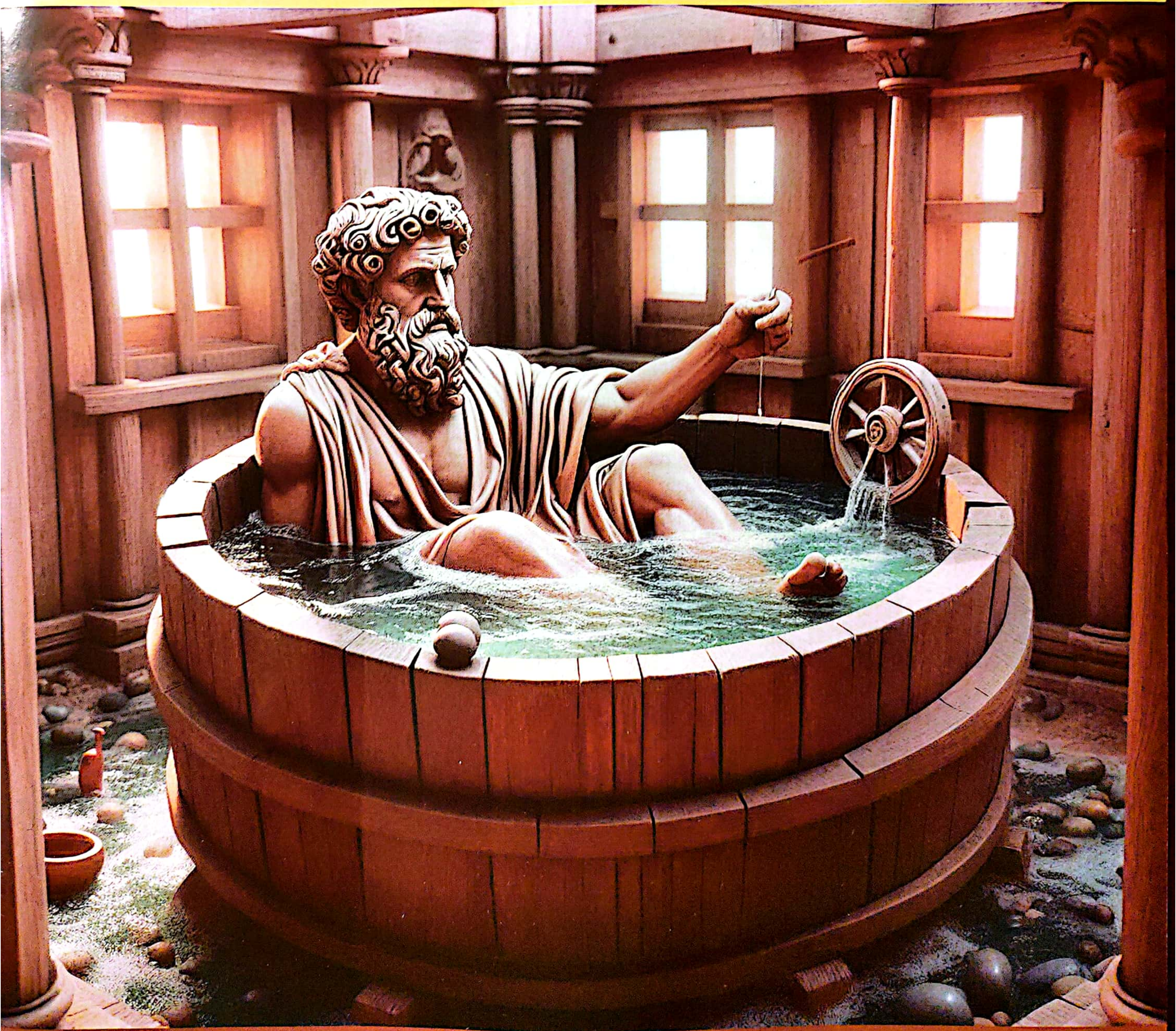
TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

Số 565
Tháng 7 - 2024
ISSN: 2734-9284

VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 61 - XUẤT BẢN TỪ 1964 - DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT Biên tập: (024) 35121607; ĐT Phát hành: (024) 35142649;
ĐT-Fax Hành chính: (024) 35121606 - Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com - Website: viennghiencuusachgd.com



Archimedes – Nhà Toán học cổ Hy Lạp (Minh hoạ AI)

