z}-\sqrt{12(x^2+z^2+xz)}$$

với $x\ge 0\ge z$. Đặt $-z=t\ge 0$, ta có

$$\mathbb{P}=3^{2x-t}+3^{2t-x}+3^{x+t}-\sqrt{12(x^2+t^2-xt)}$$

với $x,t\ge 0$. Áp dụng bất đẳng thức quen thuộc $e^x\ge 1+x,\forall x\ge 0$ ta có:

$$\mathbb{P}=e^{(2x-t)\ln 3}+e^{(2t-x)\ln 3}+e^{(x+t)\ln 3}-\sqrt{12(x^2+t^2-xt)}$$

$$\ge 3+2\left[(x+t)\ln 3-\sqrt{3(x^2+t^2-xt)}\right]\ge 3$$

(do $(x+t)^2-3(x^2+t^2-xt)=(x-y)(y-z)\ge 0$).

Khi $x=y=z=0$ thì $\mathbb{P}=3$. Vậy $\min\mathbb{P}=3$.

Bài 5 (ĐH A, A1-2011). *Cho x,y,z là các số thực thuộc đoạn $[1,4]$ và $x\ge y, x\ge z$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$\mathbb{P}=\frac{x}{2x+3y}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+x}.$$

Lời giải. Xét hàm số

$$f(x)=\frac{x}{2x+3y}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+x} \text{ với } x\in[y,4].$$

Ta có: $$f'(x)=\frac{3y}{(2x+3y)^2}-\frac{z}{(x+z)^2}\le\frac{3y}{24xy}-\frac{z}{(z+x)^2}$$

$$=\frac{1}{8x}-\frac{z}{(z+x)^2}=\frac{x^2-6xz+z^2}{8x(x+z)^2}<0$$

(vì $x^2-6xz+z^2=x(x-4z)+z(z-x)-xz<0$, do $1\le z\le x\le 4\le 4z$).

Do đó hàm số $f(x)$ nghịch biến, và ta suy ra:

$$\frac{6}{5}=f(y)\ge f(x)\ge f(4)=\frac{4}{3y+8}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+4}.$$

Xét hàm số $g(y):=\frac{4}{3y+8}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+4}$ với $y\in[1,4]$, ta có:

$$g'(y)=\frac{z}{(y+z)^2}-\frac{12}{(3y+8)^2}\ge\frac{4}{25y}-\frac{12}{(3y+8)^2}>0.$$

Vậy $g(y)$ đồng biến, suy ra:

$$g(y)\ge g(1)=\frac{4}{11}+\frac{1}{z+1}+\frac{z}{z+4}=h(z)\ge h(2)=\frac{34}{33}$$

với $z\in[1,4]$.

Khi $x=4, y=1$ và $z=2$ thì $P=\frac{34}{33}$ và khi $x=y$ thì $P=\frac{6}{5}$. Vậy $\min P=\frac{34}{33}$ và $\max P=\frac{6}{5}$.

Bài 6 (VMO 2015). *Cho các số thực $a,b,c\ge 0$. Chứng minh rằng*

$$3(a^2+b^2+c^2)\ge(a+b+c)(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge(a+b+c)^2.$$

Lời giải. Trước hết chú ý rằng

$$3(a^2+b^2+c^2)=(a+b+c)^2+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge(a+b+c)(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2.$$

Do vậy ta chỉ cần chứng minh

$$(a+b+c)(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge(a+b+c)^2.$$

Đặt $x=\sqrt{a}; y=\sqrt{b}; z=\sqrt{c}$ thì $x,y,z\ge 0$ và ta cần chứng minh

$$x^4+y^4+z^4+(x^2+y^2+z^2)(xy+yz+zx)\ge 4(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2).$$

Đây là một bất đẳng thức 3 biến, ta sẽ giảm về 2 biến.

Nếu $z=0$ thì bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng.

Khi $z>0$, đặt $m=\frac{x}{z}; n=\frac{y}{z}$ thì bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$m^4+n^4+1+(m^2+n^2+1)(mn+m+n)\ge 4(m^2n^2+m^2+n^2).$$

Đây là một bất đẳng thức 2 biến, ta sẽ giảm về 1 biến. Đặt $S=m+n; P=mn$ thì $0\le P\le\frac{S^2}{4}$ và bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $f(P)\le 0$ với

$$f(P)=4P^2+(3S^2+2S-9)P-(S-1)^2(S^2+3S+1).$$

Ta có $f(P)$ là một hàm số bậc hai theo biến P có hệ số của P^2 dương và

$$f(0)=-(S-1)^2(S^2+3S+1)\le 0;$$

$$f\left(\frac{S^2}{4}\right)=-\frac{(S-2)^2(2S+1)}{4}\le 0$$

nên $f(P)\le 0; \forall P\in\left[0;\frac{S^2}{4}\right]$.

Bất đẳng thức đã cho được chứng minh.

Bài 7 (VMO 2014). *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$\mathbb{T}=\frac{x^3y^4z^3}{(x^4+y^4)(xy+z^2)^3}+\frac{y^3z^4x^3}{(y^4+z^4)(yz+x^2)^3}+\frac{z^3x^4y^3}{(z^4+x^4)(zx+y^2)^3}.$$

với x,y,z là các số thực dương.

Lời giải. Mỗi số hạng trong $\mathbb{T}$ gồm 3 biến. Ta sẽ thực hiện đánh giá để đưa chúng về 2 biến. Thật vậy:

$$\mathbb{T}\le\frac{x^3y^4z^3}{(x^4+y^4)(2z\sqrt{xy})^3}+\frac{y^3z^4x^3}{(y^4+z^4)(2x\sqrt{yz})^3}+\frac{z^3x^4y^3}{(z^4+x^4)(2y\sqrt{zx})^3}=\frac{\mathbb{Q}}{8}$$

với $\mathbb{Q}=\frac{a^3b^5}{a^8+b^8}+\frac{b^3c^5}{b^8+c^8}+\frac{c^3a^5}{c^8+a^8}$ trong đó

$$a=\sqrt{x}>0; b=\sqrt{y}>0; c=\sqrt{z}>0.$$

Mỗi hạng tử trong $\mathbb{Q}$ chứa 2 biến, ta sẽ giảm về 1 biến. Thật vậy, đặt $m=\frac{a}{b}; n=\frac{b}{c}; p=\frac{c}{a}$ thì $m,n,p>0; mnp=1$ và cần

$$\mathbb{Q}=\frac{m^3}{m^8+1}+\frac{n^3}{n^8+1}+\frac{p^3}{p^8+1}\le\frac{3}{2}.$$

Hướng 1. Giả sử $m\ge n\ge p>0$. Nếu $m\le 2$, áp dụng BĐT phụ $\frac{x^3}{x^8+1}\le\frac{1-\ln x}{2}; \forall x\in(0;2]$ ta có ngay đpcm. Ngược lại nếu $m>2$, thì $\frac{m^3}{m^8+1}<\frac{8}{257}; \forall m>2$. Lại có $p<\frac{1}{\sqrt{2}}$ nên $\frac{p^3}{p^8+1}<\frac{4\sqrt{2}}{17}$. Mặt khác $\frac{n^3}{n^8+1}\le\frac{\sqrt[8]{3^35^5}}{8}; \forall n>0$.

Cộng lại ta được:

$$\mathbb{Q}<\frac{8}{257}+\frac{4\sqrt{2}}{17}+\frac{\sqrt[8]{3^35^5}}{8}<\frac{8}{257}+\frac{4}{17}.\frac{3}{2}+1\le\frac{3}{2}.$$

Do vậy $\mathbb{T}\le\frac{3}{16}$.

Hướng 2. Ta đã biết với $a,b,c>0; abc=1$ thì luôn có: $\frac{1}{a^2+a+1}+\frac{1}{b^2+b+1}+\frac{1}{c^2+c+1}\ge 1$ (bất đẳng thức Vasc quen thuộc).

Do vậy ta cần đánh giá

$$\frac{m^3}{m^8+1}\le\frac{3}{4}.\frac{m^{2k}+m^k}{m^{2k}+m^k+1};\forall m>0.$$

Lấy đạo hàm 2 vế rồi thay $x=1$ vào ta được $k=-2$. Khi đó bất đẳng thức đúng là:

$$\frac{m^3}{m^8+1}\le\frac{3}{4}.\frac{m^2+1}{m^4+m^2+1};\forall m>0.$$

Cộng các bất đẳng thức tương tự ta được:

$$\mathbb{Q}\le\frac{3}{4}\left(3-\frac{1}{m^{-4}+m^{-2}+1}-\frac{1}{n^{-4}+n^{-2}+1}-\frac{1}{p^{-4}+p^{-2}+1}\right)$$

$$\le\frac{3}{2} \text{ do } m^{-2}.n^{-2}.p^{-2}=1. \text{ Vậy } \mathbb{T}\le\frac{3}{16}.$$

Khi $x=y=z$ thì $\mathbb{T}=\frac{3}{16}$. Do đó $\max\mathbb{T}=\frac{3}{16}$.

