TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

Tạp chí Toán học & Văn học trong nhà trường

Số 564
Tháng 6 - 2024
ISSN: 2734-9284

VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 61 - XUẤT BẢN TỪ 1964 - DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT Biên tập: (024) 35121607; ĐT Phát hành: (024) 35142649;
ĐT-Fax Hành chính: (024) 35121606 - Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com - Website: viennghiencuusachgd.com

Nhà Toán học Euclid (Hy Lạp)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

BẢNG GIÁ SÁCH GIÁO KHOA LỚP 12

ÁP DỤNG CHO NĂM HỌC 2024-2025

Chuẩn mực
Khoa học
Hiện đại

BỘ SÁCH KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

TT	Tên sách	Giá bìa (đồng/cuốn)
1	Ngữ văn 12, tập một	22,000
2	Ngữ văn 12, tập hai	18,000
3	Toán 12, tập một	14,000
4	Toán 12, tập hai	13,000
5	Giáo dục thể chất 12 - Bóng đá	15,000
6	Giáo dục thể chất 12 - Bóng chuyền	11,000
7	Giáo dục thể chất 12 - Cầu lông	12,000
8	Giáo dục thể chất 12 - Bóng rổ	13,000
9	Hoạt động trải nghiệm, hướng nghiệp 12	13,000
10	Lịch sử 12	15,000
11	Địa lí 12	23,000
12	Giáo dục Kinh tế và Pháp luật 12	19,000
13	Vật lí 12	17,000
14	Hóa học 12	19,000
15	Sinh học 12	26,000
16	Công nghệ 12 - Lâm nghiệp - Thuỷ sản	20,000
17	Công nghệ 12 - Công nghệ Điện - Điện tử	20,000
18	Tin học 12 - Định hướng Khoa học máy tính	22,000
19	Tin học 12 - Định hướng Tin học ứng dụng	21,000
20	Âm nhạc 12	13,000
21	Mĩ thuật 12 - Đồ hoạ (tranh in)	6,000
22	Mĩ thuật 12 - Hội hoạ	6,000
23	Mĩ thuật 12 - Thiết kế công nghiệp	6,000
24	Mĩ thuật 12 - Thiết kế mĩ thuật đa phương tiện	6,000
25	Mĩ thuật 12 - Thiết kế mĩ thuật sân khấu, điện ảnh	6,000
26	Mĩ thuật 12 - Thiết kế thời trang	6,000
27	Mĩ thuật 12 - Thiết kế đồ hoạ	6,000
28	Mĩ thuật 12 - Lí luận và lịch sử mĩ thuật	6,000
29	Mĩ thuật 12 - Điêu khắc	6,000
30	Mĩ thuật 12 - Kiến trúc	6,000
31	Giáo dục Quốc phòng và An ninh 12	15,000
32	Chuyên đề học tập Ngữ văn 12	13,000
33	Chuyên đề học tập Toán 12	10,000
34	Chuyên đề học tập Vật lí 12	10,000
35	Chuyên đề học tập Hóa học 12	8,000
36	Chuyên đề học tập Sinh học 12	11,000
37	Chuyên đề học tập Lịch sử 12	8,000
38	Chuyên đề học tập Địa lí 12	9,000
39	Chuyên đề học tập Giáo dục Kinh tế và Pháp luật 12	8,000
40	Chuyên đề học tập Tin học 12 - Định hướng Khoa học máy tính	16,000
41	Chuyên đề học tập Tin học 12 - Định hướng Tin học ứng dụng	18,000
42	Chuyên đề học tập Công nghệ 12 - Công nghệ Lâm nghiệp - Thủy sản	9,000
43	Chuyên đề học tập Công nghệ 12 - Công nghệ Điện - Điện tử	9,000
44	Chuyên đề học tập Âm nhạc 12	8,000
45	Chuyên đề học tập Mĩ thuật 12	11,000

BỘ SÁCH CHÂN TRỜI SÁNG TẠO

TT	Tên sách	Giá bìa (đồng/cuốn)
1	Ngữ văn 12, tập một	23,000
2	Ngữ văn 12, tập hai	19,000
3	Toán 12, tập một	14,000
4	Toán 12, tập hai	14,000
5	Vật lí 12	18,000
6	Hóa học 12	17,000
7	Sinh học 12	26,000
8	Lịch sử 12	16,000
9	Địa lí 12	24,000
10	Giáo dục Kinh tế và Pháp luật 12	19,000
11	Tin học 12 - Định hướng Khoa học máy tính	27,000
12	Tin học 12 - Định hướng Tin học ứng dụng	27,000
13	Âm nhạc 12	22,000
14	Hoạt động trải nghiệm, hướng nghiệp 12 (bản 1)	15,000
15	Hoạt động trải nghiệm, hướng nghiệp 12 (bản 2)	13,000
16	Giáo dục Quốc phòng và An ninh 12	15,000
17	Chuyên đề học tập Ngữ văn 12	14,000
18	Chuyên đề học tập Toán 12	11,000
19	Chuyên đề học tập Vật lí 12	10,000
20	Chuyên đề học tập Hóa học 12	8,000
21	Chuyên đề học tập Sinh học 12	11,000
22	Chuyên đề học tập Lịch sử 12	8,000
23	Chuyên đề học tập Địa lí 12	10,000
24	Chuyên đề học tập Giáo dục Kinh tế và Pháp luật 12	8,000
25	Chuyên đề học tập Tin học 12 - Định hướng Khoa học máy tính	15,000
26	Chuyên đề học tập Tin học 12 - Định hướng Tin học ứng dụng	19,000
27	Chuyên đề học tập Âm nhạc 12	9,000

SÁCH GIÁO KHOA TIẾNG ANH

Bộ sách hợp tác xuất bản với Pearson Education

TT	Tên sách	Giá bìa (đồng/cuốn)
1	Tiếng Anh 12 - Global Success	70,000

Bộ sách hợp tác xuất bản với Oxford University Press

TT	Tên sách	Giá bìa (đồng/cuốn)
1	Tiếng Anh 12 - Friends Global	99,000

Phục vụ năm học 2024-2025, NXBGDVN áp dụng mức giá bìa theo

DÀNH CHO TRUNG HỌC CƠ SỞ

PHÁT TRIỂN CÁC BÀI TOÁN TỪ MỘT BẤT ĐẲNG THỨC QUEN THUỘC

TRẦN ANH TUẤN
(GV THCS Cẩm Sơn, Huyện Anh Sơn, Nghệ An)

Trước tiên ta nhắc lại một bất đẳng thức quen thuộc:

Với mọi số x, y dương thì ta có bất đẳng thức:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}\quad (*).$$

Chứng minh. ***Cách 1.*** *Biến đổi tương đương*

Với $x, y>0$ ta có:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$$

$$\Leftrightarrow\frac{x+y}{xy}\ge\frac{4}{x+y}\Leftrightarrow(x+y)^2\ge 4xy$$

$$\Leftrightarrow(x-y)^2\ge 0 \text{ luôn đúng.}$$

Cách 2. *Xuất phát từ một khẳng định đúng*

Từ $(x-y)^2\ge 0$ suy ra: $x^2+y^2\ge 2xy$

$$\Rightarrow(x+y)^2\ge 4xy\Rightarrow\frac{x+y}{xy}\ge\frac{4}{x+y}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y} \text{ với } x, y>0 \text{ (đpcm).}$$

Sau đây, là những ví dụ điển hình về việc sử dụng BĐT(*) và phối hợp một số BĐT khác để đưa ra những kết quả tốt, cần thiết cho việc bồi dưỡng học sinh giỏi các cấp.

Bài 1. *Cho $a, b>0$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{4a^2+4b^2}+\frac{1}{8ab}\ge\frac{1}{(a+b)^2}.$$

Hướng dẫn. Vận dụng BĐT phụ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$ (với $x, y>0$) ta có: Với $a, b>0$ thì

$$\frac{1}{4a^2+4b^2}+\frac{1}{8ab}\ge\frac{4}{4a^2+4b^2+8ab}$$

$$=\frac{4}{4\left(a^2+2ab+b^2\right)}$$

$$=\frac{1}{(a+b)^2} \text{ (đpcm).}$$

Nếu sử dụng BĐT phụ cho 3 biến $a, b, c>0$ ta có bài toán mới sau:

Bài 2. *Cho $a, b, c>0$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 2\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right).$$

Hướng dẫn. Vận dụng BĐT phụ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$ với $x, y>0$ ta có:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b};\ \frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{4}{b+c};\ \frac{1}{c}+\frac{1}{a}\ge\frac{4}{c+a}.$$

Cộng theo vế các BĐT trên ta có:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 2\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right) \text{(đpcm).}$$

Cũng với giả thiết như bài toán 2 nhưng chúng ta có một kết quả mạnh hơn như bài toán sau:

Bài 3. *Cho $a, b, c>0$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{4}{2a+b+c}+\frac{4}{a+2b+c}+\frac{4}{a+b+2c}.$$

Hướng dẫn. Ta có:

$$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)$$

$$\ge\frac{4}{a+b}+\frac{4}{a+c}=4\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}\right)$$

$$\geq 4.\frac{4}{a+b+a+c}=\frac{16}{2a+b+c}.$$

Chứng minh tương tự được:

$$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{16}{a+2b+c};$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{2}{c}\geq\frac{16}{a+b+2c}.$$

Cộng vế theo vế các BĐT trên ta có:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{4}{2a+b+c}+\frac{4}{a+2b+c}+\frac{4}{a+b+2c}.$$

Bài 4. *Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geq 2\left(\frac{1}{2a+b+c}+\frac{1}{a+2b+c}+\frac{1}{a+b+2c}\right).$$

Hướng dẫn. Vận dụng BĐT(*) ta được:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}\geq\frac{4}{a+2b+c};$$

$$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geq\frac{4}{a+b+2c};$$

$$\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\geq\frac{4}{2a+b+c}.$$

Cộng theo vế các BĐT trên ta được:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geq 2\left(\frac{1}{2a+b+c}+\frac{1}{a+2b+c}+\frac{1}{a+b+2c}\right) \text{ (đpcm).}$$

Nếu ta thay đổi các thông tin ở mẫu của bài 2 và tổng quát hơn một chút ta lại được các bài toán mới có cách giải tương tự như sau.

Bài 5. *Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác. Chứng minh*

$$\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{a-b+c}+\frac{1}{-a+b+c}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

Dấu "=" xảy ra khi nào?

Hướng dẫn. Với a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác thì

$$a+b-c>0;\ a-b+c>0;\ -a+b+c>0.$$

Vận dụng BĐT(*) ta có:

$$\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{a-b+c}\geq\frac{4}{a+b-c+a-b+c}=\frac{4}{2a}=\frac{2}{a}.$$

Chứng minh tương tự:

$$\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{-a+b+c}\geq\frac{2}{b};$$

$$\frac{1}{a-b+c}+\frac{1}{-a+b+c}\geq\frac{2}{c}.$$

Cộng vế theo vế các BĐT trên ta được:

$$\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{a-b+c}+\frac{1}{-a+b+c}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Đặc biệt để sử dụng BĐT(*) nhiều lúc chúng ta phải biến đổi các dữ kiện của bài toán sau đó đưa bài toán từ giả thiết lạ về giả thiết quen thuộc hơn để sử dụng như các bài toán sau:

Bài 6. *Cho $a, b, c, d > 0$. Chứng minh rằng*

$$A=\frac{a+c}{a+b}+\frac{b+d}{b+c}+\frac{c+a}{c+d}+\frac{d+b}{d+a}\geq 4.$$

Hướng dẫn. Ta có:

$$A=\frac{a+c}{a+b}+\frac{b+d}{b+c}+\frac{c+a}{c+d}+\frac{d+b}{d+a}$$

$$=\left(\frac{a+c}{a+b}+\frac{c+a}{c+d}\right)+\left(\frac{b+d}{b+c}+\frac{d+b}{d+a}\right)$$

$$=(a+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c+d}\right)+(b+d)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{d+a}\right) \text{ (1).}$$

Mặt khác, vì $a, b, c, d > 0$ nên $a+b>0;\ c+d>0$.

Theo BĐT(*) ta có:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c+d}\geq\frac{4}{a+b+c+d}.$$

Tương tự: $\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{d+a}\geq\dfrac{4}{a+b+c+d}.$

Từ (1) ta được:

$$A\geq(a+c).\frac{4}{a+b+c+d}+(b+d).\frac{4}{a+b+c+d}$$

$$=\frac{4(a+b+c+d)}{a+b+c+d}=4 \text{ (đpcm).}$$

Bài 7. *Cho a, b > 0 và a + b = 1. Chứng minh rằng:*

$$A=\frac{a^2}{a+1}+\frac{b^2}{b+1}\ge\frac{1}{3}.$$

Hướng dẫn. Biến đổi biểu thức A thành

$$\frac{a^2}{a+1}+\frac{b^2}{b+1}=\frac{a^2-1+1}{a+1}+\frac{b^2-1+1}{b+1}$$
$$=a-1+\frac{1}{a+1}+b-1+\frac{1}{b+1}$$
$$=(a+b-2)+\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}.$$

Sử dụng BĐT(*) ta có:

$$A\ge(1-2)+\frac{4}{a+b+2}=-1+\frac{4}{3}=\frac{1}{3} \text{ (đpcm).}$$

Bài 8. *Chứng minh rằng với a, b > 0 thỏa mãn $a+b=1$ thì $\frac{1}{ab}+\frac{1}{a^2+b^2}\ge 6$.*

Hướng dẫn. Biến đổi

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{a^2+b^2}=\frac{1}{2ab}+\left(\frac{1}{2ab}+\frac{1}{a^2+b^2}\right)$$

rồi sử dụng các BĐT phụ $(x+y)^2\ge 4xy$ và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$ ta được:

$$\frac{1}{2ab}+\left(\frac{1}{2ab}+\frac{1}{a^2+b^2}\right)\ge\frac{2}{(a+b)^2}+\frac{4}{(a+b)^2}$$
$$=\frac{6}{(a+b)^2}=6 \text{ (đpcm).}$$

Bài 9. *Cho a, b là các số thực thỏa mãn $a+b<ab$. Chứng minh rằng $a+b>4$.*

Hướng dẫn. Biến đổi và vận dụng BĐT phụ:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}.$$

Ta có:

$$a+b<ab\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<1\Rightarrow 1>\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$$

$\Rightarrow a+b>4$ (đpcm)

Từ BĐT(*): $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$ chúng ta có thể tổng quát hoá và mở rộng thành các BĐT mới để sử dụng rộng rãi và giải được nhiều bài toán hay hơn như sau:

Với $a_i>0$, n là số tự nhiên, $n>1$ ta có:

+) $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}\ge\frac{3^2}{a_1+a_2+a_3}$ (1).

+) $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}\ge\frac{4^2}{a_1+a_2+a_3+a_4}$.

....

+) $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n}\ge\frac{n^2}{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}$.

Vận dụng BĐT(1) ta có bài toán mới hay và khó sau:

Bài 10. *Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{2b+c}+\frac{1}{2c+a}\ge\frac{3}{a+b+c}.$$

Hướng dẫn. Với $a, b, c>0$ ta có:

$$2a+b>0;\ 2b+c>0;\ 2c+a>0.$$

Áp dụng BĐT(1) ta được:

$$\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{2b+c}+\frac{1}{2c+a}\ge\frac{9}{2a+b+2b+c+2c+a}$$
$$=\frac{9}{3(a+b+c)}=\frac{3}{a+b+c} \text{ (đpcm).}$$

Bài 11. *Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{2a+b+c}+\frac{1}{a+2b+c}+\frac{1}{a+b+2c}\ge\frac{9}{4(a+b+c)}.$$

Hướng dẫn. Với $a, b, c>0$ ta có:

$$2a+b+c>0;\ a+2b+c>0;\ a+b+2c>0.$$

Áp dụng BĐT(1) ta được:

$$\frac{1}{2a+b+c}+\frac{1}{a+2b+c}+\frac{1}{a+b+2c}$$

$$\geq \frac{9}{2a+b+c+a+2b+c+a+b+2c}$$
$$=\frac{9}{4(a+b+c)}.$$

Bài 12. *Cho x thoả mãn* $\frac{2}{3}<x<\frac{13}{2}$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{3x-2}-\frac{1}{x-10}+\frac{1}{13-2x}\geq \frac{3}{7}.$$

Hướng dẫn. Vì $\frac{2}{3}<x<\frac{13}{2}$ suy ra:

$$3x-2>0;\ 10-x>0;\ 13-2x>0.$$

Vận dụng BĐT(1) ta được:

$$\frac{1}{3x-2}-\frac{1}{x-10}+\frac{1}{13-2x}=\frac{1}{3x-2}+\frac{1}{10-x}+\frac{1}{13-2x}$$
$$\geq \frac{9}{3x-2+10-x+13-2x}$$
$$=\frac{9}{21}=\frac{3}{7}.$$

Bài 13. *Cho a, b, c > 0 và a + b + c = 1. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ac}+\frac{1}{c^2+2ab}\geq 9.$$

Hướng dẫn. Vì $a, b, c>0$ nên

$$a^2+2bc>0;\ b^2+2ac>0;\ c^2+2ab>0.$$

Áp dụng BĐT(1) ta có:

$$\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ac}+\frac{1}{c^2+2ab}$$
$$\geq \frac{9}{a^2+2bc+b^2+2ac+c^2+2ab}$$
$$=\frac{9}{(a+b+c)^2}=9\ (\text{vì } a+b+c=1).$$

Bài 14. *Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 3\left(\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{2b+c}+\frac{1}{2c+a}\right).$$

Hướng dẫn. Vì $a, b, c>0$. Theo BĐT(1) ta có:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq \frac{9}{a+a+b}=\frac{9}{2a+b}\Rightarrow \frac{2}{a}+\frac{1}{b}\geq \frac{9}{2a+b}.$$

Chứng minh tương tự:

$$\frac{2}{b}+\frac{1}{c}\geq \frac{9}{2b+c};\ \frac{2}{c}+\frac{1}{a}\geq \frac{9}{2c+a}.$$

Cộng theo vế các BĐT trên ta được:

$$3.\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9\left(\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{2b+c}+\frac{1}{2c+a}\right)$$
$$\Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 3.\left(\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{2b+c}+\frac{1}{2c+a}\right).$$

Bài 15. *Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq \frac{3}{2}.$$

Đối với bài toán này mà vận dụng BĐT (*) thì dài dòng hơn nhiều nhưng khi sử dụng BĐT(1) thì cách giải bài toán trở nên gọn nhẹ hơn.

Hướng dẫn. Vì $a, b, c>0$ nên

$$a+b>0;\ b+c>0;\ c+a>0.$$

Theo BĐT phụ (1) ta có:

$$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\geq \frac{9}{b+c+c+a+a+b}$$
$$=\frac{9}{2(a+b+c)}$$
$$\Rightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\geq \frac{9}{2}$$
$$\Rightarrow \frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}+\frac{a+b+c}{a+b}\geq \frac{9}{2}$$
$$\Rightarrow 1+\frac{a}{b+c}+1+\frac{b}{c+a}+1+\frac{c}{a+b}\geq \frac{9}{2}$$
$$\Rightarrow \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq \frac{3}{2}\ (\text{đpcm}).$$

Bài 16 (Trích đề thi HSG cấp tỉnh lớp 9 tỉnh Nghệ An năm học 2010 - 2011).

Cho $x>0,\ y>0,\ z>0$ *và* $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=4$. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\le 1.$$

Hướng dẫn. Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$ (với $x,y>0$) ta có:

$$\frac{1}{2x+y+z}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{y+z}\right);$$

$$\frac{1}{y+z}\le\frac{1}{4y}+\frac{1}{4z}.$$

Suy ra $\frac{1}{2x+y+z}\le\frac{1}{4}.\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{4y}+\frac{1}{4z}\right).$

Chứng minh tương tự:

$$\frac{1}{x+2y+z}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{4z}\right);$$

$$\frac{1}{x+y+2z}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4x}+\frac{1}{4y}+\frac{1}{2z}\right).$$

Cộng các BĐT trên theo vế ta được:

$$\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\le 1.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=\frac{3}{4}.$

Nếu ta biến đổi BĐT $(x+y)^2\ge 4xy$ về dạng $\frac{1}{xy}\ge\frac{4}{(x+y)^2}$ (**) với $x,y>0$ thì vận dụng BĐT này chúng ta có thể giải được một số bài toán BĐT hay và khó sau:

Bài 17. *Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{(2a+b)(2c+b)}+\frac{1}{(2c+b)(2c+a)}+\frac{1}{(2c+b)(2c+a)}\ge\frac{3}{(a+b+c)^2}.$$

Hướng dẫn. Vì a, b, $c>0$ nên $2a+b>0$; $2c+b>0$. Theo BĐT(**) ta có:

$$\frac{1}{(2a+b)(2c+b)}\ge\frac{4}{(2a+b+2c+b)^2}=\frac{4}{4(a+b+c)^2}=\frac{1}{(a+b+c)^2}.$$

Chứng minh tương tự ta được:

$$\frac{1}{(2c+b)(2c+a)}\ge\frac{1}{(a+b+c)^2};$$

$$\frac{1}{(2c+b)(2c+a)}\ge\frac{1}{(a+b+c)^2}.$$

Cộng theo vế các BĐT trên ta có:

$$\frac{1}{(2a+b)(2c+b)}+\frac{1}{(2c+b)(2c+a)}+\frac{1}{(2c+b)(2c+a)}\ge\frac{3}{(a+b+c)^2}.$$

Bài 18. *Cho a, b, c, d > 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{a+c}{(a+b)(c+d)}+\frac{b+d}{(a+d)(b+c)}\ge\frac{4}{a+b+c+d}.$$

Hướng dẫn. Vì a, b, c, $d>0$ suy ra:

$$a+c>0;\ a+b>0;\ c+d>0.$$

Áp dụng BĐT(**) ta có:

$$\frac{a+c}{(a+b)(c+d)}\ge(a+c).\frac{4}{(a+b+c+d)^2};$$

$$\frac{b+d}{(a+d)(b+c)}\ge(b+d).\frac{4}{(a+b+c+d)^2}.$$

Cộng theo vế các BĐT trên ta có:

$$\frac{a+c}{(a+b)(c+d)}+\frac{b+d}{(a+d)(b+c)}\ge\frac{4(a+b+c+d)}{(a+b+c+d)^2}=\frac{4}{a+b+c+d}\ \text{(đpcm).}$$

Bài 19. *Cho a, b, c, d > 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{3}{a+b}+\frac{2}{c+d}+\frac{a+b}{(a+c)(b+d)}\ge\frac{12}{a+b+c+d}.$$

Hướng dẫn. Vì a, b, c, $d>0$ suy ra:

$$a+b>0;\ a+c>0;\ c+d>0;\ b+d>0.$$

(Xem tiếp trang 21)

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9, TỈNH NAM ĐỊNH MÔN TOÁN, NĂM HỌC 2023-2024

Câu 1. a) *Cho* $x=\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{9-4\sqrt{2}}$. *Tính giá trị của biểu thức* $T=\dfrac{x^4+4x^3-12x^2+8x+1}{x^2+4x-13}$.

b) *Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn* $a+b+c=5$ *và* $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=3$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{\sqrt{c}-\sqrt{b}}{a+2\left(\sqrt{bc}-1\right)}+\frac{\sqrt{a}-\sqrt{c}}{b+2\left(\sqrt{ac}-1\right)}+\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{c+2\left(\sqrt{ab}-1\right)}=\frac{2}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}.$$

Lời giải. a) Ta có:

$$x=\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{9-4\sqrt{2}}$$
$$=\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}+\sqrt{\left(2\sqrt{2}-1\right)^2}=3\sqrt{2}-2$$
$$\Rightarrow x+2=3\sqrt{2}.$$

Khi đó $(x+2)^2=18\Rightarrow x^2+4x-14=0.$

Do đó: $T=\dfrac{x^4+4x^3-12x^2+8x+1}{x^2+4x-13}$

$$=\frac{x^2\left(x^2+4x-14\right)+2(x^2+4x)+1}{x^2+4x-13}.$$

Vậy $T=29$.

b) Vì $a+b+c=5$ và $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=3$ nên
$$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=2.$$

Ta có:

$$a+2\left(\sqrt{bc}-1\right)=a+2\sqrt{bc}-2$$
$$=a+2\sqrt{bc}-\sqrt{ab}-\sqrt{bc}-\sqrt{ca}$$
$$=a+\sqrt{bc}-\sqrt{ab}-\sqrt{ca}$$
$$=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right).$$

Suy ra: $\dfrac{\sqrt{c}-\sqrt{b}}{a+2\left(\sqrt{bc}-1\right)}=\dfrac{\sqrt{c}-\sqrt{b}}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)}.$

Chứng minh tương tự:

$$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{c}}{b+2\left(\sqrt{ac}-1\right)}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{c}}{\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)};$$

$$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{c+2\left(\sqrt{ab}-1\right)}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\left(\sqrt{c}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{c}-\sqrt{b}\right)}.$$

Do đó:

$$\frac{\sqrt{c}-\sqrt{b}}{a+2\left(\sqrt{bc}-1\right)}+\frac{\sqrt{a}-\sqrt{c}}{b+2\left(\sqrt{ac}-1\right)}+\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{c+2\left(\sqrt{ab}-1\right)}$$
$$=\frac{\sqrt{c}-\sqrt{b}}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)}+\frac{\sqrt{a}-\sqrt{c}}{\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)}$$
$$+\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\left(\sqrt{c}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{c}-\sqrt{b}\right)}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{c}}-\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$$
$$+\frac{1}{\sqrt{c}-\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{c}-\sqrt{b}}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}.$$

Câu 2. a) *Tìm tất cả các cặp số tự nhiên* $(x;y)$ *thỏa mãn* $3^x\left(9^x+1-2^y\right)-9^x\left(1+2^y\right)+4^y=1$.

b) *Cho* a, b *là hai số nguyên dương sao cho* $p=a^2+b^2$ *là số nguyên tố và* $p-5$ *chia hết cho 8. Xét* x, y *là hai số nguyên sao cho* ax^2-by^2 *chia hết cho p. Chứng minh rằng* x, y *cùng chia hết cho p.*

Lời giải. a) Ta có :

$$3^x\left(9^x+1-2^y\right)-9^x\left(1+2^y\right)+4^y=1$$
$$\Leftrightarrow 3^x\left(9^x+1-2^y\right)-9^x\left(1+2^y\right)+4^y-1=0$$
$$\Leftrightarrow 3^x\left(9^x+1-2^y\right)-9^x\left(1+2^y\right)$$
$$+\left(2^y-1\right)\left(2^y+1\right)=0$$

$\Leftrightarrow 3^x\left(9^x+1-2^y\right)-\left(1+2^y\right)\left(9^x+1-2^y\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(9^x+1-2^y\right)\left(3^x-1-2^y\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3^x-1-2^y=0\\9^x+1-2^y=0\end{array}\right.$.

