TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

Số 563
Tháng 5 - 2024
ISSN: 2734-9284

VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 61 - XUẤT BẢN TỪ 1964 - DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT Biên tập: (024) 35121607; ĐT Phát hành: (024) 35142649;
ĐT-Fax Hành chính: (024) 35121606 - Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com - Website: viennghiencuusachgd.com

Nhà toán học Scotland
John Napier
(1550 – 1617)

Cảnh đẹp Edinburgh (Scotland)

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Bộ đóng tập

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ HÀNG NĂM

Năm 2010
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 99.000 đồng

Năm 2012
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 152.000 đồng

Năm 2014
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 185.000 đồng

Năm 2015
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2016
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2017
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2018
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2019
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2020
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 210.000 đồng

Năm 2021
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 240.000 đồng

Năm 2022
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 260.000 đồng

Năm 2023
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 260.000 đồng

Mọi chi tiết xin liên hệ:
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
Địa chỉ: 187B Giảng Võ, Hà Nội
- Điện thoại: 024.35121606 - 024.35121607
- Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

DÀNH CHO TRUNG HỌC CƠ SỞ

ỨNG DỤNG CỦA MỘT BÀI TOÁN QUEN THUỘC

NGUYỄN ANH TUẤN
(GV THCS Hòa Hiếu 2, TX. Thái Hòa, Nghệ An)

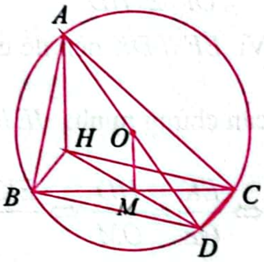
Trong quá trình giải toán nếu biết liên tưởng đến những kết quả quen thuộc sẽ giúp cho người học giải quyết được bài toán một cách dễ dàng hơn. Chúng ta xét bài toán quen thuộc sau:

Bài toán 1. *Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi M, H lần lượt là trung điểm của cạnh BC, trực tâm tam giác ABC. Chứng minh rằng $AH = 2OM$.*

Lời giải (h.1). Vẽ đường kính AD của đường tròn (O), ta có $\widehat{ACD} = \widehat{ABD} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow CD \perp AC$ và $BD \perp AB$.

Vì H là trực tâm của ΔABC nên $BH \perp AC$ và $CH \perp AB$.

Từ đó suy ra $BH // CD$ và $CH // BD$ nên tứ giác $BHCD$ là hình bình hành. Mà M là trung điểm của cạnh BC nên M cũng là trung điểm của HD, do đó OM là đường trung bình của ΔAHD. Suy ra $AH = 2OM$.



Hình 1

Chúng ta sẽ vận dụng bài toán 1 để giải một số bài toán sau đây:

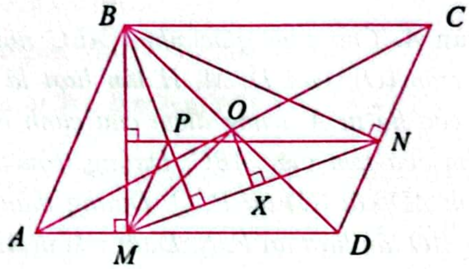
Bài toán 2. *Cho hình bình hành ABCD có đường chéo AC lớn hơn đường chéo BD. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của B trên cạnh AD và CD. Cho biết $BD = 10$cm và $MN = 8$cm. Tính khoảng cách từ điểm B đến trực tâm P của tam giác BMN.*

Nhận xét. Gọi O là giao điểm của AC và BD, ta có $OB = OD$ và $OA = OC$. Vì OM, ON lần lượt là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền BD của các tam giác vuông MBD và NBD nên ta có $OM = ON = \dfrac{BD}{2} \Rightarrow OM = ON = OB$ nên O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBMN. Kẻ OX vuông góc với MN, khi đó theo bài toán 1 ta có:

$$BP = 2OX = 2\sqrt{OM^2 - MX^2} = 2.\sqrt{5^2 - 4^2} = 6\,(\text{cm}).$$

Tuy nhiên vì đây là bài toán dành cho đối tượng học sinh lớp 8 nên ta có lời giải đầy đủ như sau:

Lời giải.



Hình 2

Gọi O là giao điểm của AC và BD, ta có $OB = OD$ và $OA = OC$. Vì OM, ON lần lượt là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền BD của các tam giác vuông MBD và NBD nên ta có:

$$OM = ON = \frac{BD}{2} = 5\,(\text{cm}).$$

Kẻ OX vuông góc với MN $(X \in MN)$ $\Rightarrow XM = XN = \dfrac{MN}{2} = 4$ (cm). Vì P là trực tâm của ΔBMN nên $NP \perp BM$ và $MP \perp BN$. Ta có:

$\begin{cases} NP \perp BM \\ AD \perp BM \end{cases} \Rightarrow MD // PN$, tương tự $MP // DN$ nên tứ giác $MPND$ là hình bình hành $\Rightarrow XP = XD \Rightarrow OX$ là đường trung bình của ΔBPD. Suy ra:

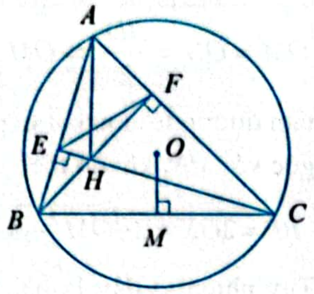
$$BP = 2OX = 2\sqrt{OM^2 - MX^2} = 2.\sqrt{5^2 - 4^2} = 6\,(\text{cm}).$$

Bài toán 3. *Cho đường tròn (O) và dây cung BC cố định (BC không đi qua tâm O), điểm A di động trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC nhọn và $AB \neq AC$. Chứng minh rằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác EHF không đổi.*

Lời giải (h.3). Kẻ $OM \perp BC$ ($M \in BC$), theo bài toán 1 ta có:

$$AH = 2OM.$$

Mặt khác, tứ giác $AFHE$ nội tiếp đường tròn đường kính AH nên bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác EHF bằng $\frac{AH}{2} = OM$ (không đổi).



Hình 3

Bài toán 4. *Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi D, M, H lần lượt là chân đường cao hạ từ A, trung điểm của cạnh BC và trực tâm của tam giác ABC. Đường tròn tâm A bán kính AD cắt (O) tại P, Q. Đường thẳng PQ cắt AD, AO lần lượt tại F, N. Đường kính AK của (O) cắt BC tại E. Chứng minh rằng:*

a) *$EF \parallel DK$*; b) *DO, EF, HK đồng quy.*

Lời giải. a) Theo tính chất của đường nối tâm ta có $AO \perp PQ$ (h.4). Áp dụng hệ thức lượng vào tam giác vuông AQK ta có:

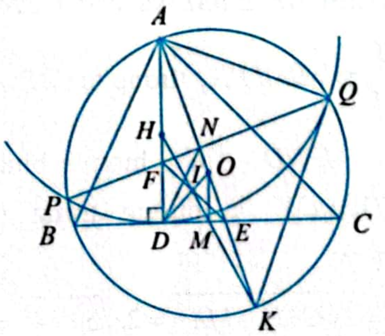
$$AD^2 = AQ^2 = AN.AK \Rightarrow \frac{AD}{AN} = \frac{AK}{AD}$$

$$\Rightarrow \Delta AND \backsim \Delta ADK \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{ADN} = \widehat{AKD}.$$

Mà tứ giác $NFDE$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ADN} = \widehat{AEF}$.

Từ đó suy ra $\widehat{AKD} = \widehat{AEF} \Rightarrow DK // EF$.

b) ***Cách 1*** (h.4).



Hình 4

Gọi I là giao điểm của HK và OD. Vì $EF // DK$ nên để chứng minh EF đi qua I ta cần chứng minh $IE // DK \Leftrightarrow \frac{EK}{OE} = \frac{DI}{OI}$.

Thật vậy, vì $OM // HD \Rightarrow \frac{DI}{OI} = \frac{DH}{OM}$ (1)

Vì $OM // AD \Rightarrow \frac{AE}{OE} = \frac{AD}{OM} \Rightarrow \frac{AE}{2OE} = \frac{AD}{2OM}$

$$\Rightarrow \frac{AE - 2OE}{2OE} = \frac{AD - 2OM}{2OM} \Rightarrow \frac{KE}{2OE} = \frac{HD}{2OM}$$

(do $AE - 2OE = AO + OE - 2OE = OK - OE = KE$ và $AD - 2OM = AD - AH = DH$)

$\Rightarrow \frac{KE}{OE} = \frac{HD}{OM}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $\frac{EK}{OE} = \frac{DI}{OI}$.

Cách 2 (h.4). Gọi $I = KH \cap DO$. Áp dụng định lý Menelaus vào tam giác ADO với ba điểm thẳng hàng H, I, K ta có: $\frac{DI}{OI} \cdot \frac{OK}{AK} \cdot \frac{AH}{HD} = 1$

$$\Rightarrow \frac{DI}{OI} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{AH}{HD} = 1 \Rightarrow \frac{DI}{OI} = \frac{2HD}{AH} = \frac{2HD}{2OM} = \frac{HD}{OM}.$$

Vì $EF // DK$ nên để chứng minh EF đi qua I ta cần chứng minh: $IE // DK \Leftrightarrow \frac{EK}{OE} = \frac{DI}{OI}$

$$\Leftrightarrow \frac{EK}{OE} = \frac{HD}{OM} \Leftrightarrow \frac{EK + 2OE}{OE} = \frac{HD + 2OM}{OM}$$

$$\Leftrightarrow \frac{OK + OE}{OE} = \frac{HD + AH}{OM} \Leftrightarrow \frac{AE}{OE} = \frac{AD}{OM}$$

(đẳng thức này đúng).

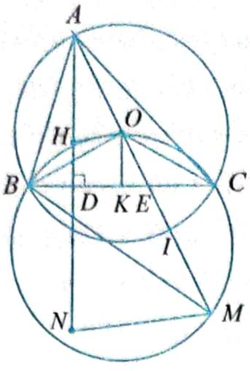
Bài toán 5. *Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) có AD là đường cao và H là trực tâm. Đường kính AI đường tròn (O) cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BOC tại M (M khác O). Gọi N là điểm đối xứng với điểm A qua đường thẳng BC. Chứng minh rằng OH song song với MN.*

Lời giải (h.5)

Kẻ $OK \perp BC$ ($K \in BC$) và gọi E là giao điểm của AI và BC. Khi đó theo bài toán 1 ta có $AH = 2OK$.

Vì $OK // AD$ nên

$$\frac{OK}{AD} = \frac{OE}{AE}.$$



Hình 5

Ta có:

$$OH // MN \Leftrightarrow \frac{AH}{AN} = \frac{AO}{AM}$$

$$\Leftrightarrow \frac{OK}{AD} = \frac{AO}{AM}$$

$$\Leftrightarrow \frac{OE}{AE} = \frac{AO}{AM}$$

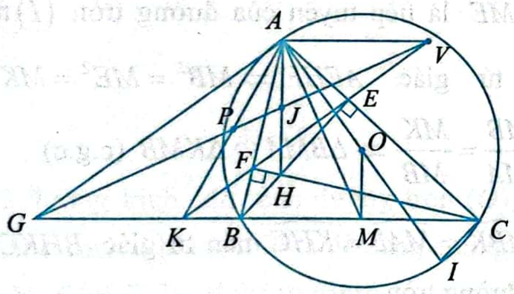
$$\Leftrightarrow \frac{OE}{AE - OE} = \frac{AO}{AM - AO} \Leftrightarrow \frac{OE}{AO} = \frac{AO}{OM}$$

$$\Leftrightarrow \frac{OE}{BO} = \frac{BO}{OM} \Leftrightarrow \Delta EOB \backsim \Delta BOM$$

(kết quả này đúng do hai tam giác này có $\widehat{BOE}$ chung và $\widehat{BMO} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BO} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{CO} = \widehat{OBE}$).

Bài toán 6. *Cho tam giác nhọn ABC $(AB \neq AC)$ nội tiếp đường tròn (O) có hai đường cao BE, CF. Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A cắt đường thẳng BC ở G. Đường thẳng đi qua điểm A và song song với BC cắt đường thẳng EF tại điểm V. Chứng minh rằng GV vuông góc với trung tuyến AM của tam giác ABC.*

Phân tích 1 (h.6).



Hình 6

Ta có: $AV \perp OM$ và $OA \perp AG \Rightarrow \widehat{VAG} = \widehat{MOA}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc). Vì vậy để chứng minh $VG \perp AM \Leftrightarrow \Delta MOA \backsim \Delta VAG$

$\Leftrightarrow \frac{AV}{AG} = \frac{OM}{OA} \Leftrightarrow \frac{AV}{AG} = \frac{AH}{AI}$ (do $AH = 2OM$ và $AI = 2OA$)

$\Leftrightarrow \frac{AV}{AG} = \frac{AE}{AB}$ (do $\Delta AFH \backsim \Delta ACI$ (g.g) và $\Delta AEB \backsim \Delta AFC$ (g.g) nên $\frac{AH}{AI} = \frac{AF}{AC} = \frac{AE}{AB}$)

$\Leftrightarrow \Delta AEV \backsim \Delta ABG$ (đúng).

Từ đó ta có lời giải như sau:

Lời giải. Cách 1 (h.6). Kẻ đường kính AI của đường tròn (O). Gọi K là giao điểm của EF và GC; H là giao điểm của BE và CF. Theo bài toán 1 ta có $AH = 2OM$.

Tứ giác $BFEC$ nội tiếp đường tròn nên $\widehat{AEF} = \widehat{ABC} = \widehat{AIC}$. Mà $\widehat{AIC} + \widehat{IAC} = 90°$

$$\Rightarrow \widehat{AEF} + \widehat{IAC} = 90° \Rightarrow EF \perp OA \Rightarrow EF // AG.$$

Ta có: $AV // BC \Rightarrow \widehat{VAC} = \widehat{ACB} = \widehat{GAB}$

$$\Rightarrow \widehat{VAG} = 2.\widehat{ACB} + \widehat{BAC}.$$

Mà $\widehat{MOA} = \widehat{BOA} + \widehat{MOB} = 2.\widehat{ACB} + \widehat{BAC}$, từ đó suy ra $\widehat{VAG} = \widehat{MOA}$ (1).

Xét tam giác ΔAEV và ΔABG có:

$\widehat{EAV} = \widehat{ACB} = \widehat{BAG}; \widehat{AEF} = \widehat{ABC} \Rightarrow \widehat{AEV} = \widehat{ABG}$

$\Rightarrow \Delta AEV \backsim \Delta ABG$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AV}{AG} = \frac{AE}{AB}$ (2).

Do $\Delta AFH \backsim \Delta ACI$ (g.g) và $\Delta AEB \backsim \Delta AFC$ (g.g) nên $\frac{AH}{AI} = \frac{AF}{AC} = \frac{AE}{AB}$ (3).

Từ (2) và (3) suy ra:

$$\frac{AV}{AG} = \frac{AH}{AI} = \frac{2OM}{2OA} = \frac{OM}{OA} \quad (4).$$

Từ (1) và (4) suy ra: $\Delta MOA \backsim \Delta VAG$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \widehat{AVG} = \widehat{OMA} = \widehat{HAM}$$

$$\Rightarrow \widehat{AVG} + \widehat{VAM} = \widehat{HAM} + \widehat{VAM} = 90°$$

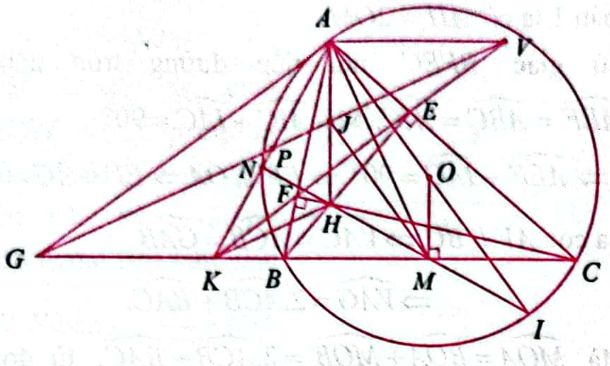
$$\Rightarrow AM \perp VG.$$

Phân tích 2 (h.7).

Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng EF và BC; H là giao điểm của BE và CF, khi đó ta có $KH \perp AM$. Gọi P, J lần lượt là giao điểm của GV với AK và AH. Vì tứ giác $AVKG$ là hình bình hành nên $PA = PK$.

Do đó $GV \perp AM \Leftrightarrow PJ // KH \Leftrightarrow JA = JH$. Từ đó ta có cách giải khác như sau:

Cách 2 (h.7). Gọi K là giao điểm của EF và GC; H là giao điểm của BE và CF; J là trung điểm của AH, ta có tứ giác $AJMO$ là hình bình hành $JM // OA \Rightarrow JM \perp AG$. Xét ΔAGM có $AH \perp GM$ và $JM \perp AG$ nên J là trực tâm của ΔAGM do đó $GJ \perp AM$ (1).



Hình 7

Gọi P là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành $AGKV$, ta có PJ là đường trung bình của $\Delta AKH \Rightarrow PJ // KH$.

Kẻ đường kính AI của đường tròn (O). Khi đó ta có ba điểm I, M, H thẳng hàng (2).

Gọi N là giao điểm thứ hai của đường tròn (O) với đường thẳng AK, ta có:

$$KN.KA = KB.KC = KF.KE$$

nên $ANFE$ là tứ giác nội tiếp. Mà $AFHE$ cũng là tứ giác nội tiếp nên năm điểm A, N, F, H, E cùng thuộc một đường tròn, suy ra:

$$\widehat{ANH} = \widehat{AFH} = 90^\circ \Rightarrow NH \perp AK \text{ (3).}$$

Ta lại có $\widehat{ANI} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow AN \perp NI$ (4). Từ (3) và (4) suy ra ba điểm N, H, I thẳng hàng (5).

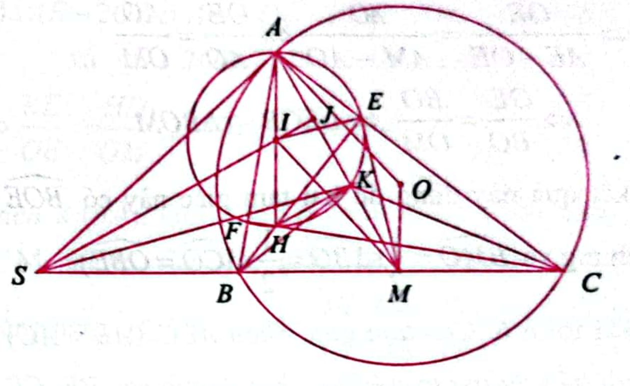
Từ (2) và (5) suy ra bốn điểm I, M, H, N thẳng hàng $\Rightarrow MH \perp AK$.

Xét ΔMKH có $MH \perp AK$ và $AH \perp KM$ nên H là trực tâm của ΔMKH $\Rightarrow KH \perp AM \Rightarrow PJ \perp AM$ (do $PJ // KH$) (6).

Từ (1) và (6) suy ra ba điểm G, P, J thẳng hàng. Mà P là trung điểm của GV nên bốn điểm G, P, J, V thẳng hàng. Do đó $GV \perp AM$.

Bài toán 7. *Cho tam giác nhọn ABC $(AB \neq AC)$ nội tiếp đường tròn (O) có các đường cao BE, CF cắt nhau tại H. Gọi M là trung điểm của BC và K là hình chiếu vuông góc của H trên AM. Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt đường thẳng BC tại S. Chứng minh tứ giác $BHKC$ nội tiếp và SK là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BHKC$.*

Lời giải (h.8).



Hình 8

Gọi I là trung điểm của AH, J là giao điểm của SI và AM. Ta có các tam giác IEA và MEC lần lượt cân tại I và M, do đó:

$$\widehat{IEA} + \widehat{MEC} = \widehat{IAE} + \widehat{MCE} = 90^\circ \Rightarrow IE \perp EM$$

nên ME là tiếp tuyến của đường tròn (I) ngoại tiếp tứ giác $AEHF \Rightarrow MB^2 = ME^2 = MK.MA$

$$\Rightarrow \frac{MB}{MA} = \frac{MK}{MB} \Rightarrow \Delta BMA \backsim \Delta KMB \text{ (c.g.c)}$$

$\Rightarrow \widehat{MBK} = \widehat{MAB} = \widehat{KHC}$ nên tứ giác $BHKC$ nội tiếp đường tròn.

Theo bài toán 1 ta có $AH = 2OM \Rightarrow AI = OM$ nên tứ giác $AIMO$ là hình bình hành $\Rightarrow MI // OA$ $\Rightarrow MI \perp SA$ (do $OA \perp SA$). Xét ΔSAM có $AH \perp BC$ và $MI \perp SA$ nên I là trực tâm của $\Delta SAM \Rightarrow SI \perp AM \Rightarrow SI // HK \Rightarrow JA = JK$ $\Rightarrow SJ$ là đường trung trực của $AK \Rightarrow SA = SK$ $\Rightarrow SK^2 = SA^2 = SB.SC$. Từ đó suy ra SK là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BHKC$.

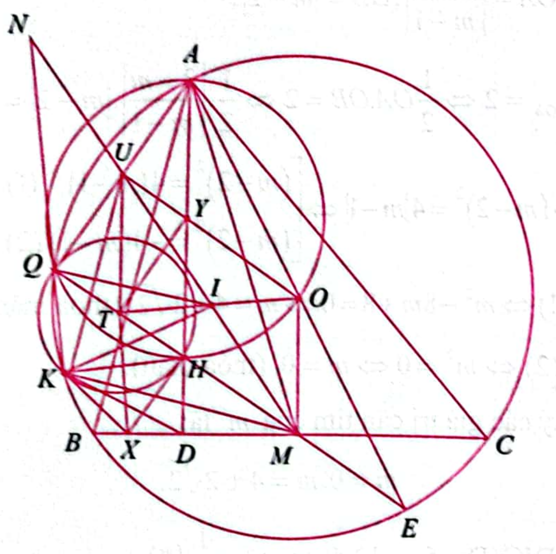
Bài toán 8. *Cho tam giác nhọn ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Gọi H là trực tâm và AD là đường cao của tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của BC. Đường tròn đường kính AH cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là Q. Đường tròn đường kính HQ cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K. Gọi T, Y lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng QH và AH.*

a) Chứng minh ba điểm Q, H, M thẳng hàng.

b) Đường thẳng qua H vuông góc với HM cắt BC tại X. Chứng minh rằng $\Delta THX \backsim \Delta TYO$ và XK là tiếp tuyến của đường tròn đường kính QH.

c) Gọi U là trung điểm của AQ, MU cắt QK tại N. Chứng minh rằng DKNM là tứ giác nội tiếp.

Lời giải (h.9).



Hình 9

a) Vẽ đường kính AE của đường tròn (O), theo lời giải ở cách 2 bài toán 6 ta dễ dàng chứng minh được ba điểm E, M, H thẳng hàng.

Mặt khác: $\widehat{AQE} = \widehat{AQH} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên ba điểm E, H, Q thẳng hàng. Từ đó suy ra ba điểm M, H, Q thẳng hàng.

b) Ta có $OY \perp QA$ (tính chất của đường nối tâm); $TY // QA$ (do TY là đường trung bình của ΔAQH) nên $TY \perp OY$. Theo bài toán 1, ta có: $OM = \dfrac{AH}{2}, OM // AH$ nên tứ giác $OMHY$ là hình bình hành $\Rightarrow OY = HM$. Do đó:

$$\Delta THX \backsim \Delta TYO \Leftrightarrow \frac{TY}{TH} = \frac{YO}{HX}$$

$$\Leftrightarrow \frac{QA}{QH} = \frac{HM}{HX} \Leftrightarrow \Delta AQH \backsim \Delta MHX$$

(điều này đúng).

Vì $\Delta THX \backsim \Delta TYO \Rightarrow \widehat{YTO} = \widehat{HTX}$, mà $\widehat{YTO} + \widehat{HTO} = 90°$ nên $\widehat{HTX} + \widehat{HTO} = 90°$ $\Rightarrow OT \perp XT \Rightarrow KH \perp XT$ (do KH và OT cùng vuông góc với KQ nên $OT // KH$) nên XT là đường trung trực của KH $\Rightarrow \widehat{XKT} = \widehat{XHT} = 90° \Rightarrow XK$ là tiếp tuyến của đường tròn đường kính QH.

c) Gọi I là giao điểm của XM và TO, ta có $TY // AH$ và $TY = \dfrac{AH}{2}$ nên tứ giác $OMTU$ là hình bình hành nên I là trung điểm của UM $\Rightarrow QI = \dfrac{UM}{2}$. Mà OT là đường trung trực của KQ nên ta có $IK = IQ = \dfrac{UM}{2} \Rightarrow \Delta UKM$ vuông tại K, suy ra tứ giác $UQKM$ nội tiếp đường tròn.

Ta có: $\widehat{XKM} + \widehat{HKM} = \widehat{XKH} = \dfrac{1}{2} sđ\,\overset{\frown}{KH} = \widehat{KQH}$

$= \widehat{KNM} + \widehat{QMN} = \widehat{KNM} + \widehat{QKU} = \widehat{KNM} + \widehat{HKM}$

(do $90° = \widehat{HKM} + \widehat{HKU} = \widehat{HKU} + \widehat{QKU} \Rightarrow \widehat{HKM} = \widehat{QKU}$)

$\Rightarrow \widehat{XKM} = \widehat{KNM}$ (1).

Ta lại có: $XK^2 = XH^2 = XD.XM$

$$\Rightarrow \frac{XK}{XD} = \frac{XM}{XK} \Rightarrow \Delta KXD \backsim \Delta MXK \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{XKM} = \widehat{XDK} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{KNM} = \widehat{XDK}$ nên $DKNM$ là tứ giác nội tiếp.

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN - LỚP 9, TỈNH BẮC GIANG NĂM HỌC 2023-2024

I. Phần trắc nghiệm

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Đáp án	D	B	A	C	C	A	D	D	B	B	A	A	D	B	C	A	B	D	C	C

I. Phần tự luận

Câu 1. 1) *Rút gọn biểu thức*

$$P=\frac{x-4\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+1}+\frac{1-3\sqrt{x}+x}{x^2+\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}-x+\sqrt{x}},$$

với $x>0$.

2) *Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường thẳng* $d: y=(m-1)x+m-2$ $(m\neq 1)$. *Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng d tạo với hai trục toạ độ một tam giác có diện tích bằng 2.*

3) *Giải phương trình*

$$8x^3+26x^2+3\sqrt{5x+1}=13x+3.$$

Lời giải. 1) Với $x>0$, ta có:

$$P=\frac{x-4\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}+\frac{1-3\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}+\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(x-\sqrt{x}+1)}$$

$$=\frac{\sqrt{x}(x-4\sqrt{x})}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}+\frac{1-3\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}+\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}$$

$$=\frac{x\sqrt{x}-2x-3\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}=\frac{\sqrt{x}(x-2\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}$$

$$=\frac{\sqrt{x}(x+1)(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}=\frac{\sqrt{x}-3}{x-\sqrt{x}+1}.$$

Vậy $P=\dfrac{\sqrt{x}-3}{x-\sqrt{x}+1}$ với $x>0$.