Bài 8 (VMO 2008). *Cho x,y,z là các số thực không âm, đôi một khác nhau. Chứng minh rằng*

$$(xy+yz+zx)\left(\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}\right)\ge 4.$$

Lời giải. Giả sử $x>y>z; t=\frac{x}{y}>1$. Ta có

$$(xy+yz+zx)\left(\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}\right)$$

$$\ge xy\left(\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2}\right)=\frac{t}{(t-1)^2}+t+\frac{1}{t}:=f(t).$$

Ta có: $f'(t)=\frac{1-t^2}{(t-1)^4}+\frac{t^2-1}{t^2}\ge 0\Leftrightarrow t\ge\frac{3+\sqrt5}{2}.$

Do đó $f(t)\ge f\left(\frac{3+\sqrt5}{2}\right)=4.$ Suy ra đpcm.

Bài 9. *Cho các số thực x,y,z thỏa mãn điều kiện*

$$\begin{cases}(x-1)^3+(z-3)^3=(2-y)^3\\(x-1)^5+(y-2)^5=(3-z)^5\end{cases}.$$

Chứng minh rằng

$$(x-1)^{2017}+(y-2)^{2017}+(z-3)^{2017}+(xyz-6)^{2018}\ge 0.$$

Lời giải. Bài toán này chứa 3 biến. Ta sẽ dùng ẩn phụ để đưa về 2 biến. Thật vậy, nếu $z=3$ thì $x+y=3$, khi đó bất đẳng thức cần chứng minh hiển nhiên đúng. Ngược lại, đặt

$$a=-\frac{x-1}{z-3}; b=-\frac{y-2}{z-3} \text{ ta có } \begin{cases}a^3+b^3=1\\a^5+b^5=1\end{cases}.$$

Cách 1. Ta sẽ đưa về 1 biến, đặt $S=a+b; P=ab$ thì $S^2\ge 4P$ và $S^3-3SP=1\Leftrightarrow P=\frac{S^3-1}{3S}$. Thay vào ta có $S^2\ge 4\frac{S^3-1}{3S}\Leftrightarrow 0<S\le\sqrt[3]{4}$. Ta lại có

$(S^2-2P)-P^2S=1$. Thay $P=\frac{S^3-1}{3S}$ vào ta được: $S^2-2\frac{S^3-1}{3S}-\frac{(S^3-1)^2}{9S}=1$

$$\Leftrightarrow S^6-5S^3+9S-5=0$$

$$\Leftrightarrow (S-1)^3(S^3+3S^2+6S+5)=0\Leftrightarrow S=1.$$

Suy ra $a+b=1$.

Cách 2. Ta có $1=a^3+b^3>0\Rightarrow a+b>0$. Nếu $ab>0$ thì $a>0,b>0$. Khi đó:

$$0<a^3<1\Leftrightarrow 0<a<1.$$

Do vậy $a^5+b^5<a^3+b^3=1$, vô lý.

Nếu $ab=0$ thì $a+b=1$.

Nếu $ab<0$, giả sử $a>0>b$ thì đặt $-b=c$ ta có $a>c>0; a^3-c^3=1; a^5-c^5=1$. Khi đó $a>1$.

Nếu $c<1$ thì $a^5-c^5>a^3-c^3=1$, vô lý.

Nếu $a>c>1$ thì

$$a^5-c^5=(a-c)(a^4+c^4+ac(a^2+c^2)+a^2c^2)$$

$$>(a-c)(a^2+ac+c^2)=1, \text{ vô lý.}$$

Suy ra $a+b=1$. Do vậy $x+y+z=6$. Từ đó:

$$(x-1)^{2017}+(y-2)^{2017}+(z-3)^{2017}+(xyz-6)^{2018}$$

$$=(xyz-6)^{2018}\ge 0 \quad \text{(đpcm).}$$

Bài 10. (VN TST 2015) *Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho tồn tại n số thực thỏa mãn đồng thời các điều kiện:*

i) *Tổng của n số đó dương.*

ii) *Tổng lập phương của n số đó âm.*

iii) *Tổng lũy thừa bậc 5 của n số đó dương.*

Lời giải. Tư tưởng để giải quyết bài toán này là giảm biến bằng cách chia 2 loại biến âm dương. Cụ thể, rõ ràng $n=1, n=2$ không thỏa mãn.

Xét $n=3$. Giả sử $a+b+c>0, a^3+b^3+c^3<0$, $a^5+b^5+c^5>0$ và $a\ge b\ge c$ (hệ quả là $a>0$).

Nếu $b>0; c<0$ (chú ý nếu 1 biến bằng không thì quy về $n=2$, loại) thì đặt $c'=-c>0$ ta được $x+y>1, x^3+y^3<1, x^5+y^5>1$ với $x=\frac{a}{c'}; y=\frac{b}{c'}$.

Ta có $0<x,y<1$ nên $x^5+y^5<x^3+y^3<1$, vô lý.

Nếu $c<b<0$ thì đặt $b'=-b, c'=-c$ ta được

$$x+y<1, x^3+y^3>1, x^5+y^5<1$$

với $x=\frac{b'}{a}>0; y=\frac{c'}{a}>0$.

Ta có $0<x,y<1$ nên $x^3+y^3<x+y<1$, vô lý.

Tóm lại $n=3$ không thỏa mãn.

Với $n=4$. Giả sử $a+b+c+d>0, a^3+b^3+c^3+d^3<0$, $a^5+b^5+c^5+d^5>0$ và $a\ge b\ge c\ge d$ (hệ quả là $a>0$).

Nếu $b>0; c>0>d$ (chú ý nếu 1 biến bằng không thì quy về $n=3$ loại) thì đặt $d'=-d>0$ ta được $x+y+z>1, x^3+y^3+z^3<1, x^5+y^5+z^5>1$ với $x=\frac{a}{d'}>y=\frac{b}{d'}>z=\frac{c}{d'}>0$.

Do $0<x,y,z<1$ nên $x^5<x^3, y^5<y^3, z^5<z^3$. Suy ra $x^5+y^5+z^5<x^3+y^3+z^3=1$, vô lý.

Nếu $d<c<b<0$ thì đặt $b'=-b, c'=-c, d'=-d$ ta được

$$x+y+z<1, x^3+y^3+z^3>1, x^5+y^5+z^5<1$$

với $x=\frac{a}{d'}>0; y=\frac{b}{d'}>0; z=\frac{c}{d'}>0$.

Do $0<x,y,z<1$ nên $x^3<x, y^3<y, z^3<z$. Suy ra $x^3+y^3+z^3<x+y+z<1$, vô lý. Xét trường hợp $a>b>0>c>d$. Đặt $c'=-c, d'=-d$ ta có $x+y>z+1, x^3+y^3<z^3+1, x^5+y^5>z^5+1$ với $x=\frac{a}{d'}>y=\frac{b}{d'}>0; z=\frac{c'}{d'}\in(0;1)$.

Ta có $xy>\frac{t^3-z^3-1}{3t}>0$ (với $t=x+y>z+1$) nên $x^2+y^2<\frac{t^3+2z^3+2}{3t}$. Khi đó

$$x^5+y^5=(x^3+y^3)(x^2+y^2)-x^2y^2(x+y)$$

$$<(z^3+1)\frac{t^3+2z^3+2}{3t}-\frac{(t^3-z^3-1)^2}{9t}<1+z^5$$

vì biến đổi tương đương điều này được $t^6-5(z^3+1)t^3+9(z^5+1)t-5(z^3+1)^2>0(*)$ vô lý do $x^5+y^5>1+z^5$. Bài toán sẽ được giải quyết nếu chứng minh được (*) với $t>z+1$.

Thật vậy (*) tương đương với $f(t)>0$ với $f(t)=t^6-5(z^3+1)t^3+9(z^5+1)t-5(z^3+1)^2$. Chú ý $f(z+1)=0$ và $f'(t)=6t^5-15(z^3+1)t^2+9(1+z^5)$ và $f'(z+1)=45z^2(z+1)>0$.

Lại có $f''(t)=30t^4-30(z^3+1)t>0$ do $t^3>(z+1)^3>z^3+1$ nên (*) được chứng minh.

Khi $n=5$ ta có bộ $(-7;-7;2;5;8)$ thỏa mãn. Bài toán kết thúc, giá trị n cần tìm là $n=5$.

Bài 11 (VN TST 2013). *Tìm hằng số k nguyên dương lớn nhất thỏa mãn*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{k}{a+b+c+1}\ge 3+\frac{k}{4}$$

với mọi $a,b,c>0$ mà $abc=1$.

Lời giải. Giả sử k là số nguyên dương sao cho bất đẳng thức đúng với mọi a, b, c dương mà $abc=1$.

Lấy $b=c=\frac{2}{3}, a=\frac{9}{4}$, thì bất đẳng thức trở thành:

$$\frac{4}{9}+2.\frac{3}{2}+\frac{k}{\frac{9}{4}+2.\frac{2}{3}+1}\ge 3+\frac{k}{4}\Leftrightarrow \frac{4}{9}+\frac{12k}{55}\ge\frac{k}{4}$$

$$k\le\frac{880}{63}<14.$$ Do $k\in\mathbb{Z}^+$ nên $k\le 13$.