• TH1: $9^x+1-2^y=0 \Rightarrow 9^x+1=2^y$.

Ta có: $9^x \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow 9^x+1 \equiv 2 \pmod 4$

$\Rightarrow 2^y \equiv 2 \pmod 4$.

Với $y \geq 2$ thì $2^y \equiv 0 \pmod 4$ $\Rightarrow y \leq 1 \Rightarrow y=1$

$\Rightarrow 9^x=1 \Rightarrow x=0$. Ta được: $(x; y)=(0; 1)$.

• TH2: $3^x-1-2^y=0 \Rightarrow 3^x=1+2^y$.

Với $x=0 \Rightarrow 2^y+1=1 \Rightarrow 2^y=0$ (mâu thuẫn).

Với $x=1 \Rightarrow 2^y+1=3 \Rightarrow 2^y=2 \Rightarrow y=1$

$\Rightarrow (x;y)=(1;1)$.

Với $x=2 \Rightarrow 2^y+1=9 \Rightarrow 2^y=8 \Rightarrow y=3$

$\Rightarrow (x;y)=(2;3)$.

Xét $x \geq 3$.

- Nếu x lẻ $(x=2k+1,\ k \in \mathbb{N})$ ta có:

$3^x=3^{2k+1}=9^k.3 \equiv 3 \pmod 4$, do đó:

$2^y \equiv 2 \pmod 4$, loại vì: $y \geq 2 \Rightarrow 2^y \equiv 0 \pmod 4$.

- Nếu x chẵn, suy ra:

$x=2m\,(m \in \mathbb{N}, m \geq 2) \Rightarrow 3^{2m}=2^y+1$

$\Rightarrow \left(3^m-1\right)\left(3^m+1\right)=2^y$

$\Rightarrow \begin{cases}3^m-1=2^p\\3^m+1=2^q\\p+q=y>3\\p,q \in \mathbb{N}^*\\p<q\end{cases}$.

$\Rightarrow 2^q-2^p=2 \Rightarrow 2^p(2^{q-p}-1)=2 \Rightarrow \begin{cases}2^p=2\\2^{q-p}-1=1\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}p=1\\q-p=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}p=1\\q=2\end{cases}$, mâu thuẫn với $p+q>3$.

Do vậy tất cả các cặp số tự nhiên $(x; y)$ thỏa mãn đề bài là $(0; 1), (1; 1), (2; 3)$.

b) Ta có $p-5 \vdots 8$ suy ra $p=8k+5\ (k \in \mathbb{N})$.

Vì $\left(ax^2\right)^{4k+2}-\left(by^2\right)^{4k+2} \vdots \left(ax^2-by^2\right) \vdots p$ nên

$$a^{4k+2} \cdot x^{8k+4}-b^{4k+2} \cdot y^{8k+4} \vdots p$$

Ta có: $a^{4k+2} \cdot x^{8k+4}-b^{4k+2} \cdot y^{8k+4}$

$$=\left(a^{4k+2}+b^{4k+2}\right)x^{8k+4}-b^{4k+2}\left(x^{8k+4}+y^{8k+4}\right).$$

Do $a^{4k+2}+b^{4k+2}=\left(a^2\right)^{2k+1}+\left(b^2\right)^{2k+1} \vdots \left(a^2+b^2\right)=p$ và $b<p$ nên $x^{8k+4}+y^{8k+4} \vdots p$ (1).

Nếu trong hai số x, y có một số chia hết cho p thì từ (1) suy ra số thứ hai cũng chia hết cho p.

Nếu cả hai số x, y đều không chia hết cho p thì theo định lí Fermat bé ta có:

$x^{8k+4}=x^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, $y^{8k+4}=y^{p-1} \equiv 1 \pmod p$

$\Rightarrow x^{8k+4}+y^{8k+4} \equiv 2 \pmod p$ (mâu thuẫn với (1)).

Vậy cả hai số x và y chia hết cho p.

Câu 3. a) *Giải phương trình*

$$\sqrt{10x-5}+\sqrt{5x^2+5}=3\sqrt{x^2+2x}.$$

b) *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases}x^3-2y^3+xy^2+x^2+2y^2+xy=0\\(x+1)\sqrt{y+1}+(x+6)\sqrt{y+6}=x^2-5x+12y\end{cases}.$$

Lời giải. a) Điều kiện: $x \geq \dfrac{1}{2}$.

$$\sqrt{10x-5}+\sqrt{5x^2+5}=3\sqrt{x^2+2x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5}\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x^2+1}\right)=3\sqrt{x^2+2x}.$$

Đặt $a=\sqrt{2x-1}, b=\sqrt{x^2+1}$ $(a \geq 0, b>0)$

$\Rightarrow a^2+b^2=x^2+2x$.

Phương trình trở thành:

$\sqrt{5}(a+b)=3\sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow 5(a+b)^2=9\left(a^2+b^2\right)$

$\Leftrightarrow 2a^2-5ab+2b^2=0$

$\Leftrightarrow (2a-b)(a-2b)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2a=b\\a=2b\end{array}\right.$.

• TH1: $2a=b \Leftrightarrow 2\sqrt{2x-1}=\sqrt{x^2+1}$

$\Leftrightarrow 4(2x-1)=x^2+1$

$\Leftrightarrow x^2-8x+5=0 \Leftrightarrow x=4\pm\sqrt{11}$ (thỏa mãn).

• TH2: $a=2b \Rightarrow \sqrt{2x-1}=2\sqrt{x^2+1}$

$$\Leftrightarrow 2x-1=4\left(x^2+1\right)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-2x+5=0 \text{ (PT vô nghiệm).}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm:

$$x=4+\sqrt{11}, x=4-\sqrt{11}.$$

b) Điều kiện: $y\ge -1$.

Ta có: $x^3-2y^3+xy^2+x^2+2y^2+xy=0$

$$\Leftrightarrow (x+1-y)\left(x^2+xy+2y^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1-y=0 \\ x^2+xy+2y^2=0 \end{array}\right..$$

TH1: $x^2+xy+2y^2=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{7y^2}{4}=0$

$\Rightarrow x=y=0$, không thoả mãn hệ đã cho.

TH2: $y=x+1$. Khi đó ta có:

$$(x+1)\sqrt{x+2}+(x+6)\sqrt{x+7}=x^2+7x+12,$$

với $x\ge -2$.

$$\Leftrightarrow (x+1)\left(\sqrt{x+2}-2\right)+(x+6)\left(\sqrt{x+7}-3\right)=x^2+2x-8$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-2)}{\sqrt{x+2}+2}+\frac{(x+6)(x-2)}{\sqrt{x+7}+3}=(x-2)(x+4)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ \dfrac{x+1}{\sqrt{x+2}+2}+\dfrac{x+6}{\sqrt{x+7}+3}=x+4 \ (*) \end{array}\right..$$

Ta có:

$$(*) \Leftrightarrow \frac{x+2}{\sqrt{x+2}+2}-\frac{x+2}{2}+\frac{x+6}{\sqrt{x+7}+3}-\frac{x+6}{2}-\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-(x+2)\sqrt{x+2}}{2\sqrt{x+2}+4}-\frac{(x+6)\left(1+\sqrt{x+7}\right)}{2\sqrt{x+7}+6}-\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}=0.$$

Ta có: $\dfrac{-(x+2)\sqrt{x+2}}{2\sqrt{x+2}+4}-\dfrac{(x+6)\left(1+\sqrt{x+7}\right)}{2\sqrt{x+7}+6}-\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2}<0$

với mọi $x\ge -2$.

Suy ra phương trình (*) vô nghiệm. Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm: $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$.

Câu 4. *Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O), kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (O), (với A, B là hai tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OM và AB. Kẻ đường kính BD của đường tròn (O). Đường thẳng MD cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là C. Tiếp tuyến tại C của đường tròn (O) cắt MA, MB lần lượt tại E, F.*

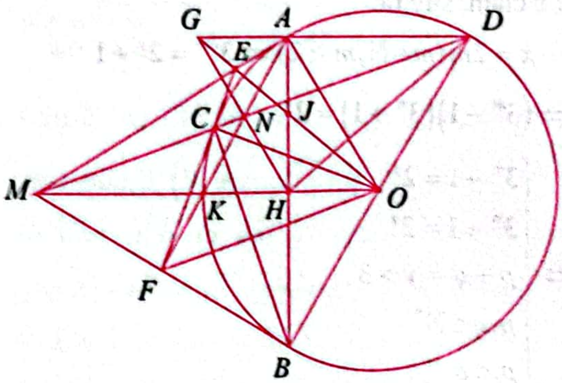
a) Chứng minh $\widehat{OCD}=\widehat{OHD}$ và

$$(ME+MF+EF)^2=4MH.MO.$$

b) Gọi G là giao điểm của đường thẳng OE và AD. Chứng minh tứ giác OAGH là hình bình hành.

c) Chứng minh các đường thẳng CD, HG, AF đồng quy.

Lời giải.



a) + Trong đường tròn (O) có $\widehat{MAC}=\widehat{ADC}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung chắn $\overset{\frown}{AC}$).

Xét ΔMAC và ΔMDA có $\widehat{MAC}=\widehat{MDA}$ và chung $\widehat{AMC} \Rightarrow \Delta MAC$ và ΔMDA đồng dạng.

$\Rightarrow \dfrac{MC}{MA}=\dfrac{MA}{MD} \Rightarrow MA^2=MC.MD$ (1).

Do $MA; MB$ là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên

$$MA = MB \quad (2), \quad OA = OB = R \quad (3).$$

Từ (2) và (3) ta suy ra MO là trung trực của AB nên $MO \perp AB$.

Xét ΔMAO vuông tại A có AH là đường cao nên

$$MA^2 = MH.MO \quad (4).$$

Từ (1) và (4) ta suy ra: $MC.MD = MH.MO$.

Vì $MC.MD = MH.MO \Rightarrow \frac{MC}{MO} = \frac{MH}{MD}$.

Xét ΔMCO và ΔMHD có $\frac{MC}{MO} = \frac{MH}{MD}$ và $\widehat{CMO}$ chung nên ΔMCO và ΔMHD đồng dạng

$\Rightarrow \widehat{MCO} = \widehat{MHD} \Rightarrow \widehat{OCD} = \widehat{OHD}$.

+ Ta có MA, MB là hai tiếp tuyến cắt nhau của đường tròn (O) nên $MA = MB$.

Tương tự ta có $EA = EC; FB = FC$.

Khi đó:

$$\begin{aligned} MA + MB &= (ME + EA) + (MF + FB) \\ &= ME + EC + MF + FC \\ &= ME + MF + EF \end{aligned}$$

$\Rightarrow MA = MB = \frac{ME + MF + EF}{2}$.

Trong tam giác vuông MAO có AH là đường cao nên $MA^2 = MH.MO$. Suy ra:

$$(ME + MF + EF)^2 = 4MO.MH.$$

b) Gọi I là giao điểm của GO và AH.

Ta có $AG // HO$ (do cùng vuông góc với AB).

Ta có $\widehat{IOA} = \frac{1}{2}\widehat{AOC}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).

Lại có $\frac{1}{2}\widehat{AOC} = \widehat{ADC}$ (góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset\frown{AC}$)

Do $GD // OM$ nên $\widehat{ADC} = \widehat{DMO}$ (cặp góc ở vị trí so le trong) nên $\widehat{IOA} = \widehat{DMO}$.

Ta có:

$$\begin{aligned} \widehat{HIO} &= \widehat{IAO} + \widehat{IOA} \text{ (tính chất góc ngoài tam giác)} \\ &= \widehat{AMO} + \widehat{DMO} = \widehat{OMB} + \widehat{DMO} = \widehat{DMB} \end{aligned}$$

($\widehat{IAO} = \widehat{AMO}$ do cùng phụ với góc $\widehat{MAH}$).

Do đó $\Delta IHO \sim \Delta MBD$ (g.g), suy ra:

$$\frac{HI}{HO} = \frac{MB}{BD} \quad (5).$$

ΔAHO và ΔMBO đồng dạng (g.g) $\Rightarrow \frac{HA}{HO} = \frac{MB}{BO}$.

Mà $\frac{MB}{BO} = \frac{2MB}{BD} \Rightarrow \frac{HA}{HO} = \frac{2MB}{BD} \quad (6)$.

Từ (5) và (6) suy ra $AH = 2IH \Rightarrow IH = IA$.

Ta có $AG // HO$ (do cùng vuông góc với AB)

$\Rightarrow \frac{GI}{IO} = \frac{AI}{IH} = 1 \Rightarrow IG = IO$.

Do AH và GO cắt nhau tại trung điểm I của mỗi đường nên tứ giác $OAGH$ là hình bình hành.

c) Gọi N là giao điểm của HG và CD.

Từ $OF // MD$ (do cùng vuông góc với BC)

$\Rightarrow \frac{MF}{FB} = \frac{DO}{BO} = 1 \Rightarrow MF = FB$.

Ta có HO là đường trung bình của tam giác ABD nên $AD = 2HO$

$\Rightarrow AD = 2AG \Rightarrow GD = \frac{3}{2}AD$.

Gọi K là giao điểm của MH và AF thì K trọng tâm tam giác AMB.

Suy ra $MH = \frac{3}{2}KM$ nên $\frac{GD}{MH} = \frac{AD}{KM} \quad (7)$.

Do $GD // OM$ suy ra $\frac{ND}{NM} = \frac{GD}{MH} \quad (8)$.

Từ (7) và (8) ta có: $\frac{ND}{NM} = \frac{AD}{KM}$.

Xét tam giác ΔADN và ΔKMN có:

$$\frac{ND}{NM}=\frac{AD}{KM} \text{ và } \widehat{ADN}=\widehat{KMN}.$$

Suy ra: $\Delta ADN \sim \Delta KMN$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{AND}=\widehat{KNM}$. Mà M,N,D thẳng hàng suy ra A,K,N thẳng hàng. Do đó A,N,F thẳng hàng.

Câu 5. a) *Xét a,b,c là các số thực dương thoả mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P=14\left(a^2+b^2+c^2\right)+\frac{ab+bc+ca}{a^2b+b^2c+c^2a}$$

b) *Trên một đường tròn cho 26 điểm phân biệt. Mỗi điểm đó được tô bởi một trong 5 màu: trắng, xanh, đỏ, tím, vàng. Giữa mỗi cặp điểm nối với nhau bằng một đoạn thẳng được tô bởi một trong 2 màu: nâu hoặc đen. Chứng minh rằng luôn tồn tại một tam giác có ba đỉnh được tô cùng một màu (trắng, xanh, đỏ, tím hoặc vàng) và ba cạnh cũng được tô cùng một màu (nâu hoặc đen).*

Lời giải. a) Do $a+b+c=1$ nên

$$ab+bc+ca=\frac{1-\left(a^2+b^2+c^2\right)}{2}.$$

Lại có: $a^2+b^2+c^2=\left(a^2+b^2+c^2\right)(a+b+c)$

$=a^3+a^2b+a^2c+b^3+b^2a+b^2c+c^3+c^2a+c^2b$.

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$a^3+ab^2\geq 2a^2b;$$
$$b^3+bc^2\geq 2b^2c;$$
$$c^3+a^2c\geq 2c^2a;$$
$$a^2+b^2+c^2\geq 3\left(a^2b+b^2c+c^2a\right).$$

Suy ra: $\dfrac{1}{a^2b+b^2c+c^2a}\geq\dfrac{3}{a^2+b^2+c^2}$.

Khi đó:

$$P\geq 14\left(a^2+b^2+c^2\right)+\frac{3-3\left(a^2+b^2+c^2\right)}{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}.$$

Đặt $t=a^2+b^2+c^2$ (điều kiện: $t\geq\frac{1}{3}$).

Ta có:

$$P\geq 14t+\frac{3-3t}{2t}=\frac{27t}{2}+\frac{3}{2t}+\frac{t}{2}-\frac{3}{2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\frac{27t}{2}+\frac{3}{2t}\geq 2\sqrt{\frac{27t}{2}\cdot\frac{3}{2t}}=9.$$

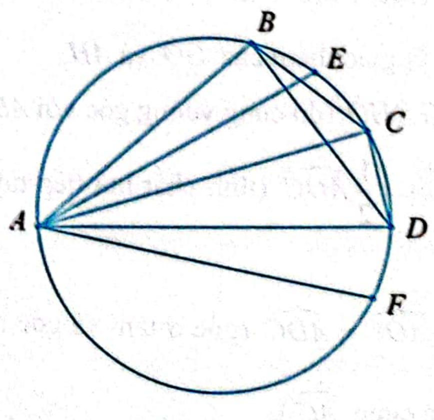
Mặt khác $\dfrac{t}{2}-\dfrac{3}{2}\geq\dfrac{1}{6}-\dfrac{3}{2}=-\dfrac{4}{3}$.

Suy ra: $P\geq 9-\dfrac{4}{3}=\dfrac{23}{3}$. Đẳng thức xảy ra khi

$$t=\frac{1}{3} \text{ hay } a=b=c=\frac{1}{3}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{23}{3}$.

b) Vì các điểm phân biệt nằm trên một đường tròn nên với ba điểm bất kỳ luôn tạo thành một tam giác. Có 26 điểm được tô bằng 5 màu, do đó có ít nhất 6 điểm cùng màu. Giả sử có 6điểm cùng màu đỏ là A,B,C,D,E,F.



ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9, THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH NĂM HỌC 2023-2024

Môn thi: Toán. Thời gian làm bài: 120 phút

Câu 1. Cho các số $a, b, c > 0$ thỏa mãn:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=2024.$$

Tính giá trị của biểu thức

$$P=(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)=2024.$$

Câu 2. Giải các phương trình

a) $2\sqrt{x+1}=3x-2$;

b) $x+4=4x^2+2\sqrt{x+3}$.

Câu 3. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn:

$$ab+bc+ca=3.$$

a) Chứng minh rằng: $a^4+7\ge 2(a+b)(a+c)$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$Q=\sqrt{\frac{bc}{a^4+7}}+\sqrt{\frac{ca}{b^4+7}}+\sqrt{\frac{ab}{c^4+7}}.$$

Câu 4. Cho hai phương trình $x^2-bx+c=0$ (1) và $x^2-b^2x+c^2=0$ (2) $(b,c\in\mathbb{Z})$.

Với x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1) và x_3, x_4 là hai nghiệm của phương trình (2) thỏa mãn $x_3-x_1=x_4-x_2=1$. Tính giá trị của a, b, c.

Câu 5. Cho đường tròn $(O;\ R)$ và dây cung $BC=R\sqrt{3}$ cố định. Gọi A là một điểm trên cung lớn $\overset{\frown}{BC}$ và D là một điểm trên cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$ thỏa mãn $DB=2DC$.

a) Tính số đo góc $\widehat{BAC}$.

b) Tính diện tích tam giác BDC theo R.

c) Gọi K là một điểm trên AD thỏa mãn góc $\widehat{CAD}=\widehat{ABK}$. Tìm vị trí của A trên cung lớn $\overset{\frown}{BC}$ để diện tích tam giác ABK đạt giá trị lớn nhất.

Câu 6.

a) Cho p, q là các số nguyên tố thỏa mãn $(p+q)^2+3p+q$ là số chính phương. Tìm giá trị của p, q.

b) Số n gọi là số '*Tốt*'' nếu n thỏa mãn là hiệu của hai số chính phương. Hỏi có bao nhiêu số "*Tốt*" không vượt quá 2024?

NGUYỄN ĐỨC TẤN

(TP. Hồ Chí Minh)

Sưu tầm và hướng dẫn giải

☞ Nối 5 đoạn AB, AC, AD, AE, AF và tô bằng 2 màu nâu, đen và khi đó có ít nhất 3 đoạn cùng màu, giả sử AB, AC, AD được tô cùng màu đen. Xét tam giác BCD, xảy ra hai trường hợp:

TH1: Nếu ba cạnh BC, BD, DC được tô cùng màu nâu thì tam giác BCD có ba đỉnh cùng màu đỏ, ba cạnh cùng màu nâu (thoả mãn).

TH2: Nếu ba cạnh BC, BD, DC có ít nhất một cạnh màu đen, giả sử BC đen, khi đó tam giác ABC có ba đỉnh cùng màu đỏ, ba cạnh cùng màu đen (thoả mãn).

Vậy luôn có một tam giác có ba đỉnh cùng màu và ba cạnh cùng màu.

TRẦN XUÂN ĐÁNG

(5/7/136 Phan Đình Phùng, TP. Nam Định, tỉnh Nam Định)

Giới thiệu

SỬ DỤNG PHẦN MỀM GEOGEBRA TRONG CHỨNG MINH MỘT SỐ ĐỊNH LÝ HÌNH HỌC BẰNG PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI GIỮ NGUYÊN DIỆN TÍCH

NGUYỄN HOÀNG VŨ (Hà Nội)
HÀ MINH THU (SV Đại học Thủ đô Hà Nội)

1. MỞ ĐẦU

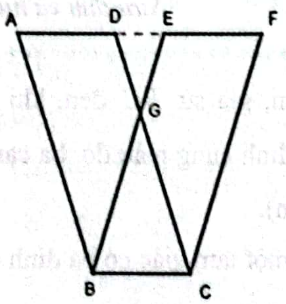
Phương pháp biến đổi giữ nguyên diện tích là một phương pháp thú vị dùng để chứng minh các định lý toán học, tuy nhiên đây không phải là một phép biến đổi dễ hình dung. Hiện nay, việc ứng dụng công nghệ thông tin trong giảng dạy hình học động đã trở nên ngày càng phổ biến, cho phép minh họa trực quan nhiều phép biến hình khi chứng minh. Trong bài viết này chúng tôi trình bày về cách sử dụng phần mềm Geogebra để minh hoạ trực quan cách chứng minh một số định lý hình học bằng phương pháp biến đổi diện tích.

2. PHÉP BIẾN ĐỔI GIỮ NGUYÊN DIỆN TÍCH

Phép biến đổi này có một số dạng khác nhau tương ứng với các mệnh đề dưới đây trong cuốn *Cơ sở* của Euclid. Phần dưới đây sẽ minh họa cách biểu diễn các dạng này trong GeoGebra.

2.1 Euclid - Mệnh đề I.35. *Các hình bình hành có chung một đáy và nằm giữa hai đường thẳng song song thì có diện tích bằng nhau* [1].

Xét hai hình bình hành $ABCD$ và $BCEF$ có cạnh đáy BC chung và nằm giữa cặp đường thẳng song song AF và BC (h.1). Khi đó: $S_{ABCD} = S_{BCEF}$.



Hình 1

Chứng minh. Dễ thấy là hai hình bình hành $ABCD$ và $EFBC$ có chung đáy BC và đường cao tương ứng với đáy này của cả hai hình bình hành đều bằng nhau.

Biểu diễn trực quan bằng Geogebra

Bước 1: Vẽ đoạn thẳng BC và $d \parallel BC$.

Bước 2: Dựng hai hình bình hành $ADCB$ và $EFCB$ với A, D, E, F nằm trên đường thẳng d.

Bước 3: Tạo tham số cho việc dịch chuyển

$$s = Slider(0,1)$$

Bước 4: Tiến hành di chuyển các điểm A và D

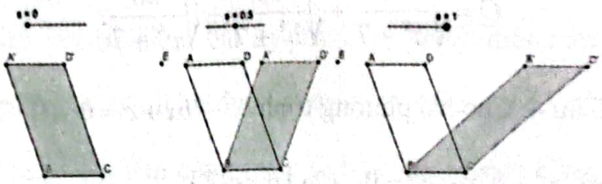
$$A' = Translate(A, s * vector(A, E))$$

$$D' = Translate(D, s * vector(A, E))$$

Bước 5: Vẽ đa giác $BA'D'C$

$$Polygon(B, A', D', C)$$

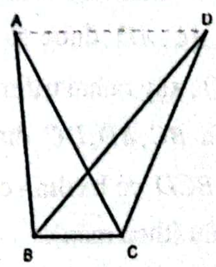
Khi cho thanh trượt thay đổi, ta có hình 2. Hai hình bình hành $ABCD$ và $A'BCD'$ có diện tích bằng nhau.



Hình 2

2.2 Euclid - Mệnh đề I.37. *Các tam giác có chung đáy và nằm giữa hai đường thẳng song song thì có diện tích bằng nhau* [1].

Hai tam giác ABC và DBC có cạnh đáy BC chung và nằm giữa cặp đường thẳng song song AD và BC (h.3). Khi đó: $S_{ABC} = S_{BCD}$.



Hình 3

Chứng minh. Ta lập luận tương tự mục 2.1.

Biểu diễn trực quan bằng Geogebra

Bước 1: Vẽ đoạn thẳng BC và $d \,//\, BC$.