BẢNG GIÁ SÁCH GIÁO KHOA
BẬC TRUNG HỌC CƠ SỞ
ÁP DỤNG CHO NĂM HỌC 2024-2025

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

Chuẩn mực · Khoa học · Hiện đại

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

LỚP 6

TT	Tên sách	Giá bìa (đồng/cuốn)	
1	Ngữ văn 6, tập một	19,000	23,000
2	Ngữ văn 6, tập hai	16,000	20,000
3	Toán 6, tập một	17,000	21,000
4	Toán 6, tập hai	16,000	20,000
5	Giáo dục công dân 6	8,000	12,000
6	Lịch sử và Địa lí 6	27,000	32,000
7	Khoa học tự nhiên 6	27,000	32,000
8	Công nghệ 6	10,000	14,000
9	Tin học 6	10,000	13,000
10	Giáo dục thể chất 6	16,000	20,000
11	Âm nhạc 6	9,000	13,000
12	Mĩ thuật 6	9,000	13,000
13	Hoạt động trải nghiệm, hướng nghiệp 6	8,000	12,000

LỚP 7

TT	Tên sách	Giá bìa (đồng/cuốn)	
1	Ngữ văn 7, tập một	19,000	20,000
2	Ngữ văn 7, tập hai	18,000	20,000
3	Toán 7, tập một	16,000	18,000
4	Toán 7, tập hai	16,000	17,000
5	Giáo dục công dân 7	9,000	10,000
6	Lịch sử và Địa lí 7	24,000	26,000
7	Khoa học tự nhiên 7	24,000	26,000
8	Công nghệ 7	11,000	12,000
9	Tin học 7	11,000	12,000
10	Giáo dục thể chất 7	14,000	15,000
11	Âm nhạc 7	10,000	11,000
12	Mĩ thuật 7	10,000	11,000
13	Hoạt động trải nghiệm, hướng nghiệp 7	10,000	10,000

LỚP 8

TT	Tên sách	Giá bìa (đồng/cuốn)	
1	Ngữ văn 8, tập một	18,000	19,000
2	Ngữ văn 8, tập hai	19,000	20,000
3	Toán 8, tập một	17,000	18,000
4	Toán 8, tập hai	19,000	20,000
5	Khoa học tự nhiên 8	26,000	27,000
6	Công nghệ 8	14,000	15,000
7	Lịch sử và Địa lí 8	23,000	25,000
8	Mĩ thuật 8	9,000	10,000
9	Giáo dục công dân 8	9,000	10,000
10	Tin học 8	13,000	14,000
11	Âm nhạc 8	9,000	10,000
12	Giáo dục thể chất 8	14,000	14,000
13	Hoạt động trải nghiệm, hướng nghiệp 8	10,000	10,000

LỚP 9

TT	Tên sách	Giá bìa (đồng/cuốn)
1	Ngữ văn 9, tập một	20,000
2	Ngữ văn 9, tập hai	19,000
3	Toán 9, tập một	16,000
4	Toán 9, tập hai	18,000
5	Giáo dục công dân 9	8,000
6	Lịch sử và Địa lí 9	31,000
7	Khoa học tự nhiên 9	29,000
8	Công nghệ 9 – Định hướng nghề nghiệp	5,000
9	Công nghệ 9 – Trải nghiệm nghề nghiệp – Mô đun Lắp đặt mạng điện trong nhà	7,000
10	Công nghệ 9 – Trải nghiệm nghề nghiệp – Mô đun Trồng cây ăn quả	10,000
11	Công nghệ 9 – Trải nghiệm nghề nghiệp – Mô đun Chế biến thực phẩm	10,000
12	Tin học 9	13,000
13	Mĩ thuật 9	10,000
14	Âm nhạc 9	9,000
15	Hoạt động trải nghiệm, hướng nghiệp 9	9,000
16	Giáo dục thể chất 9	14,000

SÁCH GIÁO KHOA TIẾNG ANH

Bộ sách hợp tác xuất bản với Pearson Education

TT	Tên sách	Giá bìa (đồng/cuốn)	
1	Tiếng Anh 6 - Global Success (tập 1)	33,000	38,000
2	Tiếng Anh 6 - Global Success (tập 2)	33,000	38,000
3	Tiếng Anh 7 - Global Success	62,000	70,000
4	Tiếng Anh 8 - Global Success	60,000	
5	Tiếng Anh 9 - Global Success	62,000	

Bộ sách hợp tác xuất bản với Oxford University Press

TT	Tên sách	Giá bìa (đồng/cuốn)
1	Tiếng Anh 6 - Friends Plus	89,000
2	Tiếng Anh 7 - Friends Plus	99,000
3	Tiếng Anh 8 - Friends Plus	87,000
4	Tiếng Anh 9 - Friends Plus	87,000

LƯU Ý

Phục vụ năm học 2024-2025, NXBGDVN áp dụng mức giá bìa theo bảng giá này thống nhất trong toàn quốc.