Ta sẽ chứng minh rằng với $k=13$ thì bất đẳng thức đã cho đúng, tức là:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{13}{a+b+c+1}\ge\frac{25}{4}\quad (1).$$

Giả sử $a\ge b\ge c$ thì $a\ge 1$. Đặt $S=b+c, P=bc$ thì $S^2\ge 4P$ nên $S\ge 2\sqrt{P}=\frac{2}{\sqrt{a}}$.

Ta có $\mathrm{VT}(1)=\frac{1}{a}+Sa+\frac{13}{a+S+1}:=f(S)$.

Ta có $f(S) = a - \frac{13}{(a+S+1)^2} > 0$ với $S \ge \frac{2}{\sqrt{a}}$ do $a(a+S+1)^2 \ge \left(a\sqrt{a}+2+\sqrt{a}\right)^2 \ge 16 > 13$. Suy ra $f(S) \ge f\left(\frac{2}{\sqrt{a}}\right) = h(x)$ với $x = \sqrt{a} \ge 1$. Khảo sát hàm số $h(x)$ trên $[1;+\infty)$ được $\min\limits_{[1;+\infty)} h(x) = \frac{25}{4}$.

Suy ra (1) đúng. Vậy giá trị k cần tìm là $k = 13$.

Bài 12 (VN TST 2012). *Cho các số dương $a_1, a_2, \ldots a_{17}$ thỏa mãn*

$$\sum_{i=1}^{17} a_i^2 = 24; \sum_{i=1}^{17} a_i^3 + \sum_{i=1}^{17} a_i < 20\sqrt{6}.$$

Chứng minh với mọi i, j, k thỏa mãn $1 \le i < j < k \le 17$ ta luôn có a_i, a_j, a_k là độ dài ba cạnh của 1 tam giác.

Lời giải. Bài toán này chứa 17 biến, ta sẽ đưa về 3 biến tương đương với 3 cạnh của một tam giác.

Đặt $a_i = \sqrt{24} x_i$ ta có:

$$\sum_{i=1}^{17} x_i^2 = 1; 24\sum_{i=1}^{17} x_i^3 + \sum_{i=1}^{17} x_i < 10.$$

Điều kiện để 3 số dương a, b, c là 3 cạnh của một tam giác là giữa chúng có một mỗi liên hệ bất đẳng thức đồng bậc dạng

$$(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) > 0,$$

nhưng để cho gọn và biểu diễn được dưới dạng các biểu thức đối xứng theo a, b, c ta nhân thêm $a+b+c$ và được điều kiện cần và đủ là $(a^2+b^2+c^2)^2 > 2(a^4+b^4+c^4)$. Như vậy ta cần chặn trên cho tổng các lũy thừa bậc 4 của các biến, tức là ta cần đánh giá $x^4 \le a(24x^3+x)+bx^2+c$ với mọi $0 < x < 1$. Cho $x = 0, x = 1$ ta được $c = 0; 25a+b = 1$. Do đó ta cần:

$$x^3 \le a(24x^2+1)+(1-25a)x$$

$$\Leftrightarrow (1-x)[a(1-24x)+x(1+x)] \ge 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{16}.$$

Khi đó $b = \frac{-9}{16}$. Tóm lại ta đã có:

$$x^4 \le \frac{1}{16}(24x^3+x) - \frac{9}{16}x^2; \forall x \in (0;1).$$

Áp dụng BĐT trên với $x = a_i, i = 1, \ldots, 17$ ta có:

$$\sum_{i=1}^{17} x_i^4 \le \frac{10-9}{16} = \frac{1}{16} \text{ hay } 16\sum_{i=1}^{17} x_i^4 \le \left(\sum_{i=1}^{17} x_i^2\right)^2.$$

Tóm lại ta đã có 1 hệ thức liên hệ đồng bậc giữa 17 biến. Ta cần giảm chúng về 3 biến. Thật vậy, ta có: $\left(\sum_{i=1}^{17} x_i^2\right)^2 \ge 16\sum_{i=1}^{17} x_i^4$

$$\ge \left(\sqrt{2(x_1^4+x_2^4+x_3^4)} + x_4^2 + \ldots + x_{17}^2\right)^2$$

$$\Leftrightarrow (x_1^2+x_2^2+x_3^2)^2 \ge 2(x_1^4+x_2^4+x_3^4).$$

Đây chính là ràng buộc cần tìm. Bài toán được giải quyết trọn vẹn.

Bài 13 (VN TST 2011). *Cho số nguyên $n \ge 3$. Xét n số thực $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:*

i) $x_1 \ge x_2 \ge x_3 \ge \ldots \ge x_n$

ii) $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$

iii) $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = n(n-1)$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của tổng

$$\mathbb{S} = x_1 + x_2.$$

Lời giải. Bài toán này chứa n biến, ta sẽ đưa về 2 biến tương đương với số biến của $\mathbb{S}$. Sử dụng giả thiết và bất đẳng thức Bunyakovsky ta có:

$$n(n-1) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$$

$$\ge \frac{(x_1+x_2)^2}{2} + \frac{(x_3+\ldots+x_n)^2}{n-2} = \frac{n}{2(n-2)}\mathbb{S}^2$$

$\Leftrightarrow \mathbb{S} \le \sqrt{2(n-1)(n-2)}$. Khi $x_1 = x_2 = \sqrt{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$; $x_3 = \ldots = x_n = -\sqrt{\frac{2(n-1)}{n-2}}$ thì $\mathbb{S} = \sqrt{2(n-1)(n-2)}$.

Vậy $\max \mathbb{S} = \sqrt{2(n-1)(n-2)}$.

Việc tìm giá trị nhỏ nhất của $\mathbb{S}$ ta cần giải quyết trong trường hợp $n = 3$ để cảm nhận bài toán.

Khi đó $a \ge b \ge c; a+b+c = 0; a^2+b^2+c^2 = 6$ và $\mathbb{S} = a+b$. Khử c để giảm về 2 biến a, b ta được

$a^2+b^2+ab=3$. Đặt $P=ab$ thì $P=\mathbb{S}^2-3$. Chú ý $\mathbb{S}^2 \ge 4P = 4(\mathbb{S}^2-3) \Leftrightarrow 0 \le \mathbb{S} \le 2$. Ta có:

$a+2b \ge a+b+c=0; 2a+b \ge a+b+c=0$. Do đó $(2a+b)(a+2b) \ge 0 \Leftrightarrow 2\mathbb{S}^2+P \ge 0 \Leftrightarrow 3\mathbb{S}^2-3 \ge 0$ $\Leftrightarrow \mathbb{S} \ge 1$. Khi $a=2; b=-1; c=-1$ thì $\mathbb{S}=1$.

Vậy min $\mathbb{S}=1$.

Với $n=4$, ta có: $a \ge b \ge c \ge -a-b-c$;

$a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=6$ và $\mathbb{S}=a+b$. Khử c được $a \ge b \ge \dfrac{\sqrt{24-3(a^2+b^2)-2ab}-a-b}{2}$

$\Rightarrow a^2+2ab+3b^2 \ge 6 \Rightarrow 3\mathbb{S}^2 \ge 2(a^2+2ab+3b^2) \ge 12.$

Khi $a=1; b=1; c=1$ thì $\mathbb{S}=2$. Vậy min $\mathbb{S}=2$.

Với $n \ge 5$ ta thử làm tiếp tương tự như trường hợp $n=4$. Trước hết khử x_{n-1} để đưa về $n-1$ biến, cụ thể $x_1 \ge x_2 \ge \ldots \ge x_{n-1} \ge -x_1-x_2-\ldots-x_{n-1}$ và $x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2+\sum\limits_{1\le i<j\le n-1} x_ix_j=\dfrac{n(n-1)}{2}$. Khi đó ta có

$$x_{n-1}=\frac{\sqrt{2n(n-1)-2\sum\limits_{1\le i<j\le n-2}x_ix_j-3\sum\limits_{k=1}^{n-2}x_k^2}-\sum\limits_{l=1}^{n-2}x_l}{2}.$$

Suy ra:

$$\sum_{l=1}^{n-3}x_l+3x_{n-2} \ge \sqrt{2n(n-1)-2\sum_{1\le i<j\le n-2}x_ix_j-3\sum_{k=1}^{n-2}x_k^2}$$

$$\Leftrightarrow 4\sum_{k=1}^{n-3}x_k^2+12x_{n-2}^2+6x_{n-2}\sum_{l=1}^{n-3}x_l+2\sum_{1\le i<j\le n-2}x_ix_j +2\sum_{1\le i<j\le n-3}x_ix_j \ge 2n(n-1).$$

Do vậy: $$\frac{n(n-1)}{2}(x_1+x_2)^2 \ge 4\sum_{k=1}^{n-3}x_k^2+12x_{n-2}^2 +8x_{n-2}\sum_{l=1}^{n-3}x_l+4\sum_{1\le i<j\le n-3}x_ix_j \ge 2n(n-1).$$

Chẳng hạn $n=5$, bất đẳng thức trên có dạng:

$$3(x_1^2+x_2^2)+8x_1x_2 \ge 6x_3^2+4x_3(x_1+x_2).$$

Nếu $x_3 \ge 0$ thì kết luận là hiển nhiên, ngược lại do $x_1+x_2+3x_3 \ge 0$ nên $x_1+x_2 \ge 0$. Ta sẽ giảm biến bằng đạo hàm, thật vậy xét $f(x_3)=6x_3^2+4x_3(x_1+x_2)-3(x_1^2+x_2^2)-8x_1x_2$ thì $f'(x_3)=12x_3+4(x_1+x_2) \ge 0$. Do vậy:

$$f(x_3) \le f(x_2)=6x_2^2+4x_2(x_1+x_2)-3(x_1^2+x_2^2)-8x_1x_2 =(x_2-x_1)(7x_2+3x_1) \le 0 \text{ vì } 3x_1+7x_2 \ge 0.$$

Lý do rất đơn giản là

$$3x_1+7x_2 \ge \frac{5}{4}x_1+\frac{7}{4}(x_1+4x_3) \ge 0.$$

Tóm lại trường hợp $n=5$ đã xong.