Bước 2: Chọn A nằm trên d và vẽ tam giác ABC

$$Polygon(A, C, B)$$

Bước 3: Chọn D cũng nằm trên d

$$D = Point(d)$$

Bước 4: Tạo tham số cho việc dịch chuyển

$$s = Slider(0,1)$$

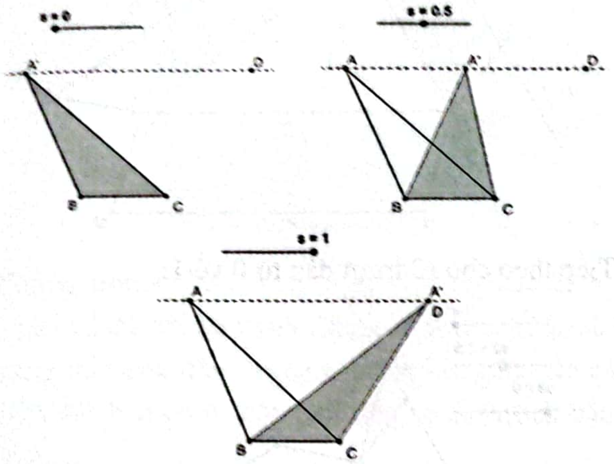
Bước 5: Dịch chuyển điểm A

$$A' = Translate(A, s * vector(A, D))$$

Bước 6: Vẽ tam giác $A'BC$

$$Polygon(A', B, C)$$

Khi cho thanh trượt thay đổi, ta có hình 4. Tam giác $A'BC$ có diện tích bằng tam giác ABC.

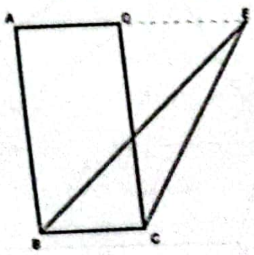


Hình 4

2.3 Euclid - Mệnh đề I.41. *Nếu hình bình hành có chung đáy với một tam giác, và các hình này cùng nằm giữa hai đường thẳng song song thì hình bình hành sẽ có diện tích gấp đôi diện tích hình tam giác* [1].

Cho hình bình hành $ABCD$ có chung đáy BC với tam giác EBC, và cho chúng nằm giữa hai đường thẳng song song BC và AE (h.5). Khi đó:

$$S_{ABCD} = 2 \cdot S_{BCE}.$$



Hình 5

Chứng minh. Dễ thấy tam giác ABC có diện tích bằng nửa diện tích hình bình hành $ABCD$. Kết hợp với định lí 2.2 và ta có điều phải chứng minh.

Biểu diễn trực quan bằng Geogebra

Bước 1: Vẽ đoạn thẳng BC và $d \,//\, BC$

Bước 2: Lấy điểm A trên d. Dựng hình bình hành $ADCB$ (sao cho $A, D \in d$)

Bước 3: Tạo tham số cho việc dịch chuyển

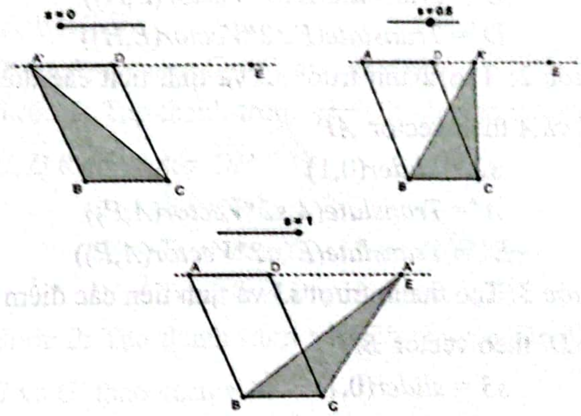
$$s = Slider(0,1)$$

Bước 4: Chọn điểm E trên đường thẳng d và dịch chuyển điểm A

$$A' = Translate(D, s * vector(D, E))$$

Bước 5: Vẽ tam giác $A'BC$: $Polygon(B, A', C)$

Khi cho thanh trượt thay đổi, ta có hình 6. Tam giác $A'BC$ có diện tích bằng một nửa hình bình hành $ABCD$.



Hình 6

3. CHỨNG MINH TRỰC QUAN MỘT SỐ ĐỊNH LÝ TRONG GEOGEBRA VỚI PHÉP BIẾN ĐỔI GIỮ NGUYÊN DIỆN TÍCH

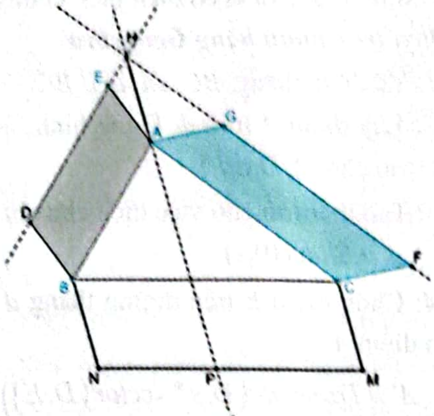
Các dạng khác nhau của phép biến đổi giữ nguyên diện tích có thể được sử dụng để chứng minh một số định lí hình học một cách trực quan trong GeoGebra. Với mỗi định lí, các câu lệnh GeoGebra để thực hiện phép biến đổi này được nêu kèm theo hình minh họa của mỗi bước.

3.1 Định lý Pappus ([2], Chứng minh 77).

Cho tam giác ABC bất kì. Dựng các hình bình hành ABDE và ACFG bên ngoài tam giác ABC. H là giao điểm của DE và FG. Bên ngoài tam giác ABC dựng hình bình hành BCMN sao cho CM song song và bằng với AH. Khi đó:

$$S_{ABDE} + S_{ACFG} = S_{BCMN}.$$

Dựng hình. Vẽ các hình bình hành như đầu bài. Gọi giao điểm của AH và MN là P.



Chứng minh trực quan bằng Geogebra

Bước 1: Tạo thanh trượt $s1$ và tịnh tiến các điểm E và D theo vector $\overrightarrow{EH}$

s1 = slider(0,1)

*E' = Translate(E,s1*Vector(E,H))*

*D' = Translate(E,s2*Vector(E,H))*

Bước 2: Tạo thanh trượt $s2$ và tịnh tiến các điểm E' và A theo vector $\overrightarrow{AP}$

s2 = slider(0,1)

*A' = Translate(A,s2*Vector(A,P))*

*E'' = Translate(E',s2*Vector(A,P))*

Bước 3: Tạo thanh trượt $s3$ và tịnh tiến các điểm B và D' theo vector $\overrightarrow{BN}$

s3 = slider(0,1)

*B' = Translate(B,s3*Vector(B,N))*

*D'' = Translate(D',s3*Vector(B,N))*

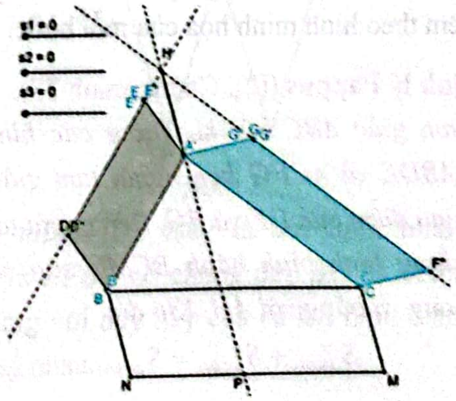
Bước 4: Vẽ hình bình hành $A'B'D''E''$

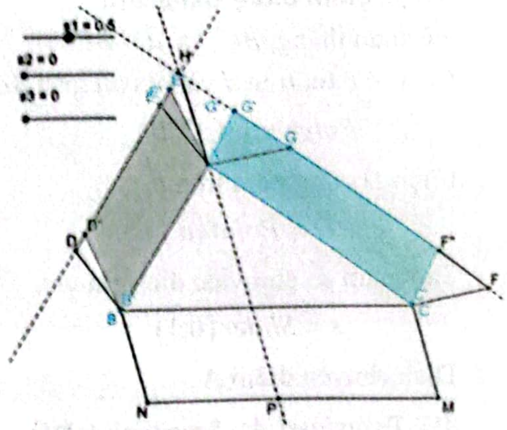
Polygon(A',B',D'',E'')

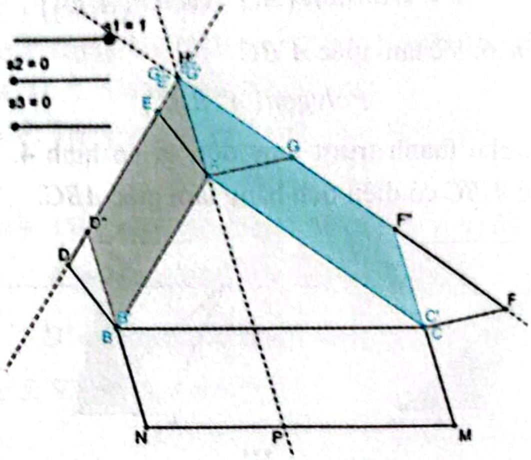
Làm tương tự cho hình bình hành $ACFG$.

Ta tiến hành thao tác các thanh trượt theo thứ tự sau:

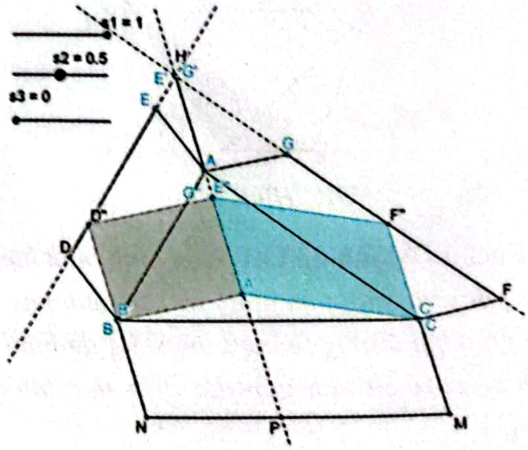
Bắt đầu từ $s1 = 0$, $s2 = 0$, $s3 = 0$, cho $s1$ trượt dần từ 0 về 1:

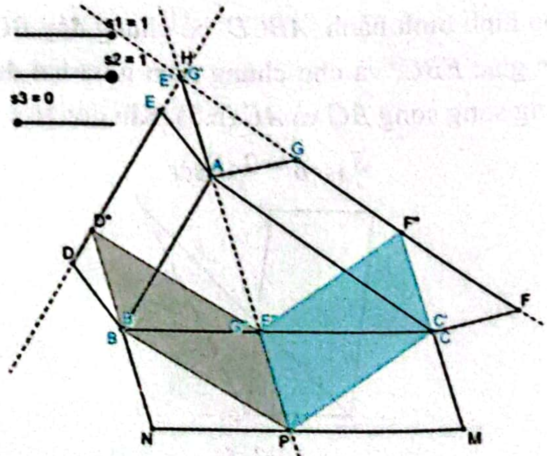




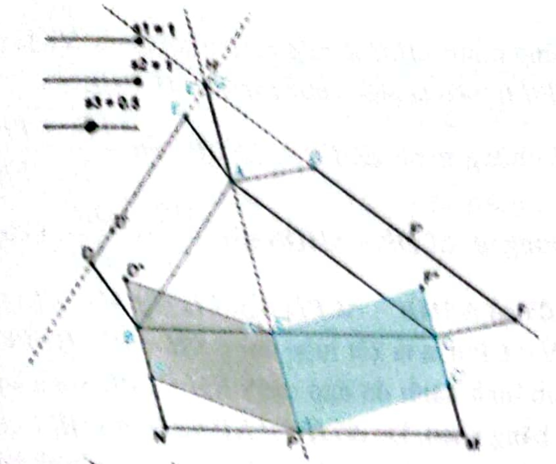


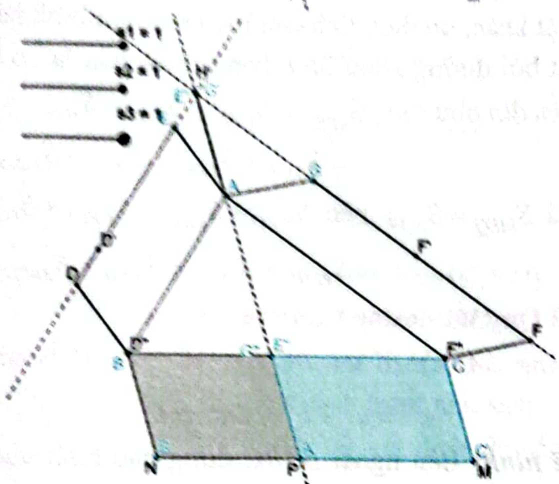
Tiếp theo cho $s2$ trượt dần từ 0 về 1:





Cuối cùng cho $s3$ trượt dần từ 0 về 1:





Chứng minh. Có thể dễ dàng sử dụng các định lí ở phần 2 để chứng minh rằng các hình bình hành ở trạng thái ban đầu, trung gian và kết thúc của các biến đổi bảo toàn diện tích đều có diện tích bằng nhau.

3.2 Chứng minh định lí Pythagore của Hazard

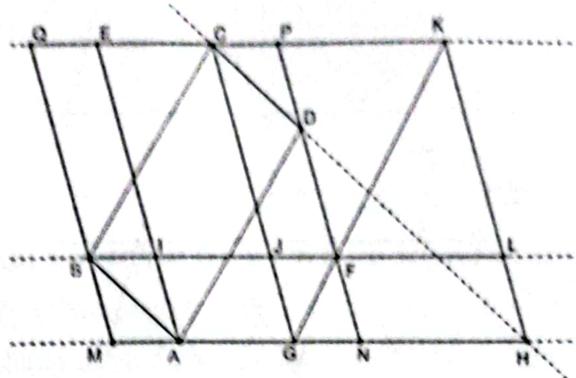
Để chứng minh định lí Pythagore, *W. Hazard* chứng minh định lí sau [2]:

Cho hình bình hành ABCD nội tiếp hình bình hành MNPQ với $A \in MN$, $B \in MQ$, $C \in QP$, $D \in PN$. Đường thẳng qua A và song song với NP cắt QC tại E. Đường thẳng qua B và song song song với QC cắt NP tại F. AE và BF cắt nhau tại I. Khi đó: $S_{ABCD} = S_{QEIB} + S_{IFNA}$.

Trong trường hợp *MNPQ* và *ABCD* là hình vuông, công thức trên tương đương với định lí Pythagore.

Vẽ hình: Khi vẽ hình ta cần chú ý rằng để thỏa mãn *ABCD* là hình bình hành nội tiếp hình bình hành *MNPQ* thì cần có *AM* = *PC* (chứng minh $\Delta ABM = \Delta CDP$ do *AB* = *CD* và các cặp góc kề hai cạnh này nhau vì là góc có cạnh tương ứng song song).

Trong chứng minh của mình, *Hazard* vẽ thêm một số đường thẳng khác. Đường thẳng qua *C* và song song với *MQ* sẽ cắt *BF* tại *J* và *MN* tại *G*. *CD* kéo dài cắt đường thẳng *MN* tại *H*. Đường thẳng *GF* cắt đường thẳng *PQ* tại *K*. Đường thẳng *BF* cắt đường thẳng *HK* tại *L*.



Trước hết, Hazard chứng minh diện tích của hình bình hành *ABCD* bằng với diện tích hình bình hành *AILH*.

Minh họa trong GeoGebra như sau:

Bước 1: Tạo thanh trượt và dịch chuyển các điểm *C*, *D* theo vector $\overrightarrow{DH}$

s1 = slider(0,1)

*C' = Translate(C, s1*vector(D,H))*

*D' = Translate(D, s1*vector(D,H))*

Bước 2: Tạo thanh trượt và dịch chuyển các điểm *B* và *C'* theo vector $\overrightarrow{BI}$

s2 = slider(0,1)

*B' = Translate(B, s2*vector(B,I))*

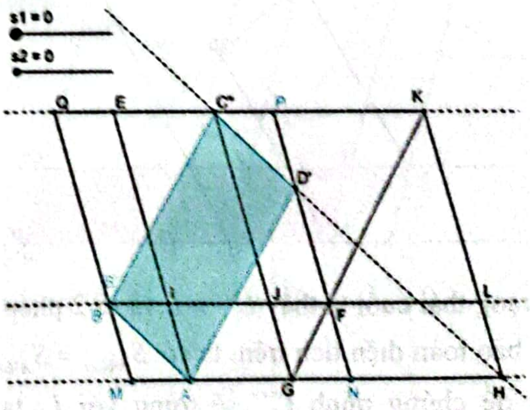
*C''= Translate(C'',s2*vector(B,I))*

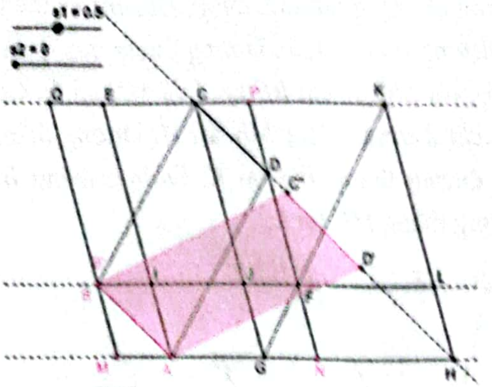
Bước 3: Vẽ hình bình hành *AB'C''D'*

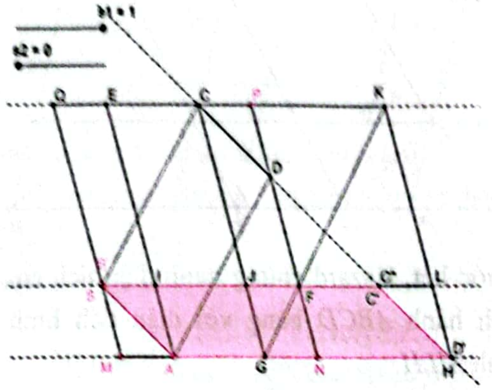
Polygon(A,B',C'',D')

Ta tiến hành thao tác các thanh trượt như sau:

Bắt đầu từ trạng thái *s1* = 0, *s2* = 0, dịch chuyển *s1* dần về 1:

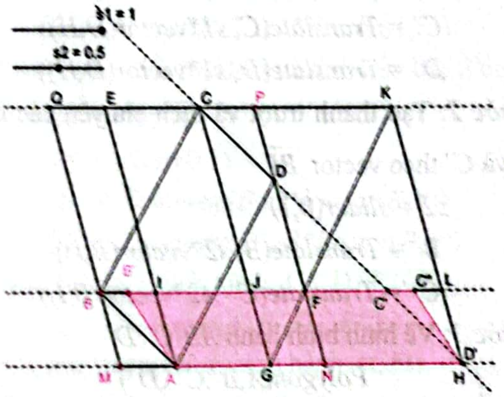


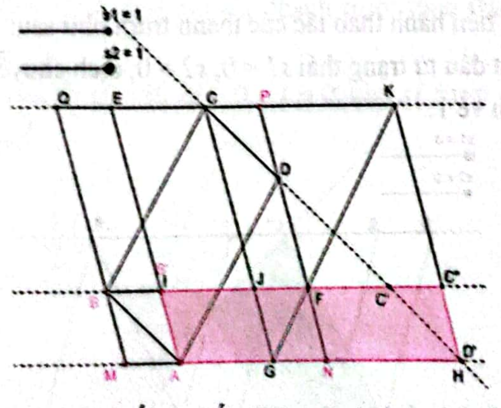




Trong quá trình dịch chuyển trên, ta vẫn luôn có $C'D'$ song song và bằng AB nên khi $s1 = 1$, $ABC'D'$ là hình bình hành và C' nằm trên BF.

Tiếp theo, ta dịch chuyển $s2$ từ 0 dần đến 1





Ở trạng thái cuối ta thấy $C'' \equiv L$ và từ 2 phép biến đổi bảo toàn diện tích trên, ta có $S_{ABCD} = S_{AILH}$. Ở đây để chứng minh C'' sẽ trùng với L, ta cần chứng minh $AILH$ là một hình bình hành. Vì đã có $AH \parallel IL$ nên ta phải chứng minh $AI \parallel HK$.

Dễ chứng minh $\Delta GFN \sim \Delta KFP$ nên $\dfrac{PK}{GN} = \dfrac{FP}{FN}$.

Tương tự: $\Delta CDP \sim \Delta HDN$ nên $\dfrac{HN}{CP} = \dfrac{DN}{PD}$. Ở trên ta đã có $\Delta AMB = \Delta CPD$ nên $PD = BM = FN$. Mà $GN = CP$ nên ta kết luận được $NH = PK$. $HNPK$ là hình bình hành do cặp cạnh NH và PK song song và bằng nhau. Do đó $HK \parallel NP$ và do đó $HK \parallel AI$.

Mặt khác, do diện tích của hai nửa hình bình hành cắt bởi đường chéo luôn bằng nhau nên ta có thể biến đổi như sau: $S_{CPFJ} = S_{CGK} - S_{PFK} - S_{JFG}$

$= S_{GKH} - S_{LFK} - S_{FGN} = S_{FLHN}$.

Mà $S_{BIEQ} = S_{JCPF}$ nên $S_{BIEQ} + S_{IANF} = S_{CPFJ} + S_{IANF}$

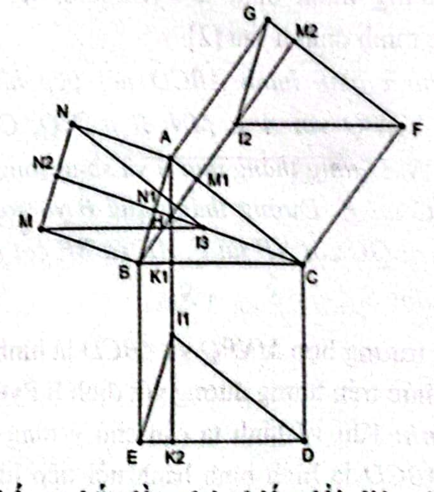
$= S_{FLHN} + S_{IANF} = S_{AILH} = S_{ABCD}$.

3.3 Quy tắc cosine trong tam giác

Trong ΔABC, với $a = BC, b = AC, c = AB$ ta có:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C.$$

Vẽ hình: Bên ngoài ΔABC dựng các hình vuông $BCDE$, $ACFG$ và $ABMN$. H là trực tâm của ΔABC. Các đường cao BM_1, CN_1, AK_1 của ΔABC khi kéo dài cắt các cạnh hình vuông lần lượt tại M_2, N_2, K_2. Các đường thẳng từ D, G, M lần lượt song song với AC, AB và BC sẽ cắt các đường cao kéo dài lần lượt tại I_1, I_2, I_3.



Trước hết, ta bắt đầu phép biến đổi diện tích cho hình chữ nhật AM_1M_2G.

Bước 1: Tạo thanh trượt và dịch chuyển các điểm M_1, M_2 theo vector $\overrightarrow{M_1B}$

$s1 = slider(0,1)$

$M1' = Translate(M1,s1*vector(M1,B))$

$M2' = Translate(M2,s1*vector(M1,B))$

$Polygon(A,G,M2',M1')$

Bước 2: Tạo thanh trượt và thực hiện phép quay 90^0 theo chiều kim đồng hồ quanh A

$$s2 = slider\left(0,\frac{pi}{2}\right)$$

$M1'' = Rotate(M1',-s2,A)$

$M2'' = Rotate(M2',-s2,A)$

$G' = Rotate(G,-s2,A)$

$Polygon(A,G',M2'',M1'')$

Bước 3: Tạo thanh trượt và dịch chuyển M_2'' và G' theo vector $\overrightarrow{CN_1}$

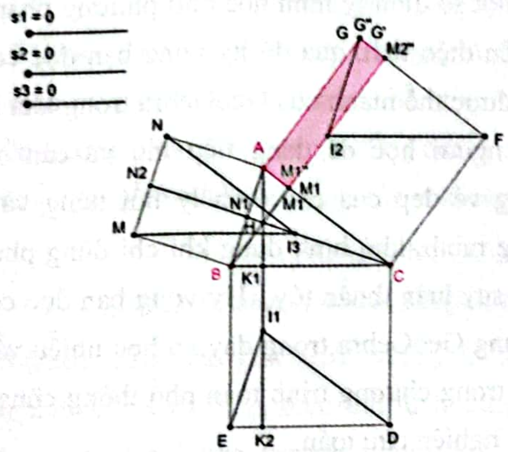
$s3 = slider(0,1)$

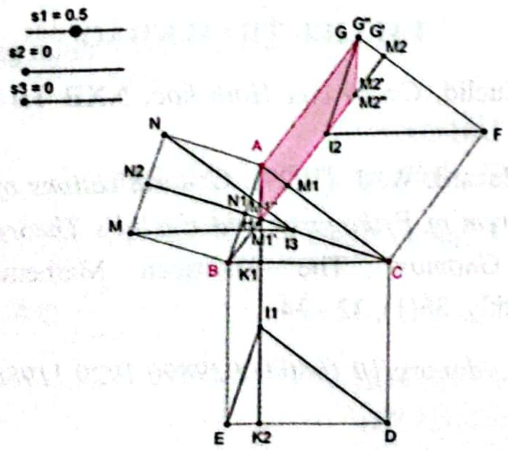
$M2''' = Translate(M2'',s3*vector(C,N1))$

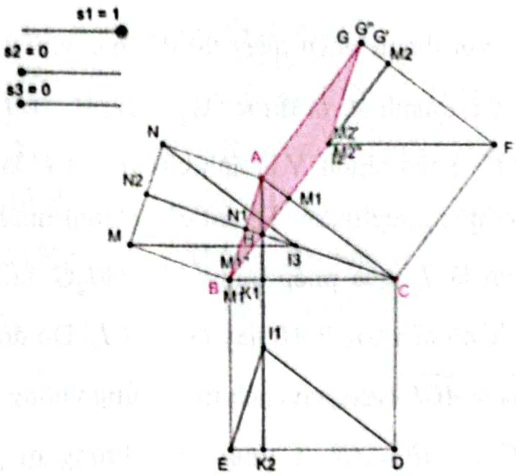
$G'' = Translate(G',s3*vector(C,N1))$

$Polygon(A,G'',M2''',M1'')$

Ta tiến hành thao tác các thanh trượt như sau:
Bắt đầu từ trạng thái *s1* = 0, *s2* = 0, dịch chuyển *s1* dần về 1:

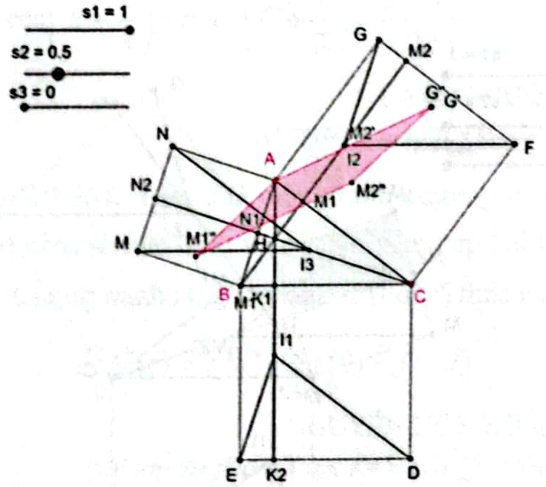


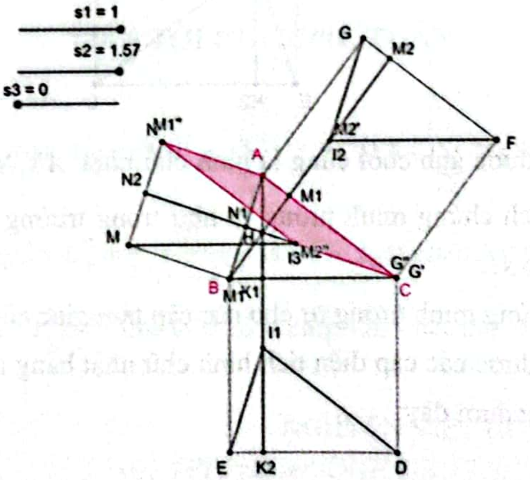




Khi này M_1' sẽ trùng với B và M_2' sẽ trùng với I_2 (*Chứng minh*: Ta có $AM_1 = GM_2$ và dễ dàng chứng minh được $\Delta ABM_1 = \Delta GI_2M_2$ (g.c.g) nên $BM_1 = I_2M_2$. Đồng thời cũng có $BI_2 = AG = CF$. Mà $BI_2 \parallel CF$ nên BI_2FC là hình bình hành và $I_2F \parallel BC$. Đây là kết quả quan trọng khi ta xét trường hợp của hình chữ nhật M_1M_2FC).