2) d cắt trục Ox tại $A\left(\frac{2-m}{m-1};0\right)$, d cắt trục Oy tại $B(0;m-2)$.

Tam giác AOB vuông tại O, có:

$$OA=\left|\frac{2-m}{m-1}\right|, OB=|m-2|;$$

$$S_{AOB}=2\Leftrightarrow\frac{1}{2}OA.OB=2\Leftrightarrow\frac{1}{2}.\left|\frac{2-m}{m-1}\right|.|m-2|=2$$

$$\Leftrightarrow(m-2)^2=4|m-1|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}(m-2)^2=4(m-1) & (1)\\(m-2)^2=-4(m-1) & (2)\end{array}\right.$$

$+(1)\Leftrightarrow m^2-8m+8=0\Leftrightarrow m=4\pm2\sqrt{2}$ (thoả mãn).

$+$ (2) $\Leftrightarrow m^2=0\Leftrightarrow m=0$ (thoả mãn).

Vậy các giá trị cần tìm của m là:

$$m=0, m=4\pm2\sqrt{2}.$$

3) ĐKXĐ: $5x+1\geq0\Leftrightarrow x\geq-\frac{1}{5}$ (*).

Phương trình đã cho tương đương với

$$(8x^3+26x^2-7x)-(6x+3)+3\sqrt{5x+1}=0$$

$$\Leftrightarrow x(4x-1)(2x+7)-3\left[(2x+1)-\sqrt{5x+1}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow x(4x-1)(2x+7)-\frac{3(4x^2-x)}{(2x+1)+\sqrt{5x+1}}=0$$

$$\Leftrightarrow x(4x-1)\left(2x+7-\frac{3}{(2x+1)+\sqrt{5x+1}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x=0\vee x=\frac{1}{4}\vee 2x+7-\frac{3}{2x+1+\sqrt{5x+1}}=0\ (2).$$

Nhận thấy $x=0$ và $x=\frac{1}{4}$ là các giá trị thỏa mãn bài toán.

Xét PT(2): $2x+7-\frac{3}{2x+1+\sqrt{5x+1}}=0$. Ta có:

$$x\ge -\frac{1}{5}\Rightarrow \begin{cases}2x+1\ge \frac{3}{5}\\ \sqrt{5x+1}\ge 0\\ 2x+7\ge \frac{33}{5}\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}\frac{3}{2x+1+\sqrt{5x+1}}\le 5\\ 2x+7\ge \frac{33}{5}\end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x+7-\frac{3}{2x+1+\sqrt{5x+1}}\ge \frac{8}{5}>0.$$

Do đó (2) vô nghiệm.

Vậy PT đã cho có tập nghiệm là $\left\{0;\frac{1}{4}\right\}$.

Câu 2. *1) Tìm các số nguyên dương a, b để $a^2b^2-4a-4b$ là số chính phương.*

2) Cho đa thức

$$f(x)=x^{2024}+a_{2023}x^{2023}+a_{2022}x^{2022}+...+a_1x+a_0,$$

với $a_0,a_1,...,a_{2023}\in\mathbb{Z}$ có $f\left(\sqrt{7}-2\right)=20$. Chứng minh $4f\left(-2-\sqrt{7}\right)+3$ là một số nguyên tố.

Lời giải. 1) Ta có $a^2b^2-4a-4b$ là số chính phương, suy ra $a^2b^2-4a-4b=m^2$ (*) với m là một số tự nhiên.

Do a, b là các số nguyên dương nên:

$a^2b^2-4a-4b<a^2b^2$, hay $m^2<a^2b^2=(ab)^2$ (1).

Ta thấy nếu $ab=1$ khi $(a;b)=(1;1)$ hoặc $ab=2$ khi $(a;b)=(1;2)$, $(2;1)$ đều không thỏa mãn $a^2b^2-4a-4b$ là số chính phương, nên có:

$$ab>2\Rightarrow ab-2>0.$$

Xét hiệu $m^2-(ab-2)^2=4ab-4a-4b-4$.

Nếu $4ab-4a-4b-4>0$ thì $m^2>(ab-2)^2$, kết hợp với (1) ta được: $(ab-2)^2<m^2<(ab)^2$.

Suy ra $m^2=(ab-1)^2$ (vì $ab-2>0$).

Khi đó ta có: $(ab)^2-4a-4b=(ab-1)^2$

$$\Leftrightarrow 2ab-4a-4b=1$$

(vô lý do $2ab-4a-4b$ luôn chẵn). Do đó:

$$m^2-(ab-2)^2=4ab-4a-4b-4\le 0$$

$$\Rightarrow 4ab-4a-4b-4\le 0 \Leftrightarrow (a-1)(b-1)\le 2$$

$$\Rightarrow 0\le (a-1)(b-1)\le 2$$

(vì a, b là các số nguyên dương).

Xét các trường hợp:

- TH1: $(a-1)(b-1)=1$. Dễ thấy $(a;b)=(2;2)$ thỏa mãn bài toán.
- TH2: $(a-1)(b-1)=2$. Dễ thấy $(a;b)=(2;3)$, $(a;b)=(3;2)$ thỏa mãn bài toán.
- TH3: $(a-1)(b-1)=0$. Suy ra $a=1$ hoặc $b=1$.

* Với $a=1$, từ (*) ta có:

$$b^2-4b-4=m^2\Leftrightarrow (b-2)^2-8=m^2$$

$$\Leftrightarrow (b-2)^2-m^2=8 \quad (2^*).$$

Từ (2*) và b nguyên dương ta thấy $b-2>m$ $(m\in\mathbb{N}^*)$ hay $b-2-m>0$ và có

$$(2^*)\Leftrightarrow (b-2-m).(b-2+m)=8.$$

$+\begin{cases}b-2-m=1\\ b-2+m=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=\frac{13}{2}\\ m=\frac{7}{2}\end{cases}$ không thỏa mãn.

$+\begin{cases}b-2-m=2\\ b-2+m=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=5\\ m=1\end{cases}$, ta được $(a;b)=(1;5)$.

* Với $b=1$, tương tự ta có $(a;b)=(5;1)$.

Vậy các cặp số $(a;b)$ thỏa mãn là:

$$(1;5),\ (5;1),\ (2;2),\ (2;3),\ (3;2).$$

2) Đặt $g(x)=f(x)-20$, ta có:

$$g\left(\sqrt{7}-2\right)=f\left(\sqrt{7}-2\right)-20=0.$$

Dễ thấy $g(x)$ là một đa thức bậc 2024 với các hệ số nguyên. Vì x^2+4x-3 là đa thức bậc hai có hệ số nguyên nên khi chia đa thức $g(x)$ cho đa thức x^2+4x-3 được thương là đa thức $h(x)$ và đa thức dư có dạng $ax+b$ $(a,b\in\mathbb{Q})$

$$\Rightarrow g(x)=\left(x^2+4x-3\right).h(x)+ax+b\ (a,b\in\mathbb{Q})$$

Thay $x=\sqrt{7}-2$ ta có:

$$0=0.h\left(\sqrt{7}-2\right)+a\left(\sqrt{7}-2\right)+b$$

$$\Leftrightarrow a\left(\sqrt{7}-2\right)+b=0 \Leftrightarrow a\sqrt{7}+\left(b-2a\right)=0 \text{ (1).}$$

Vì $\sqrt{7}$ là số vô tỉ và a,b là các số hữu tỉ nên từ (1) suy ra $\begin{cases} a=0 \\ b-2a=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=0.$

Từ đó, $g(x)=\left(x^2+4x-3\right)h(x)$.

Thay $x=-2-\sqrt{7}$ ta được:

$$g\left(-2-\sqrt{7}\right)=0.h\left(-2-\sqrt{7}\right)$$

$$\Leftrightarrow f\left(-2-\sqrt{7}\right)-20=0 \Leftrightarrow f\left(-2-\sqrt{7}\right)=20$$

$$\Rightarrow 4f\left(-2-\sqrt{7}\right)+3=4.20+3=83.$$

Vì 83 là số nguyên tố nên ta có điều phải chứng minh.

Câu 3. *Cho đường tròn $(O;R)$ có dây BC cố định $(BC \neq 2R)$. Trên cung lớn BC của đường tròn lấy điểm A sao cho $AC > AB > BC$. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC, tiếp xúc với các cạnh AB, AC lần lượt tại D, E. Các tia BI, CI cắt DE theo thứ tự tại M, N.*

1) Chứng minh tứ giác BIND là tứ giác nội tiếp.

2) Qua điểm M kẻ đường thẳng song song với AB cắt cạnh BC tại điểm P. Gọi F là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IMN. Chứng minh

$$MN.PF = 2MF.NP.$$

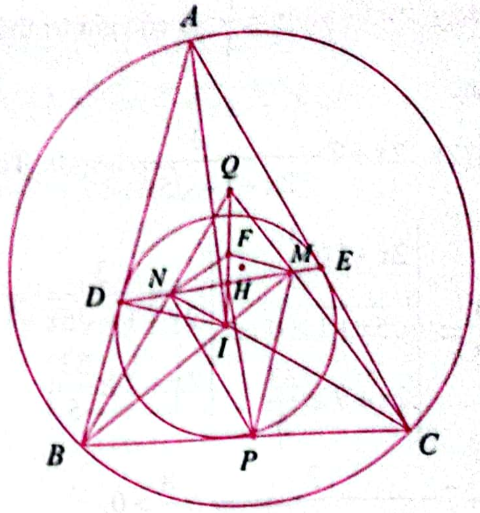
3) Khi điểm A di chuyển trên cung lớn BC sao cho $AC > AB > BC$, chứng minh $\dfrac{AB+BC+CA}{MN+MD+NE}$ không đổi.

Lời giải. 1) Ta có góc $\widehat{BIN}$ là góc ngoài của $\Delta IBC \Rightarrow \widehat{BIN}=\widehat{IBC}+\widehat{ICB}$

$$=\frac{\widehat{ABC}}{2}+\frac{\widehat{ACB}}{2}=\frac{\widehat{ABC}+\widehat{ACB}}{2} \text{ (1)}$$

(do BI, CI lần lượt là các tia phân giác của góc $\widehat{ABC}, \widehat{ACB}$).

Vì AD, AE là tiếp tuyến của đường tròn nội tiếp ΔABC nên $AD=AE$. Suy ra ΔADE cân tại A $\Rightarrow \widehat{ADE}=\widehat{AED}$.



Xét hai tam giác ABC, ADE có chung góc $\widehat{BAC}$ nên: $\widehat{ABC}+\widehat{ACB}=2\widehat{ADE}$

$$\Rightarrow \widehat{ADE}=\frac{\widehat{ABC}+\widehat{ACB}}{2} \text{ (2).}$$

Từ (1), (2) suy ra:

$$\widehat{BIN}=\widehat{ADE} \text{ hay } \widehat{BIN}=\widehat{ADN} \text{ (3).}$$

Do hai góc $\widehat{BDN}$, $\widehat{ADN}$ là hai góc kề bù nên

$$\widehat{BDN}+\widehat{ADN}=180^0 \text{ (4).}$$

Từ (3), (4) ta có: $\widehat{BDN}+\widehat{BIN}=180^0$.

Xét tứ giác $BDNI$ có $\widehat{BDN}+\widehat{BIN}=180^0$ và hai góc $\widehat{BDI}, \widehat{BIN}$ ở vị trí đối diện nên tứ giác $BDNI$ là tứ giác nội tiếp một đường tròn.

2) Tương tự phần 1) ta có tứ giác $BDNI$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BNI}=\widehat{BDI}$ mà $\widehat{BDI}=90^0$ ($ID \perp AB$) nên $\widehat{BNI}=90^0 \Rightarrow \Delta BNI$ vuông tại N.

Chứng minh tương tự ta được ΔCMI vuông tại M. Gọi J là trung điểm của BC suy ra:

$$JM=JN=JB=JC=\frac{1}{2}BC$$

$$\Rightarrow \Delta JMB \text{ cân tại } J \text{ nên } \widehat{JMB}=\widehat{JBM}.$$

Mặt khác $\widehat{JBM}=\widehat{JBA}$ (do BM là phân giác góc $\widehat{ABC}$), $\widehat{JMB}=\widehat{MBA} \Rightarrow JM \parallel AB$ (2 góc ở vị trí so le trong) $\Rightarrow J \equiv P$.

Theo trên ta có $PM=PN$ (1) Mà F là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔIMN nên $FM=FN$.

$$MP \parallel AB \Rightarrow \widehat{BMP}=\widehat{ABM} \Rightarrow \widehat{BMP}=\widehat{MBP}$$

(do BI là phân giác của góc $\widehat{ABC}$).

Suy ra ΔPBM cân tại P nên $PM = PB$ (2).

Từ (1), (2) suy ra FP là đường trung trực của đoạn thẳng MN.

Gọi H là trung điểm của MN thì $NH \perp FP$.

Gọi Q là giao điểm của BN và CM. Ta có $BM \perp CQ, CN \perp BQ$ nên giao điểm I của hai đường BM, CN là trực tâm của ΔBCQ suy ra:

$$QI \perp BC \Rightarrow \widehat{QBC} + \widehat{BQI} = 90^0,$$

mà $\widehat{QBC} = \widehat{BNP}$ nên $\widehat{BNP} + \widehat{BQI} = 90^0$ (3).

Tứ giác $MINQ$ nội tiếp đường tròn đường kính IQ (vì $\widehat{IMQ} = \widehat{INQ} = 90^0$) mà F là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta\, IMN$ nên F là trung điểm của IQ suy ra: $\widehat{NQF} = \widehat{FNQ}$ hay $\widehat{BQI} = \widehat{FNQ}$ (4)

Thay (4) vào (3) ta được:

$$\widehat{BNP} + \widehat{FNQ} = 90^0 \Rightarrow \widehat{PNF} = 90^0$$

$\Rightarrow \Delta FNP$ vuông tại N. ΔFNP vuông tại N, có NH là đường cao nên:

$$NH.PF = NF.NP \Rightarrow \frac{1}{2}MN.PF = MF.NP$$

$$\Rightarrow MN.PF = 2MF.NP\ (MF = NF).$$

3) $\widehat{BNC} = \widehat{CMB} = 90^0$ nên nên tứ giác $BCMN$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MNI} = \widehat{MBC}, \widehat{IMN} = \widehat{ICB}$

$$\Leftarrow \Delta IBC \backsim \Delta INM\,(g.g) \Rightarrow \frac{BC}{MN} = \frac{IB}{IN} \ (1).$$

Ta có tứ giác $BDNI$ nội tiếp $\widehat{NBI} = \widehat{IDN}$.

Mà $\widehat{IDN} = \widehat{DAI}$ (cùng phụ với góc $\widehat{ADN}$) suy ra $\widehat{IBN} = \widehat{DAI}$. Xét hai tam giác vuông NBI, DAI, vuông tại N và D có $\widehat{IBN} = \widehat{DAI}$ nên:

$$\Delta NBI \backsim \Delta DAI\,(g.g) \Rightarrow \frac{IB}{IN} = \frac{IA}{ID} \ (2).$$

Từ (1) và (2) ta có: $\dfrac{BC}{MN} = \dfrac{IA}{ID}$ (3).

Tứ giác $BCMN$ nội tiếp suy ra $\widehat{MNC} = \widehat{MBC} = \widehat{IBA}$ (BI là phân giác góc $\widehat{ABC}$).

Do $\widehat{IDA} = \widehat{IEA} = 90^0$ nên tứ giác $ADIE$ nội tiếp suy ra $\widehat{IEN} = \widehat{IAB}$. Suy ra: $\Delta IAB \backsim \Delta IEN\,(g.g)$

$$\Rightarrow \frac{AB}{NE} = \frac{IA}{IE} = \frac{IA}{ID}\ (IE = ID)\ (4).$$

Chứng minh tương tự ta cũng có:

$$\frac{AC}{MD} = \frac{IA}{ID} \ (5).$$

Từ (3), (4), (5) ta có: $\dfrac{AB+BC+CA}{MN+MD+NF} = \dfrac{IA}{ID}$.

$\Delta\, IAD$ vuông tại I nên $\sin\widehat{DAI} = \dfrac{ID}{IA}$.

Trong đường tròn (O, R), có góc nội tiếp $\widehat{BAC}$ chắn cung BC cố định suy ra $\widehat{BAC} = 2\widehat{IAB}$ không đổi $\Rightarrow \sin\widehat{DAI} = \dfrac{ID}{IA}$ không đổi

$$\Rightarrow \frac{AB+BC+CA}{MN+MD+NF} \text{ không đổi.}$$

Câu 4. *Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = \frac{x^2}{\sqrt{15x^2+26xy+8y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{15y^2+26yz+8z^2}} + \frac{z^2}{\sqrt{15z^2+26zx+8x^2}}.$$

Lời giải. Với mọi $x, y, z > 0$ ta có:

$$\sqrt{15x^2+26xy+8y^2} = \sqrt{(4x+3y)^2-(x-y)^2}$$
$$\le \sqrt{(4x+3y)^2} = 4x+3y$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{\sqrt{15x^2+26xy+8y^2}} \ge \frac{x^2}{4x+3y} \ (1).$$

Tương tự ta cũng có:

$$\frac{y^2}{\sqrt{15y^2+26yz+8z^2}} \ge \frac{y^2}{4y+3z} \ (2)$$

và $\dfrac{z^2}{\sqrt{15z^2+26zx+8x^2}} \ge \dfrac{z^2}{4z+3x}$ (3). Từ (1), (2), (3) suy ra: $P \ge \dfrac{x^2}{4x+3y} + \dfrac{y^2}{4y+3z} + \dfrac{z^2}{4z+3x}$ (1*).

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$\frac{x^2}{4x+3y} + \frac{4x+3y}{49} \ge 2\sqrt{\frac{x^2}{4x+3y}.\frac{4x+3y}{49}} = \frac{2x}{7} \ (4)$$

Tương tự: $\dfrac{y^2}{4y+3z} + \dfrac{4y+3z}{49} \ge \dfrac{2y}{7}$ (5)

và $\dfrac{z^2}{4z+3x} + \dfrac{4z+3x}{49} \ge \dfrac{2z}{7}$ (6). ☞

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN - LỚP 9, TỈNH NAM ĐỊNH

NĂM HỌC 2023-2024

Thời gian làm bài: 150 phút

Câu 1. *(4,0 điểm)*

a) Cho $x=\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{9-4\sqrt{2}}$. Tính giá trị của biểu thức $T=\dfrac{x^4+4x^3-12x^2+8x+1}{x^2+4x-13}$.

b) Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn $a+b+c=5$ và $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt{c}-\sqrt{b}}{a+2\left(\sqrt{bc}-1\right)}+\frac{\sqrt{a}-\sqrt{c}}{b+2\left(\sqrt{ac}-1\right)}+\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{c+2\left(\sqrt{ab}-1\right)}=\frac{2}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}.$$

Câu 2. *(3,0 điểm)*

a) Tìm tất cả các cặp số tự nhiên $(x;y)$ thỏa mãn

$$3^x\left(9^x+1-2^y\right)-9^x\left(1+2^y\right)+4^y=1.$$

b) Cho a,b là hai số nguyên dương sao cho $p=a^2+b^2$ là số nguyên tố và $p-5$ chia hết cho 8. Xét x,y là hai số nguyên sao cho ax^2-by^2 chia hết cho p. Chứng minh rằng x,y cùng chia hết cho p.

Câu 3. *(4,0 điểm)*

a) Giải phương trình

$$\sqrt{10x-5}+\sqrt{5x^2+5}=3\sqrt{x^2+2x}.$$

b) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3-2y^3+xy^2+x^2+2y^2+xy=0 \\ (x+1)\sqrt{y+1}+(x+6)\sqrt{y+6}=x^2-5x+12y. \end{cases}$$

Câu 4. *(7,0 điểm)* Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O), kẻ hai tiếp tuyến MA,MB với đường tròn (O), (với A,B là hai tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OM và AB. Kẻ đường kính BD của đường tròn (O). Đường thẳng MD cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là C. Tiếp tuyến tại C của đường tròn (O) cắt MA,MB lần lượt tại E,F.

a) Chứng minh $\widehat{OCD}=\widehat{OHD}$ và $(ME+MF+EF)^2=4MH.MO$.

b) Gọi G là giao điểm của đường thẳng OE và AD. Chứng minh tứ giác $OAGH$ là hình bình hành.

c) Chứng minh các đường thẳng CD,HG,AF đồng quy.

Câu 5. *(2,0 điểm)*

a) Xét a,b,c là các số thực dương thoả mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=14\left(a^2+b^2+c^2\right)+\frac{ab+bc+ca}{a^2b+b^2c+c^2a}.$$

b) Trên một đường tròn cho 26 điểm phân biệt. Mỗi điểm đó được tô bởi một trong 5 màu: trắng, xanh, đỏ, tím, vàng. Giữa mỗi cặp điểm nối với nhau bằng một đoạn thẳng được tô bởi một trong 2 màu: nâu hoặc đen. Chứng minh rằng luôn tồn tại một tam giác có ba đỉnh được tô cùng một màu (trắng, xanh, đỏ, tím hoặc vàng) và ba cạnh cũng được tô cùng một màu (nâu hoặc đen).

TRẦN XUÂN ĐÁNG

(5/7/136 Phan Đình Phùng, TP. Nam Định)

Giới thiệu

☞ Cộng theo vế của (4), (5), (6) ta được:

$$\frac{x^2}{4x+3y}+\frac{y^2}{4y+3z}+\frac{z^2}{4z+3x}+\frac{7(x+y+z)}{49} \geq \frac{2(x+y+z)}{7}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{4x+3y}+\frac{y^2}{4y+3z}+\frac{z^2}{4z+3x} \geq \frac{x+y+z}{7}=\frac{3}{7}\ (2^*).$$

Từ (1*) và (2*) ta suy ra $P \geq \dfrac{3}{7}$, $\forall x,y,z>0$.

Dấu bằng xảy ra khi (1), (2), (3), (4), (5), (6), (1*), (2*) cùng xảy ra dấu bằng, ta được $x=y=z=1$.

Vậy $\min P=\dfrac{3}{7}$, đạt được khi $x=y=z=1$.

NGUYỄN ANH TUẤN

(Trường THPT chuyên Bắc Giang)

Giới thiệu

MỘT QUAN ĐIỂM VỀ KẾ HOẠCH BÀI DẠY

NGUYỄN QUANG THI
(GV THPT Bảo Lộc, Lâm Đồng)

Chúng ta biết rằng, trên các diễn đàn nhiều giáo viên (GV) có đề cập đến soạn kế hoạch bài dạy mà ta vẫn gọi là giáo án. Ai cũng biết, kế hoạch bài dạy là kịch bản của mỗi GV; khi GV đến lớp họ chuẩn bị bài dạy của mình với mong muốn truyền đạt kiến thức đến học sinh (HS) một cách tự nhiên mà không có sự gượng ép, nếu GV có đầu tư và chuẩn bị chu đáo thì tiết dạy sẽ tốt. Chính vì vậy, theo tôi, không nên rập khuôn việc soạn kế hoạch bài dạy vì nó có thể làm mất đi sự sáng tạo của GV, việc soạn kế hoạch bài dạy nên để GV thực hiện một cách sáng tạo, miễn là khi dạy GV thể hiện rõ các *Hoạt động khởi động, hoạt động hình thành kiến thức, hoạt động vận dụng* là được. Là GV lâu năm trong ngành tôi mạnh dạn đưa ra một quan điểm về cách soạn kế hoạch bài dạy của lớp 10 phân môn hình học để cùng trao đổi với các bạn đồng nghiệp như sau.

BÀI 3. GIẢI TAM GIÁC VÀ ỨNG DỤNG THỰC TẾ

Môn toán: Hình học. Lớp 10

(Bộ sách: *Chân trời sáng tạo*)

Thời gian thực hiện:(số tiết: 02)

I. Mục tiêu

1. Kiến thức:

- Hiểu được giải tam giác là tìm số đo các cạnh và các góc còn lại của tam giác khi ta biết được các yếu tố đủ để xác định tam giác đó.
- Biết vận dụng giải tam giác vào thực tiễn dựa trên định lí côsin, định lí sin và các công thức diện tích vào bài toán giải tam giác.
- Biết phân biệt các dạng bài toán thực tế liên quan đến giải tam giác (loại tính độ dài hay tính chiều cao hoặc tính góc).

2. Năng lực:

- *Năng lực tư duy và lập luận*: Vận dụng được các công thức đã học liên quan đến các yếu tố trong tam giác để giải tam giác.
- *Năng lực giải quyết vấn đề*: Tiếp nhận câu hỏi và xử lý câu hỏi dựa trên các kiến thức liên quan đến các yếu tố trong tam giác.
- *Năng lực giao tiếp*: Biết trao đổi thông qua hoạt động nhóm nhưng phải biết lắng nghe, phản biện và chia sẻ.
- *Năng lực mô hình hóa:* Từ tư duy trực quan đến tư duy trừu tượng nghĩa là từ bài toán thực tiễn ta vận dụng kiến thức nào để giải quyết.
- *Năng lực sử dụng công cụ và phương tiện học toán:* Biết sử dụng máy tính cầm tay để tính toán và biết dùng thức để vẽ cạnh và góc.

3. Phẩm chất:

- *Trách nhiệm*: HS có trách nhiệm với công việc được giao và chủ động hợp tác trong hoạt động nhóm.
- *Thể hiện sự ham thích và chăm chỉ*: Tự tìm được niềm vui trong học toán, từ đó vươn lên trong học tập. Tích cực xây dựng bài, chủ động chiếm lĩnh kiến thức và biết cầu tiến trong học tập.

II. Thiết bị dạy học và học liệu

1. Đối với giáo viên: Thước thẳng có chia khoảng, compa, phiếu học tập, máy chiếu, sách giáo khoa, bài soạn.

2. Đối với học sinh: Dụng cụ học tập, sách giáo khoa, chuẩn bị bài trước khi đến lớp.

III. Phương pháp: Vận dụng linh hoạt các PPDH nhằm giúp HS chủ động, tích cực trong phát hiện chiếm lĩnh tri thức, như: trình diễn, thuyết trình, giảng giải, gợi mở vấn đáp, nêu vấn đề. Trong đó phương pháp chính là: giảng giải, gợi mở vấn đáp và hoạt động nhóm.

III. Tiến trình dạy học

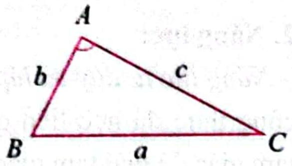
1. Ổn định lớp: Kiểm tra sĩ số, chỗ ngồi HS.

2. Kiểm tra bài cũ: Yêu cầu HS lên bảng ghi lại nội dung định côsin và định lý sin trong tam giác.

3. Bài mới:

Hoạt động 1: Giới thiệu để vào bài mới

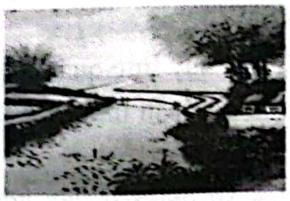
GV: Đặt câu hỏi 1. Cho tam giác ABC, giả sử ta biết cạnh b, cạnh c và góc $\widehat{A}$. Khi đó, ta có tính cạnh a và hai góc còn lại $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ được không?