Trở lại trường hợp tổng quát, xét

$$f(x_{n-2})=4\sum_{k=1}^{n-3}x_k^2+12x_{n-2}^2+8x_{n-2}\sum_{l=1}^{n-3}x_l +4\sum_{1\le i<j\le n-3}x_ix_j-\frac{n(n-1)}{2}(x_1+x_2)^2.$$

Ta có $f'(x_{n-2})=24x_{n-2}+8\sum\limits_{l=1}^{n-3}x_l \ge 0$ nên

$$f(x_{n-2}) \le f(x_{n-3})=4\sum_{k=1}^{n-4}x_k^2+24x_{n-3}^2+12x_{n-3}\sum_{l=1}^{n-4}x_l +4\sum_{1\le i<j\le n-4}x_ix_j-\frac{n(n-1)}{2}(x_1+x_2)^2=h(x_{n-3}).$$

Chú ý $h'(x_{n-3})=48x_{n-3}+12\sum\limits_{l=1}^{n-4}x_l \ge 0$ nên

$$h(x_{n-3}) \le h(x_{n-4})=4\sum_{k=1}^{n-5}x_k^2+40x_{n-4}^2+16x_{n-4}\sum_{l=1}^{n-5}x_l +4\sum_{1\le i<j\le n-5}x_ix_j-\frac{n(n-1)}{2}(x_1+x_2)^2.$$

Công việc cứ tiếp tục như vậy, sau mỗi lần số biến giảm đi một. Cuối cùng ta phải chứng minh một điều khá đơn giản là

$$\frac{n^2-n-8}{2}x_1^2+(n^2-5n+8)x_1x_2-\frac{3n^2-11n+8}{2}x_2^2 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1-x_2)[(n^2-n-8)x_1+(3n^2-11n+8)x_2] \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1-x_2)\{n(n-4)x_1+(3n-8)[x_1+(n-1)x_2]\} \ge 0.$$

Điều này hiển nhiên đúng do $x_1 \ge 0$ và $x_1+(n-1)x_2 \ge 0$. Suy ra $\mathbb{S} \ge 2$.

Khi $x_1=\ldots=x_{n-1}=1, x_n=1-n$ thì $\mathbb{S}=2$.

Vậy min$\mathbb{S}=2$.

Bài 14. *Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $\min\{a+b;b+c;c+a\} > \sqrt{2}$ và $a^2+b^2+c^2=3$.*

Chứng minh $$\frac{a}{(b+c-a)^2}+\frac{b}{(c+a-b)^2}+\frac{c}{(a+b-c)^2} \ge 3(a^3+b^3+c^3-2).$$

HD giải. Từ giả thiết $a^2+b^2 \geq \frac{1}{2}(a+b)^2 > 1$. Do đó $c < \sqrt{2} < a+b$. Tương tự $b+c > a; c+a > b$.

Ta chỉ cần chứng minh với a,b,c là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác thì luôn có:

$$\frac{a}{(b+c-a)^2}+\frac{b}{(c+a-b)^2}+\frac{c}{(a+b-c)^2}$$

$$\geq 27.\frac{9(a^3+b^3+c^3)-2(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)}{(a+b+c)^4} \quad (1).$$

Bởi lẽ, do BĐT (1) đúng nên với giả thiết đã cho, ta có $a+b+c \leq 3$, do vậy

$$27.\frac{9(a^3+b^3+c^3)-2(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)}{(a+b+c)^4}$$

$$\geq 3(a^3+b^3+c^3-2).$$

Kết hợp 2 BĐT trên, ta có đpcm.

Chú ý: Để chứng minh (1) ta chuẩn hóa $a+b+c=3$ và sử dụng BĐT phụ $\frac{1}{a(3-2a)^2} \geq 3a-2$ sẽ được đpcm.

Bài 15. *Tìm số thực dương k lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng với mọi* $x,y,z>0$

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+3k \geq (k+1)\frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}.$$

Lời giải. Chuẩn hóa $xyz=1$. Ta cần

$$xy^2+yz^2+zx^2+3k \geq (k+1)(x+y+z); \forall x,y,z>0.$$

Đổi biến $(x;y;z)=\left(\frac{b}{a};\frac{c}{b};\frac{a}{c}\right)$ ta cần

$$a^3+b^3+c^3+3kabc \geq (k+1)(a^2b+b^2c+c^2a);$$

$\forall a,b,c>0$. Cho $c \to 0$ ta được $\frac{1+t^3}{t}-1 \geq k+1$ với mọi $t=\frac{b}{a}>0$. Khi đó $k \leq M-1$ với $M=\frac{3}{\sqrt[3]{4}}<3$. Ta cần chứng minh

$$a^3+b^3+c^3-3abc \geq M(a^2b+b^2c+c^2a-3abc);$$

$\forall a,b,c>0$. Giả sử $c=\min\{a;b;c\}$. Ta sẽ giảm biến bằng cách chuẩn hóa $c=1$. Đặt $a=1+x; b=1+y$ với $x,y \geq 0$. Thay vào biến đổi BĐT trên ta được:

$$x^3+y^3-Mx^2y+(3-M)(x^2+y^2-xy) \geq 0, \text{đúng.}$$

Bài 16. *Cho các số thực dương thay đổi* a,b,c *thỏa mãn* $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=3$. *Tìm số nguyên dương l lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng*

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca} \geq a^{l/2}+b^{l/2}+c^{l/2}.$$

Lời giải. Đổi biến để khử căn ta đưa bài toán về dạng tìm số nguyên dương l lớn nhất sao cho

$$\frac{1}{a^2b^2}+\frac{1}{b^2c^2}+\frac{1}{c^2a^2} \geq a^l+b^l+c^l \quad (*)$$

với mọi $a,b,c>0$ mà $a+b+c=3$.

Do (*) đúng với mọi $a,b,c>0$ mà $a+b+c=3$ nên nó cũng đúng khi $a=b=x; c=3-2x$ với mọi $x \in \left(0;\frac{3}{2}\right)$. Khi đó:

$$\frac{\frac{6x^2-12x+9}{x^4(3-2x)^2}-3}{(x-1)^2} \geq \frac{2(x^l-1)+(3-2x)^l-1}{(x-1)^2}; \forall x \in \left(0;\frac{3}{2}\right).$$

Cho $x \to 1$ ta được:

$$24 \geq \frac{2l(l-1)+4l(l-1)}{2} \Rightarrow l \leq 3 \text{ do } l \in \mathbb{Z}^+.$$

Ta sẽ chứng minh $l=3$ là giá trị tốt nhất cần tìm. Thật vậy, ta cần chứng minh (với $a+b+c=3$)

$$a^2+b^2+c^2 \geq a^2b^2c^2(a^3+b^3+c^3). (**)$$

Ta sẽ giảm về 2 biến qua bổ đề sau

Bổ đề (*dạng 2 biến của BĐT trên*): *Nếu* $x,y>0$ *mà* $x+y=2$ *thì* $x^2+y^2 \geq x^2y^2(x^3+y^3)$.

Ta sẽ sẽ dùng Bổ đề dạng 2 biến này để chứng minh bất đẳng thức dạng 3 biến. Giả sử $a \leq b \leq c$.

Đặt $x=\frac{2a}{a+b}; y=\frac{2b}{a+b}$ ta được:

$$a^2b^2(a^3+b^3) \leq (a^2+b^2)\left(\frac{a+b}{2}\right)^5. \text{ Do vậy:}$$

$$VT(**) \leq c^2\left[(a^2+b^2)\left(\frac{a+b}{2}\right)^5+a^2b^2c^3\right].$$

Ta chỉ cần phải chứng minh

$$a^2+b^2+c^2 \geq c^2\left[(a^2+b^2)t^5+t^4c^3\right]$$

với $t=\dfrac{a+b}{2}\le 1\le c$. Dễ thấy $t^5c^2\le (t^2c)^2\le 1$ nên ta chỉ cần chứng minh $2t^2(1-c^2t^5)+c^2\ge t^4c^5$. Thay $c=3-2t$ vào biến đổi tương đương thấy BĐT trên chính là:

$(t-1)^2(8t^7-56t^6+114t^5-76t^4+4t^3+3t^2+2t+3)\ge 0$.