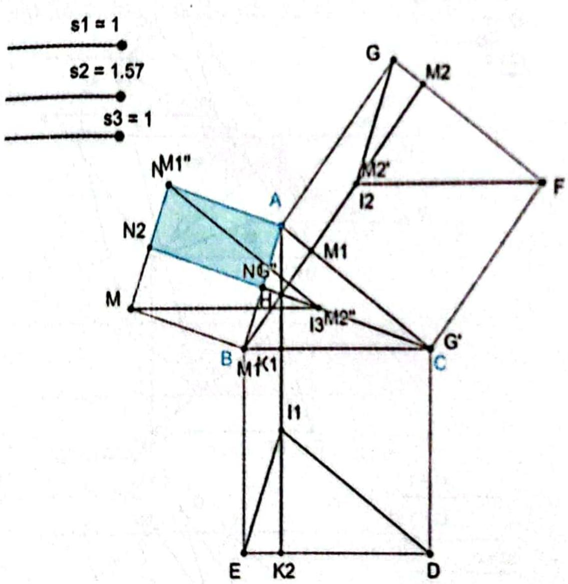
Tiếp tục dịch chuyển s2 để thực hiện phép quay.





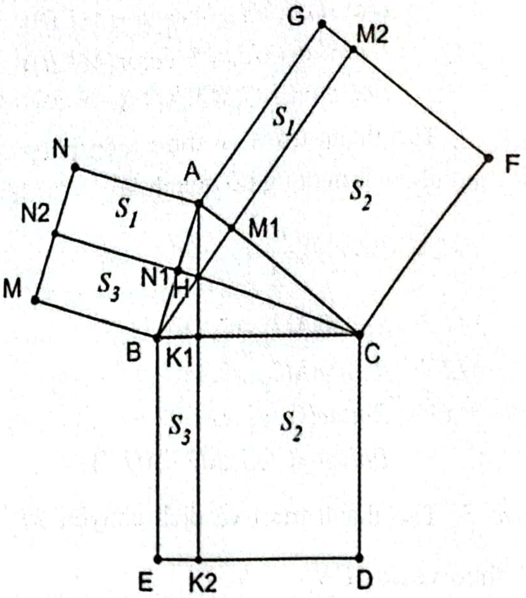
Khi hoàn thành phép quay 90 độ theo chiều kim đồng hồ quanh A, ta được $M_1'' \equiv N, M_2'' \equiv I_3$ và $G' \equiv C$. Hiển nhiên N là ảnh của B còn C là ảnh của G qua phép quay. Ta chỉ cần chứng minh I_2 có ảnh là I_3 qua phép quay. Vì ABI_2G là hình bình hành nên $GI_2 // AB$ hay $GI_2 \perp CI_3$. Do đó góc $\widehat{AGI_2} = \widehat{ACI_3}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc) và $GI_2 = AB = AN$. Chứng minh tương tự phần trên ta được ANI_3C là hình bình hành nên $CI_3 = AN = GI_2$. Đồng thời $AG = AC$ nên $\Delta AGI_2 = \Delta ACI_3$ nên $AI_2 = AI_3$ và góc $\widehat{GAI_2} = \widehat{CAI_3}$. Từ quan hệ này có thể dễ dàng chứng minh $AI_2 \perp AI_3$. Vậy là ta đã chứng minh được I_3 là ảnh của I_2 qua phép quay.

Tiếp theo, ta cho *s3* tăng dần từ 0 đến 1.



ta được ảnh cuối cùng là hình chữ nhật AN_1N_2N. Cách chứng minh tương tự như trong trường hợp cho *s1*.

Chứng minh tương tự cho các cặp tam giác còn lại ta được các cặp diện tích hình chữ nhật bằng nhau như dưới đây:



Do đó: $c^2 = S_1 + S_3 = a^2 + b^2 - 2S_2$.

Mà $S_2 = CM_1 \cdot CF = (BC \cdot \cos C) \cdot AC = ab\cos C$

nên $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.

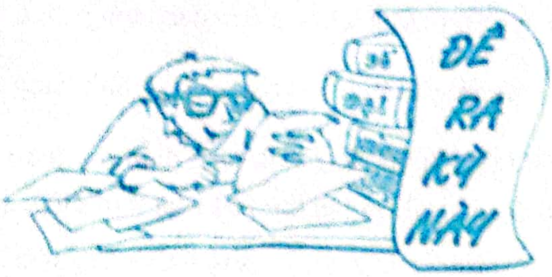
Kết luận. Bài viết trình bày khả năng sử dụng phần mềm hình học động *GeoGebra* trong dạy và học một số định lý hình học nhờ phương pháp giữ nguyên diện tích, qua đó hy vọng bạn đọc có thể thấy được thế mạnh của GeoGebra trong khả năng giúp người học dễ dàng tiếp thu và cảm nhận những vẻ đẹp của các định lý nổi tiếng và khó chứng minh, khó hình dung khi chỉ dùng phương pháp suy luận thuần túy. Hy vọng bạn đọc có thể sử dụng GeoGebra trong dạy và học nhiều vấn đề khác trong chương trình toán phổ thông cũng như trong nghiên cứu toán.

TAI LIỆU THAM KHẢO

[1] Euclid, *Cơ sở của Hình học*, NXB Tri thức, 2016.

[2] Hazard, W. J. (1929). *Generalizations of The Theorem of Pythagoras and Euclid's Theorem of the Gnomon.* The American Mathematical Monthly, 36(1), 32 - 34.

https://doi.org/10.1080/00029890.1929.11986904



CÁC LỚP THCS

Bài T1/564 (Lớp 6). Chứng tỏ rằng

$$\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\ldots+\frac{1}{2024^3}<\frac{5}{24}.$$

NGUYỄN ĐỨC TẤN

(TP. Hồ Chí Minh)

Bài T2/564 (Lớp 7). Cho các số nguyên dương a, b, c. Chứng minh

$$M=\frac{3a}{3a+5b}+\frac{2b}{2b+3c}+\frac{5c}{5c+2a}$$

không là số tự nhiên.

TẠ KHÁNH HÀ

(GV THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam)

Bài T3/564. Cho m, n là các số nguyên dương thỏa mãn $m \geq n > 1$. Tồn tại hay không $m + n$ số nguyên dương phân biệt sao cho tổng của m số bất kỳ trong chúng chia hết cho tổng của n số còn lại?

HOÀNG NGỌC MINH

(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T4/564. Cho tam giác ABC vuông tại A với đường cao AH. Gọi r_1, r_2 theo thứ tự là bán kính các đường tròn nội tiếp các tam giác AHB, AHC. Chứng minh $\frac{AH}{r_1+r_2}\geq 1+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

CAO HẢI VÂN

(GV THPT Nguyễn Chí Thanh, Pleiku, Gia Lai)

Bài T5/564. Cho a, b, c là ba số dương. Chứng minh rằng $\frac{2a^2}{b+c}+\frac{2b^2}{b+c}+\frac{c^2}{b}\geq 2a+c$.

TẠ HOÀNG THÔNG

(TP. Hồ Chí Minh)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/564. Giả sử a, b, c, A, B, C, D là các số thực thỏa mãn $(Ax+B)(Cx+D)=ax^2+bx+c$ với mọi số thực x. Chứng minh rằng có ít nhất một trong các số a, b, c không nhỏ hơn

$$\frac{4(A+B)(C+D)}{9}.$$

NGUYỄN DUY LIÊN

(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T7/564. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}3^{y-x^3}=\left(\sqrt{y^2+1}+y\right)\left(\sqrt{x^6+1}-x^3\right)\\ 3^{3x}-3x^3\geq 2x.3^{x+1}+5y+1\end{cases}.$$

NGUYỄN TẤT THU

(GV THPT chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai)

Bài T8/564. Cho tam giác ABC với $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Chứng minh

$$c\cos\left(B+\frac{\pi}{3}\right)-b\cos\left(C+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{c^2-b^2}{2a}.$$

LA ĐẠI CƯƠNG

(GV THPT Cam Lộ, Quảng Trị)

Bài T9/564. Cho d là một số thực dương và f là một hàm số xác định và có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (-d; d)$ thỏa mãn

$$d^2 f''(c)=f(d)-2f(0)+f(-d).$$

NGUYỄN HUY HOÀNG

(SV lớp Sư phạm Toán K45, ĐH Quy Nhơn)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/564. Cho $a=\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}2^i C_n^{2i}$ và $b=\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}2^i C_n^{2i+1}$, trong đó $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ là số tổ hợp chập k của n phần tử. Hãy tìm ước số chung lớn nhất của a và b.

NGUYỄN VIỆT HÙNG

(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T11/564. Tìm tất cả các hàm số liên tục $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn:

$$\begin{cases} f(x)\,\vdots\,2, \forall x \in \mathbb{N}^* \\ f(2x) = 2f(x), \forall x \in \mathbb{R}^+ \\ f(f^2(x)) = 4xf(x), \forall x \in \mathbb{R}^+ \end{cases}.$$

TỪ HỮU SƠN
(Sở GD&ĐT Hà Tĩnh)

Bài T12/564. Cho tứ giác $ABCD$. Điểm E thuộc AB. Điểm F thay đổi trên CD. Các điểm M, N theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của C, D trên EF. P là giao điểm của đường thẳng qua M vuông góc với AD và đường thẳng qua N vuông góc với BC. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP chạy trên một đường tròn cố định.

NGUYỄN MINH HÀ *(Hà Nội)*
LƯU CÔNG ĐÔNG
(GV THPT chuyên ĐHSP Hà Nội)

Bài L1/564. Một chất điểm dao động điều hòa theo phương trình $x = 4\cos\frac{2\pi}{3}t$ (x tính bằng cm; t tính bằng s). Kể từ $t = 0$, chất điểm đi qua vị trí có li độ $x = -2$ cm lần thứ 2011 tại thời điểm nào?

VIỆT CƯƠNG *(Hà Nội)*

Bài L2/564. Bằng một đường dây truyền tải, điện năng từ một nhà máy phát điện có công suất không đổi được đưa đến một xưởng sản xuất. Nếu tại nhà máy điện, dùng máy biến áp có tỉ số vòng dây của cuộn thứ cấp và cuộn sơ cấp là 4 thì tại nơi sử dụng sẽ cung cấp đủ điện năng cho 80 máy hoạt động. Nếu dùng máy biến áp có tỉ số vòng dây của cuộn thứ cấp và cuộn sơ cấp là 10 thì tại nơi sử dụng cung cấp đủ điện năng cho 95 máy hoạt động. Nếu đặt xưởng sản xuất tại nhà máy điện thì cung cấp đủ điện năng cho bao nhiêu máy?

THANH LÂM *(Hà Nội)*

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/564 (For 6th grade). Prove that

$$\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\ldots+\frac{1}{2024^3}<\frac{5}{24}.$$

Problem T2/564 (For 7th grade). Given positive integers a, b, c. Show that

$$M = \frac{3a}{3a+5b}+\frac{2b}{2b+3c}+\frac{5c}{5c+2a}$$

cannot be a natural number.

Problem T3/564. Suppose that m, n are integers satisfying $m \geq n > 1$. Do there exist $m + n$ distinguished positive integers so that the sum of arbitrary m numbers among them is divisible by the sum of the n remain numbers?

Problem T4/564. Given a right triangle ABC with the right angle at A and the altitude AH. Let r_1, r_2 respectively be the inradius of AHB, AHC. Show that $\frac{AH}{r_1+r_2} \geq 1+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Problem T5/564. Given positive numbers a, b, c. Prove that

$$\frac{2a^2}{b+c}+\frac{2b^2}{b+c}+\frac{c^2}{b} \geq 2a+c.$$

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/564. Suppose that a, b, c, A, B, C, D are real numbers satisfying the equality $(Ax+B)(Cx+D) = ax^2+bx+c$ for every real value of x. Show that at least one number among a, b, c is not less than

$$\frac{4(A+B)(C+D)}{9}.$$

Problem T7/564. Solve the system of equations $\begin{cases} 3^{y-x^3}=\left(\sqrt{y^2+1}+y\right)\left(\sqrt{x^6+1}-x^3\right) \\ 3^{3y}-3x^3\ge 2x.3^{y+1}+5y+1 \end{cases}$.

Problem T8/564. Given a triangle ABC with $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$. Show that

$$c\cos\left(B+\frac{\pi}{3}\right)-b\cos\left(C+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{c^2-b^2}{2a}.$$

Problem T9/564. Given a positive number d and f is a function which has second derivative on $\mathbb{R}$. Show that there exists $c\in(-d;d)$ such that

$$d^2f''(c)=f(d)-2f(0)+f(-d).$$

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/564. Let $a=\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}2^iC_n^{2i}$ and $b=\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}2^iC_n^{2i+1}$, where $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ is the number of k-combinations of n elements. Find the greatest common factor of a and b.

Problem T11/564. Find all continuous functions $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ satisfying

$$\begin{cases} f(x)\vdots 2, \forall x\in\mathbb{N}^* \\ f(2x)=2f(x), \forall x\in\mathbb{R}^+ \\ f(f^2(x))=4xf(x), \forall x\in\mathbb{R}^+ \end{cases}.$$

Problem T12/564. Given a quadrilateral $ABCD$, a point E is fixed on AB and a point F varies on CD. The points M, N respectively be the perpendicular projection of C, D on EF. Assume that P is the intersection between the line through M perpendicular to AD and the line through N perpendicular to BC. Show that the circumcenter of MNP belongs to a fixed circle.

DR. NGUYEN PHU HOANG LAN
(University of Education, VNU, Hanoi)

****

PHÁT TRIỂN . . . *(Tiếp theo trang 5)*

Áp dụng BĐT(**) ta được:

$$\frac{3}{a+b}+\frac{2}{c+d}=\frac{3(c+d)+2(a+b)}{(a+b)(c+d)}$$
$$\ge(3c+3d+2a+2b).\frac{4}{(a+b+c+d)^2};$$

$$\frac{a+b}{(a+c)(b+d)}\ge(a+b).\frac{4}{(a+b+c+d)^2}.$$

Cộng theo vế hai BĐT trên ta có:

$$\frac{3}{a+b}+\frac{2}{c+d}+\frac{a+b}{(a+c)(b+d)}\ge\frac{12}{a+b+c+d}.$$

Bài 20. *Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:*

$$\frac{(a+b)^2}{a+b-c}+\frac{(b+c)^2}{-a+b+c}+\frac{(c+a)^2}{a-b+c}\ge4(a+b+c).$$

Hướng dẫn. Vì $a,b,c>0$ là độ dài ba cạnh của một tam giác nên theo BĐT tam giác ta có:

$$a+b>c>0;\ a+c>b>0;\ c+b>a>0.$$

Áp dụng BĐT(**) ta được:

$$\frac{(a+b)^2}{a+b-c}=\frac{c(a+b)^2}{c(a+b-c)}\ge c(a+b)^2.\frac{4}{(c+a+b-c)^2}=4c$$

$$\Rightarrow\frac{(a+b)^2}{a+b-c}\ge4c.$$

Chứng minh tương tự:

$$\frac{(b+c)^2}{-a+b+c}\ge4a;\quad\frac{(c+a)^2}{a-b+c}\ge4b.$$

Cộng theo vế các BĐT trên ta có:

$$\frac{(a+b)^2}{a+b-c}+\frac{(b+c)^2}{-a+b+c}+\frac{(c+a)^2}{a-b+c}\ge4(a+b+c).$$

Bài T1/560. *Cho tổng $A = p^2 + 95$, trong đó p là số nguyên tố. Tìm p sao cho A có đúng 8 ước số nguyên dương.*

Lời giải. Xét số nguyên tố p.

+ Với $p = 2$ ta có: $A = 2^2 + 95 = 99 = 3^2.11$, số này có 6 ước số nguyên dương là 1; 3; 9; 11; 33; 99, không thỏa mãn.

+ Với $p = 3$ có $A = 3^2 + 95 = 104 = 2^3.13$, số này có 8 ước số nguyên dương là 1; 2; 4; 8; 13; 26; 52; 104, thỏa mãn.

+ Xét số nguyên tố $p \ge 5$ thì p là số lẻ và không chia hết cho 2, cho 3, vì thế p có dạng $6k + 1$ hoặc $6k - 1$ với $k \ge 1$.

- Với $p = 6k + 1$ thì
$$A = (6k+1)^2 + 95 = 36k^2 + 12k + 96 = 12k(3k+1) + 96.$$

Số $96 = 24.4$, còn $k(3k + 1)$ là số chẵn dù số k lẻ hay chẵn, do đó số $A = 24h$ với số nguyên dương $h \ge 2$.

- Với $p = 6k - 1$ thì
$$A = (6k-1)^2 + 95 = 36k^2 - 12k + 96 = 12k(3k-1) + 96.$$

Số $k(3k - 1)$ là số chẵn dù số k lẻ hay chẵn, do đó số $A = 24n$ với số nguyên dương $n \ge 2$. Như vậy với p có dạng $6k + 1$ hoặc $6k - 1$ thì số A có ít nhất 9 ước số nguyên dương là 1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24 và chính số $A > 24$, không thỏa mãn. Vậy số nguyên tố p phải tìm là $p = 3$.

Nhận xét. Có thể xét bài toán này khi thay đổi số 95 và yêu cầu số A có nhiều ước số nguyên dương hơn.

Các bạn sau có lời giải đúng: **Thái Bình:** *Lưu Diệp Chi*, 6A5, THCS Kỳ Bá, TP. Thái Bình; **Nghệ An:** *Nguyễn Thái Dũng, Phạm Nguyễn Nguyệt Linh, Nguyễn Sỹ Bảo Long, Dương Minh Quang, Phạm Hồng Quân*, 6B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/560. *Cho*

$$A = \frac{3}{1.2.4.5} + \frac{4}{2.3.5.6} + \frac{5}{3.4.6.7} + \dots + \frac{2023}{2021.2022.2024.2025}$$

So sánh A và $\frac{1}{8}$.

Lời giải. Trước hết ta chứng minh rằng

$$\frac{n+2}{n(n+1)(n+3)(n+4)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+3)} - \frac{1}{(n+1)(n+4)}\right] \quad (1).$$

Thật vậy, ta có:

$$\frac{1}{n(n+3)} - \frac{1}{(n+1)(n+4)} = \frac{(n+1)(n+4) - n(n+3)}{n(n+1)(n+3)(n+4)}$$
$$= \frac{n^2 + 5n + 4 - n^2 - 3n}{n(n+1)(n+3)(n+4)}$$
$$= \frac{2(n+2)}{n(n+1)(n+3)(n+4)}$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+3)} - \frac{1}{(n+1)(n+4)}\right]$$

Thay lần lượt $n = 1, 2, 3, \dots, 2021$ vào (1) rồi cộng lại, ta được:

$$A = \frac{3}{1.2.4.5} + \frac{4}{2.3.5.6} + \frac{5}{3.4.6.7} + \dots + \frac{2023}{2021.2022.2024.2025}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1.4} - \frac{1}{2.5} + \frac{1}{2.5} - \frac{1}{3.6} + \frac{1}{3.6} - \frac{1}{4.7} + \dots + \frac{1}{2021.2024} - \frac{1}{2022.2025}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1.4} - \frac{1}{2022.2025}\right) < \frac{1}{8}.$$

Vậy $A < \frac{1}{8}$.

Nhận xét. Có thể giải bài toán bằng cách:

Chứng minh

$$\frac{6(n+2)}{n(n+1)(n+3)(n+4)}=\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+3)(n+4)} \quad (2)$$

và lưu ý $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ (3); thay lần lượt $n=1,2,3,\dots,2021$ và áp dụng (2), (3); rút gọn, ta được: $6A=\frac{3}{4}-\frac{1}{2022}+\frac{1}{2025}<\frac{3}{4}\Rightarrow A<\frac{1}{8}$.

Các bạn sau đây có bài giải tốt:

Phú Thọ: *Cao Duy Hưng*, 7A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông, *Trần Anh Đức*, *Triệu Anh Trí*, 7A3, THCS Vũ Duệ, Lâm Thao; **Quảng Ngãi:** *Trần Văn Phụng*, 6C, THCS Nguyễn Kim Vang, Hành Đức, Nghĩa Hành; **Nghệ An:** *Nguyễn Sỹ Bảo Long*, *Nguyễn Thái Dũng*, 6B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Thái Bình:** *Lưu Diệp Chi*, 6A5, THCS Kỳ Bá, TP. Thái Bình; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Hoàng Phương Lê*, 7A, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ; **Sóc Trăng:** *Nguyễn Tấn Phát*, 9/11, THCS Lý Thường Kiệt.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T3/560. *Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì hiệu $(2n)^{2022n}-1$ không thể là lũy thừa của một số tự nhiên với số mũ nguyên dương và lớn hơn 1.*

Lời giải. Giả sử tồn tại số tự nhiên x và số nguyên dương k với $k\ge 2$ sao cho

$$(2n)^{2022n}-1=x^k$$

hay $[(2n)^{1011n}+1)].[(2n)^{1011n}-1)]=x^k$.

Nhận thấy $(2n)^{1011n}-1$ và $(2n)^{1011n}+1$ là hai số tự nhiên lẻ liên tiếp.

Gọi ƯCLN$((2n)^{1011n}-1),(2n)^{1011n}+1))=d$ (d là số tự nhiên), suy ra:

$((2n)^{1011n}+1)-((2n)^{1011n}-1)=2$ chia hết cho d, mà d là số lẻ nên $d=1$. tức là hai số $(2n)^{1011n}-1)$ và $(2n)^{1011n}+1)$ nguyên tố cùng nhau.

Do đó $(2n)^{1011n}-1=a^k$ và $(2n)^{1011n}+1=b^k$ (với $1\le a<b$, a và b là các số tự nhiên, $(a,b)=1$), nên $b^k-a^k=2$ (1).

Mặt khác, do $1\le a<b$ và $k\ge 2$ nên

b^k-a^k

$=(b-a)(b^{k-1}+b^{k-2}a+\dots+ba^{k-2}+a^{k-1})>2$ (2).

Ta thấy (1) và (2) mâu thuẫn nhau, nên điều giả sử là sai.

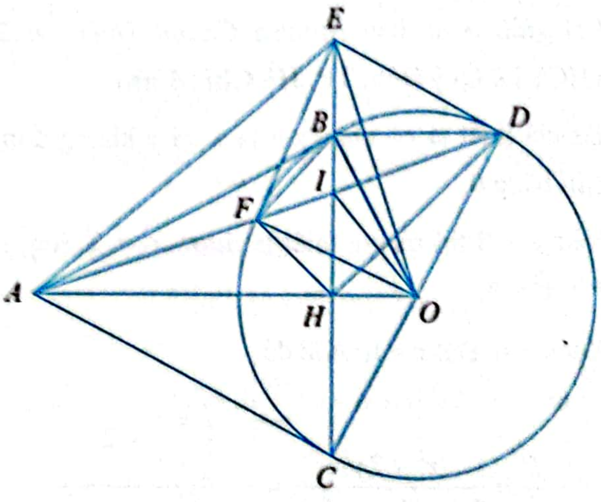
Vậy $(2n)^{2022n}-1$ không thể là lũy thừa của một số tự nhiên với số mũ nguyên dương và lớn hơn 1.

Nhận xét. Đây là bài toán vận dụng kiến thức về số học và tính chia hết để giải. Các bạn gửi bài không nhiều, tuyên dương bạn *Hoàng Văn Nhân*, 8C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An** có lời giải chặt chẽ và ngắn gọn.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T4/560. *Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Qua A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với (O) (B, C thuộc (O)). Kẻ đường kính CD của (O). Tiếp tuyến tại D của (O) cắt đường thẳng BC tại E, AD cắt BC tại I. Chứng minh OI vuông góc với AE.*

Lời giải.



Gọi F là giao điểm thứ hai của AD với đường tròn (O), H là giao điểm của AO và BC.