HS: Thảo luận trả lời là tính được.

Sản phẩm: Gọi là *giải tam giác*.

GV: Đặt câu hỏi 2.



Hình 1

Hình 2

+ Quan sát hình 1, liệu rằng ta có tính độ rộng của con sông mà không cần chèo thuyền ra đo được không?

+ Quan sát hình 2, liệu rằng ta có tính độ cao của tòa nhà mà không trèo lên để đo được không ?

HS: Thảo luận và trả lời là đo được.

Sản phẩm: Áp dụng *giải tam giác vào thực tiễn.*

GV: *Vậy bài học hôm nay, chúng ta tìm hiểu giải tam giác và ứng dụng vào thực tiễn.*

Hoạt động 2: Tiếp cận nội dung 1 của bài học: *Giải tam giác.*

1. GIẢI TAM GIÁC

GV: *Giải thích Giải tam giác là tìm số đo các cạnh và các góc còn lại của tam giác khi ta biết các yếu tố đủ để xác định tam giác đó.*

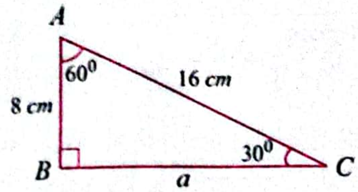
Bài 1. Cho tam giác ABC, biết $b = 16cm$, $c = 8cm$, $\widehat{A} = 60^0$. Hãy tính cạnh a và các góc $\widehat{B}$, $\widehat{C}$.

GV: Cho HS lên bảng vẽ hình.

HS: Một HS tự nguyện lên bảng vẽ hình.

Thảo luận nhóm để tính cạnh a và các góc $\widehat{B}$, $\widehat{C}$.

GV: Cho HS lên bảng trình bày lời giải.



Sản phẩm: - Nhận xét cách trình bày của HS, giải thích tính đúng sai và cho HS ghi lời giải đúng vào vở.

- Kết quả: $a = \sqrt{192}cm$, $\widehat{B} = 90^0$, $\widehat{C} = 30^0$.

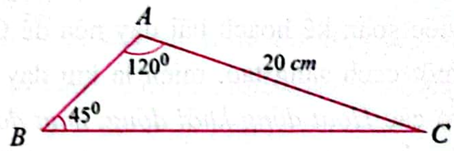
Bài 2. (Trắc nghiệm) Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 120^0, \widehat{B} = 45^0$ và cạnh $b = 20cm$.

a) Số đo góc $\widehat{C}$ bằng:

A. 15^0. B. 25^0. C. 5^0. D. 10^0.

GV: Cho HS suy nghĩ tìm lời giải.

HS: Thảo luận nhóm để tìm lời giải và chọn đáp án.



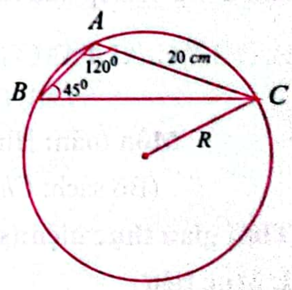
Sản phẩm: Kết quả đáp án A.

b) Độ dài bán kính R của đường tròn ngoại tiếp ΔABC bằng:

A. $10cm$. B. $10\sqrt{30}cm$. C. $10\sqrt{2}cm$. D. $12cm$.

GV: Cho HS suy nghĩ tìm lời giải.

HS: Thảo luận nhóm để tìm lời giải và chọn đáp án.



Sản phẩm: Kết quả đáp án C.

c) Độ dài cạnh AB (lấy một chữ số thập phân) bằng:

A. $15,2cm$. B. $15,5cm$. C. $15,4cm$. D. $15,3cm$.

GV: Cho HS suy nghĩ tìm lời giải

HS: Thảo luận nhóm để tìm lời giải và chọn đáp án.

Sản phẩm: Kết quả đáp án D.

Hoạt động 3. Tiếp cận nội dung 2 là ứng dụng toán học vào thực tế.

GV: *Dẫn dắt vào nội dung 2.*

2. ỨNG DỤNG GIẢI TAM GIÁC VÀO THỰC TIỄN

GV: *Giải thích vận dụng giải tam giác là giúp chúng ta giải rất nhiều bài toán trong thực tế, đặc biệt là trong thiết kế và xây dựng.*

Bài 3. (Ví dụ 2 trang 75, SGK Toán 10, bộ sách *Chân trời sáng tạo*).

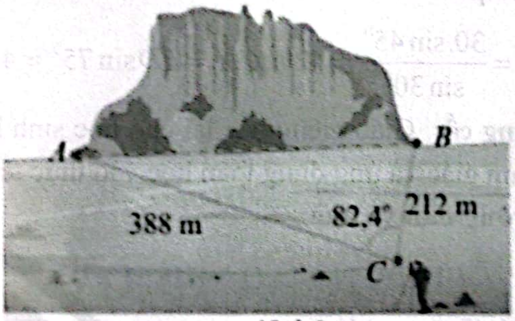
Một đường hầm được dự kiến xây dựng xuyên qua một ngọn núi. Để ước tính chiều dài của đường hầm, một kĩ sư đã thực hiện các phép đo và cho ra kết quả như hình 1. Tính chiều dài của đường hầm từ các số liệu đã khảo sát được (làm tròn đến hàng đơn vị).

GV: Cho HS lên bảng trình bày lời giải.

(gợi ý dùng định lý côsin trong tam giác ABC).

HS:

- Thảo luận nhóm để tìm cách tính đoạn AB.
- Một HS lên bảng trình bày lời giải.



Hình 1

Sản phẩm:

- Nhận xét cách trình bày của HS, giải thích tính đúng sai và cho HS ghi lời giải đúng vào vở.
- Kết quả: $AB \approx 417m$.

Bài 4. Một nhà khảo cổ học tìm được một phần của chiếc trống đồng có bề mặt trống là dạng hình tròn nhưng bị vỡ. Để xác định bán kính của chiếc trống, họ lấy ba điểm A, B, C trên vành trống, tiến hành đo đạc và thu được được số liệu $BC = 28cm$, $\widehat{BAC} = 120^0$ (Hình 2).

Hãy tính bán kính R (lấy một chữ số thập phân) của mặt chiếc trống.

GV: Cho HS lên bảng trình bày lời giải.

(gợi ý dùng định lý sin trong tam giác ABC).

HS:

- Thảo luận nhóm để tìm cách tính bán kính R.
- Một HS lên bảng trình bày lời giải.

Hình 2

Sản phẩm:

- Nhận xét cách trình bày, giải thích tính đúng sai và cho HS ghi lời giải đúng vào vở.
- Kết quả: $R \approx 16,2cm$.

Bài 5. (Ví dụ trang 76, SGK Toán 10, bộ sách *Chân trời sáng tạo*)

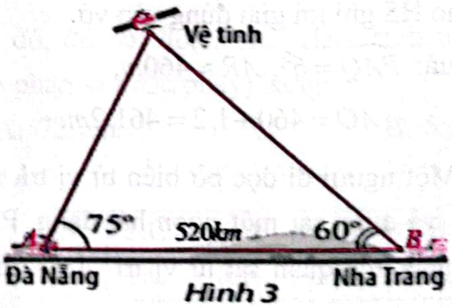
Hai trạm quan sát ở hai thành phố Đà Nẵng và Nha Trang đồng thời nhìn thấy một vệ tinh với góc nâng lần lượt là 75^0 và 60^0 (Hình 3). Vệ tinh cách trạm quan sát tại thành phố Đà Nẵng bao nhiêu kilômét ? (làm tròn đến hàng đơn vị). Biết rằng khoảng cách giữa hai trạm quan sát là $520km$.

GV: Cho HS lên bảng trình bày lời giải.

(gợi ý dùng định lý sin trong tam giác ABC).

HS:

- Thảo luận nhóm để tìm cách tính đoạn AC.
- Một HS tự nguyện lên bảng trình bày lời giải.



Hình 3

Sản phẩm:

- Nhận xét cách trình bày của HS, giải thích tính đúng sai và cho HS ghi lời giải đúng vào vở.
- Kết quả: $\widehat{C} = 45^0$, $AC \approx 637km$.

Bài 6. (Ví dụ 3 trang 75, SGK Toán 10, bộ sách *Chân trời sáng tạo*)

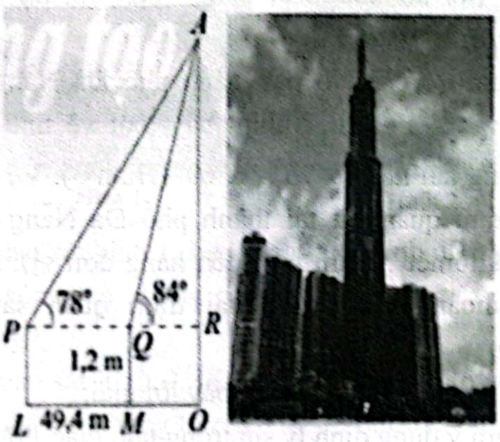
Để xác định chiều cao của một toà nhà cao tầng, một người đứng tại điểm M, sử dụng giác kế nhìn thấy đỉnh toà nhà với góc nâng $\widehat{RQA}=84^0$, người đó lùi ra xa một khoảng cách $LM=49,4m$ thì nhìn thấy đỉnh toà nhà với góc nâng $\widehat{RPA}=78^0$. Tính chiều cao của toà nhà, biết rằng khoảng cách từ mặt đất đến ống ngắm của giác kế đó là PL. (Hình 2)

GV: Cho HS lên bảng trình bày lời giải.

(gợi ý dùng định lý sin trong tam giác ABC).

HS:

- Thảo luận nhóm để tìm cách tính đoạn AO.
- Một HS lên bảng trình bày lời giải.



Hình 2

Sản phẩm:

- Nhận xét cách trình bày của HS, giải thích đúng sai và cho HS ghi lời giải đúng vào vở.
- Kết quả: $\widehat{PAQ}=6^0$, $AR\approx 460m$,

$$AO=460+1,2=461,2m.$$

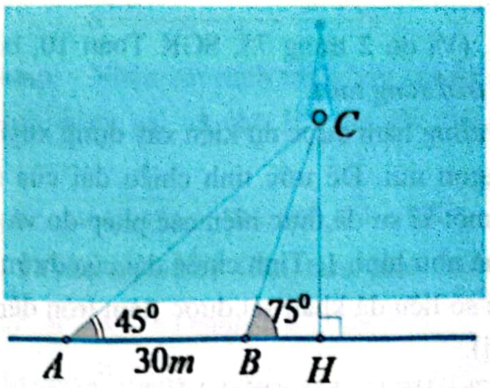
Bài 7. Một người đi dọc bờ biển từ vị trí A đến vị trí B và quan sát một ngọn hải đăng. Phương nghiêng của góc quan sát từ vị trí A,B tới ngọn hải đăng với đường đi của người quan sát là 45^0 và 75^0. Biết khoảng cách giữa hai vị trí A và B là $30m$ (Hình 4). Ngọn hải đăng cách bờ biển bao nhiêu mét (làm tròn đến hàng đơn vị).

GV: Cho HS lên bảng trình bày lời giải.

(gợi ý dùng định lý sin trong tam giác ABC)

HS:

- Thảo luận nhóm để tìm cách tính đoạn CH.
- Một HS tự nguyện lên bảng trình bày lời giải.



Hình 4

Sản phẩm:

- Nhận xét cách trình bày của HS, giải thích đúng sai và cho HS ghi lời giải đúng vào vở.
- Kết quả: $\widehat{ABC}=105^0, \widehat{ACB}=30^0$,

$$BD=\frac{30.\sin 45^0}{\sin 30^0}\approx 42m, CH=BD\sin 75^0\approx 41m.$$

4. Củng cố: Giáo viên nhắc lại cho học sinh hiểu giải tam giác và ứng dụng toán học vào thực tế.

5. Hướng dẫn về nhà:

CHUYỂN GIAO NHIỆM VỤ

Phần 1. Trắc nghiệm

Câu 1. Cho tam giác ABC, với $BC=5cm$, $CA=4cm, AB=3cm$. Khi đó, diện tích tam giác ABC bằng:

A. $12cm^2$. **B.** $6cm^2$. **C.** $15cm^2$. **D.** $10cm^2$

Câu 2. Cho tam giác ABC có diện tích $S=10cm^2$ và cạnh $a=4cm$. Khi đó, đường cao h_a của tam giác ABC bằng:

A. $20cm$. **B.** $4cm$. **C.** $5cm$. **D.** $10cm$.

Câu 3. Cho tam giác ABC, với $BC=a$, $CA=b, AB=c$. Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $a=3R\sin A$. **B.** $R=\dfrac{a}{3\sin A}$.

C. $c=R\sin C$. **D.** $b=2R\sin B$.

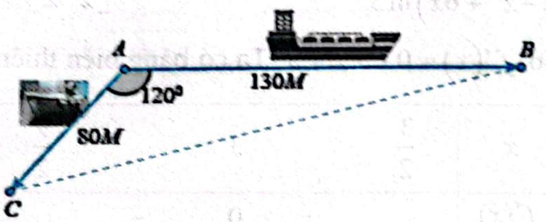
Câu 4. Cho tam giác ABC, với $\hat{A}=60^0$, $CA=4cm, AB=3cm$. Khi đó, cạnh BC bằng:

A. $37cm$. **B.** $\sqrt{37}cm$. **C.** $13cm$. **D.** $\sqrt{13}cm$.

Câu 5. Cho tam giác ABC, với $\hat{A}=30^0$, $BC=3cm$. Khi đó, bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng:

A. $4cm$. **B.** $3cm$. **C.** $6cm$. **D.** $\frac{3}{2}cm$.

Câu 6. Hai chiếc tàu cùng xuất phát từ một địa điểm A. Sau 3 giờ, tàu thứ nhất đã đến địa điểm B với quãng đường $130M$ (130 Hải lý) và tàu thứ hai đã đến địa điểm C với quãng đường $80M$ (80 Hải lý), biết hướng đi của hai tàu luôn hợp với nhau một góc bằng 120^0 (tham khảo hình vẽ dưới).



Khi đó, hai tàu cách nhau bao nhiêu hải lý ?

A. $10\sqrt{209}M$. **B.** $33700M$.

C. $20900M$. **D.** $10\sqrt{337}M$.

Câu 7. Cho tam giác ABC có diện tích $S=8\sqrt{2}$ và nửa chu vi $p=4$. Khi đó, bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng:

A. $\sqrt{2}$. **B.** $4\sqrt{2}$.

Câu 8. Một nhà khảo cổ học tìm được một chiếc đĩa cổ hình tròn nhưng bị vỡ. Để xác định bán kính của chiếc đĩa, họ lấy ba điểm A,B,C trên vành đĩa, tiến hành đo đạc và thu được được số liệu $BC=30cm$, $\widehat{BAC}=120^0$ (tham khảo hình vẽ dưới). Khi đó, bán kính R (lấy một chữ số thập phân) của chiếc đĩa bằng:

A. $16,4cm$. **B.** $17,3cm$.

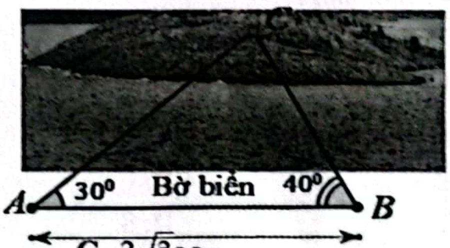
C. $17,8cm$. **D.** $18,3cm$.

Câu 9. Cho tam giác ABC, với $BC=a$, $CA=b, AB=c$. Hãy chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau:

A. $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$. **B.** $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.

C. $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$. **D.** $\cos B=\frac{a^2+c^2+b^2}{2ac}$.

Câu 10. Bạn Minh đứng ở vị trí A trên bờ biển để nhìn ra vị trí C của hòn đảo với góc nghiêng là 30^0 so với bờ biển. Sau đó di chuyển dọc bờ biển đến vị trí B cách A một khoảng bằng $100m$ và cũng nhìn về vị trí C với góc nghiêng là 40^0 so với bờ biển (tham khảo hình vẽ dưới).



C. $2\sqrt{3}$. **D.** 2.

Khi đó, độ dài đoạn AC (làm tròn một chữ số thập phân sau dấu phẩy) bằng:

A. $72,6m$. **B.** $58,6m$.

Đáp án

1.B	2.C	3.D	4.D	5.B
6.D	7.C	8.B	9.D	10.D

Phần 2. Tự luận: GV yêu cầu HS làm bài tập trong sách giáo khoa.

CHUẨN BỊ CHO KỲ THI TRUNG HỌC PHỔ THÔNG QUỐC GIA

SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT CHỨA HAI ẨN

NGUYỄN CÔNG CHUẨN
(GV THPT chuyên, Đại học Vinh, Nghệ An)

Trong kì thi Tốt nghiệp THPT Quốc gia và thi học chọn sinh giỏi tỉnh những năm gần đây thường xuất hiện các câu phân loại rơi vào dạng toán liên quan đến phương trình, bất phương trình mũ và lôgarit chứa hai biến. Xuất phát từ thực tiễn dạy học tôi thấy các em thường lúng túng và gặp nhiều khó khăn khi giải dạng toán này. Để giúp các em ôn tập và chuẩn bị tốt cho kì thi sắp đến gần, bài viết này xin giới thiệu một số kĩ năng sử dụng phương pháp hàm số để giải dạng toán này.

1. Xem một biến là tham số, biến còn lại là ẩn

Thí dụ 1 (Đề TN THPT, năm 2023, mã đề 106). *Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của y sao cho ứng với mỗi y, tồn tại duy nhất một giá trị* $x\in\left[\frac{3}{2};\frac{9}{2}\right]$ *thỏa mãn*

$$\log_2\left(x^3-6x^2+9x+y\right)=\log_3\left(-x^2+6x\right).$$

Số phần tử của S là

A. 3. **B.** 1.
C. 7. **D.** 8.

Lời giải. Phương trình đã cho tương đương với

$$x^3-6x^2+9x+y=2^{\log_3\left(-x^2+6x\right)}$$

$$\Leftrightarrow y=2^{\log_3\left(-x^2+6x\right)}-x^3+6x^2-9x\quad (1).$$

Bài toán quy về tìm các giá trị nguyên của y để phương trình (1) có một nghiệm duy nhất $x\in\left[\frac{3}{2};\frac{9}{2}\right]$.

Xét hàm $f(x)=2^{\log_3\left(-x^2+6x\right)}-x^3+6x^2-9x$ trên $x\in\left[\frac{3}{2};\frac{9}{2}\right]$. Ta có:

$$f'(x)=\frac{(-2x+6)2^{\log_3\left(-x^2+6x\right)}\ln 2}{\left(-x^2+6x\right)\ln 3}-3x^2+12x-9$$

$$=-(x-3)\left[\frac{2.2^{\log_3\left(-x^2+6x\right)}\ln 2}{\left(-x^2+6x\right)\ln 3}+3(x-1)\right].$$

Ta có nhận xét:

$$\frac{2.2^{\log_3\left(-x^2+6x\right)}\ln 2}{\left(-x^2+6x\right)\ln 3}+3(x-1)>0,\forall x\in\left[\frac{3}{2};\frac{9}{2}\right].$$

Do đó $f'(x)=0\Leftrightarrow x=3$. Ta có bảng biến thiên:

x	$\frac{3}{2}$		3		$\frac{9}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f\left(\frac{3}{2}\right)\approx -0,04$	↗	4	↘	$f\left(\frac{9}{2}\right)\approx -6,8$

Từ bảng biến thiên kết hợp với $y\in\mathbb{Z}$, ta được điều kiện cần tìm là:

$$\left[\begin{array}{l} y=4 \\ y\in\{-6,-5,-4,-3,-2,-1\}\end{array}\right..$$

Vậy số phần tử của tập S là 7. Chọn **C.**

Thí dụ 2 (Đề thi thử TN THPT, liên trường THPT Nghệ An, 2023). *Có bao nhiêu bộ số* $(x;y)$ *trong đó* $x\in\mathbb{N}^*, y\in\mathbb{R}$ *và thỏa mãn điều kiện* $\ln(2+3x+4y)=7x+4y-2023$.

A. 2023. **B.** 1011.
C. 1012. **D.** 2024 ?

Lời giải. Điều kiện:

$$2+3x+4y>0\Leftrightarrow y>\frac{-3x-2}{4}.$$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\ln(2+3x+4y)-7x-4y+2023=0 \quad (2).$$

Bài toán quy về tìm $x\in\mathbb{N}^*$ để phương trình (2) có nghiệm $y\in\left(\dfrac{-3x-2}{4};+\infty\right)$.

Xét hàm:

$$f(y)=\ln(2+3x+4y)-7x-4y+2023$$

trên $\left(\dfrac{-3x-2}{4};+\infty\right)$. Ta có:

$$f'(y)=\frac{4}{4y+3x+2}-4=\frac{4(-1-3x-4y)}{4y+3x+2};$$

$$f'(y)=0\Leftrightarrow y=\frac{-3x-1}{4}.$$

Ta có bảng biến thiên:

y	$\frac{-3x-2}{4}$		$\frac{-3x-1}{4}$		$+\infty$
$f'(y)$		$+$	0	$-$	
$f(y)$	$-\infty$	$\nearrow$	$2024-4x$	$\searrow$	$-\infty$

Phương trình (2) có nghiệm $y\in\left(\dfrac{-3x-2}{4};+\infty\right)$ khi $2024-4x\ge 0\Leftrightarrow x\le 506$. Do $x\in\mathbb{N}^*$ nên $1\le x\le 506$. Khi $x=506$ ta có 1 cặp $(x;y)$.

Khi $1\le x\le 505$ ta có $2.505=1010$ cặp $(x;y)$.

Vậy ta tìm được 1011 cặp $(x;y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Chọn **B.**

Thí dụ 3 (Đề chọn HSG lớp 12, Sở GD&ĐT Hà Tĩnh, năm học 2023 - 2024) *Tìm tất cả các số nguyên x, sao cho ứng với mỗi x có không quá 2 số nguyên y thỏa mãn:*

$$2^{x^2-5y+19}+4^{-x-y+8}\ge 2048 \text{ và } x+y>0.$$

Lời giải. Vì $x+y>0\Leftrightarrow y>-x$ nên

$$y\in(-x;+\infty).$$

Bất phương trình tương đương với

$$2^{x^2-5y+19}+4^{-x-y+8}-2048\ge 0 \quad (3).$$

Xét hàm $f(y)=2^{x^2-5y+19}+4^{-x-y+8}-2048$ trên $(-x;+\infty)$. Ta có:

$$f'(y)=-5.2^{x^2-5y+19}.\ln 2-4^{-x-y+8}.\ln 4<0,$$

$\forall y\in(-x;+\infty)$. Suy ra hàm số $f(y)$ nghịch biến trên $(-x;+\infty)$. Ta nhận thấy:

$$f(-x+1)=2^{x^2+5x+14}+4^7-2048>0,\forall x\in\mathbb{R};$$

$$f(-x+2)=2^{x^2+5x+9}+4^6-2048>0,\forall x\in\mathbb{R}.$$

Có nghĩa $-x+1,-x+2$ là hai nghiệm của bất phương trình. Do đó để bất phương trình đã cho có không quá 2 nghiệm nguyên y thì điều kiện là: $f(-x+3)=2^{x^2+5x+4}+4^5-2048<0$

hay $2^{x^2+5x+4}<1024=2^{10}$

$\Leftrightarrow x^2+5x+4<10$

$\Leftrightarrow x^2+5x-6<0\Leftrightarrow -6<x<1$

$\Leftrightarrow x\in\{-5;-4;-3;-2;-1;0\}$ (vì $x\in\mathbb{Z}$).

Vậy các số giá trị nguyên x cần tìm là:

$$x\in\{-5;-4;-3;-2;-1;0\}.$$

Thí dụ 4 (Đề TN THPT, năm 2020, mã đề 104). *Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 255 số nguyên y thỏa mãn:*

$$\log_3(x^2+y)\ge\log_2(x+y)\ ?$$

A. 80. **B.** 70.

C. 157. **D.** 158.

Lời giải. Điều kiện:

$$\begin{cases}x^2+y>0\\x+y>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y>-x^2\\y>-x\end{cases}\Leftrightarrow y>-x$$

(vì $x\in\mathbb{Z}$ nên $-x\ge -x^2$).

Bất phương trình tương đương với:

$$\log_2(x+y)-\log_3(x^2+y)\le 0 \quad (3).$$

Xét hàm $f(y)=\log_2(x+y)-\log_3(x^2+y)$ trên $(-x;+\infty)$.

Ta có:

$$f'(y)=\frac{1}{(x+y)\ln 2}-\frac{1}{(x^2+y)\ln 3}.$$

Vì $\begin{cases}0<\ln 2<\ln 3\\0<x+y\le x^2+y\end{cases}$

$$\Rightarrow f'(y)=\frac{1}{(x+y)\ln 2}-\frac{1}{\left(x^2+y\right)\ln 3}>0,$$

$\forall y\in(-x;+\infty)$. Suy ra hàm số $f(y)$ đồng biến trên $(-x;+\infty)$. Ta nhận thấy:

$$f(-x+1)=-\log_3\left(x^2-x+1\right)\le 0.$$

Có nghĩa là $-x+1$ là một nghiệm của bất phương trình (3). Do đó để bất phương trình đã cho có không quá 255 nghiệm nguyên thì điều kiện là

$$f(-x+256)=\log_2(256)-\log_3\left(x^2-x+256\right)>0$$

hay $\log_3\left(x^2-x+256\right)<8\Leftrightarrow x^2-x-6305<0$

$\Leftrightarrow -78\le x\le 79$ (vì $x\in\mathbb{Z}$).

Vậy số giá trị nguyên x cần tìm là 158. Chọn **D.**

Thí dụ 5 (Đề thi thử TN THPT, Sở GD&ĐT Bình Phước, lần 1, năm 2023). *Có bao nhiêu số nguyên $x\in(0;2025)$ sao cho ứng với mỗi x, tồn tại ít nhất 10 số nguyên $y\in(-3;10)$ thỏa mãn $3^x2^y+6560\le 3^{2x^2+y}$?*

A. 2021. **B.** 2022.
C. 2023. **D.** 2024.

Lời giải. Bất phương trình đã cho tương đương với $3^x\left(\frac{2}{3}\right)^y+\frac{6560}{3^y}-3^{2x^2}\le 0.$

Xét hàm $f(y)=3^x\left(\frac{2}{3}\right)^y+\frac{6560}{3^y}-3^{2x^2}$ trên khoảng $(-3;10)$. Ta có:

$$f'(y)=3^x\left(\frac{2}{3}\right)^y\ln\frac{2}{3}-\frac{6560\ln 3}{3^y}<0,\forall y\in(-3;10).$$

Suy ra hàm số $f(y)$ nghịch biến trên $(-3;10)$. Để tồn tại ít nhất 10 số nguyên $y\in(-3;10)$ thỏa mãn bất phương trình $f(y)\le 0$ thì

$$f(0)\le 0\Leftrightarrow 3^{2x^2}-3^x-6560\ge 0\quad (4).$$

Xét hàm $g(x)=3^{2x^2}-3^x-6560\ge 0$ trên $[1;+\infty)$.