Điều này hiển nhiên đúng. Vậy giá trị tốt nhất của l cần tìm là $l=3$.

Bài 17 (China TST-2015). *Cho $n\ge 2$ và n số thực dương $x_1,x_2,\dots,x_n$ lập thành 1 dãy đơn điệu không giảm thỏa mãn $x_1,\dfrac{x_2}{2},\dots,\dfrac{x_n}{n}$ là một dãy đơn điệu không tăng. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\mathbb{R}=\dfrac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n\sqrt[n]{x_1x_2\dots x_n}}$.*

Lời giải. Rõ ràng $\mathbb{R}\ge 1$. Vậy giá trị nhỏ nhất của $\mathbb{R}$ là 1, đạt được khi $\{x_k\}$ là dãy hằng.

Ta dự đoán $\mathbb{R}$ đạt GTLN khi $\left\{\dfrac{x_i}{i}\right\}$ là dãy hằng, tức là ta sẽ đi chứng minh $\mathbb{R}\le\dfrac{n+1}{2\sqrt[n]{n!}}$.

Đổi biến $y_i=\dfrac{x_i}{i};\forall i$ ta có $y_1\ge y_2\ge\dots\ge y_n>0$ và $y_1\le 2y_2\le\dots\le ny_n$. Ta sẽ chứng minh

$$y_1+2y_2+\dots+ny_n\le\frac{n(n+1)}{2}\sqrt[n]{y_1y_2\dots y_n}\quad (*).$$

Dễ kiểm tra với $n=2$. Giả sử (*) đúng với $n=k$, tức $y_1+2y_2+\dots+ky_k\le\dfrac{k(k+1)}{2}\sqrt[k]{y_1y_2\dots y_k}$.

Ta cần chứng minh (*) đúng với $n=k+1$, tức

$$y_1+2y_2+\dots+ky_k+(k+1)y_{k+1}\le\frac{(k+1)(k+2)}{2}\sqrt[k+1]{y_1y_2\dots y_ky_{k+1}}.$$

Thật vậy, xét hàm số:

$$f(t)=y_1+2y_2+\dots+ky_k+(k+1)t-\frac{(k+1)(k+2)}{2}\sqrt[k+1]{y_1y_2\dots y_kt}$$

với $t\in\left[\dfrac{\sqrt[k]{k!y_1y_2\dots y_k}}{k+1};\sqrt[k]{y_1y_2\dots y_k}\right]$. Ta có:

$$f'(t)=k+1-\frac{(k+2)}{2}\sqrt[k+1]{\frac{y_1y_2\dots y_k}{t^k}}\ge 0\Leftrightarrow t\ge t_0.$$

Do vậy

$$f(t)\le\max\left\{f\left(\frac{\sqrt[k]{k!y_1y_2\dots y_k}}{k+1}\right);f\left(\sqrt[k]{y_1y_2\dots y_k}\right)\right\}.$$

Rõ ràng $f\left(\sqrt[k]{y_1y_2\dots y_k}\right)\le 0$ vì điều này tương đương với giả thiết quy nạp. Việc chứng minh $f\left(\dfrac{\sqrt[k]{k!y_1y_2\dots y_k}}{k+1}\right)\le f\left(\sqrt[k]{y_1y_2\dots y_k}\right)$ không hề dễ dàng, điều này tương đương với

$$(k+1)u^{k+1}-\frac{(k+1)(k+2)}{2}u\le k+1-\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

với $u=\sqrt[k+1]{\dfrac{\sqrt[k]{k!}}{k+1}}<\sqrt[k+1]{\dfrac{1}{2}}<1$.

Biến đổi tương đương, ta thấy BĐT trên tương đương với $u+u^2+\dots+u^k\ge\dfrac{k}{2}$.

Ta sẽ chứng minh điều này, thật vậy

$$u+u^2+\dots+u^k\ge k\sqrt[k]{u^{\frac{k(k+1)}{2}}}=k\sqrt[k+1]{\sqrt{u}}.$$

Vấn đề còn lại là chứng minh

$$u^{k+1}\ge\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{\sqrt[k]{k!}}{k+1}\ge\frac{1}{4}\Leftrightarrow 4^kk!\ge(k+1)^k\quad (*).$$

Ta sẽ chứng minh (*) bằng quy nạp, thật vậy mấu chốt là ta phải chứng minh

$$4(k+1).(k+1)^k\ge(k+2)^{k+1}\Leftrightarrow\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}<4,$$

đúng.

Bài 18 (China TST 2009). *Cho số nguyên dương $n\ge 2$. Tìm hằng số $k(n)$ tốt nhất thỏa mãn nếu một dãy số (a_n) thỏa mãn*

$$0=a_0\le a_1\le a_2\le\dots\le a_n$$

và $\quad a_i\ge\dfrac{a_{i+1}+a_{i-1}}{2};\forall i\in[1;n-1]$

thì ta luôn có

$$(a_1+2a_2+\dots+na_n)^2\ge k(n)(a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2).$$

Lời giải. Cho $a_i = 1; \forall i \in [1;n]$ ta được $k(n) \le \frac{n(n+1)^2}{4}$. Ta sẽ chứng minh:

$$(a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n)^2 \ge \frac{n(n+1)^2}{4}(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) \ (*)$$

bằng phương pháp quy nạp. Với $n = 2$ thì (*) đúng. Giả sử (*) đúng với $n = k$, tức là:

$$(a_1 + 2a_2 + \ldots + ka_k)^2 \ge \frac{k(k+1)^2}{4}(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2).$$

Ta cần chứng minh (*) cũng đúng với $n = k+1$, tức là: $(a_1 + 2a_2 + \ldots + ka_k + (k+1)a_{k+1})^2$

$$\ge \frac{(k+1)(k+2)^2}{4}(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2 + a_{k+1}^2).$$

Ta chỉ cần chứng minh:

$$(a_1 + 2a_2 + \ldots + ka_k + (k+1)a_{k+1})^2$$
$$\ge \frac{(k+1)(k+2)^2}{4}\left[\frac{4}{k(k+1)^2}(a_1 + \ldots + ka_k)^2 + a_{k+1}^2\right].$$

Đặt $T = a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n$, ta cần chứng minh:

$$(T + (k+1)a_{k+1})^2 \ge \frac{(k+1)(k+2)^2}{4}\left[\frac{4T^2}{k(k+1)^2} + a_{k+1}^2\right].$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$\frac{k^2(k+1)}{2(3k+4)}a_{k+1} \le T \le \frac{k(k+1)}{2}a_{k+1}.$$

BĐT vế phải là hiển nhiên, BĐT vế trái đúng do $\frac{a_i}{i} \ge \frac{a_{i+1}}{i+1} \ge \ldots \ge \frac{a_{k+1}}{k+1}; \forall i \in [1;k]$. Bài toán kết thúc.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $a+b+c=0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$Q = 24(a^3+b^3+c^3) - (a^2+b^2+c^2)^3.$$

Bài 2. Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$Q = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - 12abc.$$

Bài 3. Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $abc = ab+bc+ca$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$Q = 2(a+b+c) - abc + \frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{2}.$$

Bài 4. Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $a+b+c=0$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$P = (2a^2+bc)(2b^2+ca)(2c^2+ab);$$
$$Q = (a^3+b^3+c^3)\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right);$$
$$R = 4(ab+bc+ca)^3 + 27a^2b^2c^2.$$

Bài 5. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(2a+b+c)^2} + \frac{1}{(2b+c+a)^2} + \frac{1}{(2c+a+b)^2} \le \frac{3}{16}.$$

Bài 6. Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh

$$\frac{a+b}{\sqrt{a+b-c}} + \frac{b+c}{\sqrt{b+c-a}} + \frac{c+a}{\sqrt{c+a-b}} \ge 6.$$

Bài 7. Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2 = ab+bc+ca+1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$Q = (ab+bc+ca)^2 + 6abc - a^2 - b^2 - c^2.$$

Bài 8. Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$Q = (ab+bc+ca)^2 - 2abc.$$

Bài 9. Cho các số thực dương x,y,z thay đổi sao cho $xyz=1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{\frac{x+y}{2z}} + \sqrt[3]{\frac{y+z}{2x}} + \sqrt[3]{\frac{z+x}{2y}} \le \frac{5(x+y+z)+9}{8}.$$

Bài 10. Cho $a,b,c>0$ thỏa $ab+bc+ca \le 3abc$. Chứng minh rằng

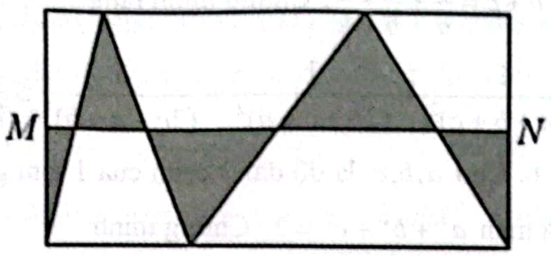
$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a+b}} + \sqrt{\frac{b^2+c^2}{b+c}} + \sqrt{\frac{c^2+a^2}{c+a}} + 3$$
$$\le \sqrt{2}\left(\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a}\right).$$

Bài 11. Cho các số thực dương a,b,c thay đổi sao cho $\frac{1}{a^4+1} + \frac{1}{b^4+1} = \frac{c^4}{c^4+1}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = \frac{abc(a+b+c)}{ab+bc+ca}$.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 103

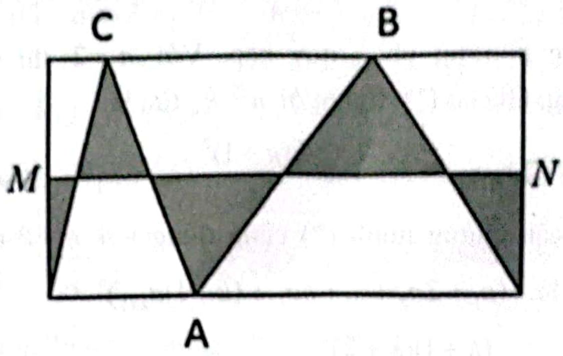
PROBLEM. *Points M and N are the midpoints of two sides of the rectangle. What fraction of the area of the rectangle is shaded?*



Solution.