Áp dụng hệ thức trong tam giác vuông ABO ta có

$$AB^2=AO.AH \quad (1).$$

Chú ý rằng $\Delta ABF \sim \Delta ADB$ (g.g) nên ta có:

$$AB^2 = AF.AD \quad (2).$$

Từ (1), (2) suy ra tứ giác $FHOD$ là tứ giác nội tiếp.

Suy ra: $\widehat{HFO} = \widehat{HDO} \quad (3).$

Mặt khác, vì $\widehat{EDO} = \widehat{EHO} = 90^\circ$ nên tứ giác $DEHO$ là tứ giác nội tiếp, do đó $\widehat{HDO} = \widehat{HEO} \quad (4).$

Từ (3), (4) suy ra $\widehat{HFO} = \widehat{HEO}$, nên tứ giác $EFHO$ nội tiếp.

Vậy các điểm F, H, O, D, E cùng thuộc đường tròn đường kính OE, do đó $\widehat{EFO} = \widehat{EHO} = 90^\circ$, suy ra EF là tiếp tuyến của (O).

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có $AI \perp OE$ và $EI \perp AO$. Do đó I là trực tâm tam giác AOE. Suy ra $OI \perp AE$.

Nhận xét. Chỉ có bạn *Lê Thị Ngân Tâm*, 9G, THCS Phan Đình Phùng, TP. Đông Hà, Quảng Trị cho lời giải đúng.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/560. *Cho x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện $2x^2 - 3xy + 4y^2 = 6$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + 2y^2$.*

Lời giải. (Của bạn *Nguyễn Chánh Thiện*, 9/12, THCS Lê Quý Đôn, TP. Hồ Chí Minh).

Từ giả thiết ta có nhận xét là x và y không đồng thời bằng 0.

Nếu $y = 0$ thì từ giả thiết ta được $x^2 = 3$. Suy ra $P = x^2 = 3$.

Xét $y \neq 0$. Đặt $x = ty$. Khi đó:

$$\frac{P}{6} = \frac{x^2 + 2y^2}{2x^2 - 3xy + 4y^2} = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2}{2\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 3.\frac{x}{y} + 4}$$

$$= \frac{t^2 + 2}{2t^2 - 3t + 4}$$

$$\Leftrightarrow (2P - 6)t^2 - 3Pt + 4P - 12 = 0 \quad (*).$$

Nếu $P = 3$ thì $t = 0$, suy ra $x = 0$.

Xét $P \neq 3$, khi đó $2P - 6 \neq 0$ và (*) là phương trình bậc hai ẩn t. Để PT(*) có nghiệm thì

$$\Delta = 9P^2 - 4(2P-6)(4P-12) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (3P)^2 - \left[4\sqrt{2}(P-3)\right]^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left[(3-4\sqrt{2})P + 12\sqrt{2}\right]\left[(3+4\sqrt{2})P - 12\sqrt{2}\right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{12\sqrt{2}}{4\sqrt{2}+3} \leq P \leq \frac{12\sqrt{2}}{4\sqrt{2}-3}.$$

Vậy $\min P = \frac{12\sqrt{2}}{4\sqrt{2}+3}$ khi $t = \frac{x}{y} = -\sqrt{2}$ tức là khi

$$(x;y) = \left(\sqrt{\frac{6\sqrt{2}}{4\sqrt{2}+3}}; -\sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{2}+3}}\right) \text{ hoặc}$$

$$(x;y) = \left(-\sqrt{\frac{6\sqrt{2}}{4\sqrt{2}+3}}; \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{2}+3}}\right)$$

$\max P = \frac{12\sqrt{2}}{4\sqrt{2}-3}$ khi $t = \frac{x}{y} = \sqrt{2}$ tức là khi

$$(x;y) = \left(\sqrt{\frac{6\sqrt{2}}{4\sqrt{2}-3}}; \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{2}-3}}\right) \text{ hoặc}$$

$$(x;y) = \left(-\sqrt{\frac{6\sqrt{2}}{4\sqrt{2}-3}}; -\sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{2}-3}}\right).$$

Nhận xét. Chỉ có bạn *Thiện* tham gia giải bài này. Xin hoan nghênh bạn.

NHƯ HOÀNG

Bài T6/560. *Cho các số thực a, b, c lớn hơn 1 thỏa mãn $2(a+b+c) = ab + bc + ca$ (1). Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{\sqrt{b^2-1}} + \frac{b}{\sqrt{c^2-1}} + \frac{c}{\sqrt{a^2-1}} \geq 2\sqrt{3} \quad (2).$$

Lời giải (Của bạn *Lưu Diệp Chi* và đa số các bạn)

Từ giả thiết (1) ta có:

$$6(a+b+c) = 3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2.$$

Suy ra: $a + b + c \geq 6 \quad (3).$

Ta có:

$$(2) \Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{(3b-3)(b+1)}} + \frac{b}{\sqrt{(3c-3)(c+1)}} + \frac{c}{\sqrt{(3a-3)(a+1)}} \ge 2 \ (*).$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số dương ta có:

$$\sqrt{(3b-3)(b+1)} \le \frac{3b-3+b+1}{2} = 2b-1.$$

Suy ra:

$$\frac{a}{\sqrt{(3b-3)(b+1)}} \ge \frac{a}{2b-1} = \frac{a^2}{2ab-a}.$$

Tương tự: $\dfrac{b}{\sqrt{(3c-3)(c+1)}} \ge \dfrac{b^2}{2bc-b}$,

$$\frac{c}{\sqrt{(3a-3)(a+1)}} \ge \frac{c^2}{2ca-c}.$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên ta có:

$$VT(*) \ge \frac{a^2}{2ab-a} + \frac{b^2}{2bc-b} + \frac{c^2}{2ca-c}.$$

Áp dụng BĐT Schwarz, kết hợp với (3), ta được:

$$\frac{a^2}{2ab-a} + \frac{b^2}{2bc-b} + \frac{c^2}{2ca-c} \ge \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)-(a+b+c)} = \frac{(a+b+c)^2}{4(a+b+c)-(a+b+c)} = \frac{a+b+c}{3} \ge 2.$$

Vậy (*) hay (2) được chứng minh.

Nhận xét: Tất cả các bạn đã gửi bài có lời giải tốt: **Bình Định:** *Nguyễn Hồ Dũng*, TP. Quy Nhơn. **Đồng Tháp:** *Võ Hai Yến*, 11H, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu. **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Khắc Anh Minh*, 10 Toán 2, THPT chuyên Hà Tĩnh. **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Đức Thắng*, 9A, THCS Quỳnh Trang, TX. Hoàng Mai, thị xã Hoàng Mai. **Phú Thọ:** *Hà Phương Anh*, 10 CT, THPT chuyên Hùng Vương. **Phú Yên:** *Nguyễn Tấn Nguyên Chương*, 11 Toán 1, *Huỳnh Trần Gia Huy*, 10 Toán 1, THPT chuyên Lương Văn Chánh. **Quảng Bình:** *Hoàng Kim Lộc*, 11 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp. **Quảng Trị:** *Lê Thị Kim Ngân*, 9G, THCS Phan Đình Phùng, TP. Đông Hà. **Sóc Trăng:** *Đoàn Trọng Qui*, 11T2, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai. **Thái Bình:** *Lưu Diệp Chi*, 6A5, THCS Kỳ Bá, TP. Thái Bình. **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Chánh Thiện*, 9/12, THCS Lê Quý Đôn, Quận 3.

TẠ DUY PHƯỢNG

Bài T7/560. *Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = |a+b+3c| + |a+3b+c| + |3a+b+c|.$$

Lời giải. a) *Giá trị lớn nhất*

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovksy, ta có:

$$P^2 \le 3\left((a+b+3c)^2 + (b+c+3a)^2 + (c+a+3b)^2\right) = 3Q$$

với $Q = 11(a^2+b^2+c^2) + 14(ab+bc+ca)$.

Suy ra: $P^2 \le 225$, kéo theo $P \le 15$.

Khi $a=b=c=1$ thì $P=15$. Vậy max$P$ = 15.

b) *Giá trị nhỏ nhất*

Bình phương biểu thức *P*, ta có:

$$P^2 = Q + 2\sum_{cyc} |(a+b+3c)(b+c+3a)|.$$

Áp dụng bất đẳng thức

$$|x|+|y|+|z| \ge |x+y+z|,$$

ta có: $$P^2 \ge Q + 2\left|\sum_{cyc}(a+b+3c)(b+c+3a)\right| = Q + 6\left|7 + 6\sum_{cyc} ab\right| = Q + 6|R|$$

trong đó $R = 7 + 6\sum_{cyc} ab$.

Chú ý là $Q=33+14\sum_{cyc}ab=\frac{7}{3}\left(7+6\sum_{cyc}ab\right)+\frac{50}{3}$

$$=\frac{7}{3}R+\frac{50}{3}$$

nên áp dụng bất đẳng thức $x+|x|\geq 0$, ta được:

$$P^2\geq\frac{50}{3}+\frac{7}{3}R+6|R|\geq\frac{50}{3}+\frac{7}{3}R+\frac{7}{3}|R|\geq\frac{50}{3}.$$

Kéo theo: $P\geq\frac{5\sqrt{6}}{3}$. Khi $a=b=\frac{\sqrt{6}}{6}, c=-\frac{2\sqrt{6}}{3}$ thì $P=\frac{5\sqrt{6}}{3}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{5\sqrt{6}}{3}$.

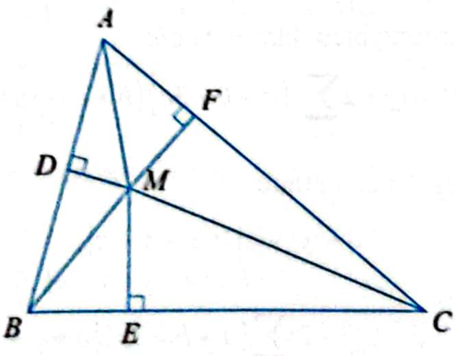
Nhận xét. Bài toán này không khó, nhưng đáng tiếc là không có bạn nào cho lời giải đúng và hoàn chỉnh.

NGUYỄN TIẾN LÂM

Bài T8/560. *Cho điểm M nằm trong tam giác nhọn ABC. Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên AB, BC, CA. Chứng minh*

$$MD^2+ME^2+MF^2\geq\left(MA.\sin\frac{A}{2}\right)^2+\left(MB.\sin\frac{B}{2}\right)^2+\left(MC.\sin\frac{C}{2}\right)^2.$$

Lời giải. Cách 1. (Theo bạn *Nguyễn Tấn Nguyên Chương*, 11 Toán 1, THPT chuyên Lương Văn Chánh, TP. Tuy Hoà, Phú Yên).



Trước hết ta chứng minh kết quả sau:

Với $x,y\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ sao cho $x+y\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ thì

$$\sin^2x+\sin^2y\geq 2\sin^2\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Thật vậy bất đẳng thức trên tương đương với:

$$\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1-\cos 2y}{2}+\cos(x+y)-1\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\cos(x+y)-\frac{1}{2}(\cos 2x+\cos 2y)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\cos(x+y)[1-\cos(x-y)]\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\cos(x+y).\sin^2\left(\frac{x-y}{2}\right)\geq 0.$$

Bất đẳng thức này luôn đúng với $x+y\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Ta có điều cần chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y$.

Trở lại bài T8/560, sử dụng kết quả trên và lưu ý tam giác ABC là tam giác có ba góc nhọn ta có:

$$MD^2+MF^2=MA^2\left(\sin^2\widehat{MAD}+\sin^2\widehat{MAF}\right)\geq 2MA^2.\sin^2\frac{A}{2};$$

$$ME^2+MD^2=MB^2\left(\sin^2\widehat{MBE}+\sin^2\widehat{MBD}\right)\geq 2MB^2.\sin^2\frac{B}{2};$$

$$MF^2+ME^2=MC^2\left(\sin^2\widehat{MCF}+\sin^2\widehat{MCE}\right)\geq 2MC^2.\sin^2\frac{C}{2}.$$

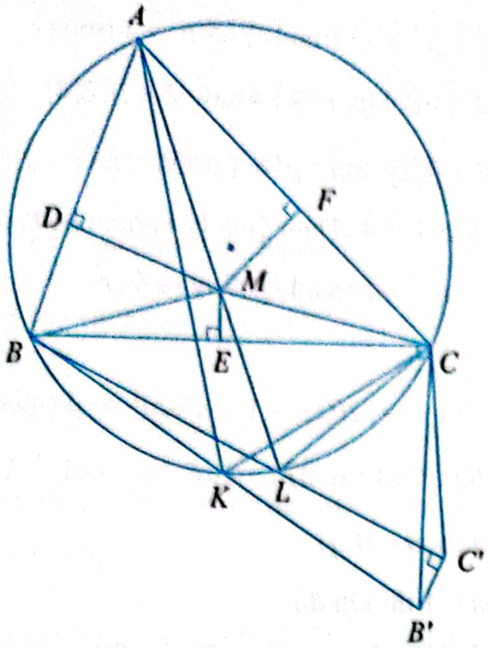
Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta thu được:

$$MD^2+ME^2+MF^2\geq\left(MA.\sin\frac{A}{2}\right)^2+\left(MB.\sin\frac{B}{2}\right)^2+\left(MC.\sin\frac{C}{2}\right)^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Cách 2. (Theo bạn *Nguyễn Duy Hùng Vỹ*, 10CT, THPT chuyên Hùng Vương, TP. Việt Trì, Phú Thọ).

Giả sử tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O,R). Gọi L là giao điểm của AM với (O, R), đường phân giác trong của $\widehat{BAC}$ cắt (O,R) tại K. Dễ thấy:



$MD = MA\sin\widehat{MAB} = MB.\sin\widehat{MBA};$

$ME = MB\sin\widehat{MBC} = MC.\sin\widehat{MCB};$

$MF = MA\sin\widehat{MAC} = MC.\sin\widehat{MCA}.$

Suy ra:

$$MD^2+ME^2+MF^2=\frac{1}{2}MA^2(\sin^2\widehat{MAC}+\sin^2\widehat{MAB})+\frac{1}{2}MB^2(\sin^2\widehat{MBC}+\sin^2\widehat{MBA})+\frac{1}{2}MC^2(\sin^2\widehat{MCA}+\sin^2\widehat{MCB}).$$

Ta sẽ chứng minh:

$$\sin^2\widehat{MAC}+\sin^2\widehat{MAB}\ge 2\sin^2\frac{\widehat{BAC}}{2}\quad (1).$$

Từ định lý hàm số sin ta thấy:

$$(1)\Leftrightarrow \frac{LB^2+LC^2}{R^2}\ge\frac{2BK^2}{R^2}$$
$$\Leftrightarrow LB^2+LC^2\ge 2BK^2\quad (2).$$

Áp dụng định lý côsin cho các tam giác BCL, BKC ta có:

$$BC^2=BL^2+CL^2-2.BL.CL.\cos\widehat{BLC};$$
$$BC^2=2BK^2-2BK^2\cos\widehat{BKC}$$
$$\Rightarrow BL^2+CL^2-2BK^2=2.BL.CL.\cos\widehat{BLC}-2BK^2\cos\widehat{BKC}.$$

Để ý rằng $\cos\widehat{BLC}=\cos\widehat{BKC}<0$, nên để chứng minh (2) ta cần chứng minh $BL.CL\le BK^2$.

Lấy B' đối xứng với B qua K, C' thuộc tia đối tia LB sao cho $LC'=LC$. Lúc đó tam giác BCB' vuông tại C. Ta có:

$$\widehat{BC'C}=\frac{1}{2}\widehat{BLC}=\frac{1}{2}\widehat{BKC}=\widehat{BB'C},$$

nên tứ giác $BB'C'C$ nội tiếp đường tròn đường kính BB'. Suy ra:

$$BB'\ge BC'\Rightarrow 2BK\ge BL+LC$$
$$\Rightarrow BK\ge\frac{BL+LC}{2}\ge\sqrt{BL.LC}\quad \text{(BĐT Cauchy)}$$
$$\Rightarrow BK^2\ge BL.CL.$$

Từ đó bất đẳng thức (2) được chứng minh.

Tương tự có:

$$\sin^2\widehat{MBC}+\sin^2\widehat{MBA}\ge 2\sin^2\frac{\widehat{ABC}}{2}\ (3);$$
$$\sin^2\widehat{MCA}+\sin^2\widehat{MCB}\ge 2\sin^2\frac{\widehat{ACB}}{2}\ (4).$$

Từ (1), (3) và (4) suy ra:

$$MD^2+ME^2+MF^2\ge\left(MA.\sin\frac{A}{2}\right)^2+\left(MB.\sin\frac{B}{2}\right)^2+\left(MC.\sin\frac{C}{2}\right)^2.$$

Dấu "=" xảy ra khi M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Nhận xét. Ngoài bạn *Nguyễn Tấn Nguyên Chương* và bạn *Nguyễn Duy Hùng Vỹ*, Tòa soạn không nhận được thêm bài giải nào khác của các bạn gửi về.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/560. *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{ca}{(b+c)(b+a)}+\frac{ab}{(c+a)(c+b)}\le\frac{3}{4}+\frac{3M(M-m)^2}{4(a+b)(b+c)(c+a)}\quad (1)$$

trong đó $M=\max\{a,b,c\}$, $m=\min\{a,b,c\}$.

Lời giải. Ta có:

$(1) \Leftrightarrow 4bc(b+c)+4ca(c+a)+4ab(a+b)$
$$\le 3(a+b)(b+c)(c+a)+3M(M-m)^2$$
$\Leftrightarrow a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2 \le 3M(M-m)^2 (2).$

Vì $m \le a,b,c \le M$ nên ta có:
$$-(M-m)\le a-b \le M-m \Rightarrow |a-b| \le M-m$$
$\Leftrightarrow (a-b)^2 \le (M-m)^2 \Rightarrow c(a-b)^2 \le M(M-m)^2.$

Tương tự:

$a(b-c)^2 \le M(M-m)^2; b(c-a)^2 \le M(M-m)^2.$

Cộng theo vế các BĐT này được BĐT(2), do đó ta có BĐT cần chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Nhận xét. Các bạn tham gia giải bài này đều có lời giải đúng tương tự như cách giải trên. Danh sách các bạn là: **Phú Yên:** *Nguyễn Tấn Nguyên Chương*, 11 Toán 1, *Huỳnh Trần Gia Huy*, 10 Toán 1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Phú Thọ:** *Nguyễn Duy Hùng Vỹ*, 10 chuyên Toán, THPT chuyên Hùng Vương, TP. Việt Trì.

TRẦN HỮU NAM

Bài T10/560. *Tìm tất cả các số nguyên tố p, q sao cho* $\begin{cases} p^2+1 \mid 2023^q+1 \\ q^2+1 \mid 2023^p+1 \end{cases}$.

Lời giải (Dựa trên lời giải của bạn *Nguyễn Tấn Nguyên Chương*, 11 Toán 1, THPT chuyên Lương Văn Chánh, **Phú Yên**)

Không giảm tổng quát ta giả sử $p \le q$.

Với $p = 2$ ta có :
$$5 \mid 2023^q+1 \Rightarrow 2023^q \equiv 4 \pmod 5$$
$$\Rightarrow 3^q \equiv 4 \pmod 5.$$

Đặt $q = 4k + r$ $(1 \le r \le 3)$.

Suy ra: $3^r \equiv 4 \pmod 5 \Rightarrow r = 2 \Rightarrow 2 \mid q \Rightarrow q = 2.$

Thử lại ta thấy $p = q = 2$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Xét $3 \le p \le q$. Gọi r là một ước nguyên tố lẻ bất kỳ của p^2+1.

Ta có: $p^2 \equiv -1 \pmod r \Rightarrow p^4 \equiv 1 \pmod r$. Gọi $h = \text{ord}_r(p)$. Suy ra $h \mid 4$ hay $h \in \{1,2,4\}$.

Nếu $h \in \{1,2\}$ thì $p^2 \equiv 1 \pmod r \Rightarrow r = 2$, mâu thuẫn. Vậy $h = 4$. Theo định lý Fermat bé ta có:
$$p^{r-1} \equiv 1 \pmod r. \text{ Suy ra } 4 \mid r-1.$$

Ta có:
$$r \mid p^2+1 \Rightarrow r \mid 2023^q+1 \Rightarrow 2023^q \equiv -1 \pmod r$$
$\Rightarrow (-2023)^q \equiv 1 \pmod r$. Gọi $m = \text{ord}_r(-2023)$ $\Rightarrow m \mid q \Rightarrow m \in \{1, q\}$.

- Nếu $m = 1$ thì khi đó:
$$(-2023) \equiv 1 \pmod r \Rightarrow 2024 \equiv 0 \pmod r.$$

Ta có: $2024 = 8.11.23 \Rightarrow r \in \{11,23\}$. Kết hợp với $4 \mid r-1$ nên ta có điều này là không thể.

- Nếu $m = q$ thì theo định lý Fermat bé ta có:
$$(-2023)^{r-1} \equiv 1 \pmod r \Rightarrow q \mid r-1 \Rightarrow r \equiv 1 \pmod q.$$

Ta có: $p^2+1 = 2r_1^{\alpha_1}...r_k^{\alpha_k}$, ở đó r_i là các số nguyên tố. Vì $r_i \equiv 1 \pmod q$ với mọi i = 1, 2,..., k nên suy ra: $p^2+1 \equiv 2 \pmod q \Rightarrow p^2-1 \equiv 0 \pmod q$
$$\Rightarrow q \mid (p-1)(p+1).$$

Ta có: $q \ge p > p-1$ nên q không là ước của $p-1$. Vậy $q \mid p+1$. Ta có:
$$p \le q \le p+1, q \ne p \Rightarrow q = p+1.$$

Điều này không thể vì p, q là các số lẻ.

Kết luận: $p = q = 2$.

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải đúng: **Phú Thọ:** *Hà Sơn Bình* , 10 CT, THPT chuyên Hùng Vương; **Quảng Bình:** *Hoàng Kim Lộc*, 11 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp ; **Phú Yên:** *Huỳnh Trần Gia Huy*, 10 Toán 1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Vĩnh Phúc:** *Trần Thái Dương*, 8 , THCS Lý Tử Trọng, Bình Xuyên.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/560. *Cho hàm số* $f:(0;+\infty)\to(0;+\infty)$ *thỏa mãn điều kiện:* $f(3x)\ge f\left(\frac{1}{2}f(2x)\right)+2x$ (1) *với mọi x > 0. Chứng minh rằng* $f(x)\ge x$ *với mọi* $x>0$.

Lời giải. (Theo đa số các bạn).

Từ (1) suy ra $f(x)\ge f\left(\frac{1}{2}f\left(\frac{2x}{3}\right)\right)+\frac{2x}{3},\forall x\in\mathbb{R}^+$

và do đó $f(x)\ge\frac{2x}{3},\forall x\in\mathbb{R}^+$.

Để ý rằng khi $f(x)\ge ax$ với mọi $x\in\mathbb{R}^+$ và $a\in(0,1)$ thì

$$f(3x)\ge f\left(\frac{1}{2}f(2x)\right)+2x\ge\frac{1}{2}f(2x)a+2x$$
$$\ge\frac{1}{2}\times 2x\times a^2+2x=(a^2+2)x$$

nên $f(x)\ge\frac{a^2+2}{3}x,\forall x\in\mathbb{R}^+$.

Xét dãy (x_n) với $x_1=\frac{2}{3}$ và

$$x_n=\frac{x_{n-1}^2+2}{3},n=2,3,\dots\ (3).$$

Do $1>\frac{a^2+2}{3}>a$ nên $x_n>x_{n-1}$, tức dãy (x_n) đơn điệu tăng và bị chặn trên bởi 1.

Suy ra dãy (x_n) hội tụ. Giả sử $\lim_{n\to+\infty}x_n=b$ thì $b\le 1$ và theo (3), ta có $b=\frac{b^2+2}{3}\Leftrightarrow b=1$.

Từ đó suy ra $f(x)\ge x,\forall x\in\mathbb{R}^+$.

Nhận xét. Đây là dạng toán về ước lượng bất phương trình hàm với hàm một biến tương đối phức tạp khi phải vận dụng nguyên lý hội tụ Weierstrass đối với dãy đơn điệu. Đa số các bạn đều giải theo cách đã trình bày ở trên. Các bạn sau đây có lời giải đúng:

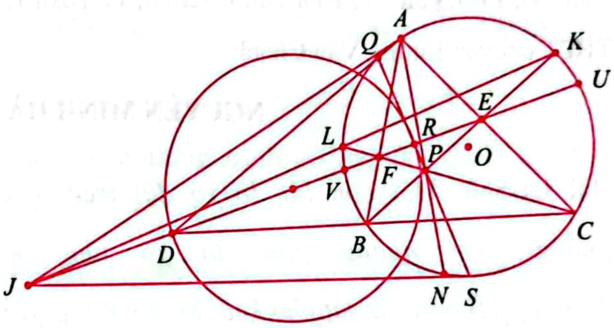
Phú Thọ: *Nguyễn Duy Hùng Vỹ, Lê Gia Huy,* 10CT, THPT chuyên Hùng Vương, TP. Việt Trì; **Phú Yên:** *Huỳnh Trần Gia Huy, Đinh Quốc Duy,* 10 Toán 1, *Nguyễn Tấn Nguyên Chương,* 11 Toán 1, THPT chuyên Lương Văn Chánh.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T12/560. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và một điểm P bất kỳ nằm trong tam giác ABC. Giả sử BP cắt AC tại E, CP cắt AB tại F, EF cắt BC tại D và AD cắt lại (O) tại một điểm Q khác A. Gọi R là giao điểm của PQ và EF. Chứng minh rằng đường tròn đường kính DR và đường tròn (O) trực giao.*

(Hai đường tròn được gọi là trực giao nếu chúng cắt nhau và tiếp tuyến của hai đường tròn tại mỗi giao điểm vuông góc với nhau).