Ta có:

$$g'(x)=4x.3^{2x^2}\ln 3-3^x\ln 3$$
$$=3^x\ln 3\left(4x.3^{2x^2-x}-1\right)>0,\forall x\ge 1.$$

Do đó hàm số $g(x)$ đồng biến trên $[1;+\infty)$. Hơn nữa $g(2)<0,g(3)>0$ nên tập hợp các số nguyên $x\in(0;2025)$ thỏa mãn (4) là $\{3;4;5;...;2024\}$. Vậy có 2022 số nguyên x thỏa mãn yêu cầu bài toán. Chọn **B.**

2. Đặt ẩn phụ quy về khảo sát hàm một biến

Thí dụ 6 (Đề minh họa năm 2023). *Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn*

$$\log_3\left(x^2+y^2+x\right)+\log_2\left(x^2+y^2\right)$$
$$\le\log_3 x+\log_2\left(x^2+y^2+24x\right)?$$

A. 89. **B.** 48.
C. 90. **D.** 49.

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 1$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\log_3\left(x^2+y^2+x\right)-\log_3 x$$
$$\le\log_2\left(x^2+y^2+24x\right)-\log_2\left(x^2+y^2\right)$$

$$\Leftrightarrow\log_3\left(1+\frac{x^2+y^2}{x}\right)\le\log_2\left(1+\frac{24x}{x^2+y^2}\right).$$

Đặt $t=\frac{x^2+y^2}{x}$ $(t>0)$. Bất phương trình đã cho trở thành: $\log_3(1+t)-\log_2\left(1+\frac{24}{t}\right)\le 0$ (5).

Xét hàm số $f(t)=\log_3(1+t)-\log_2\left(1+\frac{24}{t}\right)$ trên $(0;+\infty)$. Bất phương trình (5) có dạng

$$f(t)\le f(8)\quad (6).$$

Ta có:

$$f'(t)=\frac{1}{(1+t)\ln 3}+\frac{24}{\left(t^2+24t\right)\ln 2}>0,\forall t>0.$$

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$. Do đó (6) $\Leftrightarrow t\le 8$. Trở về cách đặt ta được:

$$x^2+y^2\le 8x\Leftrightarrow(x-4)^2+y^2\le 16\quad (7).$$

Từ (7) suy ra: $(x-4)^2 \le 16 \Leftrightarrow 0 \le x \le 8$.

Kết hợp với điều kiện ta được: $1 \le x \le 8$.

Với $x \in \{1;7\}$, ta có:

$$y^2 \le 7, y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow y \in \{-2;-1;0;1;2\}.$$

Với $x \in \{2;6\}$, ta có:

$$y^2 \le 12, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \in \{-3;-2;-1;0;1;2;3\}.$$

Với $x \in \{3;5\}$, ta có:

$$y^2 \le 15, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \in \{-3;-2;-1;0;1;2;3\}.$$

Với $x = 4$, ta có:

$$y^2 \le 16, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \in \{-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}.$$

Với $x = 8$, ta có: $y^2 \le 0, y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow y = 0$.

Vậy có tất cả 48 cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn đề bài. Chọn **B.**

Thí dụ 7 (Đề thi thử TN THPT, Sở GD&ĐT Ninh Bình lần 2, năm 2023). *Xét các số thực dương a,b thỏa mãn $\log_2(a+b) = \log_3(a^2+b^2)$. Khi đó a^3+b^3 có thể nhận nhiều nhất bao nhiêu giá trị nguyên?*

A. 36. **B.** 35.

C. 37. **D.** 38.

Lời giải. Đặt $\log_2(a+b) = \log_3(a^2+b^2) = x$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b = 2^x \\ a^2+b^2 = 3^x \end{cases}.$$

Ta có: $(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$

$$\Rightarrow 4^x \le 2.3^x \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x \le 2 \Leftrightarrow x \le \log_{\frac{4}{3}} 2;$$

$$ab = \frac{(a+b)^2 - (a^2+b^2)}{2} = \frac{1}{2}(4^x - 3^x);$$

$$a^3+b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$

$$= 8^x - 3.\frac{1}{2}(4^x - 3^x)2^x$$

$$= -\frac{1}{2}.8^x + \frac{3}{2}.6^x.$$

Xét hàm $f(x) = -\frac{1}{2}.8^x + \frac{3}{2}.6^x$ trên khoảng $\left(-\infty; \log_{\frac{4}{3}} 2\right)$, ta có:

$$f'(x) = -\frac{1}{2}.8^x \ln 8 + \frac{3}{2}.6^x \ln 6;$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 8^x \ln 8 = 3.6^x \ln 6$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{3\ln 6}{\ln 8} = \frac{\ln 6}{\ln 2}$$

$$\Leftrightarrow x = \log_{\frac{4}{3}}\left(\frac{\ln 6}{\ln 2}\right) > \log_{\frac{4}{3}} 2$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $\log_{\frac{4}{3}} 2$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $f\left(\log_{\frac{4}{3}} 2\right)$

Vậy $0 < f(x) \le f\left(\log_{\frac{4}{3}} 2\right) \approx 37,48$. Do đó a^3+b^3 có thể nhận nhiều nhất 37 giá trị nguyên. Chọn **C.**

3. Biến đổi về hàm đặc trưng

Đi theo phương pháp này ta tiến hành qua các bước sau:

- Biến đổi phương trình (bất phương trình) về dạng $f(u) = f(v)$ $\left(f(u) \ge f(v)\right)$ với $u, v \in (a;b)$.

- Chứng minh hàm số $y = f(t)$ đồng biến (nghịch biến) trên khoảng $(a;b)$.

Suy ra $u = v$ ($u \ge v$ hoặc $u \le v$). Từ giả thiết này ta sẽ đưa bài toán về dạng quen thuộc để giải.

Thí dụ 8 (Đề thi thử TN THPT, Sở GD&ĐT Bắc Ninh, lần 1, năm 2023). *Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn*

$$\log_2 \frac{1+x^2+y^2}{x-2y} \le 4^{x-2y} - 2.2^{x^2+y^2} + 1?$$

A. 6. **B.** 13.

C. 21. **D.** 9.

Lời giải. Điều kiện: $x-2y>0$.

Bất phương trình đã cho tương đương với:

$$\log_2\left(1+x^2+y^2\right)+2^{1+x^2+y^2} \le \log_2\left(2x-4y\right)+2^{2x-4y} \quad (8).$$

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+2^t$ trên $(0;+\infty)$.

Bất phương trình (8) có dạng:

$$f\left(x^2+y^2+1\right)\le f\left(2x-4y\right) \quad (9).$$

Ta có: $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+2^t\ln 2>0,\forall t>0$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$. Do đó:

$$(9)\Leftrightarrow 1+x^2+y^2\le 2x-4y$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2\le 4 \quad (10).$$

Từ (10) suy ra: $(x-1)^2\le 4\Leftrightarrow -1\le x\le 3$.

Mà $x\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\{-1;0;1;2;3\}$.

Với $x=-1$, ta có $(y+2)^2\le 0, y\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow y=-2$.

Với $x=0$, ta có:

$$(y+2)^2\le 3, y\in\mathbb{Z}\Rightarrow y\in\{-3;-2;-1\}.$$

Với $x=1$, ta có:

$$(y+2)^2\le 4, y\in\mathbb{Z}\Rightarrow y\in\{-4;-3;-2;-1;0\}.$$

Với $x=2$, ta có:

$$(y+2)^2\le 3, y\in\mathbb{Z}\Rightarrow y\in\{-3;-2;-1\}.$$

Với $x=3$, ta có: $(y+2)^2\le 0, y\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow y=-2$.

Vậy có tất cả 13 cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn đề bài. Chọn B.

Thí dụ 9 (Đề thi KSCL khối 12, Sở GD&ĐT Nghệ An, năm 2023). *Có bao nhiêu số nguyên dương x sao cho tồn tại số thực dương y thỏa mãn $x+y\log_2(x+3y)\le 8$ và $27^y(1+\log_3 x)\ge 1$?*

A. 8. **B.** 16.

C. 9. **D.** 7.

Lời giải. Ta có: $x+y\log_2(x+3y)\le 8$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{y}+\log_2 y\left(\frac{x}{y}+3\right)\le\frac{8}{y}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{y}+\log_2 y+\log_2\left(\frac{x}{y}+3\right)\le\frac{8}{y}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{y}+3+\log_2\left(\frac{x}{y}+3\right)\le\frac{8}{y}+\log_2\frac{8}{y} \quad (11).$$

Xét hàm số $f(t)=t+\log_2 t$ trên $(0;+\infty)$. Ta có:

$$f'(t)=1+\frac{1}{t\ln 2}>0,\forall t>0.$$

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Do đó $(11)\Leftrightarrow \dfrac{x}{y}+3\le\dfrac{8}{y}\Leftrightarrow x+3y\le 8 \quad (12).$

Vì $x\in\mathbb{N}^*, y>0$ nên từ (12) ta được:

$$x\in\{1;2;3;4;5;6;7\}.$$

Với $y>0, x\in\{1;2;3;4;5;6;7\}$ dễ thấy

$$27^y(1+\log_3 x)\ge 1 \text{ luôn đúng.}$$

Vậy ta có 7 giá trị nguyên x thỏa mãn bài toán. Chọn D.

Chú ý. Ngoài cách giải trên ta có thể làm như sau:

$$x+y\log_2(x+3y)\le 8$$

$$\Leftrightarrow x+y\log_2(x+3y)-8\le 0.$$

Xét hàm $f(y)=x+y\log_2(x+3y)-8$ trên $(0;+\infty)$. Ta có:

$$f'(y)=\log_2(x+3y)+\frac{3y}{(x+3y)\ln 2}>0,\forall y>0$$

(vì $x\ge 1$). Ta có bảng biến thiên:

y	0	$+\infty$
$f'(y)$	+	
$f(y)$	$x-8$	$+\infty$

Từ BBT suy ra bất phương trình $f(y)\le 0$ có nghiệm $y>0$ khi $x-8<0\Leftrightarrow x<8$.

Ta cũng thu được kết quả như trên.

4. Đánh giá và kết hợp với phương pháp hàm số

Thí dụ 10 (Đề thi thử TN THPT, Cụm liên trường Đắk Lắk, năm 2023). *Có bao nhiêu số nguyên dương x sao cho tồn tại số thực y lớn hơn 1 thỏa mãn*

$$\left(xy^2+x-2y-1\right)\log y=\log\frac{2y-x+3}{x}?$$

A. 2. **B.** Vô số.
C. 3. **D.** 1.

Lời giải. Điều kiện: $2y-x+3>0$

Ta đưa phương trình đã cho về dạng

$$(2y-x+3)\log y+\log(2y-x+3)$$
$$=xy^2\log y+\log\left(xy^2\right)\ (13).$$

Vì $y>1$ nên $\log y>0$. Do đó:

- Nếu $2y-x+3>xy^2$ thì VT(13) > VP(13).
- Nếu $2y-x+3<xy^2$ thì VT(13) < VP(13).

Vì vậy (13) chỉ xảy ra khi

$$2y-x+3=xy^2\Leftrightarrow x=\frac{2y+3}{y^2+1}\quad(14).$$

Bài toán quy về tìm các số nguyên dương x để phương trình (14) có nghiệm $y>1$.

Xét hàm $f(y)=\dfrac{2y+3}{y^2+1}$ trên $(1;+\infty)$. Ta có:

$$f'(y)=\frac{-2y^2-6y+2}{\left(y^2+1\right)^2}<0,\forall y>1.$$

Ta có bảng biến thiên:

y	1		$+\infty$
$f'(y)$		$-$	
$f(y)$	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	0

Từ bảng biến thiên suy phương trình (14) có nghiệm $y>1$ khi $0<x<\dfrac{5}{2}$.

Vậy có 2 giá trị nguyên dương x thỏa mãn là 1, 2. Chọn **A.**

Thí dụ 11 (Đề thi thử TN THPT, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội, lần 2, năm 2023). *Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x tồn tại* $y\in[2;8]$ *thỏa mãn*

$$(y-x)\log_2(x+y)=y+x^2?\quad(15)$$

A. 5. **B.** 8.
C. 4. **D.** 7.

Lời giải. Điều kiện: $x+y>0$.

Vì $y\in[2;8]\Rightarrow y+x^2\geq 2\Rightarrow$ VP(15) >0 nên

$$\text{VT}(15)=(y-x)\log_2(x+y)>0.$$

Xét các trường hợp sau:

TH1: $\begin{cases}\log_2(x+y)<0\\ y-x<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0<x+y<1\\ x>y\end{cases}$

$$\Rightarrow 2y<1\Rightarrow y<\frac{1}{2}.$$

Trường hợp này không xảy ra vì $y\in[2;8]$.

TH2: $\begin{cases}1>\log_2(x+y)>0\\ y-x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2>x+y>1\\ y>x\end{cases}$

$\Rightarrow x<1$. Mà $x\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\{...;-3;-2;-1;0\}$

$\Rightarrow x^2+x\geq 0\Rightarrow$ VT(15) $<y-x\leq y+x^2=$ VP(15).

Vậy trường hợp này không xảy ra.

TH3: $\begin{cases}\log_2(x+y)\geq 1\\ y-x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y\geq 2\\ y-x>0\end{cases}.$

Phương trình đã cho tương đương với

$$(y-x)\log_2(x+y)-y-x^2=0.$$

Xét hàm $f(y)=(y-x)\log_2(x+y)-y-x^2$, với $y\in[2;8]$. Ta có:

$$f'(y)=\log_2(x+y)+\frac{y-x}{(x+y)\ln 2}-1>0$$

(vì $x+y\geq 2, y-x>0$).

Suy ra hàm số $f(y)$ đồng biến trên $[2;8]$.

Ta có bảng biến thiên:

y	2		8
$f'(y)$		$+$	
$f(y)$	$f(2)$	$\nearrow$	$f(8)$

Từ bảng biến thiên suy ra điều kiện để phương trình $f(y)=0$ có nghiệm là:

$$\begin{cases} f(2)\le 0 \\ f(8)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2-x)\log_2(x+2)-2-x^2\le 0 \\ (8-x)\log_2(x+8)-8-x^2\ge 0 \end{cases} (16).$$

Điều kiện $x>-2$. Vì $\begin{cases} y-x>0 \\ y\in[2;8] \end{cases} \Rightarrow -2<x<8$

$$\Rightarrow x\in\{-1;0;1;2;3;4;5;6;7\}.$$

Thay các giá trị này vào (16) ta nhận được các giá trị x thỏa mãn là $-1,0,1,2,3$.

Vậy có 5 giá trị nguyên x thỏa mãn yêu cầu bài toán. Chọn A.

Sau đây là một số bài tập có lời giải tương tự

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài 1 (*Đề TN THPT, năm 2021, mã đề 102*). Có bao nhiêu số nguyên y sao cho tồn tại $x\in\left(\frac{1}{3};4\right)$ thỏa mãn $27^{3x^2+xy}=(1+xy)27^{12x}$?

A. 14. B. 27.
C. 12. D. 15.

Bài 2 (*Đề minh họa 2021*). Có bao nhiêu số nguyên a với $a\ge 2$ sao cho tồn tại số thực x thỏa mãn $\left(a^{\log x}+2\right)^{\log a}=x-2$?

A. 8. B. 9.
C. 1. D. Vô số.

Bài 3 (*Đề TN THPT, năm 2023, mã đề 102*). Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của y sao cho ứng với mỗi y, tồn tại duy nhất một giá trị $x\in\left[\frac{5}{2};\frac{11}{2}\right]$ thỏa mãn

$$\log_2\left(x^3-9x^2+24x+y\right)=\log_3\left(-x^2+8x-7\right).$$

Số phần tử của S là:

A. 8. B. 7.
C. 3. D. 1.

Bài 4 (*Đề thi thử TN THPT, Sở GD&ĐT Hà Nội, lần 1, năm 2023*). Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện $x\le 2023$ và $3\left(9^y+2y\right)\le x+\log_3(x+1)^3-2$?

A. 3870. B. 4046.
C. 2023. D. 3780.

Bài 5 (*Đề thi thử TN THPT, Trường THPT chuyên Hùng Vương, Gia Lai, năm 2023*). Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn

$$\log_3\left(x^2+y^2+7x+14y\right)^2+\log_2\left(x^2+y^2\right)$$
$$\le\log_2\left(x^2+y^2+30x+60y\right)+2\log_3(x+2y)\,?$$

A. 11. B. 13.
C. 10. D. 12.

Bài 6 (*Đề thi thử TN THPT, Sở GD&ĐT Kom Tum, năm 2023*). Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn

$$\log_2\left(\frac{5x+4y}{x^2+y^2+xy+3}\right)+4(x+y)$$
$$=(x+y-1)^2+(x-2)^2+(y-1)^2\,?$$

A. 3. B. 8.
C. 6. D. 4.

Bài 7 (*Đề thi thử TN THPT, Cụm liên trường Hà Nội, năm 2023*). Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $\log_5(10x+5)=25^y-2(x-y)$, với $1\le x\le 2023$?

A. 0. B. 2. C. 1. D. 2023.

Bài 8 (*Đề thi thử TN THPT, Trường THPT chuyên Biên Hòa, Hà Nam, năm 2023*). Có tất cả bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn bất phương trình

$$(x+2y)\left[\log_2\left(x^2+y^2\right)-\log_2(x+2y)-2y+x\right]$$
$$<6x+y(12-5y)\,?$$

A. 61. B. 62. C. 64. D. 65.

Bài 9 (*Đề thi thử TN THPT, Sở GD&ĐT Quảng Bình, năm 2023*). Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ sao cho ứng với mỗi giá trị nguyên dương của y có không quá 15 giá trị nguyên dương của x thỏa mãn

$$\log_5\left(3x^2+xy+36y^2\right)+\log_3\left(x^2+12y^2\right)$$
$$<\log_5(xy)+\log_3\left(x^2+16xy+12y^2\right)+1\,?$$

A. 40. B. 36.
C. 21. D. 33.

CÁC LỚP THCS

Bài T1/563 (Lớp 6). Cho

$$A = n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n + 1$$

với n là số tự nhiên. Tìm số dư khi chia A cho 4.

CAO NGỌC TOẢN
(GV THPT Tam Giang, Phong Điền, Thừa Thiên Huế)

Bài T2/563 (Lớp 7). Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 110^0$, $\widehat{C} = 30^0$. Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $\widehat{AMC} = 100^0$. Chứng minh rằng $CM = AB$.

NGUYỄN NGỌC HÙNG
(GV THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, Hà Tĩnh)

Bài T3/563. Tìm các số nguyên dương a, b thỏa mãn $a^4 - 21a^2b^2 + 4b^4$ là ước của 25137.

PHAN QUANG ĐẠT
(Số 23, ngõ 29 phố Nhị Quý, Thái Nguyên)

Bài T4/563. Cho BC là dây cố định (khác đường kính) của đường tròn (O) và một điểm A di động trên cung lớn $\overset{\frown}{BC}$. Đường phân giác của góc $\widehat{BAC}$ cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai D. Gọi M là trung điểm của AD. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM cắt AC tại E, kẻ đường kính AN của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM. Chứng minh rằng đường thẳng NE luôn đi qua một điểm cố định khi A thay đổi trên cung lớn $\overset{\frown}{BC}$.

ĐOÀN CÁT NHƠN
(GV THCS P. Bình Định, TX. An Nhơn, Bình Định)

Bài T5/563. Cho các số dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$ với $n \in \mathbb{N}, n > 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{4a_1^2 + (a_n - a_2)^2}{2a_1^2 + a_n^2 + a_2^2} + \frac{4a_2^2 + (a_1 - a_3)^2}{2a_2^2 + a_1^2 + a_3^2} + \ldots + \frac{4a_n^2 + (a_{n-1} - a_1)^2}{2a_n^2 + a_{n-1}^2 + a_1^2} \geq n.$$

NGÔ VĂN THÁI
(Tổ 9, P. Hoàng Diệu, TP. Thái Bình)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/563. Cho n là số nguyên dương nhỏ hơn 11. Các số p_1, p_2, p_3, p là các số nguyên tố với $p_2 > 9$ và thỏa mãn các điều kiện sau:

i) $p_1 + p_3^n$ là một số nguyên tố.

ii) $p_1 + p_2 = 3p$.

iii) $p_2 + p_3 = p_1^n(p_1 + p_3)$.

Hãy tính các giá trị của $L = p_1p_2p_3^n + p - n$.

TRẦN BÁ DUY LINH
(Trung tâm Ngoại ngữ Tin học chuyên ngành Lê Quang số 79 Nguyễn Huệ, TX. Vĩnh Long, Vĩnh Long)

Bài T7/563. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn

$$(x-5)^2 + (y-3)^2 = 1 \text{ và } -2 \leq z \leq 2.$$

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + z^2 - 2yz$.

PHAN MẠNH TRƯỜNG
(Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Tĩnh)

Bài T8/563. Cho tam giác ABC có $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Gọi m_a, m_b, m_c lần lượt là độ dài các đường trung tuyến xuất phát từ các đỉnh A, B, C của tam giác đó. Chứng minh rằng:

a) $\dfrac{a}{m_a} + \dfrac{b}{m_b} + \dfrac{c}{m_c} \geq 2\sqrt{3}$;

b) $\dfrac{m_a}{a} + \dfrac{m_b}{b} + \dfrac{m_c}{c} \geq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

PHẠM DUY KHÁNH
(GV THPT Quỳ Châu, Nghệ An)

Bài T9/563. Tìm m để hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} m(x^2 + \sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2} + 1) = xy \\ m(\sqrt[3]{x^8} + x^2 + \sqrt[3]{x^2} + 1) = (2y + 1 - m)\sqrt[3]{x^4} \end{cases}.$$

NGUYỄN THANH GIANG
(GV THPT chuyên Hưng Yên)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/563. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi

$$u_0 = 1,\ u_{n+1} = \frac{u_n}{n^2 u_n + u_n^2 + 1}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 u_n$.

BÙI VĂN BÌNH
(GV THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa)

Bài T11/563. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(x)f(y) - xy = \frac{2}{3}f(x+y) + \frac{4}{3}(x+y+2), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

TRẦN VĂN THƯƠNG
(GV THPT Phú Mỹ, Bà Rịa – Vũng Tàu)

Bài T12/563. Cho tam giác *ABC* nội tiếp đường tròn (*O*), ngoại tiếp đường tròn (*I*). (*I*) tiếp xúc với *BC* tại *D*. Đường trung trực của đoạn *ID* cắt (*O*) tại *U*, V. Gọi *K*, *L* lần lượt là các điểm đối xứng với *D* qua *IU*, *IV*. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác *AKL* tiếp xúc với (*O*).

NGUYỄN VĂN LINH
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài L1/563. Trong thí nghiệm Y-âng về giao thoa ánh sáng, chiếu đồng thời vào hai khe hai bức xạ có bước sóng $\lambda_1 = 0{,}420\ \mu m$ và $\lambda_2 = 0{,}525\ \mu m$. Trên màn quan sát, tại điểm *M* là vân sáng bậc 4 của bức xạ λ_1, tại điểm *N* là vân sáng bậc 11 của bức xạ λ_2. Biết *M* và *N* nằm cùng về một phía so với vân sáng trung tâm. Số vân sáng trên đoạn *MN* (kể cả ở *M*, *N*) là bao nhiêu?

VIỆT CƯƠNG (*Hà Nội*)

Bài L2/563. Điện năng được truyền từ một máy tăng áp đặt tại *A* tới máy hạ áp đặt tại *B* bằng dây đồng có tiết diện tròn, đường kính 1 cm với tổng chiều dài 200 km. Cường độ dòng điện trên dây tải điện là 100 A. Biết các công suất hao phí trên đường dây tải điện bằng 5% công suất tiêu thụ ở *B*. Nếu bỏ qua mọi công suất hao phí trong các máy biến áp, coi hệ số công suất của các mạch sơ cấp và thứ cấp đều bằng 1, điện trở suất của đồng là $1{,}6.10^{-8}\ \Omega m$ thì điện áp hiệu dụng ở cuộn thứ cấp của máy tăng áp ở *A* là bao nhiêu?

THANH LÂM (*Hà Nội*)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/563 (For 6th grade). Let

$$A = n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n + 1$$

where n is some natural number. Find the remainder when dividing A by 4.

Problem T2/563 (For 7th grade). Given a triangle ABC with $\hat{A} = 110^0, \hat{C} = 30^0$. On the side BC choose the point M so that $\widehat{AMC} = 100^0$. Prove that $CM = AB$.

Problem T3/563. Find positive integers *a*, *b* so that $a^4 - 21a^2b^2 + 4b^4$ is a divisor of 25137.

Problem T4/563. Given a circle (*O*) and let *BC* be a fixed chord which is not a diameter and *A* a point moving on the major arc *BC*. The angle bisector of $\widehat{BAC}$ meets (*O*) again at *D*. Let *M* be the midpoint of *AD*. The circumcircle of *ABM* intersects *AC* at *E*, draw the diameter *AN* of the circumcircle of *ABM*. Show that the line *NE* always passes through a fixed point when the point *A* is moving on the major arc *BC*.

Problem T5/563. Given positive numbers $a_1, a_2, ..., a_n$ with $n \in \mathbb{N}, n > 3$. Show that

$$\frac{4a_1^2 + (a_n - a_2)^2}{2a_1^2 + a_n^2 + a_2^2} + \frac{4a_2^2 + (a_1 - a_3)^2}{2a_2^2 + a_1^2 + a_3^2} + \dots + \frac{4a_n^2 + (a_{n-1} - a_1)^2}{2a_n^2 + a_{n-1}^2 + a_1^2} \ge n.$$

(Xem tiếp theo trang 42)

Bài T1/559. *Tìm tất cả các số nguyên tố p, q sao cho $p^{q^2}+1$ cũng là số nguyên tố.*

Lời giải. Với p, q là các số nguyên tố thì $p \geq 2$ và $q \geq 2$, do đó $p^{q^2}+1 > 4+1 = 5$. Do $p^{q^2}+1 > 5$ nên số nguyên tố $p^{q^2}+1$ là số lẻ, do đó p^{q^2} là số chẵn, suy ra p là số chẵn, mà p là số nguyên tố nên $p = 2$.

Với $p = 2$ và $q = 2$ thì

$$p^{q^2}+1 = 2^{2^2}+1 = 16+1 = 17$$

là số nguyên tố.