For any triangle, e.g. the triangle ABC, the fraction of the shaded part is $\frac{1}{4}$ (why?).

And hence the fraction of the area of the rectangle which is shaded is also $\frac{1}{4}$ (why?).



Remark: The exercise is selected from an *IKMC* math past paper.

TỪ VỰNG

midpoint : *trung điểm*

rectangle : *hình chữ nhật*

fraction: : *phân số*

NGUYEN PHU HOANG LAN
(University of Education, VNU, Hanoi)

****

BÀI DỊCH SỐ 101

BÀI TOÁN. *Chứng minh rằng trong tập gồm 27 số lẻ phân biệt bất kỳ, tất cả các số đó đều nhỏ hơn* 100, *luôn tồn tại một cặp số có tổng bằng* 102.

Lời giải. Ta liệt kê các số lẻ nhỏ hơn 100 thành một dãy có dạng như sau:

1; (3 , 99); (5 , 97); …; (n , 102 – n); …;

(49 , 53); 51, trong đó n là số lẻ và $n < 100$.

Dãy trên gồm có hai số 1, 51 và 24 cặp số.

Theo nguyên lý chuồng chim bồ câu, nếu ta chọn 27 số lẻ phân biệt bất kỳ nhỏ hơn 100 trong dãy trên thì luôn tồn tại hai số lẻ có dạng n và 102 – n, và từ đó ta có điều cần chứng minh.

Lưu ý: Bài tập này được sưu tầm từ cuốn sách: "*A first step to Mathematical Olympiad Problems*" – Derek Holton.

Nhận xét. Kì này bạn *Hà Phương Anh*, 10 CT, THPT chuyên Hùng Vương, TP. Việt Trì, Phú Thọ có bài dịch tốt, gửi bài về Toà soạn sớm. Xin hoan nghênh bạn.

HỒ HẢI ***(Hà Nội)***

NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN

BÀI TOÁN 82 (Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT năm 2023-2024 Quảng Ngãi).

Giải phương trình:

$$\frac{1}{3x^2}+\frac{1}{x^2-12x+2024}=\frac{1}{x^2-3x+506}\quad(1).$$

Lời giải. Do $x^2-12x+2024=(x-6)^2+1988>0$ và $x^2-3x+506=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{2015}{4}>0$ nên điều kiện của phương trình là $x\neq 0$

Cách 1. *Phương pháp đặt ẩn phụ một biến*

$$(1)\Leftrightarrow\frac{4x^2-12x+2024}{3x^2\left(x^2-12x+2024\right)}=\frac{4}{4x^2-12x+2024}$$

$$\Leftrightarrow\left(4x^2-12x+2024\right)^2=12x^2\left(x^2-12x+2024\right).$$

Chia 2 vế cho x^4 ta được:

$$\left(4-\frac{12x-2024}{x^2}\right)^2=12\left(1-\frac{12x-2024}{x^2}\right)$$

Đặt $t=\frac{12x-2024}{x^2}$. Phương trình trở thành:

$$(4-t)^2=12(1-t)\Leftrightarrow t^2+4t+4=0\Leftrightarrow t=-2.$$

Ta có: $\frac{12x-2024}{x^2}=-2\Leftrightarrow x^2+6x-1012=0$

$\Leftrightarrow x=-3\pm\sqrt{1021}$ (thỏa mãn ĐK).

Cách 2. *Phương pháp đặt ẩn phụ hai biến*

Đặt $a=3x^2$, $a>0$; $b=x^2-12x+2024$, $b>0$

$\Rightarrow a+b=4x^2-12x+2024$

PT(1) trở thành $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{4}{a+b}\Leftrightarrow\frac{a+b}{ab}=\frac{4}{a+b}$

$\Leftrightarrow(a+b)^2=4ab\Leftrightarrow a^2-2ab+b^2=0$

$\Leftrightarrow(a-b)^2=0\Leftrightarrow a=b.$

Do đó: $3x^2=x^2-12x+2024$

$\Leftrightarrow 2x^2+12x-2024=0\Leftrightarrow x^2+6x-1012=0$

$\Leftrightarrow x=-3\pm\sqrt{1021}$ (thỏa mãn ĐK).

Cách 3. *Phương pháp dùng bất đẳng thức*

Đặt $a=3x^2$, $a>0; b=x^2-12x+2024$, $b>0$

$\Rightarrow a+b=4x^2-12x+2024$. PT(1) trở thành:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{4}{a+b}\quad(2).$$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$a+b\geq 2\sqrt{ab}\ \text{ và }\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{2}{\sqrt{ab}}$$

$$\Rightarrow(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 4\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}$$

Theo (2) dấu "=" xảy ra, nghĩa là $a=b$. Do đó:

$3x^2=x^2-12x+2024$

$\Leftrightarrow 2x^2+12x-2024=0\Leftrightarrow x^2+6x-1012=0$

$\Leftrightarrow x=-3\pm\sqrt{1021}$ (thỏa mãn ĐK).

Cách 4. *Phương pháp biến đổi tương đương*

$$(1)\Leftrightarrow\frac{4x^2-12x+2024}{3x^2\left(x^2-12x+2024\right)}=\frac{4}{4x^2-12x+2024}$$

$$\Leftrightarrow\left(4x^2-12x+2024\right)^2=12x^2\left(x^2-12x+2024\right)$$

$$\Leftrightarrow 16x^4+144x^2+2024^2-96x^3+8.2024x^2$$
$$-24.2024x=12x^4-144x^3+12.2024x^2$$

$$\Leftrightarrow 4x^4+144x^2+2024^2+48x^3-4.2024x^2-24.2024x=0$$

$$\Leftrightarrow\left(2x^2+12x-2024\right)^2=0\Leftrightarrow 2x^2+12x-2024=0$$

$\Leftrightarrow x^2+6x-1012=0\Leftrightarrow x=-3\pm\sqrt{1021}$ (thỏa mãn ĐK).

TRẦN VĂN HẠNH

(GV Trường Đại học Phạm Văn Đồng Quảng Ngãi)

Nhận xét. Bạn *Hà Phương Anh*, 10CT, THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ đóng góp 3 cách giải: *Cách 1* tương tự như *cách 2* của bạn *Trần Văn Hạnh*, 2 cách còn lại dùng phương pháp đánh giá (bằng cách sử dụng các BĐT Schwarz và Bunyakovsky). Xin hoan nghênh bạn.

LÊ MAI (Hà Nội)

Mời các bạn gửi lời giải bài toán 84 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 31.5.2024.

BÀI TOÁN 84. Cho $\log_8 x+\log_4 y^2=5$ và $\log_8 y+\log_4 x^2=7$. *Xác định giá trị của x, y.*

BÙI ANH TRANG

(GV THCS Trần Văn Quang, Q. Tân Bình, TP. Hồ Chí Minh)

DU LỊCH THẾ GIỚI QUA CÁC BÀI TOÁN HAY

BÀI TOÁN 90 (101 *problems in algebra* - T. Andresscu). *Tìm bộ ba các số hữu tỷ* (a, b, c) *sao cho* $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$.

Lời giải. Đặt $x=\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}$ và $y=\sqrt[3]{2}$. Khi đó:

$$y^3=2 \text{ và } x=\sqrt[3]{y-1}.$$

Chú ý rằng: $1=y^3-1=(y-1)(y^2+y+1)$

và $y^2+y+1=\dfrac{3y^2+3y+3}{3}=\dfrac{y^3+3y^2+3y+1}{3}$

$$=\frac{(y+1)^3}{3}.$$

Điều này kéo theo:

$$x^3=y-1=\frac{1}{y^2+y+1}=\frac{3}{(y+1)^3}$$

hay $$x=\frac{\sqrt[3]{3}}{y+1} \quad (1).$$

Mặt khác, ta có: $3=y^3+1=(y+1)(y^2-y+1)$

hay $$\frac{1}{y+1}=\frac{y^2-y+1}{3} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta có:

$$x=\frac{\sqrt[3]{3}}{y+1}=\sqrt[3]{3}.\frac{y^2-y+1}{3}=\frac{1}{\sqrt[3]{9}}(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)$$

$$=\sqrt[3]{\frac{4}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{1}{9}}.$$

Để $x=\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$ ta cần có:

$$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=\sqrt[3]{\frac{4}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{1}{9}}.$$

Suy ra: $a=\dfrac{4}{9}, b=-\dfrac{2}{9}, c=\dfrac{1}{9}$ là bộ ba số hữu tỷ cần tìm.