Lời giải.



Gọi *U*, *V* là các giao điểm của *EF* và (*O*); *K*, *L*, *S*, *N* theo thứ tự là giao điểm thứ hai của *BE*, *CF*, *QP*, *AP* và (*O*); *J* là giao điểm của *EF* và *KL*.

Áp dụng định lí Pascal đảo cho sáu điểm $\begin{pmatrix}ALB\\KAC\end{pmatrix}$, chú ý rằng *J*, *E*, *F* thẳng hàng, suy ra *JA* tiếp xúc với (*O*) (1).

Qua phép nghịch đảo tâm *P* giữ nguyên đường tròn (*O*) các điểm *Q*, *N*, *K*, *L* theo thứ tự biến thành các điểm *S*, *A*, *B*, *C*.

Từ đó, chú ý rằng phép nghịch đảo bảo toàn tỉ số kép, ta có:

$(SAKL) = (QNBC) = A(QNBC)$
$= A(DPBC) = -1 \quad (2).$

Từ (1) và (2) suy ra JS tiếp xúc với (O). Do đó:

$$(UVDR) = Q(UVDR) = Q(UVAS) = (UVAS) = -1.$$

(Chú ý rằng JA, JS tiếp xúc với đường tròn (O) thì $AVSU$ là tứ giác điều hòa).

Vậy đường tròn đường kính DR trực giao với đường tròn (O).

Nhận xét. 1) Bài toán này khó, chỉ có hai bạn tham gia giải, tuy nhiên lời giải của cả hai bạn đều dài.

2) Xin nêu tên cả hai bạn: **Phú Thọ:** *Nguyễn Duy Hùng Vĩ*, 10CT, THPT chuyên Hùng Vương, TP. Việt Trì; **Phú Yên:** *Nguyễn Tấn Chương*, 11 Toán 1, THPT chuyên Lương Văn Chánh.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/560. *Một con lắc lò xo đặt trên mặt phẳng nằm ngang gồm lò xo nhẹ có độ cứng 20 N/m và vật nhỏ khối lượng 400 g. Hệ số ma sát trượt giữa vật và mặt phẳng ngang là 0,1. Ban đầu giữ vật ở vị trí lò xo bị dãn 6 cm rồi buông nhẹ để con lắc dao động tắt dần. Lấy g = 10 m/s². Kể từ lúc buông vật cho đến thời điểm tốc độ của vật bắt đầu giảm, thế năng của con lắc lò xo đã giảm một lượng bằng bao nhiêu?*

Lời giải. Tại O, ta có:

$$F_{đh} = F_{mst} \Leftrightarrow kx_0 = \mu mg$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{\mu mg}{k} = \frac{0,1.0,4.10}{20} = 0,02\,\text{m} = 2\,\text{cm}.$$

Ngay khi qua vị trí cân bằng O thì tốc độ bắt đầu giảm, thế năng của con lắc lò xo giảm:

$$\Delta W_t = \frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}.20.(0,06)^2 - \frac{1}{2}.20.(0,02)^2 = 0,032\,J = 32\,\text{mJ}.$$

Nhận xét. Chúc mừng hai bạn đã có lời giải đúng cho đề ra kì này: *Phạm Xuân Khánh*, 11A2, THPT Tam Phước, Biên Hòa, **Đồng Nai**; còn bạn thứ hai không ghi tên và địa chỉ để chúng tôi tuyên dương bạn.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/560. *Chiếu ánh sáng trắng có bước sóng từ 0,38 µm đến 0,76 πm vào hai khe trong thí nghiệm Y-âng. Tại vị trí ứng với vân sáng bậc 3 của ánh sáng tím có bước sóng λ = 0,4 πm còn có vân sáng của ánh sáng có bước sóng bằng bao nhiêu?*

Lời giải. Nếu tại M có bức xạ khác cho vân sáng trùng với vân sáng bậc 3 của bức xạ tím:

$$x = x_t \Leftrightarrow k\lambda = 3\lambda_t \Rightarrow \lambda = \frac{1,2.10^{-6}}{k} \quad (1).$$

Theo đề bài: $0,38.10^{-6} \le \lambda \le 0,76.10^{-6}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra:

$$0,316 \le \frac{1}{k} \le 0,663.$$

Vì k nguyên nên $k = 2$ hoặc $k = 3$.

Vậy M thêm bức xạ cho vân sáng là:

$$\lambda = 0,60\mu m.$$

Nhận xét. Có hai bạn cho lời giải đúng: **Đồng Nai:** *Phạm Xuân Khánh*, 11A2, THPT Tam Phước, Biên Hòa. Còn một bạn giải đúng nhưng quên không ghi họ tên và địa chỉ vào bài làm!

NGUYỄN XUÂN QUANG

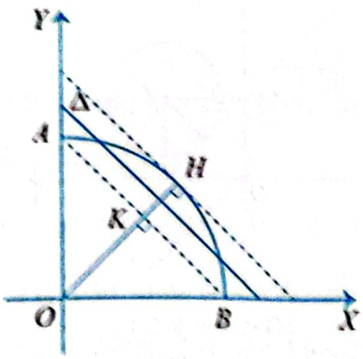
TIẾP CẬN MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐẠI SỐ, GIẢI TÍCH THEO HƯỚNG HÌNH HỌC

NGUYỄN THANH HẢI
(GV THPT Bắc Sơn, Thanh Hóa)

Trong phạm vi bài viết này, chúng tôi xin giới thiệu tới bạn đọc cách giải một số các bài toán Đại số - Giải tích theo hướng hình học, cụ thể bài viết sử dụng các kiến thức liên quan tới **đường thẳng, đường tròn** trong mặt phẳng toạ độ Descartes để nhìn nhận bài toán một cách **trực quan, mạch lạc**. Hy vọng qua bài viết, chúng ta có thể ít nhiều trang bị thêm cho mình những kinh nghiệm để giải các bài toán tương tự.

Thí dụ 1. *Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $\sqrt{m+x}+\sqrt{m-x}=m$ có nghiệm.*

Lời giải.



Xét $m<0$. Phương trình vô nghiệm.

Xét $m=0$. Phương trình thành:

$$\sqrt{x}+\sqrt{-x}=0 \Leftrightarrow x=0.$$

Xét $m>0$. Đặt $\begin{cases}\sqrt{m+x}=X\geq 0\\ \sqrt{m-x}=Y\geq 0\end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} m+x=X^2\\ m-x=Y^2\end{cases} \Rightarrow X^2+Y^2=2m.$$

Từ phương trình đã cho ta có $X+Y=m$.

Xem $X+Y=m$ là phương trình đường thẳng Δ, $X^2+Y^2=2m$ là phương trình đường tròn (C) trong mặt phẳng toạ độ OXY. Giả sử đường tròn (C) cắt chiều dương của các trục OX, OY lần lượt tại A, B. Kẻ $OK\perp AB$ ($K\in AB$), gọi H là giao điểm của OK với cung $\overset{\frown}{AB}$ (hình vẽ).

Tính được:

$$d(O;\Delta)=\frac{m}{\sqrt{2}},\ OH=\sqrt{2m},\ OK=\sqrt{m}.$$

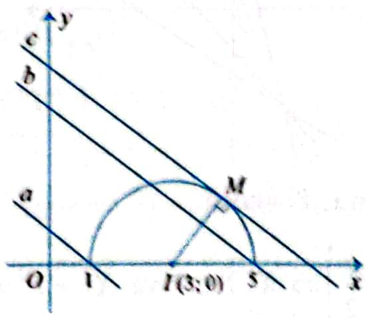
Phương trình có nghiệm khi chỉ khi Δ có điểm chung với cung $\overset{\frown}{AB}$. Dẫn đến:

$$OK\leq d(O;\Delta)\leq OH \Leftrightarrow \sqrt{m}\leq\frac{m}{\sqrt{2}}\leq\sqrt{2m}$$
$$\Leftrightarrow 2\leq m\leq 4.$$

Vậy, để phương trình có nghiệm thì $2\leq m\leq 4$ hoặc $m=0$.

Thí dụ 2. *Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $4\sqrt{-x^2+6x-5}=m-3x$ có nghiệm duy nhất.*

Lời giải.



Đặt $y=\sqrt{-x^2+6x-5} \Rightarrow y^2=-x^2+6x-5$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2+y^2=4\ \ (y\geq 0).$$

Phương trình đã cho trở thành $3x+4y-m=0$.

Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi đường thẳng $d: 3x+4y-m=0$ và nửa đường tròn $(C):(x-3)^2+y^2=4, (y\ge 0)$ có duy nhất một điểm chung, xét trong mặt phẳng toạ độ Oxy.

Suy ra đường thẳng d nằm giữa hai đường thẳng a và b (d có thể trùng vào a, không trùng b) hoặc d trùng với đường thẳng c, trong đó:

Đường thẳng $a: 3x+4y-m=0$ đi qua điểm $(1;0)$ nên tìm được $m_a=3$.

Đường thẳng $b: 3x+4y-m=0$ đi qua điểm $(5;0)$ nên tìm được $m_b=15$.

Đường thẳng $c: 3x+4y-m=0$ tiếp xúc với nửa đường tròn nên tìm được $m_c=19$.

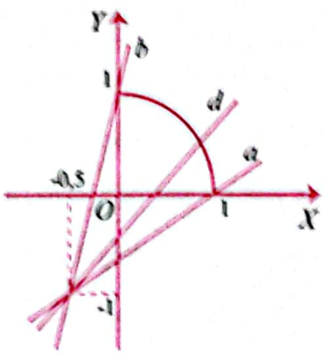
Vậy $3\le m<15$ hoặc $m=19$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

Thí dụ 3. *Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình*

$$2\sin x+(m-1)\cos x+m=0$$

có nghiệm $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Lời giải.



Đặt $X=\sin x, Y=\cos x$.

Do $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow X, Y\ge 0$ và $X^2+Y^2=1$ (C).

Phương trình đã cho trở thành:

$$2X+(m-1)Y+m=0 \quad (d).$$

Xét trong mặt phẳng toạ độ OXY ta có đường thẳng d và một phần tư đường tròn (C) nằm ở góc phần tư thứ nhất.

Nhận thấy d đi qua điểm cố định $\left(-\frac{1}{2};-1\right)$ và d phải nằm giữa hai đường thẳng a và b (d có thể trùng với a hoặc b).

Đường thẳng $b: 2X+(m-1)Y+m=0$ đi qua điểm $(0;1)$ nên tìm được $m_b=\frac{1}{2}$.

Đường thẳng $a: 2X+(m-1)Y+m=0$ đi qua điểm $(1;0)$ nên tìm được $m_a=-2$.

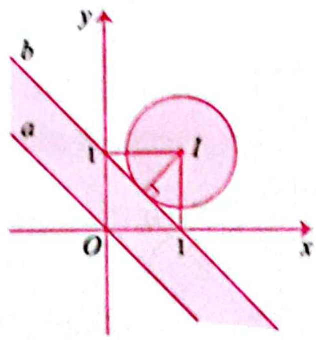
Vậy $-2\le m\le\frac{1}{2}$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

Thí dụ 4. *Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hệ bất phương trình*

$$\begin{cases}0<x+y\le 1\\ x+y+\sqrt{2xy+m}\ge 1\end{cases}$$

có nghiệm duy nhất.

Lời giải.



Ta có: $\text{HPT}\Leftrightarrow\begin{cases}0<x+y\le 1\\ \sqrt{2xy+m}\ge 1-(x+y)\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}0<x+y\le 1 & (1)\\ (x-1)^2+(y-1)^2\le m+1 & (2)\end{cases}$$

Miền nghiệm của (1) là phần nằm giữa hai đường thẳng $a: y=-x$; $b: y=-x+1$ lấy cả đường thẳng b và không lấy đường thẳng a.

Nếu $m\le -1$ thì hệ vô nghiệm.

Nếu $m>-1$ thì miền nghiệm của (2) là hình tròn (C) có tâm $I(1;1)$, bán kính $R=\sqrt{m+1}$ (kể cả biên).

Hệ đã cho có nghiệm duy nhất khi hai miền nghiệm có điểm chung duy nhất, dẫn đến b và (C) tiếp xúc với nhau.

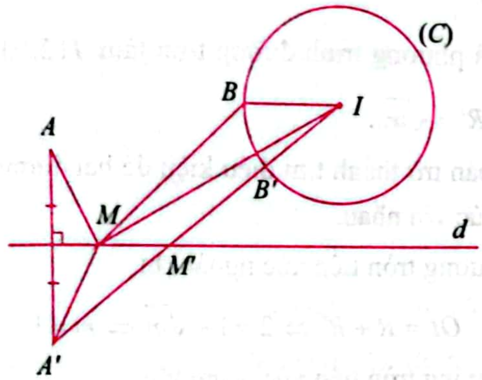
Suy ra $d(I;b)=R \Leftrightarrow \sqrt{m+1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow m=-\dfrac{1}{2}$.

Vậy $m=-\dfrac{1}{2}$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

Thí dụ 5. *Xét các số thực a, b, c, d thoả mãn $a^2+b^2-2a-4b+4=0$ và $2c-d=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$T=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}+\sqrt{(c+2)^2+(d+2)^2}.$$

Lời giải.



Xét trong mặt phẳng toạ độ Oxy, ta xem điểm $B(a;b)$ thuộc đường tròn

$$(C): x^2+y^2-2x-4y+4=0$$

có tâm $I(1;2)$, bán kính $R=1$ và điểm $M(c;d)$ thuộc đường thẳng $d: 2x-y-3=0$. Gọi $A(-2;-2)$ thì $T=MA+MB$.

Nhận thấy điểm A và đường tròn (C) nằm cùng phía so với đường thẳng d.

Lấy đối xứng A qua d được điểm $A'(2;-4)$, suy ra với $M \in d$ ta luôn có $MA=MA'$.

Dẫn đến:

$$T=MA+MB=MA'+MB \geq MA'+MI-R$$
$$\geq MA'+MI-1 \geq A'I-1=\sqrt{37}-1.$$

Dấu bằng xảy ra khi A', M, B, I thẳng hàng.

Vậy $\min T=\sqrt{37}-1$.

Thí dụ 6 (THPT 2020). *Xét tất cả các số thực x, y thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1} \leq (x^2+y^2-2x+2)4^x$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{8x+4}{2x-y+1}$.*

Lời giải. Từ giả thiết, chia hai vế cho 4^x và biến đổi ta được:

$$2^{x^2+y^2+1} \leq (x^2+y^2-2x+2)4^x$$
$$\Leftrightarrow 2^{(x-1)^2+y^2}-\left[(x-1)^2+y^2\right]-1 \leq 0.$$

Đặt $t=(x-1)^2+y^2$, ta có:

$$2^t-t-1 \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 1 \Rightarrow (x-1)^2+y^2 \leq 1 \quad (1).$$

Từ $P=\dfrac{8x+4}{2x-y+1} \Rightarrow (2P-8)x-Py+P-4=0$ (2).

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, miền nghiệm của (1) là hình tròn (C) tâm $I(1;0)$, bán kính $R=1$ kể cả biên.

Xem (2) là phương trình của đường thẳng:

$$\Delta: (2P-8)x-Py+(P-4)=0.$$

Điều kiện để đường thẳng và hình tròn có điểm chung là $d(I;\Delta) \leq R \Leftrightarrow \dfrac{|2P-8+P-4|}{\sqrt{(2P-8)^2+P^2}} \leq 1$

$$\Leftrightarrow |3P-12| \leq \sqrt{(2P-8)^2+P^2}$$
$$\Leftrightarrow 5-\sqrt{5} \leq P \leq 5+\sqrt{5}.$$

Vậy $\max P=5+\sqrt{5}$.

Thí dụ 7 (THPT 2022). *Xét tất cả các số thực x, y sao cho $a^{4x-\log_5 a^2} \leq 25^{40-y^2}$ với mọi số thực dương a. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P=x^2+y^2+x-3y.$$

Lời giải. Ta có: $a^{4x-\log_5 a^2} \leq 25^{40-y^2}$

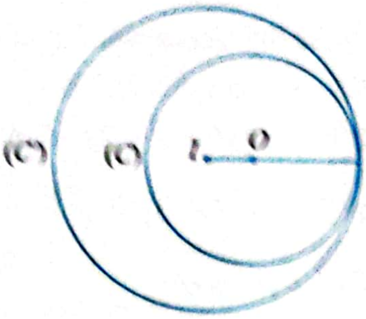
$$\Leftrightarrow (4x-\log_5 a^2)\log_5 a \leq 2(40-y^2)$$
$$\Leftrightarrow \log_5^2 a-2x\log_5 a+40-y^2 \geq 0.$$

Đặt $t=\log_5 a$ ta có $t^2-2xt+40-y^2 \geq 0$ nghiệm đúng $\forall t \in \mathbb{R}$, suy ra: $\Delta' \leq 0 \Leftrightarrow x^2+y^2 \leq 40$ (C).

Từ $P=x^2+y^2+x-3y$ suy ra:

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=P+\frac{5}{2}\quad (C').$$

Xét $P=-\frac{5}{2}\Rightarrow x=-\frac{1}{2}, y=\frac{3}{2}$.



Xét $P>-\frac{5}{2}$; trong mặt phẳng toạ độ Oxy thì (C') là phương trình đường tròn tâm $I\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$, bán kính $R'=\sqrt{P+\frac{5}{2}}$.

Để hai đường tròn (C) và (C') có điểm chung thì $R'\le R+OI\Leftrightarrow\sqrt{P+\frac{5}{2}}\le\sqrt{40}+\sqrt{\frac{5}{2}}\Leftrightarrow P\le 60$.

Vậy $\max P=60$.

Thí dụ 8. *Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất cặp $(x;y)$ thoả mãn đồng thời* $\log_3\left(x^2+y^2+\sqrt{x^2+y^2}+1\right)^2+2\left(x^2+y^2\right)$

$$\le\log_3\left(x^2+y^2\right)+4\sqrt{x^2+y^2}$$

và $x^2+y^2-4x+4-m=0$.

Lời giải. Đặt $t=\sqrt{x^2+y^2}, (t>0)$ và biến đổi ta được: $2\log_3\left(t^2+t+1\right)+2t^2\le 2\log_3 t+4t$

$$\Leftrightarrow\log_3\left(t^2+t+1\right)-\log_3 t\le 2t-t^2$$

$$\Leftrightarrow\log_3\left(t+\frac{1}{t}+1\right)\le 1-(t-1)^2\ (*).$$

Ta có: $VP(*)=1-(t-1)^2\le 1$.

Ta có: $t+\frac{1}{t}+1\ge 2\sqrt{t.\frac{1}{t}}+1=3$

$\Rightarrow VT(*)=\log_3\left(t+\frac{1}{t}+1\right)\ge 1$. Do đó:

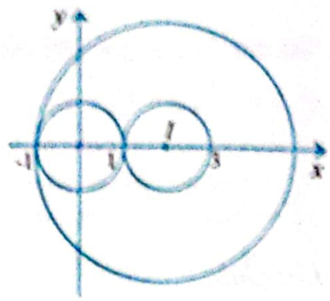
$(*)\Leftrightarrow t=1\Rightarrow x^2+y^2=1\ (1)$.

Ta có:

$$x^2+y^2-4x+4-m=0\Leftrightarrow(x-2)^2+y^2=m\ (2).$$

Khi $m\le 0$ suy ra không tồn tại cặp $(x;y)$ nào thoả mãn bài toán.

Khi $m>0$, xét trong mặt phẳng toạ độ Oxy ta có (1) là phương trình đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R=1$;



(2) là phương trình đường tròn tâm $I(2;0)$, bán kính $R'=\sqrt{m}$.

Bài toán trở thành tìm điều kiện để hai đường tròn tiếp xúc với nhau.

Hai đường tròn tiếp xúc ngoài khi

$$OI=R+R'\Leftrightarrow 2=1+\sqrt{m}\Leftrightarrow m=1.$$

Hai đường tròn tiếp xúc trong khi

$$OI=R'-R\Leftrightarrow 2=\sqrt{m}-1\Leftrightarrow m=9.$$

Thí dụ 9. *Xét tất cả các số thực x và y thỏa mãn*

$$\log_{\sqrt{3}}\frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2}=x(x-3)+y(y-3)+xy.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{4x+5y-3}{x+2y+1}$.

Lời giải. ĐK: $\frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2}>0\Leftrightarrow x+y>0$. Ta có: $\log_{\sqrt{3}}\frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2}=x(x-3)+y(y-3)+xy$

$$\Leftrightarrow 2\log_3(x+y)+3x+3y$$
$$=2\log_3\left(x^2+y^2+xy+2\right)+x^2+y^2+xy$$

$$\Leftrightarrow 2\log_3(3x+3y)+3x+3y$$
$$=2\log_3\left(x^2+y^2+xy+2\right)+x^2+y^2+xy+2\ (1).$$

Xét hàm số $f(t)=2\log_3 t+t$ với $t>0$ có

$f'(t)=\dfrac{2}{t\ln 3}+1>0,\forall t>0$; dẫn đến hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$. Do đó:

$$(1)\Leftrightarrow f(3x+3y)=f\left(x^2+y^2+xy+2\right)$$
$$\Leftrightarrow 3x+3y=x^2+y^2+xy+2 \quad (2).$$

Ta có:

$$(2)\Leftrightarrow\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}-3\left(x+\frac{y}{2}\right)-\frac{3y}{2}+2=0$$
$$\Leftrightarrow\left(x+\frac{y}{2}-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{y\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1 \quad (*).$$

Đặt $\begin{cases}a=x+\dfrac{y}{2}-\dfrac{3}{2}\\ b=\dfrac{y\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=a-\dfrac{b}{\sqrt{3}}+1\\ y=\dfrac{2b}{\sqrt{3}}+1\end{cases}$ (**).

Khi đó $(*)$ trở thành $a^2+b^2=1$ (C).

Từ $P=\dfrac{4x+5y-3}{x+2y+1}\Leftrightarrow P(x+2y+1)=4x+5y-3$

$$\overset{(**)}{\Rightarrow}(P-4)a+\sqrt{3}(P-2)b+4P-6=0 \quad (\Delta).$$

Trong mặt phẳng toạ độ Oab ta được đường thẳng Δ và đường tròn (C) có tâm $O(0;0)$, bán kính $R=1$.

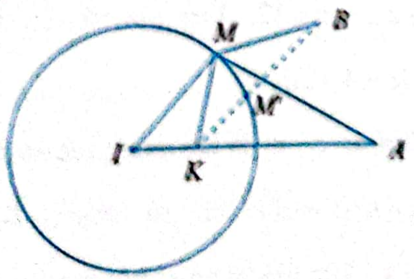
Điều kiện để Δ và (C) có điểm chung là $d(O;\Delta)\le R\Leftrightarrow -12P^2+28P-8\ge 0\Leftrightarrow\dfrac{1}{3}\le P\le 2$.

Vậy $\max P=2$, đạt được khi $x=2, y=1$ (ứng với $a=1, b=0$).

Thí dụ 10. *Xét các số phức z thỏa mãn $|z-3-2i|=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P=|z+1-2i|+2|z-2-5i|.$$

Lời giải.



Gọi M là điểm biểu diễn cho số phức z trong mặt phẳng toạ độ Oxy. Từ giả thiết $|z-3-2i|=2$ suy ra M thuộc đường tròn (C) tâm $I(3;2)$, bán kính $R=2$; $P=|z+1-2i|+2|z-2-5i|=MA+2MB$ với $A=(-1;2)$, $B=(2;5)$. Nhận thấy $IM=\dfrac{1}{2}IA=2$ nên lấy điểm K thuộc đoạn IA sao cho $IK=\dfrac{1}{2}IM$, từ đó tìm được toạ độ $K(2;2)$. Vì $\dfrac{IK}{IM}=\dfrac{IM}{IA}=\dfrac{1}{2}$ nên $\Delta IAM\backsim\Delta IMK$

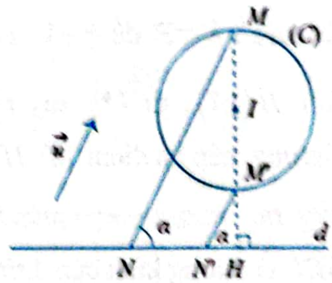
$$\Rightarrow\frac{AM}{MK}=\frac{IM}{IK}=2\Rightarrow AM=2MK.$$

Dẫn đến $P=MA+2MB$
$$=2(MK+MB)\ge 2BK=6.$$

Vậy $\min P=6$ khi B, M, K thẳng hàng.

Thí dụ 11. *Biết hai số phức z, w thoả mãn $|z-1-2i|=1$, $|w-i|=|w+2+i|$ và $\dfrac{z-w}{2+i}$ là số thuần ảo. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z-w|$.*

Lời giải. Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn cho số phức z và w, suy ra M thuộc đường tròn (C) có tâm $I(1;2)$, bán kính $R=1$; N thuộc đường thẳng $d: x+y+1=0$.



Từ $\dfrac{z-w}{2+i}$ là số thuần ảo, suy ra tồn tại số $k\in\mathbb{R}$ để $\dfrac{z-w}{2+i}=ki\Rightarrow z-w=k(-1+2i)$. Dẫn đến $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với $\vec{u}=(-1;2)$.

Gọi α là góc tạo bởi vectơ $\vec{u}=(-1;2)$ và vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}=(-1;1)$ của đường thẳng d, ta tìm được $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên d, khi đó $MN = \frac{MH}{\sin\alpha} = \sqrt{10}.MH$.

Suy ra: $\max|z-w| = \max MN = \sqrt{10}.\max MH$

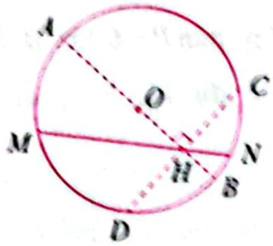
$$= \sqrt{10}.\left[d(I;d)+R\right] = 4\sqrt{5}+\sqrt{10};$$

$$\min|z-w| = \min MN = \sqrt{10}.\min MH$$

$$= \sqrt{10}.\left[d(I;d)-R\right] = 4\sqrt{5}-\sqrt{10}.$$

Thí dụ 12. *Biết hai số phức phân biệt z, w thoả mãn $|z|=|w|=2$ và $(z-1-i)(\overline{w}-1+i)$ là số thực. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z-w|$.*

Lời giải. Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn cho số phức z và w; suy ra M, N cùng thuộc đường tròn (C) có tâm $O(0;0)$, bán kính $R=2$.