Với $p = 2$ và số nguyên tố $q \geq 3$ thì q là số lẻ, suy ra $q^2 \geq 9$ cũng là số lẻ. Đặt $q^2 = 2m+1$ với số nguyên $m > 3$. Từ đó:

$$2^{q^2}+1 = 2^{2m+1}+1 = 2.4^m+1.$$

Tích của hai số

$$(3k+1)(3h+1) = 3(kh+k+h)+1$$

với các số nguyên dương k, h lại có dạng $3a+1$ với số nguyên dương $a = kh+k+h$. Với số nguyên dương m tùy ý thì số $4^m = (3+1)^m$ là tích của các số dạng $3a+1$ nên lại có dạng $3b+1$ với số nguyên dương $b > 1$. Từ đó:

$$2.4^m+1 = 2(3b+1)+1 = 3(2b+1)$$

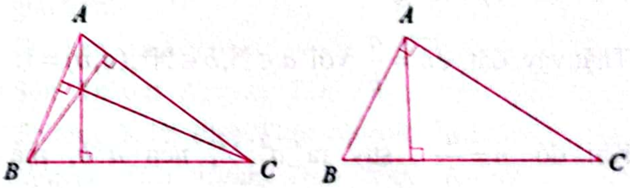
chia hết cho 3 với thừa số $2b+1 > 2$, suy ra 2.4^m+1 là hợp số. Vậy chỉ có $p = 2$ và $q = 2$ thì $p^{q^2}+1 = 2^{2^2}+1 = 16+1 = 17$ là số nguyên tố.

Nhận xét. Một vài bạn chứng minh được $2^{q^2}+1$ chia hết cho 3 nhưng quên chỉ ra rằng số đó phải lớn hơn 3 thì mới là hợp số. Các bạn sau có lời giải đúng. **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Bảo Châu*, 6A6, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Hà Nội:** *Phùng Nhật Minh*, 6A1, THCS Linh Đàm, Hoàng Liệt, Q. Hoàng Mai; **Nghệ An:** *Ngô Hoàng Bách, Lê Thảo Hiền*, 6A, *Cao Lê Anh Quân, Nguyễn Hoàng Thái*, 6D, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; *Nguyễn Sỹ Bảo Long, Phạm Nguyễn Nguyệt Linh, Nguyễn Thế Bảo, Nguyễn Thái Dũng, Hà Quang Phú Hưng, Phan Trọng Khải, Phạm Hồng Quân, Nguyễn Văn Tấn Sang, Cao Phúc, Thái Tùng Quân, Nguyễn Tất Thuận, Đặng Bá Hoàng Minh*, 6B, *Nguyễn Thị Kim Ngân*, 6D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Nước Cộng Hòa Áo:** *Lê Bạch Hải Đăng*, lớp 1B, trường Quốc tế song ngữ cấp 2, 3 GIBS, TP. Graz.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/559. *Cho tam giác ABC có độ dài các đường cao vẽ từ A, B, C lần lượt là* 6 cm, 7,5 cm, 10 cm. *Hãy tính chu vi tam giác ABC.*

Lời giải.



Từ công thức tính diện tích tam giác:

$$2S_{ABC} = 6 \times BC = 7,5 \times AC = 10 \times AB,$$

suy ra:

$$\frac{BC}{5} = \frac{AC}{4} = \frac{AB}{3} \Rightarrow \frac{BC^2}{5^2} = \frac{AC^2+AB^2}{4^2+3^2}$$

$$\Rightarrow BC^2 = AC^2 + AB^2.$$

Theo định lý Pythagore đảo ta có tam giác ABC vuông tại A. Do đó $AB = 7,5$cm; $AC = 10$cm.

Vì vậy $BC = \dfrac{2S_{ABC}}{6} = \dfrac{7,5\times10}{6} = 12,5$ (cm).

Chu vi tam giác ABC bằng:

$$7,5 + 10 + 12,5 = 30 \text{ (cm)}.$$

Nhận xét. Tất cả các bài gửi về đều trình bày tương tự cách giải trên. Các bạn học sinh sau có lời giải tốt: **Hà Nội:** *Doãn Hải Dương*, 7A6, THCS Thanh Xuân, Quận Thanh Xuân, *Nguyễn Thành Nam*, 7A1, THCS Linh Đàm, *Nguyễn Kim Thành*, 9A1, THCS Hoàng Liệt, Quận Hoàng Mai; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Bảo Châu*, 6A6, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Phú Thọ:** *Chu Ngọc Ánh*, *Nguyễn Thanh Mai*, 7A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông; **Hải Phòng:** *Đặng Đình Minh Trí*, 8C2, THCS Lạc Viên, TP. Hải Phòng; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Trịnh Phương Minh*, 7/15, THCS Lê Quý Đôn, Quận 3; **Cộng hoà Áo:** *Lê Bạch Hải Đăng*, 1B, Trường Quốc tế song ngữ cấp 2, 3 GIBS, TP. Graz.

HỒ HẢI

Bài T3/559. *Chứng minh rằng*

$$P=\sqrt{1\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{\ldots\sqrt{n}}}}}$$

luôn là số vô tỷ với mọi số tự nhiên n lớn hơn 1.

Lời giải. Trước hết, ta chứng minh bổ đề sau:

Cho số tự nhiên n thỏa mãn $\sqrt{n}$ là số hữu tỉ thì n là số chính phương.

Thật vậy, đặt $\sqrt{n}=\dfrac{a}{b}$ với $a\in\mathbb{N}, b\in\mathbb{N}^*, (a,b)=1$.

Khi đó $n=\dfrac{a^2}{b^2}$, suy ra $a^2 \vdots b^2$, nên $a \vdots b$, mà $(a, b) = 1$ nên $b = 1$. Do đó $n = a^2$ hay n là số chính phương (bổ đề được chứng minh).

Quay lại bài toán. Giả sử tồn tại số tự nhiên n lớn hơn 1 để P là số hữu tỉ. Ta có:

$$P^{2^{n-1}}=1^{2^{n-2}}.2^{2^{n-3}}.3^{2^{n-4}}....(n-1)\sqrt{n} \quad (1);$$

$$P^{2^{n-2}}=1^{2^{n-3}}.2^{2^{n-4}}.3^{2^{n-5}}....(n-2)\sqrt{(n-1)\sqrt{n}} \quad (2).$$

Từ (1) và do P là số hữu tỉ, suy ra $\sqrt{n}$ là số hữu tỉ. Áp dụng bổ đề suy ra n là số chính phương.

Đặt $n = a^2$ $(a\in\mathbb{N})$. Từ (2) và do P là số hữu tỉ, suy ra $\sqrt{(n-1)\sqrt{n}}=\sqrt{(a^2-1)a}$ là số hữu tỉ. Áp dụng bổ đề suy ra $(a^2 - 1)a$ là số chính phương. Đặt $(a^2-1)a=b^2$ $(b\in\mathbb{N})$. Mà $(a^2 - 1)$ và a nguyên tố cùng nhau, suy ra $(a^2 - 1)$ và a đều là các số chính phương. Đặt $a^2 - 1 = c^2$ ($a > c$, a và c là các số tự nhiên), ta có $(a - c)(a + c) = 1$, suy ra $a - c = a + c = 1$, tìm được $a = 1$ và $c = 0$, dẫn đến $n = 1$ (điều này mâu thuẫn với điều kiện n là số tự nhiên lớn hơn 1).

Vậy không tồn tại số tự nhiên n lớn hơn 1 để P là số hữu tỉ. Tức là P là số vô tỉ với mọi số tự nhiên n lớn hơn 1.

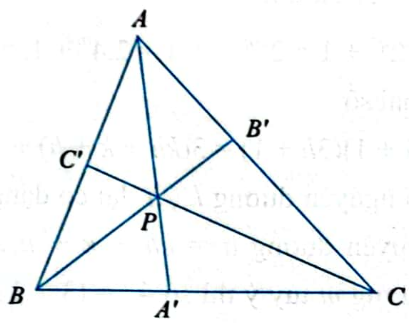
Nhận xét. Đây là bài toán vận dụng kiến thức về số học và tính chia hết để giải. Các bạn gửi bài không nhiều, tuyên dương các bạn sau có lời giải lập luận chặt chẽ và ngắn gọn:

Hà Nội: *Nguyễn Thành Nam*, 7A1, THCS Linh Đàm, *Nguyễn Kim Thành*, 9A1, THCS Hoàng Liệt, Hoàng Mai; **Vĩnh Phúc:** *Trần Duy Đức*, 7E2, THCS Vĩnh Tường.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T4/559. *Cho P là điểm nằm trong tam giác ABC. Các đường thẳng AP, BP, CP cắt các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại A', B', C'. Tìm vị trí của điểm P sao cho*

$$\frac{PA}{PA'}+\frac{PB}{PB'}+\frac{PC}{PC'}=4\left(\frac{PA'}{PA}+\frac{PB'}{PB}+\frac{PC'}{PC}\right).$$



Lời giải. Kí hiệu S_{XYZ} là diện tích của tam giác XYZ. Đặt x, y, z lần lượt là diện tích các tam giác PBC, PCA, PAB (x, y, z dương) Ta có:

$$\frac{PA}{PA'}=\frac{S_{PAB}}{S_{PA'B}}=\frac{S_{PAC}}{S_{PA'C}}=\frac{y+z}{x}.$$

Tương tự, $\dfrac{PB}{PB'}=\dfrac{z+x}{y}$; $\dfrac{PC}{PC'}=\dfrac{x+y}{z}$. Từ đó, yêu cầu bài toán trở thành: Tìm vị trí của điểm P để

$$\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}=4\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)$$

$$\Leftrightarrow x\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{4}{y+z}\right)+y\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}-\frac{4}{z+x}\right)+$$
$$+z\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{4}{x+y}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{x(y-z)^2}{yz(y+z)}+\frac{y(z-x)^2}{zx(z+x)}+\frac{z(x-y)^2}{xy(x+y)}=0.$$
Đẳng thức sau cùng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$, tức P phải là trọng tâm tam giác ABC.

Nhận xét. Chỉ có bạn *Lê Tuấn Hiệp*, 8C, THCS Đoàn Thị Điểm, Hưng Yên cho lời giải đúng, tuy nhiên lời giải của bạn quá dài.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/559. *Giải phương trình*
$$3(2x^2+1)=5\sqrt{8x^3+1}.$$

Lời giải. Điều kiện: $8x^3+1\ge 0 \Leftrightarrow x\ge -\frac{1}{2}$.

Phương trình tương đương với:
$$9\left(2x^2+1\right)^2=25\left(8x^3+1\right)$$
$$\Leftrightarrow 9\left(4x^4+4x^2+1\right)=200x^3+25$$
$$\Leftrightarrow 9x^4-50x^3+9x^2-4=0$$
$$\Leftrightarrow 9\left(x^4-5x^3-2x^2\right)-\left(5x^3-27x^2+4\right)=0$$
$$\Leftrightarrow 9x^2\left(x^2-5x-2\right)-\left(5x-2\right)\left(x^2-5x-2\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x^2-5x-2\right)\left(9x^2-5x+2\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-5x-2=0\\ 9x^2-5x+2=0\end{array}\right..$$

- Với $x^2-5x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{5-\sqrt{33}}{2}>-\frac{1}{2}\\ x=\frac{5+\sqrt{33}}{2}>-\frac{1}{2}\end{array}\right.$

(thỏa mãn điều kiện).

- Với $9x^2-5x+2=0$; $\Delta=-47<0$; phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có tập hợp nghiệm là:
$$\left\{\frac{5-\sqrt{33}}{2};\ \frac{5+\sqrt{33}}{2}\right\}.$$

Nhận xét. Có thể giải bài toán theo cách sau: Phương trình tương đương với
$$3\left(2x^2+1\right)=5\sqrt{(2x+1)\left(4x^2-2x+1\right)}$$
Với $x\ge -\frac{1}{2}$ đặt
$$u=\sqrt{2x+1},\ v=\sqrt{4x^2-2x+1}\ \ (u,v\ge 0).$$
Ta có:
$$u^2+v^2=4x^2+2 \Rightarrow 3\left(2x^2+1\right)=\frac{3}{2}\left(u^2+v^2\right).$$
Ta được: $\frac{3}{2}\left(u^2+v^2\right)=5uv$
$$\Leftrightarrow 3u^2+3v^2-10uv=0$$
$$\Leftrightarrow (3u-v)(u-3v)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}v=3u\\ u=3v\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}4x^2-2x+1=9(2x+1)\\ 2x+1=9\left(4x^2-2x+1\right)\end{array}\right..$$
Từ đó dễ dàng được $\left[\begin{array}{l}x^2-5x-2=0\\ 9x^2-5x+2=0\end{array}\right.$ và trở lại cách giải trên.

Các bạn sau đây có bài giải tốt:

Sóc Trăng: *Nguyễn Tấn Phát*, 9/11, THCS Lý Thường Kiệt; **Phú Thọ:** *Nguyễn Xuân Hồng*, 9A, *Nguyễn Tiến Mạnh, Trần Ngọc Tú*, 8A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Lê Hà Linh*, 7A, THCS Nguyễn Du, TP. Hà Tĩnh; **Hà Nội:** *Nguyễn Kim Thành*, 9A1, THCS Hoàng Liệt, Hoàng Mai, *Doãn Hải Dương*, 7A6, THCS Thanh Xuân, Q. Thanh Xuân; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Đức Thắng*, 9A, THCS Quỳnh Trang, TX Hoàng Mai, *Nguyễn Cảnh Phúc*, 9B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Chánh Thiện*, 9/12, THCS Lê Quý Đôn, Quận 3; **Thanh Hóa:** *Dương Minh Quân*, 9C, THCS Tào Xuyên, TP. Thanh Hóa.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T6/559. *Cho 4 số thực a, b, c, m thỏa mãn*
$$(2m^2+m+2024)a+(m^2+m+2023)b$$
$$+(3m^2+m+2025)c=0\quad (1)$$
và hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$. Chứng minh rằng phương trình $f(x)=0$ luôn có nghiệm.

Lời giải. Ta có:

$$m^2+m+2023<2m^2+m+2024$$
$$<3m^2+m+2025, \forall m\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow 1<\alpha_1=\frac{2m^2+m+2024}{m^2+m+2023}<\alpha_2=\frac{3m^2+m+2025}{m^2+m+2023}$$

và $1-\alpha_1\alpha_2<0$. Do đó:

$$(1)\Leftrightarrow \frac{2m^2+m+2024}{m^2+m+2023}.a+b+\frac{3m^2+m+2025}{m^2+m+2023}.c=0$$
$$\Leftrightarrow \alpha_1 a+b+\alpha_2 c=0\Leftrightarrow \alpha_1^2 a+\alpha_1 b+\alpha_1\alpha_2 c=0$$
$$\Leftrightarrow \alpha_1^2 a+\alpha_1 b=-\alpha_1\alpha_2 c.$$

Hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có: $f(0)=c; f(\alpha_1)=\alpha_1^2a+\alpha_1b+c=(1-\alpha_1\alpha_2)c$ $\Rightarrow f(0)f(\alpha_1)=(1-\alpha_1\alpha_2)c^2\le 0$ $\Rightarrow$ phương trình $f(x)=0$ luôn có nghiệm trên đoạn $[0;\alpha_1]$ $\Rightarrow$ phương trình $f(x)=0$ luôn có nghiệm.

Nhận xét. Một số bạn đã dùng phương pháp tam thức bậc hai để giải nhưng lời giải chưa chặt chẽ vì xét thiếu trường hợp. Một số bạn sử dụng điều kiện $f(0)\cdot f(p)\le 0$ với $p=\frac{2m^2+m+2024}{m^2+m+2023}$ cũng ra kết quả. Các bạn sau có lời giải tốt:

Hà Nội: *Nguyễn Kim Thành*, 9A1, THCS Hoàng Liệt, Hoàng Mai, Hà Nội; **Nghệ An:** *Ngô Văn Trường*, 10A1, THPT Hoàng Mai, TX. Hoàng Mai. **Quảng Bình:** *Phạm Thị Mỹ Hạnh*, 12 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **TP. Hồ Chí Minh:** *Đỗ Hoàng Thiên Phú*, 10E1, THPT Lê Thánh Tông.

TẠ DUY PHƯỢNG

Bài T7/559. *Cho $a,b,c\in[0;3]$ thỏa mãn $a+b+c=4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P=\frac{13}{9}a^2+b^2+3c^2-2b-23c-10.$$

Lời giải. Từ giả thiết suy ra $b=4-c-a$. Thay vào biểu thức P, ta được:

$$P=\frac{13}{9}a^2+(4-c-a)^2+3c^2-2(4-c-a)$$
$$-23c-10.$$

Khai triển phá ngoặc và thu gọn ta được:

$$P=\frac{1}{9}\left(22a^2+18ac-54a+36c^2-261c-18\right)$$

hoặc viết lại thành

$$P=\frac{1}{9}\left[22a(a-3)+12a+18ac+36c^2-261c-18\right].$$

Vì $0\le a\le 3$ nên

$$a(a-3)\le 0, 12a\le 36, 18ac\le 54c.$$

Suy ra:

$$P\le\frac{1}{9}\left(36c^2-207c+18\right)=c(4c-23)+2\le 2$$

(vì $0\le c\le 3<\frac{23}{4}$). Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=3, c=0, b=1$. Vậy giá trị lớn nhất của P là 2.

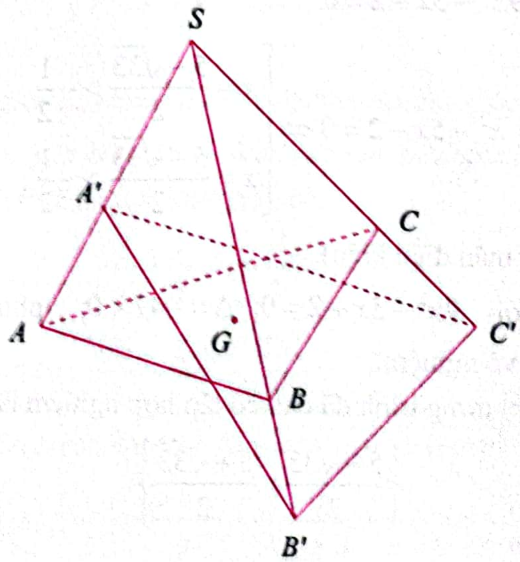
Nhận xét. Bài toán này dễ, chỉ đơn thuần sử dụng các đánh giá dựa vào giả thiết. Tuy vậy, chỉ có đúng hai bạn tham gia giải nhưng cả hai bạn đều cho lời giải tương đối dài. Tuyên dương bạn có lời giải đúng:

Quảng Bình: *Phạm Thị Mỹ Hạnh*, 12 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Gia Văn*, 10A1, THCS&THPT Lê Thánh Tông, Quận Tân Phú.

NGUYỄN TIẾN LÂM

Bài T8/559. *Cho hình chóp S.ABC. Mặt phẳng (α) đi qua trọng tâm G của tam giác ABC lần lượt cắt các tia SA, SB, SC tại A', B', C'. Chứng minh rằng $V_{S.A'B'C'}\ge V_{S.ABC}$.*

Lời giải.



Từ giả thiết G là trọng tâm tam giác ABC ta có
$3\overrightarrow{SG}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}$

$$=\frac{SA}{SA'}\overrightarrow{SA'}+\frac{SB}{SB'}\overrightarrow{SB'}+\frac{SC}{SC'}\overrightarrow{SC'}\ (1).$$

Vì A', B', C', G đồng phẳng nên tồn tại $x,y,z\in\mathbb{R}$ $(x^2+y^2+z^2\neq 0)$ sao cho:

$$\begin{cases}\overrightarrow{SG}=x\overrightarrow{SA'}+y\overrightarrow{SB'}+z\overrightarrow{SC'}\ (2)\\ x+y+z=1\end{cases}.$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{SA}{SA'}\overrightarrow{SA'}+\frac{SB}{SB'}\overrightarrow{SB'}+\frac{SC}{SC'}\overrightarrow{SC'}=3x\overrightarrow{SA'}+3y\overrightarrow{SB'}+3z\overrightarrow{SC'}$$

$$\Leftrightarrow\left(3x-\frac{SA}{SA'}\right)\overrightarrow{SA'}+\left(3y-\frac{SB}{SB'}\right)\overrightarrow{SB'}+\left(3z-\frac{SC}{SC'}\right)\overrightarrow{SC'}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow\frac{SA}{SA'}=3x;\ \frac{SB}{SB'}=3y;\ \frac{SC}{SC'}=3z$$

$$\Rightarrow\frac{SA}{SA'}+\frac{SB}{SB'}+\frac{SC}{SC'}=3(x+y+z)=3.$$

Từ đó áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương ta được:

$$\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.A'B'C'}}=\frac{SA}{SA'}\cdot\frac{SB}{SB'}\cdot\frac{SC}{SC'}\leq\left(\frac{\frac{SA}{SA'}+\frac{SB}{SB'}+\frac{SC}{SC'}}{3}\right)^3=1$$

$$\Rightarrow V_{S.ABC}\leq V_{S.A'B'C'}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $A\equiv A', B\equiv B', C\equiv C'$.

Nhận xét. Chúng ta cũng có thể phát biểu và giải được hai bài toán tương tự trong hình học phẳng sau:

Bài toán 1. *Cho tam giác SAB và I là trung điểm của AB. Một đường thẳng qua I cắt các tia SA, SB theo thứ tự tại C, D. Chứng minh rằng*

$$S_{SCD}\geq S_{SAB}.$$

Bài toán 2. *Cho tam giác SAB với G là trọng tâm của tam giác. Một đường thẳng d thay đổi qua G cắt các tia SA, SB lần lượt tại C, D. Hãy xác định vị trí của đường thẳng d sao cho diện tích tam giác SCD nhỏ nhất.*

Bài toán T8/559 này chỉ có bạn *Ngô Văn Trường*, 10A1, THPT Hoàng Mai, TX. Hoàng Mai, Nghệ An và bạn *Phạm Thị Mỹ Hạnh*, 12 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP.Đồng Hới, Quảng Bình gửi bài và cho lời giải đúng.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/559. *Hãy tìm cặp số thực dương $(x_0;y_0)$ sao cho x_0 là số thực dương nhỏ nhất và $(x_0;y_0)$ là nghiệm của phương trình*

$$\frac{1}{2x^3}+\frac{1}{2y^4}=\frac{1}{(3y)^2}+\frac{1}{81}\ (*).$$

Lời giải. Cách 1. Giả sử $(x_0;y_0)$ là cặp số dương thỏa mãn (*). Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$\frac{1}{y_0^4}+\frac{1}{3^4}\geq 2\sqrt{\frac{1}{y_0^4}\cdot\frac{1}{3^4}}=\frac{2}{9y_0^2}=\frac{2}{(3y_0)^2}\ (1);$$

$$\frac{1}{x_0^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^3}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{x_0^3}\cdot\frac{1}{3^3}\cdot\frac{1}{3^3}}=\frac{1}{3x_0}\ (2).$$

Cộng theo vế (1) và (2) ta có:

$$\frac{1}{x_0^3}+\frac{1}{y_0^4}+\frac{7}{81}\geq\frac{1}{3x_0}+\frac{2}{(3y_0)^2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2x_0^3}+\frac{1}{2y_0^4}-\frac{1}{(3y_0)^2}+\frac{7}{2.81}\geq\frac{1}{6x_0}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{(3y_0)^2}+\frac{1}{81}\right)-\frac{1}{(3y_0)^2}+\frac{7}{2.81}\geq\frac{1}{6x_0}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{18}\geq\frac{1}{6x_0}\Leftrightarrow x_0\geq 3.$$

$x_0 = 3$ xảy ra khi dấu "=" ở (1) và (2) cùng xảy ra

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{x_0^3}=\frac{1}{3^3}\\ \frac{1}{y_0^4}=\frac{1}{3^4}\end{cases}\Leftrightarrow x_0=y_0=3\ \text{(thỏa mãn (*))}.$$

Vậy ta có cặp số dương cần tìm là $(x_0; y_0) = (3; 3)$.

Cách 2. Giả sử $(x_0;y_0)$ là cặp số dương thỏa mãn (*). Ta có:

$$\frac{1}{x_0}=\sqrt[3]{-\left(\frac{1}{y_0^2}\right)^2+\frac{2}{9}.\frac{1}{y_0^2}+\frac{2}{81}}=\sqrt[3]{-\left(\frac{1}{y_0^2}-\frac{1}{9}\right)^2+\frac{3}{81}}$$
$$\le\sqrt[3]{\frac{3}{81}}=\frac{1}{3}$$

$\Leftrightarrow x_0\ge 3;\ x_0=3$ khi $\frac{1}{y_0^2}-\frac{1}{9}=0\Leftrightarrow y_0=3.$

Cặp số $(x_0; y_0)=(3; 3)$ thỏa mãn (*).

Vậy ta có cặp số dương cần tìm là $(x_0; y_0)=(3; 3)$.

Nhận xét. Hai cách giải trên là của tác giả đề toán. Có ít bạn tham gia giải bài này. Lời giải của chủ yếu của các bạn tương tự như cách 2 trên. Các bạn sau có lời giải tốt: **Nghệ An:** ***Ngô Văn Trường***, 10A1, THPT Hoàng Mai, TX. Hoàng Mai; **Hà Nội:** ***Nguyễn Kim Thành***, 9A1, THCS Hoàng Liệt, Hoàng Mai; **TP. Hồ Chí Minh:** ***Đỗ Đình Thiên Phú***, 10E1, TH, THCS&THPT Lê Thánh Tông; **Quảng Bình:** ***Phạm Thị Mỹ Hạnh***, 12 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp;

Có một bạn có lời giải đúng nhưng không viết tên và địa chỉ của mình.

TRẦN HỮU NAM

Bài T10/559. *Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho tồn tại duy nhất hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2023)=-1$ và*

$$f(xy)\ge f(y)+y^n f(x)\ \ (1)\ \text{với mọi } x,y\in\mathbb{R}.$$

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm số $f(t)$ thỏa mãn bài toán. Ta xét hai trường hợp theo tính chẵn, lẻ của n.

• Khi n chẵn, thì $f_1(t)\equiv -1$ hiển nhiên thỏa mãn bài toán.

Nhận xét rằng hàm số xác định theo công thức $f_2(t)=-\frac{t^n-1}{2023^n-1}, \forall t\in\mathbb{R}$ cũng thỏa mãn bài toán.

Trường hợp này vi phạm yêu cầu về tính duy nhất nghiệm của bài toán nên không thỏa mãn.

• Xét n lẻ. Trong (1) thay y bởi $-y$ ta có:

$$f(-xy)\ge f(-y)-y^n f(x),\ \forall x,y\in\mathbb{R}\quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$f(xy)+f(-xy)\ge f(y)+f(-y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}\ \ (3).$$

Trong (3) lần lượt cho $y=1$ và $x=\frac{1}{y}$ $(y\ne 0)$, ta được:

$$f(x)+f(-x)\ge f(1)+f(-1),\ \forall x\in\mathbb{R}\quad (4);$$
$$f(1)+f(-1)\ge f(y)+f(-y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}\ \ (5).$$

Từ (4) và (5) suy ra:

$$f(x)+f(-x)=c, c=f(1)+f(-1), \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\ \ (6).$$

Từ (6) có: $f(-xy)=c-f(xy)$, thay vào (2) ta có:

$$c-f(xy)\ge f(-y)+y^n f(x), \forall x,y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$
$$\Leftrightarrow f(y)+f(-y)-f(xy)\ge f(-y)+y^n f(x), \forall x,y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$
$$\Leftrightarrow f(xy)\le f(y)+y^n f(x), \forall x,y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\ \ (7).$$

Từ (1) và (7) cho ta đẳng thức:

$$f(xy)=f(y)+y^n f(x), \forall x,y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\ \ (8)$$

hay $f(yx)=f(x)+x^n f(y), \forall x,y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (9).