Nhận xét. Rất tiếc là Tòa soạn đã không nhận được lời giải nào cho bài toán này.

NHƯ HOÀNG

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 31.5.2024.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

BÀI TOÁN 92. *Cho* $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ *là hàm số thỏa mãn* $f(n+1)>f(n)$ *và* $f(f(n))=3n$ *với mọi* $n\in\mathbb{N}$. *Tính* $f(2001)$.

KHÁNH HỮU (*Hà Nội*)

***

SAI LẦM ... (*Tiếp theo trang 47*)

Gọi A_1: " Số học sinh được chọn toàn nam", do việc chọn 3 học sinh trong 8 học sinh nam tổ 1 và 3 học sinh trong 6 học sinh nam tổ 2 nên

$$n(A_1)=C_8^3.C_6^3.$$

Gọi A_2: " Số học sinh được chọn toàn nữ", do việc chọn 3 học sinh trong 7 học sinh nữ tổ 1 và 3 học sinh trong 9 học sinh nữ tổ 2 nên

$$n(A_2)=C_7^3.C_9^3.$$

Do đó

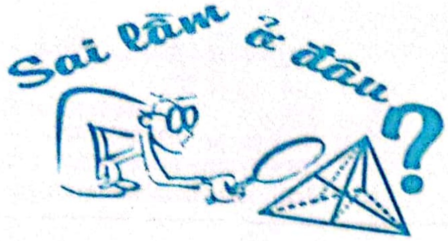
$$P(A)=\frac{n(A_1)+n(A_2)}{n(\Omega)}=\frac{C_8^3.C_6^3+C_7^3.C_9^3}{C_{30}^6}=\frac{4}{585}.$$

Sau khi hai bạn trình bày xong thấy trong lớp có rất nhiều ý kiến khác nhau và nhiều em còn băn khoăn về cả hai lời giải.

Thầy giáo đang chuẩn bị giải thích và đưa ra kết quả thì trống trường báo hiệu hết giờ!

Mong các bạn hãy làm sáng tỏ những điều mà hai bạn Minh và Xuân trình bày để giải đáp cho các bạn đang băn khoăn.

ĐƯỜNG ĐỨC HÀO
(*GV THPT Hương Khê, Hà Tĩnh*)



GIẢI ĐÁP: KẾT QUẢ ĐÃ ĐÚNG CHƯA?

(Đề đăng trên TH&TT số 558, tháng 12 năm 2023)

Phân tích sai lầm. Lời giải có thiết sót không tìm điều kiện để hàm số xác định trên miền $(0;+\infty)$ do đó $m\in\left[0;\frac{3}{2}\right]$ không là giá trị cần tìm, do đó kết quả chưa đúng.

Lời giải đúng như sau. Hàm số xác định trên miền $(0;+\infty)$ thì $m-1\le 0\Leftrightarrow m\le 1$.

Với $\forall x>0$ ta có:

$$y'=\frac{x^2-2(m-1)x-3m^2+4m+1}{(x+1-m)^2}$$

$$=\frac{f(x)}{(x+1-m)^2}.$$

Để hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$ thì $f(x)\ge 0$, $\forall x>0$. $f(x)$ có: $\Delta'=4m^2-6m=2m(2m-3)$.

Nếu $\Delta'\le 0\Leftrightarrow 0\le m\le\frac{3}{2}$ thì

$$f(x)\ge 0,\forall x\Rightarrow f(x)\ge 0,\forall x>0$$

$\Rightarrow m\in[0;1]$ là giá trị cần tìm (1).

Nếu $\Delta'>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<0\\ m>\frac{3}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow m<0$ (vì $m\le 1$)

thì $f(x)$ có nghiệm x_1,x_2 $(x_1<x_2)$. Khi đó: $f(x)\ge 0,\forall x>0\Leftrightarrow$ $f(x)$ có nghiệm thoả mãn $x_1<x_2\le 0\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\ S=2(1-m)>0\\ P=-3m^2+4m+1\ge 0\end{cases}$

$$\begin{cases}m<0\\ \frac{2-\sqrt{7}}{3}\le m\le\frac{2+\sqrt{7}}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\frac{2-\sqrt{7}}{3}\le m<0\quad(2).$$

Từ (1) và (2) ta có giá trị m cần tìm là:

$$\frac{2-\sqrt{7}}{3}\le m\le 1.$$

Nhận xét. Hoan nghênh bạn *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, Bình Định đã phát hiện được sai lầm và đưa ra lời giải đúng.

KIHIVI

BÀI TOÁN XÁC SUẤT

Trong giờ luyện tập thầy giáo ra đề toán như sau:

Bài toán. *Có 14 học sinh nam (Tổ 1 có 8 học sinh, Tổ 2 có 6 học sinh) và 16 học sinh nữ (Tổ 1 có 7 học sinh, Tổ 2 có 9 học sinh). Chọn ngẫu nhiên 6 học sinh trong 2 tổ, mỗi tổ 3 học sinh. Tính xác suất để số học sinh được chọn hoặc toàn nam hoặc toàn nữ?*

Sau một thời gian làm bài bạn Minh xung phong lên bảng. Sau đây là lời giải của Minh:

Tổng số học sinh trong hai tổ là: $14+16=30$, chọn 6 học sinh trong 30 học sinh nên

$$n(\Omega)=C_{30}^6.$$

Gọi A là biến cố cần tính xác suất.

Gọi A_1: "Số học sinh được chọn toàn nam", do việc chọn 6 học sinh nam trong 14 học sinh nam nên $n(A_1)=C_{14}^6$.

Gọi A_2: " Số học sinh được chọn toàn nữ", do việc chọn 6 học sinh nữ trong 16 học sinh nữ nên $n(A_2)=C_{16}^6$. Do đó:

$$P(A)=\frac{n(A_1)+n(A_2)}{n(\Omega)}=\frac{C_{14}^6+C_{16}^6}{C_{30}^6}=\frac{121}{6525}.!$$

Minh trình bày xong thì Xuân lại có lời giải khác:

Tổng số học sinh trong hai tổ là: $14+16=30$, chọn 6 học sinh trong 30 học sinh nên

$$n(\Omega)=C_{30}^6.$$

Gọi A là biến cố cần tính xác suất.

(Xem tiếp trang 46)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 562 (4.2024)
Tòa soạn : 187B, Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607,
ĐT Phát hành: 024.35142649, 024.35682701
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TRONG SỐ NÀY

Biên tập: LÊ MAI, NHƯ HOÀNG
Trị sự, phát hành: HOÀNG THỊ KIM PHƯỢNG, TRẦN THỊ MINH HIỀN
Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG
Thiết kế, chế bản: MINH HÒA

SÁCH GIÁO KHOA TOÁN - BỘ CHÂN TRỜI SÁNG TẠO

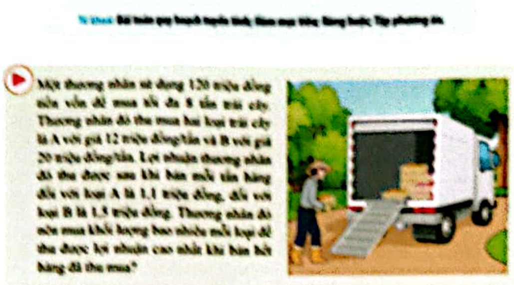
ĐÁP ỨNG YÊU CẦU ĐỔI MỚI ĐỀ THI ...

(Tiếp theo bìa 4)

Môn Toán vốn được coi là môn khó - khó - khổ đối với học sinh và tính ứng dụng ở chương trình giáo dục phổ thông 2006 gần như không có. Ở sách Toán lớp 12 bộ Chân trời sáng tạo, tính ứng dụng thực tế của môn học này được các tác giả lồng ghép, thể hiện ra sao để giúp học sinh hình thành được năng lực tư duy theo yêu cầu của môn học?

Ứng dụng toán học vào giải quyết các vấn đề thực tiễn được nhấn mạnh trong chương trình môn Toán thuộc Chương trình giáo dục phổ thông 2018. Tính ứng dụng thực tiễn trong SGK Toán 12 CTST trước hết thể hiện rõ nét trong các hoạt động vận dụng và những bài tập ở mức độ phân hoá. Ở đó, học sinh cần vận dụng các kiến thức đã học vào giải quyết các vấn đề có bối cảnh gắn thực tiễn.