DÀNH CHO TRUNG HỌC CƠ SỞ

MỘT SỐ BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC VỀ DÃY SỐ

VŨ HỮU CHÍN
(TP. Hải Phòng)

Dựa vào quy luật của dãy số ta có nhiều cách giải bài toán về bất đẳng thức liên quan đến dãy số và ứng dụng của nó. Nhiều học sinh còn lúng túng khi gặp những bài toán thuộc dạng bài liên quan đến bất đẳng thức về dãy số. Bài viết này giới thiệu với các em các cách giải dạng toán bất đẳng thức về dãy số và ứng dụng của nó.

DẠNG 1. CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VỀ DÃY SỐ.

Bài 1.1. *Cho*

$$S=\frac{1}{1.1.3}+\frac{1}{2.3.5}+\frac{1}{3.5.7}+\ldots+\frac{1}{1012.2023.2025}.$$

Chứng minh $S<\frac{2}{3}$.

Lời giải. Cách 1. Xét số hạng tổng quát

$$\frac{1}{n(2n-1)(2n+1)}<\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

(với $n\in\mathbb{N},n\geq 2$). Áp dụng bất đẳng thức trên với $n=2,3,4,\ldots,1012$ ta có:

$$S<\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\frac{1}{7.9}+\ldots+\frac{1}{2023.2025}$$

$$\Rightarrow S<\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2021}-\frac{1}{2023}+\frac{1}{2023}-\frac{1}{2025}\right)$$

$$\Rightarrow S<\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2025}\right)<\frac{1}{2}<\frac{2}{3}.$$ Vậy $S<\frac{2}{3}$.

Cách 2. Ta có: $$\frac{1}{n(2n-1)(2n+1)}<\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

(với $n\in\mathbb{N},n\geq 2$).

Áp dụng bất đẳng thức trên với $n=2,3,4,\ldots,1012$ ta có:

$$S<\frac{1}{3}+\frac{1}{2}.\left[\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.4}+\frac{1}{3.4}-\frac{1}{4.5}+\ldots+\frac{1}{1012.1013}-\frac{1}{1013.1014}\right]$$

$$\Rightarrow S<\frac{1}{3}+\frac{1}{2}.\left[\frac{1}{2.3}-\frac{1}{1013.1014}\right]<\frac{1}{3}+\frac{1}{2}.\frac{1}{2.3}=\frac{5}{12}$$

$$\Rightarrow S<\frac{5}{12}<\frac{2}{3}.$$

Cách 3. Ta có: $$\frac{1}{n(2n-1)(2n+1)}=\frac{2}{(2n-1)2n(2n+1)}=\left[\frac{1}{(2n-1)2n}-\frac{1}{2n(2n+1)}\right]$$

(với $n\in\mathbb{N},n\geq 2$).

Áp dụng đẳng thức với $n=2,3,4,\ldots,1012$, suy ra:

$$S=\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3.4}-\frac{1}{4.5}+\frac{1}{5.6}-\frac{1}{6.7}+\ldots+\frac{1}{2023.2024}-\frac{1}{2024.2025}\right)$$

$\Rightarrow S<\frac{1}{3}+\frac{1}{3.4}$, vì

$$-\frac{1}{4.5}+\frac{1}{5.6}-\frac{1}{6.7}+\ldots+\frac{1}{2023.2024}-\frac{1}{2024.2025}<0$$

$\Rightarrow S<\frac{5}{12}<\frac{2}{3}$. Vậy $S<\frac{2}{3}$.

Nhận xét. + Từ các cách giải ta có kết quả tốt hơn là $S<\frac{5}{12}$. Ta có bài toán tổng quát: *Chứng minh*:

$$\frac{1}{1.1.3}+\frac{1}{2.3.5}+\frac{1}{3.5.7}+\ldots+\frac{1}{n(2n-1)(2n+1)}<\frac{5}{12}$$

(với $n\in\mathbb{N}^*$*).*

+ Trong các cách giải trên, số hạng tổng quát được đánh giá một cách phù hợp, xuất hiện dãy mới có thể rút gọn được tổng các số hạng của dãy, từ đó có bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài 1.2. *Cho tổng*

$$S=\frac{1}{1.2.4}+\frac{1}{2.5.7}+\frac{1}{3.8.10}+....+\frac{1}{1000.2999.3001}.$$

Chứng minh rằng $S<\frac{5}{24}$.