Từ (8) suy ra:

$$\begin{aligned} c&=f(xy)+f(-xy)=f(y)+y^n f(x)+f(-xy)\\ &=f(y)+y^n f(x)+f(y)+y^n f(-x)\\ &=2f(y)+y^n\left(f(x)+f(-x)\right)\\ &=2f(y)+cy^n\end{aligned}$$
$$\Rightarrow f(y)=\frac{1}{2}(1-y^n)\quad (10).$$

Từ (9) suy ra:

$$\begin{aligned} c&=f(yx)+f(-yx)=f(x)+x^n f(y)+f(-yx)\\ &=f(x)+x^n f(y)+f(x)+x^n f(-y)\\ &=2f(x)+x^n\left(f(y)+f(-y)\right)\\ &=2f(x)+cx^n\end{aligned}$$
$$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}(1-x^n)\quad (11).$$

Từ (10) và (11) suy ra:

$$f(x)(1-y^n)=f(y)(1-x^n), \forall x,y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\ \ (12).$$

Cho $x=1, y\ne 1$ ta thu được $f(1)=0$.

Từ (12) suy ra:

$$\frac{f(x)}{1-x^n}=\frac{f(y)}{1-y^n}, \forall x,y\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$$

hay $\frac{f(x)}{1-x^n}=a\Leftrightarrow f(x)=a(1-x^n), a\in\mathbb{R}$,

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$.

Trong (1) cho $x = 0, \forall y \neq 0, 1$ ta thu được:

$$f(0) \geq a(1-y^n) + y^n f(0)$$
$$\Leftrightarrow (1-y^n)(f(0)-a) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow f(0) - a = 0.$$

Vậy nên $f(x) = a(1-x^n), a \in \mathbb{R}$.

Vì $f(2023) = -1$ nên $a = \dfrac{f(2023)}{1-2023^n} = \dfrac{1}{2023^n - 1}$.

Kết luận. Vậy mọi n lẻ thỏa mãn các điều kiện bài ra.

Nhận xét. Đây là dạng toán về bất phương trình hàm với cặp biến tự do trên tập số thực thuộc dạng phức tạp. Chỉ có một bạn gửi bài và giải theo cách tương tự đã trình bày ở trên, đó là bạn: *Phạm Thị Mỹ Hạnh*, 12T2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình.**

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T11/559. *Cho số thực a và dãy số (x_n) được xác định bởi:*

$$\begin{cases} x_1 = a \\ (n+2024)x_{n+1} = n\log_3(x_n^2+2) + 2024, \ n \in \mathbb{N}^{*}. \end{cases}$$

Xác định a để dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.

Lời giải (Dựa trên lời giải của bạn *Phạm Thị Mỹ Hạnh*, 12 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, Quảng Bình).

Ta có: $x_{n+1} = \dfrac{n}{n+2024}\log_3(x_n^2+2) + \dfrac{2024}{n+2024}$

$$\Rightarrow x_{n+1} - x_n = \frac{n}{n+2024}\log_3(x_n^2+2) + \frac{2024}{n+2024} - x_n.$$

Xét hàm số:

$$f_n(x) = \frac{n}{n+2024}\log_3(x^2+2) + \frac{2024}{n+2024} - x.$$

Ta có:

$$f_n'(x) = \frac{n}{n+2024}\cdot\frac{2x}{(x^2+2)\ln 3} - 1 \leq \frac{1}{\sqrt{2}\ln 3} - 1 < 0$$

với mọi x. Do đó $f_n(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

- Xét $a = \pm 1$, suy ra $x_n = 1$ với mọi n.

Vậy $\lim x_n = 1$.

- Xét $|a| > 1$, ta chứng minh rằng $x_n > 1, \forall n \geq 2$.

Với $n = 2$ do $|a| > 1$ nên dễ thấy khẳng định đúng. Giả sử đúng với n. Ta có:

$$x_{n+1} = \frac{n}{n+2024}\log_3(x_n^2+2) + \frac{2024}{n+2024}$$
$$> \frac{n}{n+2024}\log_3(1+2) + \frac{2024}{n+2024}$$
$$= 1.$$

Vậy khẳng định đúng với $n + 1$. Theo nguyên lý quy nạp ta có $x_n > 1, \forall n \geq 2$.

Do đó với $\forall n \geq 2$ thì $f_n(x_n) < f_n(1) = 0$ $\Rightarrow f_n(x_n) < x_n \Rightarrow x_{n+1} < x_n$. Dãy (x_n) giảm bắt đầu từ $n > 1$ và bị chặn dưới bởi 1 do đó dãy có giới hạn hữu hạn $\lim x_n = L$.

Từ hệ thức

$$x_{n+1} = \frac{n}{n+2024}\log_3(x_n^2+2) + \frac{2024}{n+2024}$$

cho $n \to \infty$ ta được: $L = \log_3(L^2+2)$ (1).

Xét hàm số: $g(x) = \log_3(x^2+2) - x$. Ta có:

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{2x}{(x^2+2)\ln 3} - 1 < \frac{1}{\sqrt{2}\ln 3} - 1 < 0$$

với mọi x. Vậy $g(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Vì $g(1) = 0$ nên $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình $g(x) = 0$. Từ (1) suy ra $L = 1$.

- Xét $|a| < 1$. Chứng minh tương tự như trên ta có dãy (x_n) tăng bắt đầu từ $n > 1$ và bị chặn trên bởi 1 do đó dãy có giới hạn hữu hạn $\lim x_n = L$. Chuyển qua giới hạn ta có (1) và từ đó $L = 1$.

Kết luận $\lim x_n = 1$ với mọi a.

Nhận xét. Ngoài bạn *Hạnh* chỉ có thêm hai bạn nữa ở trường THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, Quảng Bình tham gia giải bài toán này, nhưng lời giải chưa thật đầy đủ,mặc dù có đáp số đúng.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

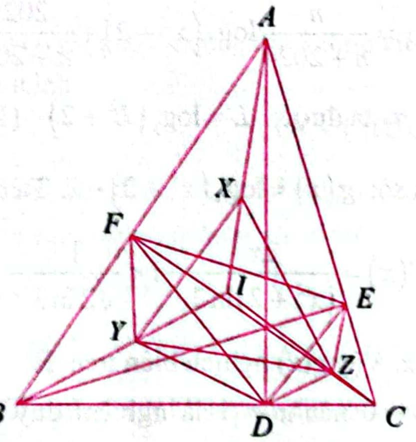
Bài T12/559. *Cho tam giác không đều ABC. I_a, I_b, I_c theo thứ tự là tâm đường tròn bàng tiếp các góc A, B, C của tam giác ABC. J_a, J_b, J_c theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác I_aBC, I_bCA, I_cAB. Chứng minh rằng đường thẳng Euler của các tam giác $I_aJ_bJ_c$, $I_bJ_cJ_a$, $I_cJ_aJ_b$ đồng quy.*

Lời giải. Ta cần có hai bổ đề.

Bổ đề 1. *Cho tam giác nhọn ABC, I là tâm đường tròn nội tiếp. D, E, F theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của A, B, C trên BC, CA, AB. X, Y, Z theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác AEF, BFD, CDE. Khi đó*

1) *Các tứ giác BCZY, CAXZ, ABYX nội tiếp.*
2) *I là trực tâm của tam giác XYZ.*

Chứng minh.



1) Dễ thấy các tam giác *DBF*, *DEC* đồng dạng (ngược hướng) với tam giác *ABC*. Do đó các tam giác *DBF*, *DEC* đồng dạng (cùng hướng).

Từ đó, chú ý rằng *Y*, *Z* theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác *DBF*, *DEC*, suy ra các tam giác *DBY*, *DEZ* đồng dạng (cùng hướng).

Do đó các tam giác *DBE*, *DYZ* đồng dạng (cùng hướng). Vậy:

$$(YB,YZ)-(CB,CZ)\equiv(YB,YD)+(YD,YZ)-(CB,CZ)(\text{mod}\,\pi)$$

$$\equiv\frac{\pi}{2}+(FB,FY)+(BD,BE)-(CD,CZ)(\text{mod}\,\pi)$$

$$\equiv\frac{\pi}{2}+(FB,FY)+(BD,BE)-(FD,FY)(\text{mod}\,\pi)$$

$$\equiv\frac{\pi}{2}+(FB,FD)+(BD,BE)$$

$$\equiv\frac{\pi}{2}+(CE,CD)+(BD,BE)(\text{mod}\,\pi)$$

$$\equiv\frac{\pi}{2}+(CE,BE)\equiv\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\equiv 0(\text{mod}\,\pi).$$

Do đó tứ giác *BCYZ* nội tiếp.

Tương tự, các tứ giác *CAXZ*, *ABYX* nội tiếp.

2) Dễ thấy các bộ ba điểm (*A*, *X*, *I*), (*B*, *Y*, *I*), (*C*, *Z*, *I*) thẳng hàng. Từ đó, chú ý rằng các tứ giác *BCZY*, *CAXZ*, *ABYX* nội tiếp, suy ra:

$$(XI,YZ)\equiv(XA,XY)+(YX,YB)+(YB,YZ)$$

$$\equiv(BA,BY)+(AX,AB)+(CB,CZ)(\text{mod}\,\pi)$$

$$\equiv\frac{1}{2}(\overline{BA},\overline{BC})+\frac{1}{2}(\overline{AC},\overline{AB})+\frac{1}{2}(\overline{CB},\overline{CA})$$

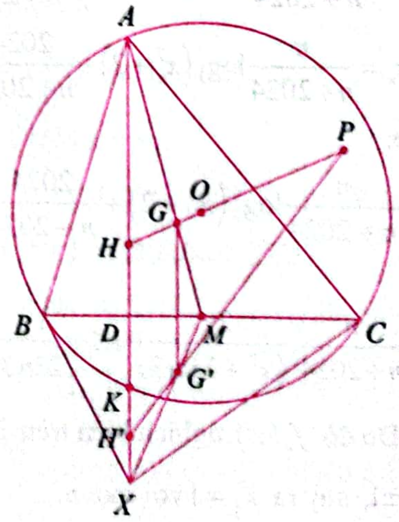
$$\equiv\frac{1}{2}(\overline{AB},\overline{CB})+\frac{1}{2}(\overline{AC},\overline{AB})+\frac{1}{2}(\overline{CB},\overline{CA})(\text{mod}\,\pi)$$

$$\equiv\frac{1}{2}(\overline{AC},\overline{CA})\equiv\frac{\pi}{2}(\text{mod}\,\pi).$$

Do đó $XI\perp YZ$. Tương tự, $YI\perp ZX$. Vậy *I* là trực tâm của tam giác *XYZ*.

Bổ đề 2. *Cho tam giác ABC với H, G theo thứ tự là trực tâm và trọng tâm. D là giao điểm của AH và BC. X là điểm bất kì thuộc AH và khác A, H. P là giao điểm của HG và đường thẳng Euler của tam giác XBC. Khi đó* $\dfrac{\overline{PG}}{\overline{PH}}=-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\overline{DX}}{\overline{DH}}$.

Chứng minh.



Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC; K là giao điểm thứ hai của AH và (O); M là trung điểm của BC; H', G' theo thứ tự là trực tâm và trọng tâm của tam giác XBC. Dễ thấy K là điểm đối xứng của H qua BC; H', G', P thẳng hàng. Do đó:

$$\overline{DA}.\overline{DH} = -\overline{DA}.\overline{DK} = -\overline{DB}.\overline{DC}.$$

Tương tự, $\overline{DX}.\overline{DH'} = -\overline{DB}.\overline{DC}$.

Vậy $\overline{DH'} = \overline{DA}.\dfrac{\overline{DH}}{\overline{DX}}$. Do đó:

$$\overline{HH'} = \overline{DH'} - \overline{DH} = \overline{DA}.\frac{\overline{DH}}{\overline{DX}} - \overline{DX}.\frac{\overline{DH}}{\overline{DX}}$$

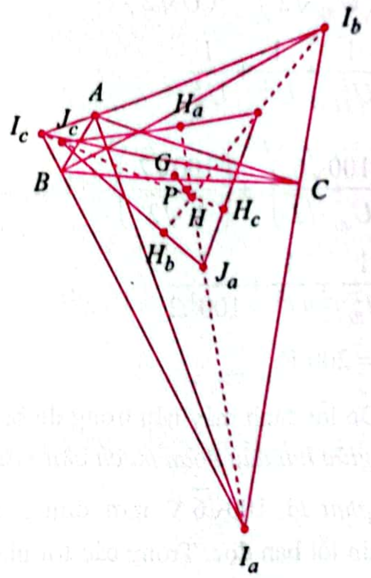
$$= (\overline{DA} - \overline{DX})\frac{\overline{DH}}{\overline{DX}} = -\frac{\overline{DH}}{\overline{DX}}.\overline{AX} \quad (1).$$

Dễ thấy $GG' // AH$ và $\dfrac{\overline{GG'}}{\overline{AX}} = \dfrac{\overline{MG}}{\overline{MA}} = \dfrac{1}{3}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{\overline{PG}}{\overline{PH}} = \frac{\overline{GG'}}{\overline{HH'}} = \frac{\frac{1}{3}.\overline{AX}}{-\frac{\overline{DH}}{\overline{DX}}.\overline{AX}} = -\frac{1}{3}.\frac{\overline{DX}}{\overline{DH}} \text{ (đpcm).}$$

Trở lại giải bài toán T12/559.



Gọi H, G theo thứ tự là trực tâm, trọng tâm của tam giác $J_aJ_bJ_c$; H_a, H_b, H_c theo thứ tự là hình chiếu của H trên I_bI_c, I_cI_a, I_aI_b.

Dễ thấy A, B, C theo thứ tự là hình chiếu của I_a, I_b, I_c trên I_bI_c, I_cI_a, I_aI_b.

Theo bổ đề 1, các tứ giác $I_bI_cJ_cJ_b$, $I_cI_aJ_aJ_c$, $I_aI_bJ_bJ_a$ nội tiếp và các bộ bốn điểm (I_a, J_a, H, H_a), (I_b, J_b, H, H_b), (I_c, J_c, H, H_c) thẳng hàng.

Do đó $\begin{cases} \overline{HI_a}.\overline{HJ_a} = \overline{HI_b}.\overline{HJ_b} = \overline{HI_c}.\overline{HJ_c} \\ \overline{HH_a}.\overline{HJ_a} = \overline{HH_b}.\overline{HJ_b} = \overline{HH_c}.\overline{HJ_c} \end{cases}$.

Chia vế với vế của hai dãy đẳng thức trên, ta có:

$$\frac{\overline{HI_a}}{\overline{HH_a}} = \frac{\overline{HI_b}}{\overline{HH_b}} = \frac{\overline{HI_c}}{\overline{HH_c}}.$$

Từ đó, theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, suy ra: $\dfrac{\overline{HI_a} - \overline{HH_a}}{\overline{HH_a}} = \dfrac{\overline{HI_b} - \overline{HH_b}}{\overline{HH_b}} = \dfrac{\overline{HI_c} - \overline{HH_c}}{\overline{HH_c}}$.

Vậy $\dfrac{\overline{H_aI_a}}{\overline{H_aH}} = \dfrac{\overline{H_bI_b}}{\overline{H_bH}} = \dfrac{\overline{H_cI_c}}{\overline{H_cH}} = k$.

Lấy P thuộc HG sao cho $\dfrac{\overline{PG}}{\overline{PH}} = -\dfrac{k}{3}$.

Áp dụng bổ đề 2 cho tam giác $J_aJ_bJ_c$ và điểm I_a, suy ra đường thẳng Euler của tam giác $I_aJ_bJ_c$ đi qua P.

Tương tự, đường thẳng Euler của các tam giác $I_bJ_cJ_a$, $I_cJ_aJ_b$ cũng đi qua P (đpcm).

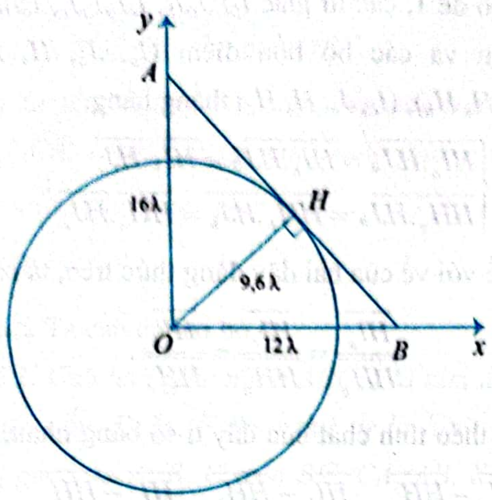
Nhận xét. 1) Bài toán này khó, không bạn nào giải đúng bài này.

2) Bổ đề 1 rất quen thuộc nhưng bổ đề 2 hoàn toàn mới và không dễ gì mà có thể nghĩ ra nó.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/559. *Trên mặt thoáng của một chất lỏng, một mũi nhọn O chạm vào mặt thoáng dao động điều hòa với tần số f, tạo thành sóng trên mặt thoáng với bước sóng λ = 3cm. Xét hai phương truyền sóng Ox và Oy vuông góc với nhau. Gọi A là điểm thuộc Ox cách O một khoảng 48 cm và B thuộc Oy cách O là 36 cm. Tính số điểm dao động cùng pha với nguồn O trên đoạn AB.*

Lời giải. Theo đề bài $OA = 16\lambda$, $OB = 12\lambda$.



Hạ AH vuông góc với AB, áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông OAB ta có:

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}\Rightarrow OH=9{,}6\lambda.$$

Các điểm dao động cùng pha với O cách O một số nguyên lần λ. Ta vẽ các vòng tròn tâm O bán kính bằng một số nguyên lần λ. Để các vòng tròn này cắt AB thì bán kính bắt đầu từ:

$$10\lambda,\ 11\lambda,\ 12\lambda,\ 13\lambda,\ 14\lambda,\ 15\lambda,\ 16\lambda.$$

Các đường tròn bán kính 10λ, 11λ, 12λ cắt đoạn AB tại 2 điểm còn các đường tròn bán kính 13λ, 14λ, 15λ, 16λ chỉ cắt đoạn AB tại 1 điểm. Nên tổng số điểm dao động cùng pha với O trên AB là:

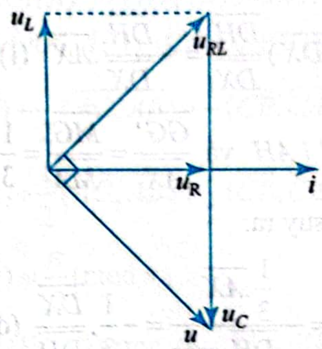
$$3.2.4 = 10 \text{ điểm}.$$

Nhận xét. Chúc mừng các bạn đã có lời giải đúng cho đề ra kì này: *Hoàng Ngọc Gia Huy*, 11 Lý 2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**; *Phạm Xuân Khánh*, 11A2, THPT Tam Phước, Biên Hòa, **Đồng Nai**; *Huỳnh Trịnh Vĩnh Phúc*, 10A1, THPT Lê Thánh Tông; Quận Tân Phú, **TP. Hồ Chí Minh**; *Đỗ Thị Thanh Thảo*, 12 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình**.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/559. *Cho mạch điện xoay chiều R, L, C mắc nối tiếp theo thứ tự đó (cuộn cảm thuần). Điện dung C có thể thay đổi được. Điều chỉnh C để điện áp ở hai đầu tụ điện C là lớn nhất. Khi đó điện áp hiệu dụng ở hai đầu điện trở R là* $100\sqrt{2}$ V. *Khi điện áp tức thời ở hai đầu đoạn mạch là* $100\sqrt{2}$ V *thì điện áp tức thời giữa hai đầu đoạn mạch chứa điện trở và cuộn cảm là* $100\sqrt{6}$ V. *Tính giá trị điện áp hiệu dụng ở hai đầu đoạn mạch AB.*

Lời giải. $U_{C\max}$ tương đương với u_{RL} vuông góc với u. Ta có giản đồ vectơ như hình vẽ:



Suy ra: $\begin{cases}\left(\dfrac{u_{RL}}{U_{RL}\sqrt{2}}\right)^2+\left(\dfrac{u}{U\sqrt{2}}\right)^2=1\\ \dfrac{1}{U_{RL}^2}+\dfrac{1}{U^2}+\dfrac{1}{U_R^2}\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}\left(\dfrac{100\sqrt{6}}{U_{RL}\sqrt{2}}\right)^2+\left(\dfrac{100\sqrt{2}}{U\sqrt{2}}\right)^2=1\\ \dfrac{1}{U_{RL}^2}+\dfrac{1}{U^2}+\dfrac{1}{100^2.2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow U=200\ V.$$

Nhận xét. Do lỗi đánh máy nên trong đề bài: ... *điện áp tức thời giữa hai đầu đoạn mạch chứa điển trở và cuộn cảm phải là* $100\sqrt{6}$ V mới đúng. Tòa soạn thành thật xin lỗi bạn đọc. Trong các lời giải bài này chỉ có bạn *Phạm Xuân Khánh*, 11A2, THPT Tam Phước, Biên Hòa, **Đồng Nai** phát hiện được nhầm lẫn này và đưa ra lời giải đúng. Xin hoan nghênh bạn.

NGUYỄN XUÂN QUANG

SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP SAI PHÂN ĐỂ GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ DÃY SỐ VÀ PHƯƠNG TRÌNH HÀM

LÊ HỒ QUÝ (Trường THPT Duy Tân, Kon Tum)
NGUYỄN NGỌC DUYỆT (Trường THPT Lê Lợi, Kon Tum)
PHẠM BÌNH NGUYÊN (Trường THPT Kon Tum, Kon Tum)

Phương pháp giải các bài toán về dãy số, phương trình hàm rất đa dạng như chính yêu cầu của chúng. Trong bài viết này, chúng ta sẽ dùng phương pháp sai phân để giải một số bài toán về dãy số, phương trình hàm.

1. Các bài toán đối với dãy số và giới hạn

1.1. Bài toán tìm số hạng tổng quát của một dãy số

• Công thức truy hồi là một biểu thức tuyến tính

Ta xét trường hợp hệ thức truy hồi đã cho là hệ thức tuyến tính

$$a_0x_{n+k}+a_1x_{n+k-1}+\ldots+a_kx_n=f(n).$$

với $a_0, a_1, \ldots, a_k$ $(a_0\neq 0,\ a_k\neq 0)$ là các hằng số thì bài toán có thể được xem như một phương trình sai phân tuyến tính.

Thí dụ 1 (Anh 1980). *Tìm tất cả các dãy số (a_n) thỏa mãn $a_{n+1}=2^n-3a_n$ và (a_n) là một dãy số tăng.*

Lời giải. Xét phương trình sai phân:

$$a_{n+1}=2^n-3a_n \quad (1).$$

Đặt $a_n=u_n.2^n$. Thay vào (1), ta được:

$$u_{n+1}.2^{n+1}=-3u_n.2^n+2^n \Leftrightarrow u_{n+1}=-\frac{3}{2}u_n+\frac{1}{2} \quad (2).$$

Phương trình này có nghiệm tổng quát là:

$$u_n=C.\left(-\frac{3}{2}\right)^n+\frac{1}{5}\Leftrightarrow a_n=C.(-3)^n+\frac{1}{5}.2^n.$$

Vì dãy (a_n) tăng nên $a_{n+1}>a_n$. Do đó:

$$-3C.(-3)^n+\frac{2}{5}.2^n>C.(-3)^n+\frac{1}{5}.2^n,$$

với mọi $n\in\mathbb{N}$.

Suy ra: $4C.(-3)^n<\frac{1}{5}.2^n$ (3), với mọi $n\in\mathbb{N}$.

Với $C>0$ thì (3) tương đương $\frac{1}{20C}>\left(-\frac{3}{2}\right)^n$, với mọi $n\in\mathbb{N}$. Ta không chọn được C, vì khi n chẵn thì $\left(-\frac{3}{2}\right)^n\to+\infty$.

Với $C<0$ thì (3) tương đương $\frac{1}{20C}<\left(-\frac{3}{2}\right)^n$, với mọi $n\in\mathbb{N}$. Ta cũng không chọn được C, vì khi n lẻ thì $\left(-\frac{3}{2}\right)^n\to-\infty$.

Với $C=0$ thì $a_n=\frac{1}{5}.2^n$ là dãy số tăng.

Vậy dãy số cần tìm là $a_n=\frac{1}{5}.2^n$.

• Công thức truy hồi là biểu thức tuyến tính với hệ số biến thiên

Trong phần này, ta sẽ chỉ xét một số dạng đặc biệt, đơn giản của các phương trình sai phân tuyến tính với các hệ số biến thiên chủ yếu bằng phương pháp đặt dãy số phụ, đưa về phương trình sai phân tuyến tính.

Thí dụ 2. *Tìm u_n, biết rằng*

$$u_1=0, u_{n+1}=\frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)}(u_n+1), n\in\mathbb{N}^*.$$

Lời giải. Từ giả thiết, ta suy ra:

$$u_{n+1}=\frac{n(n+1)^2(n+2)}{(n+1)(n+2)^2(n+3)}(u_n+1).$$

Do đó: $(n+1)(n+2)^2(n+3)u_{n+1}$

$$=n(n+1)^2(n+2)u_n+n(n+1)^2(n+2).$$

Đặt $n(n+1)^2(n+2)u_n = x_n$, $n(n+1)^2(n+2) = f_n$, ta được phương trình: $x_{n+1} - x_n = f_n$, $x_1 = 0$.

Giải phương trình này, ta được:

$$x_n = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)(2n+1)}{10}.$$

Suy ra: $u_n = \dfrac{(n-1)(2n+1)}{10(n+1)}$.

• Công thức truy hồi dạng phân tuyến tính với hệ số hằng

Trong phần này, ta sẽ tìm số hạng tổng quát của dãy số được cho dưới dạng công thức truy hồi dạng phân tuyến tính với hệ số hằng.

Thí dụ 3. *Tìm dãy số (x_n) thỏa mãn các điều kiện:*

$$x_1 = a > 0,\ x_{n+1} = \frac{x_n}{x_n + 2},\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Lời giải. Từ giả thiết ta suy ra $x_n > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ và $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{x_n+2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x_{n+1}} = 1 + \dfrac{2}{x_n}$.

Đặt $\dfrac{1}{x_n} = y_n$, ta được: $y_{n+1} = 2y_n + 1$

$$\Leftrightarrow y_{n+1} - 2y_n - 1 = 0, y_1 = \frac{1}{a}.$$

Giải phương trình sai phân này, ta được:

$$y_n = \frac{(a+1)2^{n-1} - a}{a}.$$

Vậy $x_n = \dfrac{a}{(a+1)2^{n-1} - a}$.