Do $(z-1-i)(\overline{w}-1+i)\in\mathbb{R} \Rightarrow \frac{z-1-i}{w-1-i}\in\mathbb{R}$, nên tồn tại số $k\in\mathbb{R}$ để $z-1-i = k(w-1-i)$ (*).

Gọi $H(1;1)$, từ (*) suy ra $\overrightarrow{MH}$ và $\overrightarrow{NH}$ cùng phương, nên ba điểm M, H, N thẳng hàng.

Suy ra: $\max|z-w| = \max MN = AB = 4$ (khi đó MN là đường kính của đường tròn (C)).

$\min|z-w| = \min MN = CD = 2\sqrt{R^2-OH^2} = 2\sqrt{2}$ (khi đó $MN\perp OH$).

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $\sqrt{4m+4x}+\sqrt{m-x}-1=m$ có nghiệm duy nhất.

Bài 2. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình

$$(m-2)\sqrt{x+3}+(2m-1)\sqrt{1-x}+m-1=0$$

có nghiệm.

Bài 3. Xét tất cả các số thực a, b thoả mãn $a^2+b^2-2a-6b+9\le 0$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $T=a^2+b^2+4a-2b$.

Bài 4. Xét tất cả các số thực a, b thoả mãn $a^2+5b^2+4ab+2a-4=0$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $T=\frac{2a-b+1}{a+b-2}$

Bài 5. Xét tất cả các số thực không âm x và y thỏa mãn $2x+y.4^{x+y-1}\ge 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+6x+4y$.

Bài 6. Xét tất cả các số thực x, y thỏa mãn $\log_{x^2+2y^2}(2x+y)\ge 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T=2x+y$.

Bài 7. Tìm tập S tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất cặp số $(x;y)$ thỏa mãn

$$\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-6+m^2)\ge 1$$

và $$x^2+y^2+2x-4y+1=0.$$

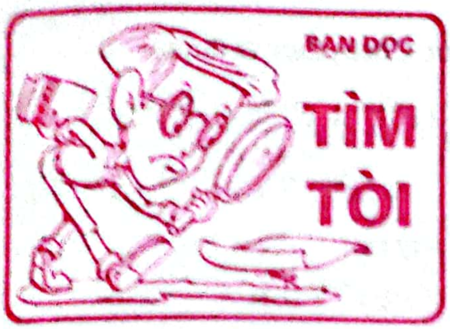
Bài 8. Xét tất cả các số thực x,y sao cho $8^{9-y^2}\ge a^{6x-\log_2 a^3}$ với mọi số thực dương a. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2-6x-8y$.

Bài 9. Xét tất cả các số thực không âm x và y thỏa mãn $2x+y\log_2(x+y+1)\ge 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+2x+8y$.

Bài 10. Xét các số phức z thỏa mãn $|z-1+2i|=2\sqrt{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=|z-5+6i|+2|z+4+5i|$.

Bài 11. Xét các số phức z thỏa mãn $3|z+\overline{z}|+2|z-\overline{z}|\le 12$. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $|z-4+3i|$.

Bài 12. Giả sử z_1, z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn $(z-6)(8+\overline{zi})$ là số thực. Biết rằng $|z_1-z_2|=4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z_1+3z_2|$.



MỞ RỘNG CÂU BẤT ĐẲNG THỨC TRONG ĐỀ THI IMO LẦN THỨ 46 NĂM 2005

NGÔ VĂN THÁI
(Tổ 34, phường Hoàng Diệu, TP. Thái Bình)

Kỳ thi Toán học Quốc tế IMO lần thứ 46 năm 2005 tại Mexico có bài toán số 3 đẹp, khó như sau

Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $abc \ge 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^5-a^2}{a^5+b^2+c^2}+\frac{b^5-b^2}{b^5+c^2+a^2}+\frac{c^5-c^2}{c^5+a^2+b^2}\ge 0\ (*).$$

Tạp chí TH&TT số 345 tháng 3 năm 2006, đăng bài viết về các hướng mở rộng bất đẳng thức (*) của tác giả *Nairi M. Sedrakyan* sau đây:

" Given a, b, c and $abc \ge 1$, prove that

a) $\dfrac{a^\alpha-a^2}{a^\alpha+b^2+c^2}+\dfrac{b^\alpha-b^2}{b^\alpha+c^2+a^2}+\dfrac{c^\alpha-c^2}{c^\alpha+a^2+b^2}\ge 0$

where $2\le\alpha\le 5$.

b) $\dfrac{a^\alpha-a^2}{a^\alpha+b^2+c^2}+\dfrac{b^\alpha-b^2}{b^\alpha+c^2+a^2}+\dfrac{c^\alpha-c^2}{c^\alpha+a^2+b^2}\le 0$

where $-1\le\alpha\le 2$".

Dễ thấy câu a) là một mở rộng đẹp của (*), nhưng α chỉ thuộc $[2;5]$. Còn câu b) không phải là một mở rộng của (*), nó chỉ là câu tương tự với câu a) mà thôi. Bây giờ từ cách giải đẹp bất đẳng thức (*) của *Iurie Boreico*, tôi xin đề xuất thêm một số mở rộng mới, mở rộng tương tự của (*) để bạn đọc tham khảo.

Trước hết ta hãy xem cách giải bất đẳng thức (*) của *Iurie Boreico*.

Đặt vế trái của bài toán là S.

Nhận thấy với $x,y,z>0$ thì

$$(x^3-1)\left[x^3\left(x^2+y^2+z^2\right)-\left(x^5+y^2+z^2\right)\right]$$
$$=\left(x^3-1\right)^2\left(y^2+z^2\right)\ge 0$$

hay $$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}\ge\frac{x^3-1}{x(x^2+y^2+z^2)}$$
$$=\frac{x^2-\frac{1}{x}}{x^2+y^2+z^2}.$$

Tương tự:

$$\frac{y^5-y^2}{x^5+y^2+z^2}\ge\frac{y^2-\frac{1}{y}}{x^2+y^2+z^2};$$

$$\frac{z^5-z^2}{x^5+y^2+z^2}\ge\frac{z^2-\frac{1}{z}}{x^2+y^2+z^2}.$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức này ta được:

$$S\ge\frac{x^2-\frac{1}{x}+y^2-\frac{1}{y}+z^2-\frac{1}{z}}{x^2+y^2+z^2}$$
$$=\frac{x^2+y^2+z^2-\frac{xy+yz+zx}{xyz}}{x^2+y^2+z^2}.$$

Do $xyz\ge 1$ suy ra:

$$S\ge\frac{(x^2+y^2+z^2)-(xy+yz+zx)}{x^2+y^2+z^2}\quad (1).$$

Mà $x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$ là bất đẳng thức quen thuộc. Vậy $S\ge 0$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=1$.

Bài toán được chứng minh.

Cách giải trên tuy có thiếu tự nhiên một chút, nhưng nó hết sức ngắn gọn tường minh các bạn học sinh THCS đều có thể hiểu được. Bây giờ ta lặp lại cách giải đó sẽ mở rộng và giải được các bài toán sau đây.

Mở rộng 1. *Cho*

$$x, y, z > 0;\ r \ge 0,\ 2r \le k \le \frac{5}{2}r,\ xyz \ge 1.$$

Chứng minh rằng

$$\frac{x^k - x^r}{x^k + y^r + z^r} + \frac{y^k - y^r}{y^k + z^r + x^r} + \frac{z^k - z^r}{z^k + x^r + y^r} \ge 0.$$

Lời giải. Đặt vế trái của bài toán là M. Với giả thiết đã cho thì

$$\left(x^{k-r} - 1\right)\left[x^{k-r}\left(x^r + y^r + z^r\right) - \left(x^k + y^r + z^r\right)\right]$$
$$= \left(x^{k-r} - 1\right)^2\left(y^r + z^r\right) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^k - x^r}{x^k + y^r + z^r} \ge \frac{x^{k-r} - 1}{x^{k-2r}(x^r + y^r + z^r)}$$
$$= \frac{x^r - \frac{1}{x^{k-2r}}}{x^r + y^r + z^r}.$$

Tương tự:

$$\frac{y^k - y^r}{x^k + y^r + z^r} \ge \frac{y^r - \frac{1}{y^{k-2r}}}{x^r + y^r + z^r};$$

$$\frac{z^k - z^r}{x^k + y^r + z^r} \ge \frac{z^r - \frac{1}{z^{k-2r}}}{x^r + y^r + z^r}.$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức này ta được:

$$M \ge \frac{x^r - \frac{1}{x^{k-2r}} + y^r - \frac{1}{y^{k-2r}} + z^r - \frac{1}{z^{k-2r}}}{x^r + y^r + z^r}$$

$$= \frac{x^r + y^r + z^r - \frac{(xy)^{k-2r} + (yz)^{k-2r} + (zx)^{k-2r}}{(xyz)^{k-2r}}}{x^r + y^r + z^r}.$$

Do $xyz \ge 1$ suy ra $(xyz)^{k-2r} \ge 1$. Khi đó:

$$M \ge \frac{(x^r + y^r + z^r) - \left[(xy)^{k-2r} + (yz)^{k-2r} + (zx)^{k-2r}\right]}{x^r + y^r + z^r} \ (2).$$

Vì (2) là bất đẳng thức đối xứng, không mất tính tổng quát giả sử: $x \ge y \ge z > 0$, kết hợp với giả thiết đã cho $r \ge 0,\ 2r \le k \le \frac{5}{2}r$ ta có:

$$x^{5r-2k} \ge y^{5r-2k} \ge z^{5r-2k} > 0;$$
$$x^{2(k-2r)} \ge y^{2(k-2r)} \ge z^{2(k-2r)} > 0.$$

Theo bất đẳng thức Chebyshev ta được:

$$(x^r + y^r + z^r) \ge \frac{1}{3}(x^{5r-2k} + y^{5r-2k} + z^{5r-2k}) \times$$
$$\times (x^{2(k-2r)} + y^{2(k-2r)} + z^{2(k-2r)}).$$

Mặt khác $xyz \ge 1$ suy ra:

$$(xyz)^{5r-2k} \ge 1.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$\frac{1}{3}(x^{5r-2k} + y^{5r-2k} + z^{5r-2k}) \ge \sqrt[3]{(xyz)^{5r-2k}}$$
$$\ge 1.$$

Do đó:

$$(x^r + y^r + z^r) \ge (x^{2(k-2r)} + y^{2(k-2r)} + z^{2(k-2r)}).$$

Vậy

$$M \ge \frac{x^{2(k-2r)} + y^{2(k-2r)} + z^{2(k-2r)}}{x^r + y^r + z^r}$$
$$- \frac{(xy)^{k-2r} + (yz)^{k-2r} + (zx)^{k-2r}}{x^r + y^r + z^r} \ (3).$$

Áp dụng bất đẳng thức quen thuộc

$$a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ca$$

để đánh giá biểu thức ở tử vế phải của (3) sẽ được $M \ge 0$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Bài toán được chứng minh.

Mở rộng 2. *Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $xyz \ge 1$ và $\alpha \ge \beta + 3,\ \beta > -1,\ \lambda \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng*

$$\frac{x^\alpha - x^\beta}{x^{\beta+\lambda+1} + y^\lambda + z^\lambda} + \frac{y^\alpha - y^\beta}{y^{\beta+\lambda+1} + z^\lambda + x^\lambda} + \frac{z^\alpha - z^\beta}{z^{\beta+\lambda+1} + x^\lambda + y^\lambda} \ge 0.$$

Lời giải. Đặt vế trái của bài toán là P.

Nhận thấy với $x, y, z > 0,\ \alpha \ge \beta + 3,\ \beta > -1,\ \lambda \in \mathbb{R}$ thì

$$\left(x^{\alpha-\beta} - 1\right)\left[x^{\beta+1}\left(x^\lambda + y^\lambda + z^\lambda\right) - \left(x^{\beta+\lambda+1} + y^\lambda + z^\lambda\right)\right]$$
$$= \left(x^{\alpha-\beta} - 1\right)\left(x^{\beta+1} - 1\right)\left(y^\lambda + z^\lambda\right) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^\alpha - x^\beta}{x^{\beta+\lambda+1} + y^\lambda + z^\lambda} \ge \frac{x^{\alpha-\beta} - 1}{x(x^\lambda + y^\lambda + z^\lambda)}$$
$$= \frac{x^{\alpha-\beta-1} - \frac{1}{x}}{x^\lambda + y^\lambda + z^\lambda}.$$

Tương tự:

$$\frac{y^{\alpha}-y^{\beta}}{x^{\beta+\lambda+1}+y^{\lambda}+z^{\lambda}}\ge\frac{y^{\alpha-\beta-1}-\frac{1}{y}}{x^{\lambda}+y^{\lambda}+z^{\lambda}};$$

$$\frac{z^{\alpha}-z^{\beta}}{x^{\beta+\lambda+1}+y^{\lambda}+z^{\lambda}}\ge\frac{z^{\alpha-\beta-1}-\frac{1}{z}}{x^{\lambda}+y^{\lambda}+z^{\lambda}}.$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức này ta được:

$$P\ge\frac{x^{\alpha-\beta-1}-\frac{1}{x}}{x^{\lambda}+y^{\lambda}+z^{\lambda}}+\frac{y^{\alpha-\beta-1}-\frac{1}{y}}{x^{\lambda}+y^{\lambda}+z^{\lambda}}+\frac{z^{\alpha-\beta-1}-\frac{1}{z}}{x^{\lambda}+y^{\lambda}+z^{\lambda}}$$

$$=\frac{(x^{\alpha-\beta-1}+y^{\alpha-\beta-1}+z^{\alpha-\beta-1})-\frac{xy+yz+zx}{xyz}}{x^{\lambda}+y^{\lambda}+z^{\lambda}}$$

Do $xyz\ge 1$ suy ra:

$$P\ge\frac{(x^{\alpha-\beta-1}+y^{\alpha-\beta-1}+z^{\alpha-\beta-1})-(xy+yz+zx)}{x^{\lambda}+y^{\lambda}+z^{\lambda}}\ (4).$$

Vì (4) là bất đẳng thức đối xứng, không mất tính tổng quát giả sử: $x\ge y\ge z>0$. Suy ra:

$$x^{\alpha-\beta-3}\ge y^{\alpha-\beta-3}\ge z^{\alpha-\beta-3}>0;$$
$$x^2\ge y^2\ge z^2>0.$$

Theo bất đẳng thức Chebyshev ta có:

$$(x^{\alpha-\beta-1}+y^{\alpha-\beta-1}+z^{\alpha-\beta-1})$$
$$\ge\frac{1}{3}(x^{\alpha-\beta-3}+y^{\alpha-\beta-3}+z^{\alpha-\beta-3})(x^2+y^2+z^2)$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy thì

$$\frac{1}{3}(x^{\alpha-\beta-3}+y^{\alpha-\beta-3}+z^{\alpha-\beta-3})\ge\sqrt[3]{(xyz)^{\alpha-\beta-3}}\ge 1$$

$$\Rightarrow(x^{\alpha-\beta-1}+y^{\alpha-\beta-1}+z^{\alpha-\beta-1})\ge(x^2+y^2+z^2).$$

Vậy

$$P\ge\frac{(x^2+y^2+z^2)-(xy+yz+zx)}{x^{\lambda}+y^{\lambda}+z^{\lambda}}\ge 0.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=1$.

Bài toán được chứng minh.

Mở rộng tương tự

Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $abc\ge 1$ và $\alpha\ge\beta\ge 0,\lambda\in\mathbb{R}$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^{\alpha}-a^{\beta}}{a^{\beta+\lambda}+b^{\lambda}+c^{\lambda}}+\frac{b^{\alpha}-b^{\beta}}{b^{\beta+\lambda}+c^{\lambda}+a^{\lambda}}+\frac{c^{\alpha}-c^{\beta}}{c^{\beta+\lambda}+a^{\lambda}+b^{\lambda}}\ge 0.$$

Lời giải. Đặt vế trái của bài toán là N.

Dễ thấy với $x,y,z>0,\ \alpha\ge\beta\ge 0,\ \lambda\in\mathbb{R}$ thì

$$(x^{\alpha-\beta}-1)\left[x^{\beta}(x^{\lambda}+y^{\lambda}+z^{\lambda})-(x^{\beta+\lambda}+y^{\lambda}+z^{\lambda})\right]$$
$$=(x^{\alpha-\beta}-1)(x^{\beta}-1)(y^{\lambda}+z^{\lambda})\ge 0$$

hay $\dfrac{x^{\alpha}-x^{\beta}}{x^{\beta+\lambda}+y^{\lambda}+z^{\lambda}}\ge\dfrac{x^{\alpha-\beta}-1}{(x^{\lambda}+y^{\lambda}+z^{\lambda})}$ (5).

Áp dụng (5) ta được:

$$N\ge\frac{a^{\alpha-\beta}-1}{a^{\lambda}+b^{\lambda}+c^{\lambda}}+\frac{b^{\alpha-\beta}-1}{b^{\lambda}+c^{\lambda}+a^{\lambda}}+\frac{c^{\alpha-\beta}-1}{c^{\lambda}+a^{\lambda}+b^{\lambda}}$$

$$=\frac{(a^{\alpha-\beta}+b^{\alpha-\beta}+c^{\alpha-\beta})-3}{a^{\lambda}+b^{\lambda}+c^{\lambda}}.$$

Mà giả thiết cho $abc\ge 1$, theo BĐT Cauchy thì:

$$(a^{\alpha-\beta}+b^{\alpha-\beta}+c^{\alpha-\beta})\ge 3\sqrt[3]{(abc)^{\alpha-\beta}}$$
$$\ge 3.$$

Vậy $N\ge\dfrac{3-3}{a^{\lambda}+b^{\lambda}+c^{\lambda}}=0.$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$ hoặc $\alpha=\beta$.

Bài toán được chứng minh.

Trước khi kết thúc bài viết tác giả xin gửi tới bạn đọc hai bài toán sau để thử sức.

BÀI TẬP

Bài 1. Cho $\alpha\ge\beta\ge 0$ và ba số thực dương thỏa mãn $abc\ge 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^{\alpha}+b^{\alpha}+c^{\beta}}+\frac{1}{b^{\alpha}+c^{\alpha}+a^{\beta}}+\frac{1}{c^{\alpha}+a^{\alpha}+b^{\beta}}\le 1.$$

Bài 2. Cho n số thực dương $a_1,a_2,\dots,a_n$ $(n\ge 3)$ thỏa mãn $a_1a_2\dots a_n\ge 1$ và $\alpha\ge\beta\ge 0,\lambda\in\mathbb{R}$, đặt $S=a_1^{\lambda}+a_2^{\lambda}+\dots+a_n^{\lambda}$. Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{\alpha}-a_i^{\beta}}{a_i^{\beta+\lambda}+S-a_i^{\lambda}}\ge 0.$$

60 NĂM ẤY BIẾT BAO NHIÊU TÌNH (*)

1. 60 NĂM TẠP CHÍ TH&TT

GS. *Trần Văn Nhung*

Chúng ta vui mừng và tự hào với những thành tựu và đóng góp to lớn xuyên thế kỷ của Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ (TH&TT) cho nền toán học, khoa học và giáo dục nước nhà trong suốt 60 năm qua (1964 – 2024) và chúc cho Tạp chí của chúng ta tiếp tục phát triển và hội nhập quốc tế trong 10, 20,..., và 40 năm tiếp theo!

Có thể nói Tạp chí TH&TT là một trong những ấn phẩm toán học đầu tiên của nước Việt Nam dân chủ cộng hòa và nước Cộng hòa xã hội chủ nghĩa Việt Nam. Báo TH&TT số một ra đời tháng 10/1964. Tạp chí *Acta Mathematica Vietnamica* ra đời năm 1964, Tạp chí *Vietnam Journal of Mathematics* ra đời năm 1973, cả hai tạp chí này đều được quốc tế đánh giá cao về chất lượng khoa học, giáo dục và nằm trong danh sách Scopus. Hội Toán học Việt Nam được thành lập năm 1966.

Tổng Biên tập đầu tiên của Tạp chí TH&TT là GS. *Nguyễn Cảnh Toàn*. GS. *Tạ Quang Bửu*, GS. *Lê Văn Thiêm*, GS. *Hoàng Tụy*, GS. *Phan Đình Diệu*, GS. *Hoàng Xuân Sính*, ..., là những nhà toán học có nhiều đóng góp cho sự ra đời và phát triển của Tạp chí.

Ôn lại chặng đường 60 năm qua, chúng ta ghi nhớ công lao to lớn của GS.TSKH. *Nguyễn Cảnh Toàn*, của các Tổng Biên tập, Phó Tổng Biên tập, Thư ký Tòa soạn, của các thành viên Ban Biên tập, các thầy, các cô giáo và học sinh, sinh viên cả nước qua các thời kỳ, đã đóng góp để xây dựng và phát triển Tạp chí.

Tôi còn nhớ cách đây chừng 25 - 30 năm, trong một cuộc họp Hội đồng Biên tập của Tạp chí TH & TT, do GS.TSKH. Tổng Biên tập *Nguyễn Cảnh Toàn* chủ trì, tôi đã phát biểu: Trong cuộc đời làm khoa học và giáo dục của mình, GS. *Nguyễn Cảnh Toàn* đã từng đảm nhiệm nhiều trọng trách, như Hiệu trưởng Trường ĐHSP Hà Nội, Thứ trưởng Bộ GD&ĐT, nhưng có lẽ với tư cách người sáng lập rồi làm TBT nhiều năm của Tạp chí TH&TT, *GS. Nguyễn Cảnh Toàn* đã cống hiến và có đóng góp đáng kể cho giáo dục toán học nước nhà. PGS. TS. *Hoàng Chúng* là Thư ký đầu tiên của Toà soạn và trong nhiều năm đã hỗ trợ đắc lực cho Tổng Biên tập *Nguyễn Cảnh Toàn* và Ban Biên tập. Từ đó đến nay, nhiều thế hệ Ban Cố vấn Khoa học, TBT, Thư ký Toà soạn và các thành viên Hội đồng Biên tập đã thay nhau cống hiến rất nhiều để xây dựng, khắc phục khó khăn, phát triển và nâng cao chất lượng Tạp chí. Tổng Biên tập hiện nay của Tạp chí là TS. *Trần Hữu Nam* và Thư ký Toà soạn là ThS. *Hồ Quang Vinh*. Ban Cố vấn khoa học gồm TS. *Nguyễn Văn Vọng*, GS. *Đoàn Quỳnh*, PGS. TS. *Trần Văn Hạo* và GS. TSKH *Trần Văn Nhung*.

Những người bạn quốc tế đồng hành cùng Tạp chí TH&TT và các bạn đọc Việt Nam là Tạp chí "*Kvant*" (Toán - Lý) của Liên Xô (cũ) ra đời năm 1970 do ý tưởng của Viện sỹ *P. Kapitsa*, nhà vật lý Nga đoạt Giải Nobel năm 1978, có sự tham gia của nhà toán học Nga thiên tài *A. N. Kolmogorov* và những nhà toán học, vật lý học xuất sắc khác của Liên Xô. Tạp chí "*Toán học trong nhà trường*"/"*Математика в школе*" của Liên Xô ra đời năm 1924, đến nay 2024 vừa tròn 100 năm. Tạp chí của Mỹ "*The American Mathematical Monthly*" được ra đời bởi *Benjamin Finkel* năm 1894.

Tạp chí TH&TT là tài liệu toán học gối đầu giường của học sinh, sinh viên nước ta, ngay từ ngày mới ra đời, trong những năm chiến tranh ác liệt. Tạp chí đã góp phần tích cực trong việc phát hiện, đào tạo, bồi dưỡng học sinh có năng khiếu toán học, các tài năng toán học, cùng với các cuộc thi chọn học sinh giỏi toán ở các trường phổ thông, các tỉnh và cả nước như các kỳ thi Olympic Toán Quốc gia (VMO) và Olympic Toán Quốc tế (IMO).

Tạp chí góp phần quan trọng để thanh thiếu niên Việt Nam làm quen, thử sức và hội nhập với bạn bè quốc tế. Vì nhiều bài toán, đề bài thi, các bài toán của các nước và quốc tế, ví dụ như *Математика в школе*, *Kvant*, *The American Mathematical Monthly*, ..., cũng đã được được trích dẫn trong Tạp chí TH & TT.

Cùng với thành tích xuất sắc (top-ten) trong nửa thế kỷ vừa qua (1974 – 2024) từ khi Việt Nam tham dự Olympic Toán học Quốc tế (IMO), Tạp chí TH&TT cũng đã gây ấn tượng tốt đẹp về toán học và giáo dục phổ thông cho bạn bè ASEAN và quốc tế.

2. TH & TT CŨNG CẦN HỘI NHẬP QUỐC TẾ

Cũng trong một cuộc họp Hội đồng Biên tập của Tạp chí TH & TT, do GS. TSKH. Tổng Biên tập *Nguyễn Cảnh Toàn* chủ trì, và một số lần họp sau của Hội đồng Biên tập, tôi đã đề nghị: Để mở rộng phạm vi độc giả trong nước, khu vực ASEAN, quốc tế và tăng cường chất lượng, uy tín của Tạp chí TH&TT, đã đến lúc chúng ta cần phải xuất bản Tạp chí bằng tiếng Anh, như *Acta Mathematica Vietnamica* hay *Vietnam Journal of Mathematics*. Rất đáng mừng là từ nhiều năm nay, phần các đề bài toán mới ra kỳ này đã được dịch ra cả tiếng Anh, *Problems in this issue*. GS. TSKH. *Ngô Việt Trung* cũng đã bền bỉ trong nhiều năm đóng góp để tăng cường phần tiếng Anh trong Tạp chí của chúng ta. Trong quá trình hội nhập quốc tế nhanh chóng, toàn diện và triệt để như hiện nay, tôi tiếp tục đề nghị sớm xuất bản Tạp chí TH&TT bằng tiếng Anh hoặc ít nhất là song ngữ Việt-Anh, có thể online. Đấy cũng chính là cách làm đúng, làm nhanh và thực chất để hội nhập quốc tế, nâng cao trình độ toán học và tiếng Anh của thầy và trò trong nhà trường Việt Nam.