Bài 1. BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH



Tuy nhiên, trong SGK Toán 12 CTST, tính ứng dụng thực tiễn không chỉ được chú trọng trong các hoạt động vận dụng mà được chú trọng ngay từ đầu bài học, trong các hoạt động khởi động và khám phá. Ở các hoạt động này, tình huống gắn với thực tiễn có tác dụng tạo sự hấp dẫn, thu hút sự quan tâm của người học, kết nối và huy động những trải nghiệm của người học vào việc hình thành các khái niệm, kiến thức mới. Cách tiếp cận này giúp học sinh dễ nhận ra một cách tự nhiên nguồn gốc, ý nghĩa và nhu cầu nhận thức các khái niệm toán học, kết nối các khái niệm trừu tượng với các sự vật, hiện tượng trong cuộc sống và trong khoa học. Tóm lại, giáo dục toán học gắn với bối cảnh thực tiễn được chú trọng và được thể hiện một cách rõ nét trong SGK Toán 12 CTST.

Bộ GD&ĐT vừa công bố dạng thức đề thi tốt nghiệp THPT áp dụng từ năm 2025 dành cho học sinh học theo Chương trình giáo dục phổ thông 2018. Phần bài tập thực hành của SGK môn Toán lớp 12 bộ Chân trời sáng tạo đưa các hình thức câu hỏi tiệm cận với dạng thức đề thi tốt nghiệp THPT của Bộ GD&ĐT như thế nào thưa ông?

Có thể nhận thấy dạng thức đề thi tốt nghiệp THPT từ năm 2025 các môn nói chung vừa được Bộ GD&ĐT công bố có những đổi mới rất tích cực, trong đó môn Toán (và một số môn khác) có 3 dạng thức câu hỏi là: trắc nghiệm nhiều lựa chọn, trắc nghiệm đúng sai và trắc nghiệm trả lời ngắn. Các câu hỏi được phân bổ thành ba mức độ là nhận biết, thông hiểu và vận dụng, cho phép phát triển khá toàn diện các năng lực, bao gồm các năng lực tư duy và lập luận toán học, mô hình hoá toán học và giải quyết vấn đề toán học.

Nhìn chung, mục đích của sự thay đổi dạng thức đề thi là nhằm đánh giá được đúng và tương đối toàn diện kết quả học tập theo mục tiêu, chuẩn yêu cầu cần đạt của Chương trình giáo dục phổ thông 2018.

Để hoàn thành tốt bài thi ở dạng thức đề thi này, học sinh cần hiểu đúng bản chất các kiến thức cơ bản; liên hệ, so sánh và phân biệt giữa các khái niệm (không chỉ nhớ một cách máy móc); có khả năng vận dụng kiến thức vào giải quyết các vấn đề ở mức độ phù hợp trong những bối cảnh khác nhau. Đáng chú ý là đề thi không có những câu hỏi đòi hỏi tính toán lắt léo, mẹo mực, có tính đánh đố.

SGK Toán 12 CTST được biên soạn bám sát mục tiêu và yêu cầu cần đạt của Chương trình GDPT 2018, đã trải qua quá trình thẩm định rất chặt chẽ. Do đó, đương nhiên các hoạt động, câu hỏi, bài tập trong SGK Toán 12 CTST sẽ giúp học sinh chiếm lĩnh các kiến thức cơ bản, rèn luyện kĩ năng, làm quen với dạng thức câu hỏi để chuẩn bị tốt cho các kì thi tốt nghiệp THPT từ năm 2025.

Tất nhiên, do đặc thù của kì thi tốt nghiệp THPT có quy mô lớn, cần tận dụng được công nghệ cho việc chấm thi trở nên nhanh và khách quan, nên dạng thức đề thi cần thoả mãn những yêu cầu nhất định. Chẳng hạn, kết quả của câu hỏi trắc nghiệm trả lời ngắn cần viết được dưới dạng số thập phân với không quá nhiều chữ số (có thể sau khi làm tròn). Câu hỏi trong SGK thì đa dạng hơn, không cần thiết có những giới hạn kiểu như vậy.

Cảm ơn ông!

(Theo *Tiền Phong*)

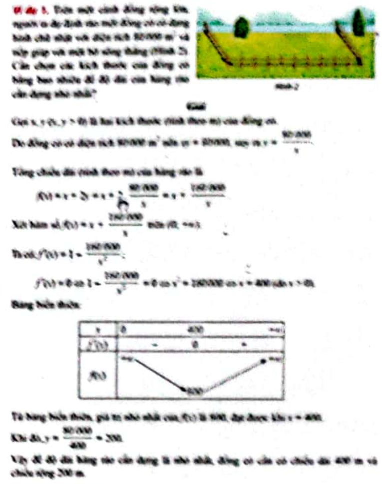
SÁCH GIÁO KHOA TOÁN - BỘ CHÂN TRỜI SÁNG TẠO

ĐÁP ỨNG YÊU CẦU ĐỔI MỚI ĐỀ THI, KÉO GẦN TOÁN HỌC VỚI CUỘC SỐNG

Môn Toán là môn học bắt buộc, có vị trí đặc biệt quan trọng trong giáo dục phổ thông. Tuy nhiên, môn Toán cũng thường được coi là khó và khô. Thực tế, môn Toán có một vẻ đẹp mà các môn học khác không có, đó chính là qua từng bước giải, giống như lần lượt mở từng cánh ô cửa bí mật để đến với đáp số mà đáp số ấy đôi khi không phải một nghiệm mà là đa nghiệm. Sách giáo khoa (SGK) theo chương trình giáo dục phổ thông 2018 môn Toán đã đưa môn học này đến gần với cuộc sống hơn theo cách riêng của mình.

TS. *Nguyễn Thành Anh*, đồng chủ biên SGK Toán lớp 12 bộ Chân trời sáng tạo (CTST), Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam đã có những chia sẻ về "sự hấp dẫn" của môn Toán trong chương trình giáo dục phổ thông 2018.

Thưa ông, so với môn Toán chương trình giáo dục phổ thông 2006, SGK môn Toán lớp 12 bộ sách Chân trời sáng tạo có điểm gì khác biệt và ông cảm thấy tâm đắc nhất?



Nếu so sánh với SGK theo chương trình giáo dục phổ thông năm 2006 thì điểm khác biệt đáng chú ý nhất là SGK Toán 12 CTST thể hiện một cách nổi bật hai khía cạnh có liên hệ mật thiết như sau:

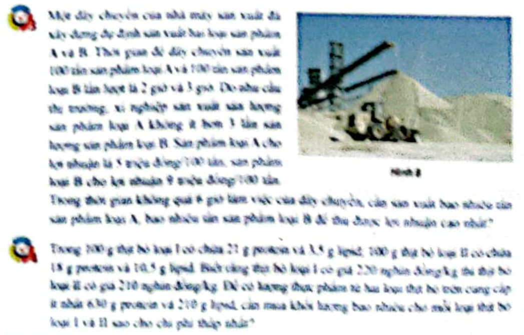
Thứ nhất, SGK Toán 12 CTST tạo cho học sinh nhiều cơ hội học toán một cách hứng thú, nhẹ nhàng và hiệu quả thông qua việc tích cực tham gia các hoạt động học tập, qua đó phát triển phẩm chất và năng lực, bao gồm các năng lực toán học và các năng lực chung; *Thứ hai*, sách định hướng và hỗ trợ giáo viên đổi mới phương pháp dạy học mà trọng tâm là các phương pháp dạy học tích cực, trên tinh thần dạy học "lấy học sinh làm trung tâm".

Có thể dễ dàng nhận biết điều này thông qua xem xét cấu trúc và các đặc điểm sư phạm của các thành phần cấu trúc trong bài học.

Các bài học trong SGK Toán 12 CTST có cấu trúc tường minh và nhất quán, với các hoạt động Khởi động - Khám phá - Thực hành - Vận dụng. Các hoạt động với mục đích và chức năng sư phạm rõ ràng và được sắp xếp phù hợp với tiến trình nhận thức.

Các ví dụ có đề bài và lời giải được trình bày rõ ràng, ngắn gọn và chuẩn mực, giúp học sinh học hỏi cả cách áp dụng kiến thức lẫn cách trình bày.

Mục tiêu của chương trình giáo dục phổ thông 2018 là phát triển năng lực của người học. Vậy SGK Toán lớp 12 bộ Chân trời sáng tạo đã giải quyết yêu cầu này như thế nào, thưa ông?



Ta biết rằng năng lực của người học chỉ có thể hình thành và phát triển thông qua hoạt động.

Nhờ được thiết kế như nói ở trên, giáo viên rất dễ dàng sử dụng SGK Toán 12 CTST để tổ chức cho học sinh học thông qua hoạt động. Học sinh trở thành chủ thể tích cực, chủ động tham gia các hoạt động, hoàn thành các nhiệm vụ học tập. Nhờ đó, học sinh hình thành và phát triển năng lực, bao gồm các năng lực toán học và các năng lực chung.

Chẳng hạn, thông qua tham gia hoạt động vận dụng và hoàn thành nhiều bài tập liên quan đến giải quyết vấn đề có bối cảnh gắn với thực tiễn, học sinh phát triển năng lực mô hình hoá toán học, năng lực giải quyết vấn đề toán học.

(Xem tiếp bìa 3)

Giấy phép XB số 534/GP-BTTTT cấp ngày 19.11.2020; Mã số: 8BT4M24
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 4 năm 2024
Giá: 18.000 đồng
Mười tám nghìn đồng