1.2. Bài toán tính tổng các số hạng của một dãy số

Để tính tổng n số hạng đầu tiên của một dãy số, một trong những phương pháp hiệu quả là phương pháp sai phân. Sau đây là một số kiểu áp dụng:

Để tính tổng n số hạng đầu tiên của dãy số (a_n), ta tìm hàm số $f(n)$ sao cho $a_n = f(n+1) - f(n)$. Khi đó $a_1 + a_2 + ... + a_n = f(n+1) - f(1)$. Cách làm này gọi là phương pháp sai phân hữu hạn (tách số hạng tổng quát).

Có thể dự đoán hàm $f(n)$ bằng cách sử dụng tích phân. Ta biết rằng tích phân của đa thức bậc k là đa thức bậc $k+1$. Bởi vậy, nếu $\Delta f(k) := f(k+1) - f(k) = n^k$ thì $f(k)$ phải có bậc $k+1$.

Thí dụ 4 (VMO 2001- Bảng B). *Cho dãy số (x_n), $n \in \mathbb{N}^*$, được xác định như sau:*

$$x_1 = \frac{2}{3},\ x_{n+1} = \frac{x_n}{2(2n+1)x_n + 1},\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Hãy tính tổng của 2001 số hạng đầu tiên của dãy (x_n).

Lời giải. Từ giả thiết, ta suy ra: $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Đặt $u_n = \dfrac{2}{x_n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Từ công thức xác định dãy (x_n) của đề bài, ta có:

$$u_1 = 3,\ u_{n+1} = 4(2n+1) + u_n,\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Giải phương trình sai phân này, ta được:

$$u_n = (2n-1)(2n+1),\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Do đó:

$$x_n = \frac{2}{u_n} = \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1},$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy:

$$x_1 + x_2 + ... + x_{2001} = 1 - \frac{1}{4003} = \frac{4002}{4003}.$$

Thí dụ 5. *Cho dãy số (x_n) thỏa mãn điều kiện*

$$x_1 = \frac{1}{2},\ x_{n+1} = x_n^2 + x_n,\ \forall n \ge 1.$$

Đặt $S = \dfrac{1}{x_1+1} + \dfrac{1}{x_2+1} + ... + \dfrac{1}{x_{2010}+1}$. *Tìm phần nguyên của tổng S.*

Lời giải. Ta có $x_{n+1} - x_n = x_n^2 \ge 0$, suy ra dãy (x_n) tăng. Ngoài ra $x_2 = \dfrac{3}{4}$, $x_3 = \dfrac{21}{16} > 1$ nên $x_n > 1$ với mọi $n \ge 3$ hay $\dfrac{1}{x_{2010}} < 1$. Mặt khác, ta có:

$$\frac{1}{x_n+1} = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_n(x_n+1)} = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+1}}.$$

Cho n lần lượt nhận các giá trị 1; 2; ..., 2010, cộng từng vế các đẳng thức thu được và rút gọn ta được: $S=\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_{2010}}=2-\frac{1}{x_{2011}}<2$

$$\Rightarrow 1<S<2\Rightarrow [S]=1.$$

Nhận xét. Ta có thể tổng quát bài này dưới dạng:

1) Chứng minh rằng $[S_n]=1,\ \forall n\geq 3,$ hoặc

2) Chứng minh rằng $\lim S_n=1.$

1.3. Bài toán tìm giới hạn của dãy số

Trong phần này, chủ yếu ta sẽ tính giới hạn của một số dãy sai phân theo các hàm sơ cấp.

Thí dụ 6 (Olympic 30/4, 1999). *Xét dãy số thực (u_n) xác định theo công thức*

$$\begin{cases} u_1=\alpha\in\mathbb{R} \\ u_{n+1}=\frac{1}{2}\ln\left(1+u_n^2\right)-1999,\ \forall n\in\mathbb{N}^* \end{cases}$$

Chứng minh rằng (u_n) là một dãy hội tụ.

Lời giải. Xét hàm số

$$f(x)=\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)-1999.$$

Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và

$$|f'(x)|=\left|\frac{x}{1+x^2}\right|\leq\frac{1}{2},\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Xét hàm số $g(x)=x-f(x)$. Hàm số $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có:

$$g'(x)=\frac{x^2-x+1}{x^2+1}>0,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Do đó $g(x)$ là hàm đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$. Để ý rằng $g(0).g(-1999)<0$. Suy ra phương trình $g(x)=0$ có nghiệm duy nhất, ký hiệu là β. Khi đó theo định lý Lagrange thì tồn tại $c\in\mathbb{R}$ sao cho

$$|u_{n+1}-\beta|=|f(u_n)-f(\beta)|=|f'(c)||u_n-\beta|.$$

Suy ra: $|u_{n+1}-\beta|\leq\frac{1}{2}|u_n-\beta|$. Từ đó:

$$|u_{n+1}-\beta|\leq\frac{1}{2}|u_n-\beta|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^2|u_{n-1}-\beta|$$

$$\leq\ldots\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|\alpha-\beta|.$$

Vậy nên $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\beta.$

1.4. Bài toán chứng minh tính chất của dãy số

• Tính chất số học

Tính chất số học của dãy số thường liên quan đến số hạng là số nguyên trong dãy số đó, tính chất đó được thể hiện ở tính chất chia hết, nguyên tố cùng nhau, chính phương, đồng dư, …

Thí dụ 7 (Putnam 1999). *Cho dãy số (x_n) được xác định như sau: $x_1=1,x_2=2,x_3=24$ và $x_n=\frac{6x_{n-1}^2x_{n-3}-8x_{n-1}x_{n-2}^2}{x_{n-2}x_{n-3}},\ \forall n\geq 3.$ Chứng minh rằng x_n luôn luôn là bội của n.*

Lời giải. Đặt $y_n=\frac{x_n}{x_{n-1}}$. Khi đó, đẳng thức $x_n=\frac{6x_{n-1}^2x_{n-3}-8x_{n-1}x_{n-2}^2}{x_{n-2}x_{n-3}}$ được viết đơn giản thành $y_n=6y_{n-1}-8y_{n-2}$. Giải phương trình sai phân này, ta được $y_n=A.2^n+B.4^n$. Nhưng ta có:

$$y_2=\frac{x_2}{x_1}=2,\ y_3=\frac{x_3}{x_2}=12,$$

nên ta được: $y_{n+1}=4^n-2^n=2^{n-1}(2^{n-1}-1).$

Suy ra: $x_n=\prod\limits_{k=2}^{n}2^{k-1}(2^{k-1}-1)=2^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod\limits_{k=2}^{n}(2^{k-1}-1).$

Ta sẽ chứng minh x_n chia hết cho n bằng cách chứng tỏ mọi ước nguyên tố của n cũng là ước của x_n.

Nếu $2^m,m\in\mathbb{N}^*$ là ước của n thì $m\leq n-1$ (do $2^n\geq n+1$). Vì vậy $x_n\,\vdots\,2^m$.

Nếu $p^m,m\in\mathbb{N}^*$ với p là số nguyên tố lẻ, là ước của n thì $m\leq n-1$ (do $p^n>2^n\geq n+1$). Do đó n chia hết cho các số nguyên $k\in\{p,p^2,p^3,...,p^m\}$.

Vì $(2,p)=1$ nên theo định lý Fermat bé ta có:

$$2^{p-1}\equiv 1\ (\text{mod}\ p)\ \text{hay}\ 2^{p-1}-1\,\vdots\,p.$$

Vì $x_n=2^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod\limits_{k=2}^{n}(2^{k-1}-1)$ có $n-1$ thừa số lẻ $(2^{k-1}-1)$, trong đó có ít nhất m thừa số chia hết cho p nên $x_n\,\vdots\,p^m$. Vậy $x_n\,\vdots\,n$.

• **Tính chất giải tích**

Tính chất giải tích của dãy số được thể hiện ở tính bị chặn, tính hội tụ hay phân kì, tính đơn điệu, quy luật của dãy số như cấp số cộng, cấp số nhân, ... Ngoài ra tính chất của dãy số còn thể hiện ở các biểu thức chứa các số hạng của dãy số.

Thí dụ 8. *Cho $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. Xét dãy số (x_n) được xác định bởi :* $\begin{cases} x_1 = a \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n\left(x_n^2+3\right)}{3x_n^2+1}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

Chứng minh rằng dãy số (x_n) bị chặn.

Lời giải. Từ giả thiết ta có các x_{n+1} luôn cùng dấu với x_n và vì vậy luôn dương. Ta có

$$x_{n+1}-1=\frac{(x_n-1)^3}{3x_n^2+1}.$$

Do đó, nếu $0<a<1$ thì $0<x_n<1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Còn nếu $a>1$ thì $x_n>1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Mặt khác, ta lại có: $x_{n+1}-x_n=\dfrac{2x_n\left(1-x_n^2\right)}{3x_n^2+1}$.

Do đó khi $0<a<1$ thì dãy (x_n) là dãy tăng và bị chặn trên bởi 1, còn khi $a>1$ thì dãy (x_n) là dãy giảm và bị chặn dưới bởi 1.

• **Dãy số và bất đẳng thức**

Với các bài toán liên quan đến bất đẳng thức thì phương pháp sai phân là một trong các phương pháp rất hữu hiệu.

Thí dụ 9. *Cho dãy số (x_n) xác định như sau*

$$x_1=\frac{1}{2},\ x_n=\frac{2n-3}{2n}x_{n-1},\ \forall n\ge 2.$$

Chứng minh rằng $x_1+x_2+...+x_n<1,\ \forall n\ge 1$.

Lời giải. Xét dãy số $y_n=(2n-1)x_n$. Ta có:

$$y_n=(2n-1)\frac{2n-3}{2n}x_{n-1}$$
$$=\frac{(2n-1)(2n-3)}{2n}.\frac{y_{n-1}}{2(n-1)-1}$$
$$\Rightarrow y_n=\frac{2n-1}{2n}.y_{n-1},\forall n\ge 2.$$

Công thức trên cũng đúng với $n=1$, nếu ta đặt $y_0=1$. Ta lại có:

$$y_{n-1}-y_n=\frac{2n}{2n-1}y_n-y_n=\frac{y_n}{2n-1}=x_n,\forall n\ge 1.$$

Vì vậy: $x_1+x_2+...+x_n$

$$=(y_0-y_1)+(y_1-y_2)+...+(y_{n-1}-y_n)$$
$$=y_0-y_n=1-y_n<1.$$

1.5. Các bài toán khác

• **Tính tuần hoàn của dãy số**

Dãy số (u_n) được gọi là dãy số tuần hoàn (cộng tính) nếu tồn tại số $s \in \mathbb{N}^*$ sao cho $u_{n+s}=u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Số s như vậy được gọi là chu kì của dãy. Chu kì nhỏ nhất của một dãy số tuần hoàn còn được gọi là chu kì cơ sở của dãy số đó. Trong thực hành, để chứng minh một dãy số là tuần hoàn không nhất thiết phải xác định chu kì cơ sở của nó. Một dãy số là tuần hoàn chu kì 1 là dãy hằng.

Thí dụ 10. *Hãy xác định số hạng tổng quát của một dãy số tuần hoàn chu kì 2.*

Lời giải. Giả sử hai dãy số đầu tiên của dãy số (u_n) cần tìm là $u_0=a;\ u_1=b$. Ta có phương trình sai phân $u_0=a;\ u_1=b;\ u_{n+2}=u_n,\ n\in\mathbb{N}$.

Phương trình đặc trưng $\lambda^2-1=0$ có hai nghiệm phân biệt $\lambda=-1, \lambda=1$. Nghiệm tổng quát có dạng: $u_n=A.(-1)^n+B.1^n=B+(-1)^n.A$.

Giải hệ các điều kiện ban đầu được công thức số hạng tổng quát của dãy số (u_n) là:

$$u_n=\frac{a+b+(a-b)(-1)^n}{2},\ (n\in\mathbb{N}).$$

2. Phương trình hàm sai phân

Vì mỗi hàm số $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ được tương ứng với một dãy số (u_n) với số hạng tổng quát $u_n=f(n)$ nên nhiều bài toán xác định hàm số trên tập $\mathbb{N}$ được đưa về bài toán xác định số hạng tổng quát của một dãy số.

Thí dụ 11. *Xác định các hàm số* $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ *thỏa mãn điều kiện*

$$f(0)=1,\ f(1)=2,\ f(n+1)f^2(n-1)=f^3(n)\ (5),$$

$\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm số $f(n)$ thỏa mãn yêu cầu bài ra. Bằng phương pháp quy nạp, ta chứng minh được $f(n)>0$ với mọi $n\in\mathbb{N}$. Lấy lôgarit hai vế của (5), ta được:

$$\ln f(n+1)+2\ln f(n-1)=3\ln f(n),\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Ta cũng có: $\ln f(0)=0,\ \ln f(1)=\ln 2$.

Đặt $x_n=\ln f(n)$ $(n\in\mathbb{N})$, ta được phương trình sai phân tuyến tính:

$$x_0=0,\ x_1=\ln 2,\ x_{n+1}-3x_n+2x_{n-1}=0\ (n\in\mathbb{N}^*).$$

Giải phương trình sai phân này, ta được:

$$x_n=\left(2^n-1\right)\ln 2=\ln 2^{2^n-1}\Rightarrow f(n)=2^{2^n-1}.$$

Thử lại ta thấy hàm số này thỏa mãn các điều kiện của bài toán. *Kết luận*: $f(n)=2^{2^n-1},\ \forall n\in\mathbb{N}$.

Thí dụ 12. *Xác định hàm số* $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{R}$ *được cho bởi phương trình*

$$f(1)=\frac{9}{8};\ f(n+1)=nf(n)+n.n!,\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm số $f(n)$ thỏa mãn yêu cầu bài ra. Ta có nghiệm tổng quát của phương trình $f(n+1)-nf(n)=0$ là:

$$\widetilde{f}(n)=C.1.2.....(n-1)=C(n-1)!.$$

Ta sẽ tìm nghiệm riêng của phương trình đã cho dưới dạng $f^*(n)=g(n).(n-1)!$. Thay vào phương trình đã cho, ta được:

$$g(n+1).n!=ng(n).(n-1)!+n.n!$$

$$\Leftrightarrow \Delta g=g(n+1)-g(n)=n,\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Từ đây dễ có $g(n)=\dfrac{n(n-1)}{2}$, suy ra:

$$f^*(n)=\frac{1}{2}n(n-1)((n-1)!).$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là: $f(n)=C(n-1)!+\dfrac{1}{2}n(n-1)((n-1)!)$.

Thay vào điều kiện $f(1)=\dfrac{9}{8}$, ta được $C=\dfrac{9}{8}$.

Vậy $f(n)=\dfrac{9}{8}(n-1)!+\dfrac{1}{2}n(n-1)(n-1)!$.

Dễ thấy $f(n)$ xác định như trên thỏa mãn bài ra nên là hàm số cần tìm.

BÀI TẬP

1. Tìm x_n, biết rằng $x_1=a>0, x_{n+1}=g(n)x_n^k$, trong đó $g(n)>0$, với mọi $n\in\mathbb{N}^*$, $k\in\mathbb{R}^+$.

2. Tìm dãy số (x_n) thỏa mãn điều kiện $x_0=a,\ x_{n+1}=\dfrac{px_n+q}{rx_n+s},\ \forall n\in\mathbb{N}$, trong đó a,p,q,r,s là các hằng số thực.

3. (*VMO 1984*). Dãy số (u_n) được xác định bởi: $u_1=1,\ u_2=2,\ u_{n+1}=3u_n-u_{n-1}$, với $n=2, 3,...$ Đặt $v_n=\sum\limits_{1\le k\le n}\operatorname{arccot}u_k$. Hãy tìm giới hạn của v_n khi n dần tới vô cùng.

4. (*T8/284 TH&TT*). Xét dãy số (x_n) xác định bởi

$$\begin{cases}x_0=a\\ x_{n+1}=\dfrac{2^{x_n}\left(x_n\ln 2-1\right)+1}{2^{x_n}\ln 2-1}\end{cases},\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Xác định a để dãy có giới hạn hữu hạn khác 0.

5. (*Olympic 30/4, 1999*). Cho dãy số (a_n) được xác định bởi

$$a_0=1,\ a_1=2,\ a_{n+2}=4a_{n+1}-a_n,\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Tìm tất cả các giá trị của n để a_n-1 là một số chính phương.

6. Cho dãy (u_n) thỏa mãn điều kiện $0<u_1<1,\ u_{n+1}=\dfrac{u_n^2}{n^2}+u_n,\ \forall n\ge 1$. Chứng minh rằng dãy số (u_n) bị chặn.

7. Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1=\dfrac{1}{2},\ a_{n+1}=\dfrac{a_n^2}{1-a_n+a_n^2},\ \forall n\ge 1$. Chứng minh rằng $a_1+a_2+...+a_n<1,\ \forall n\ge 1$.

8. (*Đề nghị IMO 1992*). Cho $a, b>0$. Tìm các hàm số $f:[0;+\infty)\to[0;+\infty)$ thỏa mãn điều kiện:

$$f\left(f(x)\right)+af(x)=b(a+b)x,\ \forall x\in[0;+\infty).$$

SÁU MƯƠI NĂM VỚI TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Năm học 1964-1965 tôi học lớp 10 (tương đương với lớp 12 ngày nay) ở trường cấp 3 Lam Sơn, Thanh Hóa. Thời gian này tài liệu tham khảo rất hiếm. Khoảng đầu năm học, Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ ra số đầu tiên. Bọn trẻ yêu Toán chúng tôi may mắn là độc giả của Tạp chí từ số thứ nhất này. Tạp chí nhanh chóng thu hút và trở thành tài liệu quý với những học sinh yêu Toán. Chúng tôi truyền tay nhau để đọc, bàn luận về các bài viết và giải các bài trong mục *Đề ra kỳ này*. Từng bài toán là một thử thách để chúng tôi thi nhau vượt qua, rất hào hứng! Mỗi khi có tên sau một bài toán trong chuyên mục *Giải bài kỳ trước*, chúng tôi thích lắm. Sau này, mỗi khi xem lại các tờ Tạp chí cũ, thấy tên mình, những kỷ niệm đẹp về một thời học sinh trở lại. Thật thú vị!

Đầu tháng 4/1965, đội tuyển Toán của Thanh Hóa tập trung ở trường cấp 3 Hà Trung, Thanh Hóa để bồi dưỡng, chuẩn bị cho kỳ thi học sinh giỏi Toán miền Bắc. Cả thầy và trò đều mang những số báo Toán học và Tuổi trẻ đầu tiên làm tài liệu (lúc này mới có khoảng 5 số). Tiếc rằng lớp bồi dưỡng mới học được một buổi thì phải giải tán vì máy bay Mỹ oanh tạc cầu Hàm Rồng, cầu Đò Lèn. Chúng tôi về tự học và làm bài tập theo báo Toán học và Tuổi trẻ.

Tôi là một trong bảy người đoạt giải trong kỳ thi học sinh giỏi toán lớp 10 toàn miền Bắc niên khóa 1964-1965 (bảy học sinh đạt giải là *Nguyễn Đình Nam*, Trường Phổ thông Công nghiệp Hải Phòng; *Trần Trung Hiếu*, Trường Lê Hồng Phong, Nam Định; *Phan Văn Đồng, Phan Văn Ban*, Trường Trần Phú, Hà Tĩnh; *Nguyễn Hữu Nhị*, Trường Yên Sơ, Hà Bắc; *Nguyễn Anh Dũng*, Trường Lam Sơn, Thanh Hóa; *Lê Văn Hốt*, Trường Thị xã, Hưng Yên).

Do chiến tranh leo thang của Mỹ ở miền Bắc, năm 1965 không có kỳ thi tuyển sinh vào các trường đại học mà chỉ có xét tuyển. Vấn đề thành phần gia đình lúc ấy rất nặng nề. Tôi không được vào đại học. Năm tiếp theo tôi lại nộp hồ sơ xin học đại học nhưng kết quả từ ban tuyển sinh tỉnh vẫn là … im lặng!

Tháng 10/1966, theo gợi ý của một người thân, tôi ra Bộ Đại học để hỏi. Lúc này máy bay Mỹ bắn phá nhiều, tàu hỏa đi Hà Nội không có, các phương tiện khác hiếm hoi. Tôi phải đạp xe từ Thanh Hóa ra Hà Nội, hành trang mang theo là tờ Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ số 9, tháng 6/1965, trong đó có kết quả thi học sinh giỏi Toán lớp 10 miền Bắc, năm học 1964-1965. Nhờ đó các chú ở Bộ rất nhiệt tình, hướng dẫn tôi làm hồ sơ bổ sung và tôi được vào học khoa Toán, Đại học Sư phạm Hà Nội (tôi vào học muộn so với các bạn khác hai tháng). Nếu không có tờ Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ số 9 thì có lẽ cuộc đời tôi đã rẽ sang hướng khác xấu hơn rồi!

Ra trường, tôi giảng dạy tại Trường Đại học Sư phạm Việt Bắc (nay là Đại học Thái Nguyên). Từ năm 1979 cho đến khi nghỉ hưu, tôi là giáo viên chuyên Toán trường THPT chuyên Lam Sơn Thanh Hóa.

Những năm đầu dạy chuyên Toán, tài liệu bồi dưỡng học sinh giỏi rất ít. Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ vẫn là tài liệu chính và quý đối với các lớp chuyên Toán. Chúng tôi khai thác rất nhiều các bài toán hay, chuyên đề, bài viết của các tác giả *Nguyễn Cảnh Toàn, Hoàng Chúng, Nguyễn Đăng Phất, Phan Đức Chính,...*

Năm 1991 tôi may mắn có hai học sinh được vào đội tuyển Quốc gia dự thi Olimpic Toán học Quốc tế tổ chức tại Thụy Điển. Các thầy *Nguyễn Văn Mậu, Nguyễn Việt Hải* lo bồi dưỡng và dẫn đoàn dự thi. Hai học sinh của tôi: *Đỗ Ngọc Minh*, 38 điểm, Huy chương Bạc (điểm cao nhất đoàn Việt Nam, trong kỳ thi này đoàn của ta không có Huy chương Vàng); *Ngô Diên Hy*, Huy chương Đồng. *Đỗ Ngọc Minh* bây giờ là giáo sư ở trường Đại học Illinois, Mỹ đồng thời đảm nhận vị trí Phó Hiệu trưởng Trường Đại học VinUni. *Ngô Diên Hy* hiện là Phó Tổng Giám đốc Tập đoàn Bưu chính Viễn thông Việt Nam.

Những ngày đoàn dự thi Toán Quốc tế học bồi dưỡng (tại nhà khách 23 Lê Thánh Tông, Hà Nội) tôi được mời giảng dạy mấy buổi. Tôi thấy ở đầu giường của mỗi em đều có một tập báo Toán học và Tuổi trẻ khá dày.

Năm 2014 tôi được em *Đỗ Ngọc Minh* mời sang Mỹ. Lúc này các con của *Minh* đang học phổ thông, và đều giỏi Toán. Tôi đã tặng các cháu một số tạp chí Toán học và Tuổi trẻ. Các cháu rất thích món quà đặc biệt này.

Năm 1995 trường chuyên Lam Sơn có em *Cao Văn Hạnh* được vào đội tuyển Quốc gia dự thi Olympic Toán học Quốc tế tổ chức tại Toronto, Canada. Cả sáu em trong đoàn Việt Nam đều giành Huy chương. Kết quả toàn đoàn khá cao. *Cao Văn Hạnh* giành Huy chương Bạc. Các thầy *Nguyễn Văn Mậu, Nguyễn Việt Hải* dẫn đoàn dự thi. Tôi được tham gia cùng đoàn với tư cách là quan sát viên. Một điều rất thú vị là các em trong đoàn đã mang theo khá nhiều Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ đến Canada để xem và làm quà tặng, giao lưu với các bạn trong các đoàn khác. Những món quà này thật quý và ý nghĩa. Các em hiểu nhau bằng tiếng Anh và Toán học.

Là độc giả của Toán học và Tuổi trẻ từ số báo đầu tiên, sau này tôi còn là thành viên của Hội đồng Biên tập. Khi đã nghỉ hưu, tuy không lên lớp giảng dạy, tôi vẫn tham gia viết bài, chấm bài cho Tạp chí. Đây cũng là niềm vui, làm cho cuộc sống tuổi già có ý nghĩa hơn. Các bài viết của tôi chủ yếu là kinh nghiệm giải Toán phổ thông, mà tôi tích lũy qua quá trình dạy và làm Toán của mình. Từ năm 2000 đến 2014 tôi được mời tham gia chương trình ôn thi Đại học phát sóng thường xuyên trên VTV2. Chính các chuyên đề của Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ giúp tôi có nhiều bài giảng thiết thực và phong phú, cuốn hút học sinh phổ thông.

Suốt 60 năm, tôi thực sự yêu thích và gắn bó với Toán học và Tuổi trẻ.

Với tôi, yêu Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ cũng là tình yêu với Toán học và công việc của mình.

Hà Nội, tháng 4/2024.

NGUYỄN ANH DŨNG

PROBLEMS ... *(Tiếp theo trang 24)*

FOR HIGH SCHOOL

Problem Bài T6/563. Suppose that n is a positive integer which is less than 11 and p_1, p_2, p_3, p are prime numbers satisfying the following conditions

i) $p_1 + p_3^n$ is a prime number;

ii) $p_1 + p_2 = 3p$.

iii) $p_2 + p_3 = p_1^n(p_1 + p_3)$.

Compute the value of the expression

$$L = p_1 p_2 p_3^n + p - n.$$

Problem T7/563. Given real numbers x, y, z such that

$$(x-5)^2 + (y-3)^2 = 1 \text{ and } -2 \le z \le 2.$$

Find the maximum and minimum values of the expression $P = x^2 + y^2 + z^2 - 2yz$.

Problem T8/563. Given a triangle ABC with $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Let m_a, m_b, m_c be the lengths of the medians from the vertices A, B, C respectively. Show that

a) $\dfrac{a}{m_a} + \dfrac{b}{m_b} + \dfrac{c}{m_c} \ge 2\sqrt{3}$;

b) $\dfrac{m_a}{a} + \dfrac{m_b}{b} + \dfrac{m_c}{c} \ge \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Problem T9/563. Find m so that the following system has solution

$$\begin{cases} m\left(x^2 + \sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2} + 1\right) = xy \\ m\left(\sqrt[3]{x^8} + x^2 + \sqrt[3]{x^2} + 1\right) = (2y + 1 - m)\sqrt[3]{x^4} \end{cases}.$$

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/563. Given the sequence (u_n) determined as follow

$$u_0 = 1,\ u_{n+1} = \frac{u_n}{n^2 u_n + u_n^2 + 1}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Find $\lim\limits_{n \to +\infty} n^3 u_n$.