Tạp chí *Pi* ra đời ngày 10/1/2017 do sáng kiến của GS. TSKH. *Ngô Bảo Châu* và Tổng Biên tập GS. TSKH. *Hà Huy Khoái*. Chúng ta rất mừng, từ khi đó Tạp chí TH&TT đã hợp tác với Tạp chí Pi và các tạp chí, tờ báo khác, để cùng nhau phát triển sự nghiệp giáo dục toán học ở Việt Nam. Tôi rất hoan nghênh Pi cũng có những bài báo viết bằng tiếng Anh có phần Vocabulary.

3. TRONG THỜI AI TUỔI TRẺ VẪN CẦN TOÁN HỌC

Thế giới đang bước vào kỷ nguyên Cách mạng công nghiệp (CMCN/ IR) 4.0 và Trí tuệ nhân tạo (AI). Ở nhiều ngành nghề, những công việc cũ sẽ mất đi, công việc mới sẽ ra đời. Một sự thay đổi nhanh chóng và khó đoán chưa từng thấy. Thế hệ trẻ nước ta cần phải chuẩn bị gì, học gì, làm gì để có công ăn việc làm và tránh bị thất nghiệp!

Tôi nghĩ chỉ có toán học mới có thể giúp được thế hệ trẻ chúng ta khi môi trường, việc làm thay đổi nhanh chóng và khó lường. Nền tảng kiến thức toán học cao cấp và toán học, tin học chuyên ngành đủ chắc chắn sẽ là công cụ hữu hiệu nhất giúp các bạn trẻ vượt qua mọi thử thách khắc nghiệt và nhanh chóng của thực tiễn: "*Dĩ bất biến, ứng vạn biến*".

Vì sao? Vì ba cuộc CMCN 1.0, 2.0 và 3.0 đã qua là cơ khí hóa, điện khí hóa và tự động hóa, lấy máy móc thay lao động chân tay. Cuộc CMCN 4.0 là thông minh hóa, lấy máy móc thay lao động trí óc. CMCN 1.0, 2.0 và CMCN 3.0 đã ra đời nhờ vật lý ứng dụng. Nhưng CMCN 4.0 và AI đã và đang diễn biến, phát triển nhờ toán học.

Để kết thúc bài viết, tôi xin nhắc lại câu nói (**) của GS. *Tạ Quang Bửu* và khẳng định của nhà bác học Italia , bách khoa toàn thư cuối cùng của nhân loại, *Leonardo da Vinci*: "*No human investigation can be called real science if it cannot be demonstrated mathematically.*" Tạm dịch: *Không có nghiên cứu nào của con người có thể được xem là khoa học thực sự nếu nó không thể chứng minh được bằng toán học.*

(*) Mượn ý của nhà thơ *Tố Hữu*.

Hà Nội, ngày 19/5/2024

TRẦN VĂN NHUNG

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN
BÀI SỐ 105

PROBLEM: *The function f is defined by $f(x)=a.\sin(bx+c)+d$, for constants a, b, c, and d. In the xy - plane, the points (2, 2) and (4, 4) represent a minimum point and a maximum point, respectively, on the graph of f. What are the values of a and d?*

Solution. The function f is of a form of a sine function and the vertical difference between a maximum point and a minimum point is $4-2=2$. Hence $a=1$ (why?).

The basic sine function has minimum value -1 and f has minimum value 2. Thus $d=3$ (why?)

Remark: The exercise is selected from an AP-precalculus practice exam.

TỪ VỰNG

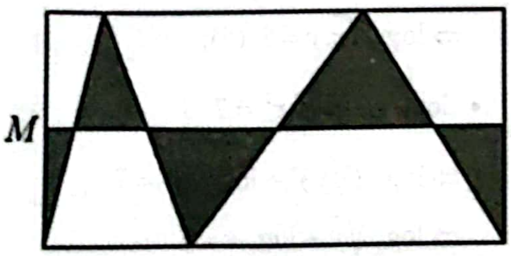
minimum point	:	*điểm cực tiểu*
maximum point	:	*điểm cực đại*
graph	:	*đồ thị*

NGUYEN PHU HOANG LAN
(*University of Education, VNU, Hanoi*)

****

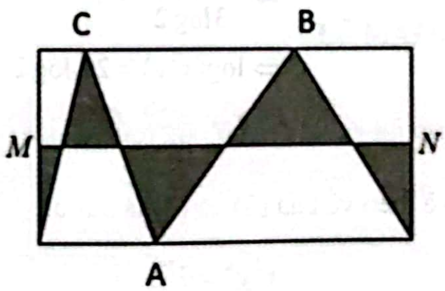
BÀI DỊCH SỐ 103

BÀI TOÁN. *Các điểm M và N là trung điểm hai cạnh của một hình chữ nhật (hình dưới). Tỉ số diện tích giữa phần tô đậm và diện tích hình chữ nhật bằng bao nhiêu?*



Lời giải. Đối với hình tam giác bất kì nào, chẳng hạn tam giác ABC (hình bên), thì tỉ số diện tích giữa phần tô đậm trong tam giác ABC và diện tích tam giác ABC bằng $\frac{1}{4}$.

Và từ đó tỉ số diện tích của phần tô đậm trong hình chữ nhật và diện tích hình chữ nhật cũng bằng $\frac{1}{4}$.



Lưu ý: Bài tập này được sưu tầm từ một đề thi toán trên *IKMC*.

Nhận xét. Rất tiếc kỳ này không có bạn nào gửi bài dịch về Toà soạn.

HỒ HẢI (*Hà Nội*)

NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN

BÀI TOÁN 84. *Cho* $\log_8 x + \log_4 y^2 = 5$ *và* $\log_8 y + \log_4 x^2 = 7$. *Xác định giá trị của x.y*

A. 128 **B.** 256 **C.** 512 **D.** 1024.

Lời giải. Điều kiện: $x > 0, y > 0$.

Cách 1. *Áp dụng công thức biến đổi lôgarit.*

Ta có:

- $\log_8 x + \log_4 y^2 = 5 \Leftrightarrow \dfrac{\log x}{\log 8} + \dfrac{2\log y}{\log 4} = 5$

$$\Leftrightarrow \frac{\log(xy^3)}{3\log 2} = 5$$
$$\Leftrightarrow \log(xy^3) = 15\log 2$$
$$\Rightarrow xy^3 = 2^{15} \quad (1).$$

- $\log_8 y + \log_4 x^2 = 7 \Leftrightarrow \dfrac{\log y}{\log 8} + \dfrac{2\log x}{\log 4} = 7$

$$\Leftrightarrow \frac{\log(x^3y)}{3\log 2} = 7$$
$$\Leftrightarrow \log(x^3y) = 21.\log 2$$
$$\Rightarrow x^3y = 2^{21} \quad (2).$$

Nhân vế theo vế của (1) và (2) ta được:

$$x^4y^4 = 2^{36}.$$

Lấy căn bậc bốn hai vế ta được:

$$xy = 2^9 = 512. \text{ Chọn C.}$$

Cách 2. *Dùng công thức biến đổi ln*

Ta có:

$$\log_8 x + \log_4 y^2 = 5 \Leftrightarrow \frac{\ln x}{\ln 8} + \frac{2.\ln y}{\ln 4} = 5 \quad (3);$$

$$\log_8 y + \log_4 x^2 = 7$$
$$\Leftrightarrow \frac{\ln y}{\ln 8} + \frac{2\ln x}{\ln 4} = 7 \quad (4).$$

Cộng theo vế và phân tích thành nhân tử của (3), (4) ta có:

$$\left(\frac{1}{\ln 8} + \frac{2}{\ln 4}\right)(\ln x + \ln y) = 12$$

hay $$\ln(x.y) = \frac{12}{\left(\dfrac{1}{\ln 8} + \dfrac{2}{\ln 4}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \ln(x.y) = \frac{12}{\left(\dfrac{1}{3\ln 2} + \dfrac{2}{2\ln 2}\right)}$$
$$\Leftrightarrow \ln(x.y) = \frac{12}{\dfrac{8}{6\ln 2}}$$
$$\Leftrightarrow \ln(x.y) = 9\ln 2$$
$$\Leftrightarrow \ln(x.y) = \ln 2^9$$
$$\Leftrightarrow xy = 2^9 = 512. \text{ Chọn C.}$$

Cách 3. *Tương tự cách 1 và 2; và sử dụng thêm công thức:* $\log_{a^\alpha} b^\alpha = \log_a b$.

Ta có: • $\log_8 x + \log_4 y^2 = 5$

$$\Rightarrow \log_{2^3}(\sqrt[3]{x})^3 + \log_{2^2} y^2 = 5$$
$$\Rightarrow \log_2 \sqrt[3]{x} + \log_2 y = 5$$
$$\Rightarrow \log_2 \sqrt[3]{x}.y = 5 \quad (5);$$

- $\log_8 y + \log_4 x^2 = 7$

$$\Rightarrow \log_{2^3}(\sqrt[3]{y})^3 + \log_{2^2} x^2 = 7$$
$$\Rightarrow \log_2 \sqrt[3]{y} + \log_2 x = 7$$
$$\Rightarrow \log_2 \sqrt[3]{y}.x = 7 \quad (6).$$

Cộng vế theo vế của (5) và (6) ta được:

$$\log_2 x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{4}{3}} = 12$$
$$\Rightarrow x.y = 12^{12.\frac{3}{4}} = 2^9 = 512.$$

Cách 4. *Đặt ẩn phụ đưa về hệ phương trình*

Đặt $\log_8 x = a$, $\log_8 y = b$. Từ điều kiện đề bài ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a+3b=5 \\ b+3a=7 \end{cases}.$$

Cộng vế theo vế và đơn giản hệ phương trình ta được: $a + b = 3$. Do đó:

$$\log_8(x.y) = \log_8 x + \log_8 y = 3$$

hay $x.y = 8^3 = 512$.

Cách 5. Cộng hai phương trình theo vế để được

$$\log_8 y + \log_8 x + \log_4 y^2 + \log_4 x^2 = 12$$

$$\Leftrightarrow \log_8 xy + \log_4 x^2y^2 = 12.$$

Đặt: $\log_8 x.y = m$; $\log_4 x^2.y^2 = n$

Khi đó: $x.y = 8^m$; $(x.y)^2 = 4^n$

hay $m = 3$; $n = 9$.

Do đó:

$$\log_4 x^2.y^2 = 9 \Rightarrow (x.y)^2 = (2^2)^9$$

$$\Rightarrow x.y = 2^9 = 512.$$

Cách 6. Cộng hai phương trình theo vế để được

$$\log_8 y + \log_8 x + \log_4 y^2 + \log_4 x^2 = 12$$

$$\Leftrightarrow \log_8 xy + 2\log_4 xy = 12$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2 xy}{\log_2 8} + \frac{2\log_2 xy}{\log_2 4} = 12$$

$$\Rightarrow \frac{\log_2 xy}{3} + \frac{2\log_2 xy}{2} = 12$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}\log_2 xy = 12$$

$$\Rightarrow xy = 2^9 = 512.$$

Cách 7. Dùng phương pháp mũ hóa lôgarit

Ta có: $\log_8 x + \log_4 y^2 = \log_2 x^{\frac{1}{3}} + \log_2 y = 5$

$$\Rightarrow x^{\frac{1}{3}}.y = 2^5 \quad (7).$$

$$\log_8 y + \log_4 x^2 = \log_2 y^{\frac{1}{3}} + \log_2 x = 7$$

$$\Rightarrow y^{\frac{1}{3}}.x = 2^7 \quad (8).$$

Nhân vế theo vế (7), (8) ta được:

$$x^{\frac{4}{3}}.y^{\frac{4}{3}} = 2^{12}$$

$$\Rightarrow x.y = 2^{12\times\frac{3}{4}} = 2^9 = 512.$$

Cách 8. Cộng hai phương trình ở điều kiện bài toán theo vế và biến đổi ta được:

$$\log_8 xy + 2\log_4 xy = 12.$$

Chú ý rằng: $\log_4 xy = \frac{3}{2}\log_8 xy$.

Đặt: $a = \log_8 xy$ thì ta được:

$$a + 3a = 12 \Rightarrow a = 3$$

$$\Rightarrow \log_8 xy = 3 \Rightarrow xy = 8^3 = 512.$$

BÙI ANH TRANG

(GV THCS Trần Văn Quang, Q. Tân Bình, TP.Hồ Chí Minh)

Nhận xét. Ngoài 8 cách giải của bạn *Bùi Anh Trang*, người đề xuất bài toán trên, Toà soạn không nhận được thêm cách giải nào khác của các bạn gửi về.

LÊ MAI *(Hà Nội)*

Mời các bạn gửi lời giải **BÀI TOÁN 86** dưới đây về Toà soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 31.7.2024.

BÀI TOÁN 86. *Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O). M là điểm trên cung $\overparen{AC}$ không chứa điểm B. D là hình chiếu vuông góc của A trên MB. Chứng minh rằng*

$$MB - MC = 2MD.$$

NGUYỄN ĐỨC TÂN

(TP. Hồ Chí Minh)

DU LỊCH THẾ GIỚI QUA CÁC BÀI TOÁN HAY

BÀI TOÁN 91 (***101 problems in algebra* - T. Andreescu & Z. Feng**). *Cho hàm $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ thỏa mãn $f(n+1)>f(n)$ và $f(f(n))=3n$ với mọi n. Tính $f(2001)$.*

Lời giải. Cách 1. Trước tiên ta cần bổ đề

Bổ đề. *Với $n = 0, 1, 2, \ldots$ ta có:*

1) $f(3^n)=2.3^n$;

2) $f(2.3^n)=3^{n+1}$.

Chứng minh. Ta chứng minh bằng quy nạp theo n.

Với $n = 0$ thì $f(1) \neq 1$. Thật vậy, nếu $f(1) = 1$ thì

$$3 = f(f(1)) = f(1) = 1, \text{ mâu thuẫn.}$$

Do $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ nên $f(1) > 1$.

Vì $f(n+1)>f(n)$ nên f là hàm tăng.

Do đó:

$$1 < f(1) < f(f(1)) = 3 \text{ hay } f(1) = 2.$$

Từ đó:

$$f(2) = f(f(1)) = 3.$$

Giả sử rằng với số nguyên dương n nào đó, ta có:

$$f(3^n)=2.3^n \text{ và } f(2.3^n)=3^{n+1}.$$

Ta có:

$$f(3^{n+1})=f(f(2.3^n))=2.3^{n+1}$$

và

$$f(2.3^{n+1})=f(f(3^{n+1}))=3^{n+2}.$$

Theo nguyên lý quy nạp, bổ đề được chứng minh.

Có 3^n-1 các số nguyên m sao cho

$$3^n<m<2.3^n$$

và có 3^n-1 các số nguyên m' sao cho

$$f(3^n)=2.3^n<m'<3^{n+1}=f(2.3^n).$$

Vì f là hàm tăng nên

$$f(3^n+m)=2.3^n+m$$

với $0<m\le 3^n$.

Do đó:

$$f(2.3^n+m)=f(f(3^n+m))=3(3^n+m)$$

với $0<m\le 3^n$.

Vậy

$$f(2001)=f(2.3^6+543)=3(3^6+543)=3816.$$

Cách 2.

Với số nguyên dương n, gọi $n_{(3)}=a_1a_2\ldots a_l$ là biểu diễn của n trong hệ cơ số 3. Dùng phương pháp quy nạp tương tự như cách 1 ta có thể chứng minh rằng

$$f(n)_{(3)}=\begin{cases}2a_2\ldots a_l & \text{nếu } a_1=1\\ 1a_2\ldots a_l0 & \text{nếu } a_1=2\end{cases}.$$

Từ $2001_{(3)}=2202010_{(3)}$ ta có:

$$f(2001)_{(3)}=12020100$$

hay $f(2001)=1.3^2+2.3^4+2.3^6+1.3^7=3816.$

Nhận xét. Rất tiếc là không có bạn nào tham gia giải bài này.

NHƯ HOÀNG

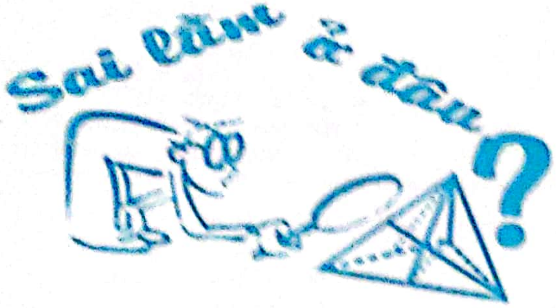
Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 31.7.2024.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

BÀI TOÁN 93. *Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để trên đoạn AB tồn tại một điểm D sao cho độ dài CD là trung bình nhân của độ dài AD và BD là*

$$\sin A.\sin B\le \sin^2\frac{C}{2}.$$

KHÁNH HỮU (*Hà Nội*)



GIẢI ĐÁP: GIÁ TRỊ NÀO CỦA a ĐỂ GIỚI HẠN LÀ $-\infty$!

(Đề đăng trên TH&TT số 560, tháng 2 năm 2024)

Phân tích sai lầm. Cả hai cách giải trên đều khó phát hiện lỗi, lỗi lôgic trình bày không có, chỉ có lỗi về kinh nghiệm trong bài toán giới hạn. Đặc biệt trong cách giải của bạn *Anh Quân*, rất khó để phát hiện sai.

Dù dạng ban đầu là dạng $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty.0, \infty-\infty, \ldots$ thì kết quả giới hạn cũng có thể là vô cùng.

Tóm lại, lỗi của hai bạn ở chỗ không nhìn thấy $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(a-2)x-4}{\sqrt{x^2+1}-x}$ có thể là dạng $\frac{0}{0}$ hoặc $\infty.0$ nên dẫn đến mặc nhiên nhìn nhận $a-2\neq 0$.

Khi $a-2=0 \Leftrightarrow a=2$, ta có:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(a-2)x-4}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{\sqrt{x^2+1}-x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(-4\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}-4x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)$$
$$=-\infty.$$

Vậy $a=2$ cũng thoả yêu cầu bài toán.

Vậy trong hai lời giải đã trình bày chỉ cần thêm trường hợp $a=2$ nữa là hoàn chỉnh.

Nhận xét. Rất tiếc là không có bạn nào phát hiện được sai lầm trong lời giải bài toán này.

KIHIVI

CÓ BAO NHIÊU GIÁ TRỊ?

Trong một đề thi đánh giá năng lực có câu hỏi sau:

Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+m^2x+m$ có hai điểm cực trị đối xứng qua đường thẳng $y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$?

A. 3 **B.** 2

C. 0 **D.** 1

Một học sinh chọn phương án B và trình bày lời giải như sau:

Ta có: $y'=3x^2-6x+m^2, \forall x$

$y'=0 \Leftrightarrow 3x^2-6x+m^2=0$ (1).

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị

$\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta'=9-3m^2>0 \Leftrightarrow -\sqrt{3}<m<\sqrt{3}$ (*).

Lại có $y''=6x-6=0 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow$ đồ thị hàm số có điểm uốn là $U(1;m^2+m-2)$.

Ta có hai điểm cực trị đối xứng qua điểm uốn. Hai điểm cực trị đối xứng qua đường thẳng $(d): y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$ thì (d) là trung trực đoạn thẳng nối 2 điểm cực trị $\Rightarrow$ (d) đi qua điểm uốn hay

$$m^2+m-2=\frac{1}{2}.1-\frac{5}{2} \Leftrightarrow m^2+m-2=-2$$
$$\Leftrightarrow m^2+m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-1\end{array}\right.$$

(thoả mãn (*)).

Theo bạn lời giải trên đã đúng chưa? Có bao nhiêu giá trị tham số m thoả mãn?

NGUYỄN THANH GIANG

(GV trường THPT chuyên Hưng Yên)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 564 (6.2024)
Tòa soạn : 187B, Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607.
ĐT Phát hành: 024.35142648, 024.35682701
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TRONG SỐ NÀY

Biên tập: LÊ MAI, NHƯ HOÀNG
Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG
Trị sự, phát hành: HOÀNG THỊ KIM PHƯỢNG, TRẦN THỊ MINH HIỀN
Thiết kế, chế bản: MINH HÒA

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Bộ đóng tập

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ HÀNG NĂM

Năm 2010
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 99.000 đồng

Năm 2012
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 152.000 đồng

Năm 2014
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 185.000 đồng

Năm 2015
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2016
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2017
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2018
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2019
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2020
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 210.000 đồng

Năm 2021
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 240.000 đồng

Năm 2022
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 260.000 đồng

Năm 2023
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 260.000 đồng

Mọi chi tiết xin liên hệ:
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
Địa chỉ: 187B Giảng Võ, Hà Nội
- Điện thoại: 024.35121606 - 024.35121607
- Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

THƯ NGỎ

Bạn đọc thân mến!

Trong 60 năm qua, Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ không ngừng phát triển và đã trở thành người bạn thân thiết của nhiều thế hệ học sinh, giáo viên và bạn đọc yêu toán trên cả nước. Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ đã nhận nhiều Giấy khen, Huân huy chương và những phần thưởng cao quý khác mà Đảng và Nhà nước trao tặng. Điều này có được là nhờ công sức của các nhà toán học, các nhà sư phạm, các ủy viên hội đồng biên tập, các công tác viên và bạn đọc yêu toán trên cả nước. Thay mặt Ban biên tập, chúng tôi xin cảm ơn bạn đọc gần xa, các nhà khoa học và các cộng tác viên về những đóng góp to lớn đó.

Để chào mừng 60 năm thành lập và phát triển Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, từ tháng 4.2024, Ban biên tập sẽ mở chuyên mục: ***Những hồi ức, những kỷ niệm về Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ***. Nội dung các bài trong chuyên mục này sẽ viết về những hồi ức, những kỷ niệm, gắn bó của bạn đọc với Toán học và Tuổi trẻ; những ảnh hưởng, đóng góp của Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ đối với phong trào học toán, giải toán,... trên toàn quốc.

Bài viết có thể viết trên giấy hoặc đánh máy vi tính (nên bằng chương trình soạn thảo văn bản word). Trên bài viết cần ghi rõ: Họ tên, địa chỉ, số điện thoại. Bài viết không quá 4 trang đánh máy.

Bài viết có thể gửi về Tòa soạn:

- Gửi file word theo địa chỉ email: *toanhoctuoitrevietnam@gmail.com*
- Gửi bài theo đường Bưu điện. Phong bì có dán tem, gửi về địa chỉ: *Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, 187B Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội.*
- Hoặc đến Toà soạn Tạp chí gửi trực tiếp.

Ban biên tập mong muốn nhận được các bài viết từ bạn đọc. Trân trọng cám ơn!

TH&TT

CUỘC THI VIẾT CHUYÊN ĐỀ TOÁN CHÀO MỪNG 60 NĂM TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Để chào mừng 60 năm thành lập và phát triển Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, Ban biên tập tổ chức cuộc thi viết chuyên đề Toán cho bậc THCS và THPT.

• **Đối tượng dự thi:** Giáo viên đã hoặc đang dạy ở bậc THCS, THPT, Giảng viên, Sinh viên ở các trường Đại học, Cao đẳng và bạn đọc yêu thích Toán.

• **Nội dung bài dự thi:** Là các chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi toán; các chuyên đề ôn tập, ôn thi cuối cấp; những tìm tòi, sáng tạo trong việc dạy học Toán (bậc THCS, THPT).

• **Thể lệ cuộc thi:** Mỗi người tham gia cuộc thi được gửi không quá 3 bài dự thi khác nhau. Các bài dự thi có thể là các sáng kiến kinh nghiệm đã đăng ký, hoặc đạt giải ở Trường, Phòng, Sở,... nhưng chưa từng được xuất bản thành sách, báo, tạp chí và cũng chưa tham gia cuộc thi nào khác.

Kết quả cuộc thi sẽ được công bố trên TH&TT tháng 11 năm 2024 (Số 569). Các bài hay có thể được chọn đăng trên Tạp chí hoặc in thành sách. Các tác giả được hưởng nhuận bút theo quy định của Tạp chí. Bài viết tham dự cuộc thi thuộc bản quyền của TH&TT.

• **Thời hạn gửi bài dự thi:** Trước ngày 15/10/2024.

• **Quy cách bài dự thi:** Bài dự thi được đánh máy vi tính, nên dùng chương trình soạn thảo văn bản word (có file). Trên mỗi bài dự thi ghi rõ: Họ và tên, địa chỉ Trường, xã (phường), huyện (quận), tỉnh (thành phố), số điện thoại. Bài dự thi không quá 15 trang đánh máy. Trên cùng của trang 1 mỗi bài dự thi ghi rõ:

Bài dự thi viết chuyên đề Toán
chào mừng 60 năm TH&TT.

• **Cách gửi bài dự thi:** Bài dự thi gửi về Tòa soạn TH&TT bằng cách:

- Gửi file word theo địa chỉ email:

toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

- Gửi bài theo đường Bưu điện. Phong bì có dán tem, gửi về địa chỉ:

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ
187B Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội.

- Hoặc đến Toà soạn Tạp chí gửi trực tiếp.

• **Giải thưởng:** Những người đoạt giải sẽ được nhận Giấy chứng nhận và Tặng phẩm của Tạp chí.

TH&TT

Giấy phép XB số 534/GP-BTTTT cấp ngày 19.11.2020; Mã số: 8BT6M24
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 6 năm 2024

Giá: 18.000 đồng
Mười tám nghìn đồng