Problem T11/563. Find all functions $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfying

$$f(x)f(y) - xy = \frac{2}{3}f(x+y) + \frac{4}{3}(x+y+2), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Problem T12/563. Given a triangle ABC with the circumcircle (O) and the incircle (I). Suppose that (I) is tangent to BC at D. The perpendicular bisector of ID intersects (O) at U, V. Denote by K, L the reflection points of D in IU, IV respectively. Show that the circumcircle of AKL is tangent to the circle (O).

DR. NGUYEN PHU HOANG LAN
(University of Education, VNU, Hanoi)

SAI LẦM ... *(Tiếp theo trang 47)*

Bình phương hai vế, ta có:

$$4|z|^2 \ge |z|^4 - 10|z|^2 + 25$$

hay $7 - 2\sqrt{6} \le |z|^2 \le 7 + 2\sqrt{6}$. Từ đó suy ra:

$$\sqrt{6} - 1 \le |z| \le \sqrt{6} + 1.$$

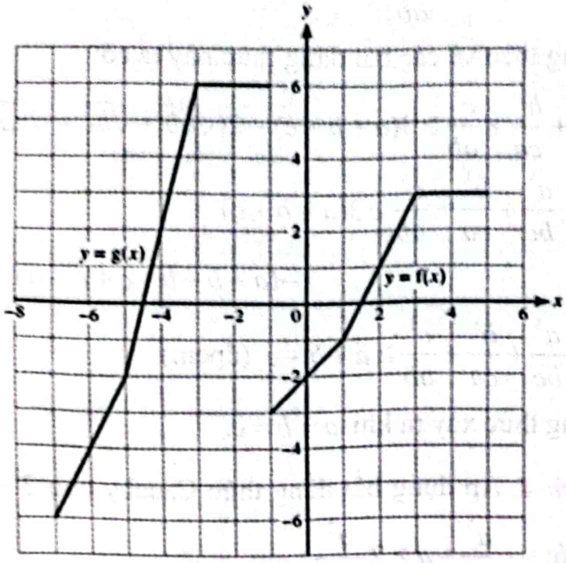
Như vậy, tập hợp các số phức z là hình vành khuyên, nằm trong đường tròn tâm (0,0) bán kính $\sqrt{6}+1$ và nằm ngoài đường tròn tâm (0,0) bán kính $\sqrt{6}-1$, kể cả biên của hai đường tròn.

Sau khi bạn *Hoa* hoàn thành lời giải, rất nhiều bạn tán thành và vỗ tay khen ngợi, về một lời giải ngắn gọn và hay. Bất chợt, thầy giáo đặt câu hỏi: ***"Lời giải của bạn Hoa đã chính xác hay chưa"***, làm cả lớp suy nghĩ và không biết giải quyết thế nào? Bạn nào có thể giúp được *Hoa* và lớp 12A với một lời giải chính xác!

TRẦN MINH HIỀN
(GV THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước)

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN
BÀI SỐ 104

PROBLEM. *The diagram shows graphs with equations $y = f(x)$ and $y = g(x)$. Describe fully a sequence of two transformations which transforms the graph of $y = f(x)$ to $y = g(x)$.*



Solution.

First, we can stretch the graph of $y = f(x)$ in y - direction with the factor 2.

Then, we translate the new graph with the vector $<-6; 0>$.

Remark: ***The exercise is selected from an AS-level math past paper.***

TỪ VỰNG

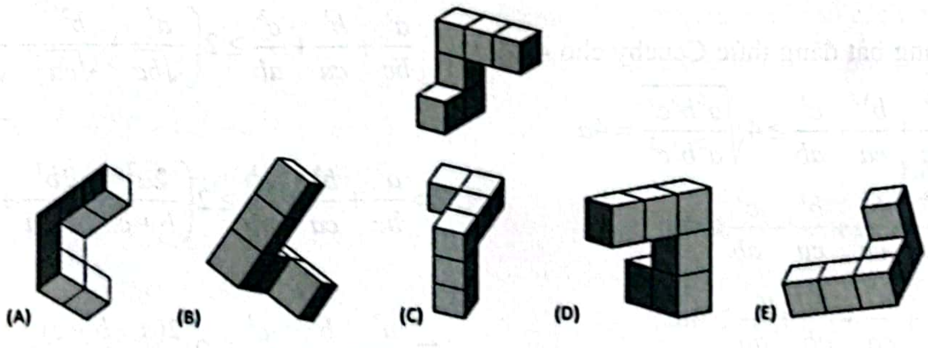
graph	: *đồ thị*
stretch	: *giãn*
stretch with factor 2	: *giãn hệ số 2*
translate	: *tịnh tiến*
vector	: *vectơ*

NGUYEN PHU HOANG LAN
(*University of Education, VNU, Hanoi*)

****

BÀI DỊCH SỐ 102

BÀI TOÁN. *Anne đã dán một số khối lập phương lại với nhau thành một hình khối. Khi cô ấy xoay hình khối đó theo các mặt khác nhau của nó để kiểm tra thì thu được một số hình bên dưới. Hình nào không phải là hình nhận được khi cô ấy xoay hình khối ?*



Lời giải. Ta có thể kiểm tra trực tiếp rằng *Anne* nhận được các hình *B*, *C*, *D*, *E* và không nhận được hình *A* khi xoay hình khối đã làm theo các mặt khác nhau. Do đó câu trả lời là *A*.

Lưu ý: Bài tập này được sưu tầm từ một đề thi Toán **IKMC** dành cho học sinh lớp 7 và lớp 8.

Nhận xét. Kì này bạn *Nguyễn Hùng Cường*, Xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định** có bài dịch tương đối tốt, gửi bài về Toà soạn sớm. Xin hoan nghênh bạn.

HỒ HẢI (*Hà Nội*)

NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN

BÀI TOÁN 83 (Olympic Canada 2002). *Cho các số dương a,b,c.. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\ge a+b+c \quad (*).$$

Lời giải. *Cách 1.* Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số, ta có:

$$\frac{a^3}{bc}+b+c\ge 3a \quad (1);$$

$$\frac{b^3}{ca}+c+a\ge 3b \quad (2);$$

$$\frac{c^3}{ab}+a+b\ge 3c \quad (3).$$

Từ (1), (2) và (3) ta có:

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}+2(a+b+c)\ge 3(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\ge a+b+c \text{ (đpcm).}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Cách 2. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 4 số,

ta có: $\frac{a^3}{bc}+\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\ge 4\sqrt[4]{\frac{a^6b^3c^3}{a^2b^3c^3}}=4a.$

Tương tự: $\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\ge 4b;$

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}+\frac{c^3}{ab}\ge 4a.$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức này ta có:

$$4\left(\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\right)\ge 4(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\ge a+b+c \text{ (đpcm).}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$

Cách 3. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số ta có:

$$\frac{a^3}{bc}+\sqrt{bc}+\sqrt{bc}\ge 3a.$$

Tương tự: $\frac{b^3}{ca}+\sqrt{ca}+\sqrt{ca}\ge 3b;$

$$\frac{c^3}{ab}+\sqrt{ab}+\sqrt{ab}\ge 3c.$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức này ta có:

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\ge 3(a+b+c)-2(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\ge 3(a+b+c) -(a+b+b+c+c+a)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\ge a+b+c \text{ (đpcm).}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Cách 4. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số

ta có: $\frac{a^3}{bc}+a\ge 2\frac{a^2}{\sqrt{bc}};$

$$\frac{b^3}{ca}+b\ge 2\frac{b^2}{\sqrt{ca}};$$

$$\frac{c^3}{ab}+c\ge 2\frac{c^2}{\sqrt{ab}}.$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức này lại ta có:

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\ge 2\left(\frac{a^2}{\sqrt{bc}}+\frac{b^2}{\sqrt{ca}}+\frac{c^2}{\sqrt{ab}}\right)-(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\ge 2\left(\frac{2a^2}{b+c}+\frac{2b^2}{c+a}+\frac{2c^2}{a+b}\right)-(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\ge 2.\frac{2(a+b+c)^2}{2(a+b+c)}-(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\ge a+b+c \text{ (đpcm).}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Cách 5. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số liên tiếp 2 lần ta có:

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}\ge 2\sqrt{\frac{a^3b^3}{abc^2}}=2\frac{bc}{c}.$$

Tương tự: $\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\ge 2.\frac{bc}{a}$;

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{c^3}{ab}\ge 2.\frac{ac}{b}.$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức này ta có:

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\ge\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}.$$

Do đó ta cần chứng minh:

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\ge a+b+c\ (**).$$

Lại áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số, ta có:

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}\ge 2\sqrt{\frac{ab.bc}{ca}}=2b.$$

Tương tự: $\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\ge 2c$;

$$\frac{ab}{c}+\frac{ca}{b}\ge 2a.$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức lại ta thấy (**) luôn đúng, suy ra điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Cách 6. Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\frac{a^4}{abc}+\frac{b^4}{abc}+\frac{c^4}{abc}\ge a+b+c$$

$$\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4\ge abc(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow (a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2 +2[(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-abc(a+b+c)]\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2+(ab-bc)^2 +(bc-ca)^2+(ca-ab)^2\ge 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Cách 7. Đặt ẩn phụ và biến đổi bất đẳng thức về dạng cơ bản.

Đặt $\frac{a}{bc}=x;\frac{b}{ca}=y;\frac{c}{ab}=z$ với $x,y,z>0$.

Bất đẳng thức được đưa về dạng:

$$\frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy}\ge\frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{zx}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+y^2+z^2}{xyz}\ge\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}{\sqrt{xyz}}$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2\ge\sqrt{xyz}(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}).$$

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức quen thuộc: $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$ liên tiếp, ta có:

$$x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$$
$$\ge\sqrt{xy}.\sqrt{yz}+\sqrt{yz}\sqrt{zx}+\sqrt{zx}\sqrt{xy}$$
$$\ge\sqrt{xyz}(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})$$

(đpcm). Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

MAI VĂN NĂM

(GV THCS Khánh Hồng, Yên Khánh, Ninh Bình)

Nhận xét. Kỳ này bạn *Hà Phương Anh*, 10CT, THPT chuyên Hùng Vương, TP. Việt Trì, **Phú Thọ**; *Nguyễn Văn Đức Thắng*, 9A, THCS Quỳnh Trang, TX. Hoàng Mai, **Nghệ An**; *Trương Quang An*, xã Nghĩa Thắng, huyện Tư Nghĩa, **Quảng Ngãi**; *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định**; *Trần Minh Hùng*, 10CT, THPT chuyên Bình Long, **Bình Phước**; *Nguyễn Gia Văn*, 10A1, *Nguyễn Phương Hoàng Minh*, 10E2, TH, THCS &THPT Lê Thánh Tông, quận Tân Phú, **TP. Hồ Chí Minh** cũng đóng góp một số cách giải tốt, tương tự với các cách giải ở trên. Xin hoan nghênh tất cả các bạn..

LÊ MAI *(Hà Nội)*

Mời các bạn gửi lời giải bài toán 85 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 30.6.2024.

BÀI TOÁN 85. *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2}{a^2+3ab+2b^2}+\frac{b^2}{b^2+3bc+2c^2}+\frac{c^2}{c^2+3ca+2a^2}\ge\frac{1}{2}.$$

ĐÀO VĂN NAM

(GV TH, THCS May Academy, Định Công, Hoàng Mai, Hà Nội)

BÀI TOÁN 91 (Putnam, 1940). *Hãy tìm tất cả bộ ba các số hữu tỷ (a, b, c) là những nghiệm của phương trình* $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ (1).

Lời giải. Do a, b, c là ba nghiệm của phương trình (1) nên theo định lý Viète ta có:

$$\begin{cases} a+b+c=-a & (2) \\ ab+bc+ca=b & (3). \\ abc=-c & (4) \end{cases}$$

Ta có: (4) $\Leftrightarrow c(ab+1)=0$.

• Nếu $c = 0$ thì (4) $\Leftrightarrow 0 = 0$ (luôn đúng) và hệ (2), (3) trở thành:

$$\begin{cases} a+b=-a \\ ab=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2a \\ a.(-2a)=-2a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=-2a \\ 2a.(a-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases} \vee \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases}.$$

Ta được hai bộ số hữu tỷ (a, b, c) là (0, 0, 0) và (1, −2, 0) thỏa mãn bài toán.

• Nếu $c \neq 0$ thì từ (4) ta có $ab=-1$. Từ (3) suy ra:

$$-1+bc+ca=b \quad (5).$$

Từ (2) ta có: $c=-b-2a$. Thay $c=-b-2a$ vào (5) ta được:

$$-1+b(-b-2a)+(-b-2a)a=b$$

$$\Leftrightarrow -1-b^2-2ab-ab-2a^2=b$$

$$\Leftrightarrow -1-b^2-2.(-1)-(-1)-2a^2=b$$

$$\Leftrightarrow 2a^2+b^2+b-2=0 \quad (6).$$

Từ $ab=-1$, suy ra: $b=-\frac{1}{a}$, thay vào (6) ta được:

$$2a^2+\left(-\frac{1}{a}\right)^2-\frac{1}{a}-2=0$$

$$\Leftrightarrow 2a^2+\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a}-2=0$$

$$\Leftrightarrow 2a^4-2a^2-a+1=0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)(2a^3+2a^2-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ 2a^3+2a^2-1 \end{array}\right..$$

- Xét $a = 1$, ta tìm được $b = -1$, $c = -1$. Bộ 3 số hữu tỷ $(a, b, c) = (1, -1, -1)$ thỏa mãn bài toán.

- Xét $2a^3+2a^2-1=0$ (7). Ta sẽ chứng minh PT(7) không có nghiệm hữu tỷ. Thật vậy, giả sử PT(7) có nghiệm hữu tỷ $a=\frac{m}{n}$ với $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0, (m,n)=1$. Suy ra:

$$\frac{2m^3}{n^3}+\frac{2m^2}{n^2}-1=0 \Leftrightarrow 2m^3+2m^2n=n^3.$$

Do $2m^3+2m^2n \,\vdots\, 2$ nên $n^3 \,\vdots\, 2 \Rightarrow n \,\vdots\, 2 \Rightarrow 2m^3 \,\vdots\, 4$

$m^3 \,\vdots\, 2 \Rightarrow m \,\vdots\, 2$. Điều này vô lý vì $(m, n) = 1$. Suy ra điều giả sử là sai, như vậy PT(7) không có nghiệm hữu tỷ.

Kết luận: Vậy các bộ ba số hữu tỷ (a, b, c) cần tìm là: (0, 0, 0), (1, −2, 0), (1, −1, −1).

Nhận xét. Hoan nghênh bạn *Đào Văn Nam*, GV TH, THCS May Academy, Định Công, Hoàng Mai, Hà Nội đã có lời giải đúng cho bài toán này.

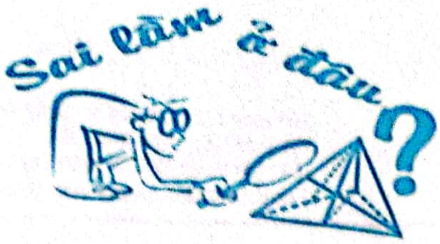
NHƯ HOÀNG

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 30.6.2024.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

BÀI TOÁN 93. *Cho a, b, c là các số nguyên phân biệt và P là đa thức với các hệ số nguyên. Chứng minh rằng không thể xảy ra đồng thời* $P(a) = b$, $P(b) = c$, $P(c) = a$.

KHÁNH HỮU (*Hà Nội*)



GIẢI ĐÁP: KẾT QUẢ ĐÃ ĐÚNG CHƯA?

(*Đề đăng trên TH&TT số 558, tháng 12 năm 2023*)

Phân tích sai lầm. Cả hai bạn *Khánh Linh* và *Đăng Vinh* đều sai lầm khi nhận định rằng $\frac{z}{z-4}$ là số thuần ảo khi và chỉ khi $x^2-4x+y^2=0$. Nếu $\frac{z}{z-4}$ là số thuần ảo thì $x^2-4x+y^2=0$, nhưng điều ngược lại không đúng.

Lời giải đúng. Gọi $z=x+iy$ với $x,y\in\mathbb{R}$ và i là đơn vị ảo. Khi đó $|z-3i|=5$ trở thành:

$$x^2+(y-3)^2=25 \quad (1).$$

Ta lại có:

$$\frac{z}{z-4}=\frac{x+iy}{x+iy-4}=\frac{(x+iy)(x-4-iy)}{(x-4+iy)(x-4-iy)}$$
$$=\frac{(x^2-4x+y^2)-4yi}{(x-4)^2+y^2}.$$

Số $\frac{z}{z-4}$ là số thuần ảo khi và chỉ khi

$$\begin{cases}x^2-4x+y^2=0 & (2)\\ (x-4)^2+y^2\neq 0 & (3)\end{cases}.$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}x^2+(y-3)^2=25\\ x^2-4x+y^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-3y=8\\ x^2-4x+y^2=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{2x-8}{3}\\ x^2-4x+\left(\dfrac{2x-8}{3}\right)^2=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{2x-8}{3}\\ 13x^2-68x+64=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{2x-8}{3}\\ \left[\begin{array}{l}x=4\\ x=\dfrac{16}{13}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=4\\ y=0\end{cases}\\ \begin{cases}x=\dfrac{16}{13}\\ y=-\dfrac{24}{13}\end{cases}\end{array}\right..$$

Đối chiếu với điều kiện (3), nghiệm $\begin{cases}x=\dfrac{16}{13}\\ y=-\dfrac{24}{13}\end{cases}$ thỏa mãn (3), còn nghiệm $\begin{cases}x=4\\ y=0\end{cases}$ không thỏa mãn (3).

Chứng tỏ có duy nhất số phức $z=\frac{16}{13}-\frac{24}{13}i$ thỏa mãn các yêu cầu của bài toán. Chọn đáp C.

Nhận xét. Hoan nghênh bạn *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, Bình Định đã phát hiện được sai lầm và đưa ra lời giải đúng.

KIHIVI

BÀI TOÁN SỐ PHỨC

Trong tiết ôn luyện đề chuẩn bị kỳ thi THPT quốc gia năm 2024 của lớp 12A, thầy giáo đưa ra một đề toán, phát triển của đề minh họa môn Toán năm 2023 của Bộ Giáo dục và Đào tạo, cụ thể như sau:

Đề bài. *Tìm tập hợp số phức z thỏa mãn điều kiện*

$$|z^2-3-4i|=2|z|.$$

Vì bài tập này đã quen thuộc, rất nhiều học sinh giơ tay xung phong lên giải, thầy giáo chọn bạn *Trang*, lớp trưởng của lớp và cũng giỏi nhất lớp lên bảng trình bày lời giải. Dưới đây là lời giải của bạn *Trang*.

Lời giải của bạn Trang:

Sử dụng tính chất $|A-B|\geq ||A|-|B||$, ta có:

$$2|z|=|z^2-(3+4i)|\geq ||z|^2-|3+4i||=||z|^2-5|.$$

(*Xem tiếp trang 42*)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 563 (5.2024)
Tòa soạn : 187B, Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607,
ĐT Phát hành: 024.35142649, 024.35682701
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TRONG SỐ NÀY

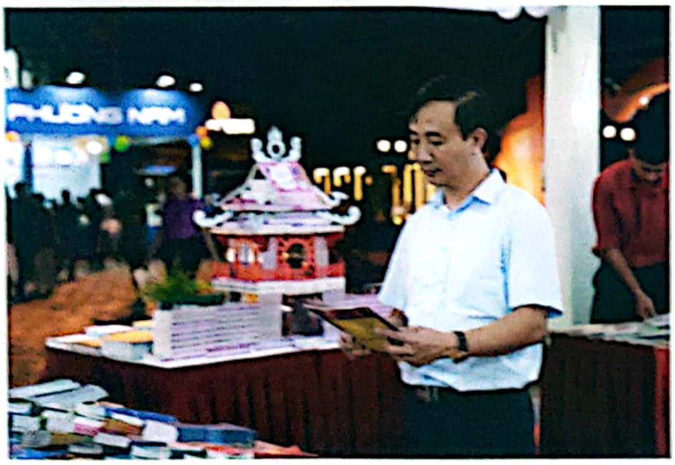
Biên tập: LÊ MAI, NHƯ HOÀNG
Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG
Trị sự, phát hành: HOÀNG THỊ KIM PHƯỢNG, TRẦN THỊ MINH HIỀN
Thiết kế, chế bản: MINH HÒA

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM
THAM GIA HỘI SÁCH TẠI VĂN MIẾU - QUỐC TỬ GIÁM

Ngày 17/4/2024, tại Văn Miếu - Quốc Tử Giám, Hà Nội, Bộ Thông tin và Truyền thông phối hợp Ban Tuyên giáo Trung ương, Bộ Văn hóa, Thể thao và Du lịch, Uỷ ban Nhân dân thành phố Hà Nội tổ chức Lễ khai mạc ***Ngày Sách và Văn hóa đọc Việt Nam*** lần thứ Ba năm 2024.

Gian trưng bày sách của NXBGDVN

Sự kiện được tổ chức nhằm phát huy những giá trị truyền thống tốt đẹp của dân tộc, nhận thức rõ vai trò, tầm quan trọng của sách và việc đọc sách đối với sự phát triển của đời sống xã hội.



Ông Nguyễn Chí Bình - Phó Tổng Giám đốc NXBGDVN tại gian trưng bày sách

Theo thông tin từ Ban tổ chức, *Ngày Sách và Văn hóa đọc Việt Nam* lần này thu hút sự tham gia của gần 60 đơn vị xuất bản, phát hành sách trên cả nước, diễn ra từ ngày 17/4/2024 đến hết ngày 21/4/2024 tại Hồ Văn thuộc quần thể di tích Văn Miếu - Quốc Tử Giám.

Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam tham gia *Ngày Sách và Văn hóa đọc Việt Nam* lần thứ ba với gian trưng bày hơn 1000 đầu sách như sách giáo khoa, sách mầm non, sách tham khảo...

Trung tâm Sách và Thiết bị Giáo dục ADCBook (đơn vị thuộc NXBGDVN) cũng có mặt tại Hội sách với 02 gian hàng D10-D11

Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam đã nhiều năm liền là đơn vị tham gia tích cực trong các hoạt động nhằm phát triển văn hoá đọc. Tại gian hàng A5 của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam đã triển khai chương trình ưu đãi lên tới 50% với rất nhiều đầu sách và hàng nghìn quà tặng hấp dẫn dành cho khách hàng có hóa đơn từ 99 000 đồng... trong suốt thời gian diễn ra Hội sách.

BAN TRUYỀN THÔNG
(Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam)

THƯ NGỎ

Bạn đọc thân mến!

Trong 60 năm qua, Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ không ngừng phát triển và đã trở thành người bạn thân thiết của nhiều thế hệ học sinh, giáo viên và bạn đọc yêu toán trên cả nước. Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ đã nhận nhiều Giấy khen, Huân huy chương và những phần thưởng cao quý khác mà Đảng và Nhà nước trao tặng. Điều này có được là nhờ công sức của các nhà toán học, các nhà sư phạm, các ủy viên hội đồng biên tập, các cộng tác viên và bạn đọc yêu toán trên cả nước. Thay mặt Ban biên tập, chúng tôi xin cảm ơn bạn đọc gần xa, các nhà khoa học và các cộng tác viên về những đóng góp to lớn đó.

Để chào mừng 60 năm thành lập và phát triển Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, từ tháng 4.2024, Ban biên tập sẽ mở chuyên mục: ***Những hồi ức, những kỷ niệm về Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ***. Nội dung các bài trong chuyên mục này sẽ viết về những hồi ức, những kỷ niệm, gắn bó của bạn đọc với Toán học và Tuổi trẻ; những ảnh hưởng, đóng góp của Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ đối với phong trào học toán, giải toán,... trên toàn quốc.

Bài viết có thể viết trên giấy hoặc đánh máy vi tính (nên bằng chương trình soạn thảo văn bản word). Trên bài viết cần ghi rõ: Họ tên, địa chỉ, số điện thoại. Bài viết không quá 4 trang đánh máy.

Bài viết có thể gửi về Tòa soạn:

- Gửi file word theo địa chỉ email: *toanhoctuoitrevietnam@gmail.com*
- Gửi bài theo đường Bưu điện. Phong bì có dán tem, gửi về địa chỉ: *Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, 187B Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội.*
- Hoặc đến Toà soạn Tạp chí gửi trực tiếp.

Ban biên tập mong muốn nhận được các bài viết từ bạn đọc. Trân trọng cảm ơn!

TH&TT

CUỘC THI VIẾT CHUYÊN ĐỀ TOÁN CHÀO MỪNG 60 NĂM TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Để chào mừng 60 năm thành lập và phát triển Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, Ban biên tập tổ chức cuộc thi viết chuyên đề Toán cho bậc THCS và THPT.

- **Đối tượng dự thi:** Giáo viên đã hoặc đang dạy ở bậc THCS, THPT, Giảng viên, Sinh viên ở các trường Đại học, Cao đẳng và bạn đọc yêu thích Toán.
- **Nội dung bài dự thi:** Là các chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi toán; các chuyên đề ôn tập, ôn thi cuối cấp; những tìm tòi, sáng tạo trong việc dạy học Toán (bậc THCS, THPT).
- **Thể lệ cuộc thi:** Mỗi người tham gia cuộc thi được gửi không quá 3 bài dự thi khác nhau. Các bài dự thi có thể là các sáng kiến kinh nghiệm đã đăng ký, hoặc đạt giải ở Trường, Phòng, Sở,... nhưng chưa từng được xuất bản thành sách, báo, tạp chí và cũng chưa tham gia cuộc thi nào khác.

Kết quả cuộc thi sẽ được công bố trên TH&TT tháng 11 năm 2024 (Số 569). Các bài hay có thể được chọn đăng trên Tạp chí hoặc in thành sách. Các tác giả được hưởng nhuận bút theo quy định của Tạp chí. Bài viết tham dự cuộc thi thuộc bản quyền của TH&TT.

- **Thời hạn gửi bài dự thi:** Trước ngày 15/10/2024.
- **Quy cách bài dự thi:** Bài dự thi được đánh máy vi tính, nên dùng chương trình soạn thảo văn bản word (có file). Trên mỗi bài dự thi ghi rõ: Họ và tên, địa chỉ Trường, xã (phường), huyện (quận), tỉnh (thành phố), số điện thoại. Bài dự thi không quá 15 trang đánh máy. Trên cùng của trang 1 mỗi bài dự thi ghi rõ:

Bài dự thi viết chuyên đề Toán chào mừng 60 năm TH&TT.

- **Cách gửi bài dự thi:** Bài dự thi gửi về Tòa soạn TH&TT bằng cách:

- Gửi file word theo địa chỉ email:
toanhoctuoitrevietnam@gmail.com
- Gửi bài theo đường Bưu điện. Phong bì có dán tem, gửi về địa chỉ:
Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ
187B Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội.
- Hoặc đến Toà soạn Tạp chí gửi trực tiếp.

- **Giải thưởng:** Những người đoạt giải sẽ được nhận Giấy chứng nhận và Tặng phẩm của Tạp chí.

TH&TT

Giấy phép XB số 534/GP-BTTTT cấp ngày 19.11.2020; Mã số: 8BT5M24
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 5 năm 2024
Giá: 18.000 đồng
Mười tám nghìn đồng