Lời giải. Đặt $S=\frac{1}{8}+\frac{1}{70}+P$, trong đó

$$P=\frac{1}{3.8.10}+\frac{1}{4.11.13}+....+\frac{1}{1000.2999.3001} \quad (1).$$

Với $n\in\mathbb{N}, n\geq 3$, ta có:

$$\frac{1}{n(3n-1)(3n+1)}=\frac{1}{n(9n^2-1)}<\frac{1}{n(9n^2-9)}$$

$$=\frac{2}{18n(n-1)(n+1)}=\frac{1}{18}\left[\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)}\right].$$

Áp dụng bất đẳng thức trên với $n=3,4,5,...,1000$ ta có:

$$P<\frac{1}{18}.\left(\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{999.1000}-\frac{1}{1000.1001}\right)$$

$$\Rightarrow P<\frac{1}{18}.\left(\frac{1}{2.3}-\frac{1}{1000.1001}\right)<\frac{1}{18.6}=\frac{1}{108} \quad (3).$$

Từ (1) và (3) có:

$$S=\frac{1}{8}+\frac{1}{70}+P<\frac{1}{8}+\frac{1}{70}+\frac{1}{108}<\frac{1}{8}+\frac{1}{70}+\frac{1}{105}$$

$$\Rightarrow S<\frac{1}{8}+\frac{5}{210}=\frac{1}{8}+\frac{1}{42}<\frac{1}{8}+\frac{1}{40}=\frac{3}{20}.$$

Lại có $\frac{3}{20}<\frac{5}{24}$, suy ra: $S<\frac{5}{24}$.

Nhận xét. Ta có kết quả tốt hơn là $S<\frac{3}{20}$. Từ đó ta có kết quả tổng quát: *Chứng minh*:

$$\frac{1}{1.2.4}+\frac{1}{2.5.7}+...\frac{1}{n(3n-1)(3n+1)}<\frac{3}{20}$$

(*với* $n\in\mathbb{N}^*$).

Bài 1.3. a) *Cho tổng*

$$S=\frac{5}{1.2.3}+\frac{8}{2.3.4}+\frac{11}{3.4.5}+....+\frac{6068}{2022.2023.2024}.$$

Chứng minh $S<2$.

b) *Chứng minh rằng*:

$$\frac{1}{65}<\frac{1}{5^3}+\frac{1}{6^3}+\frac{1}{7^3}+...+\frac{1}{2023^3}<\frac{1}{40}.$$

Lời giải. a) Số hạng tổng quát của tổng S có dạng $\frac{3n+2}{n(n+1)(n+2)}$, với $n=1,2,3,...,2022$.

$$\frac{3n+2}{n(n+1)(n+2)}=\frac{2(n+1)}{n(n+1)(n+2)}+\frac{n}{n(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{2}{n(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$$

$$=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\frac{2}{n+2}.$$

Áp dụng công thức trên với $n=1,2,3,...,2022$ ta có:

$$S=\left(1+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{2}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{2}{5}\right)+....+\left(\frac{1}{2022}+\frac{1}{2023}-\frac{2}{2024}\right)$$

$$=2-\frac{1}{2023}-\frac{1}{1012}<2.$$ Vậy $S<2$.

b) Đặt $P=\frac{1}{5^3}+\frac{1}{6^3}+\frac{1}{7^3}+...+\frac{1}{2023^3}$, tổng P có 2019 số hạng. Với $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$ ta có:

$$0<(n-1)n(n+1)=n^3-n<n^3$$

$$\Rightarrow\frac{1}{n^3}<\frac{1}{(n-1)n(n+1)}=\frac{1}{2}.\left[\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)}\right].$$

Áp dụng BĐT trên với $n=5,6,7,...,2023$ ta có:

$$P<\frac{1}{2}.\left[\frac{1}{4.5}-\frac{1}{5.6}+\frac{1}{5.6}-\frac{1}{6.7}+\frac{1}{6.7}-\frac{1}{7.8}+...+\frac{1}{2022.2023}-\frac{1}{2023.2024}\right]$$

$$=\frac{1}{2}.\left[\frac{1}{4.5}-\frac{1}{2023.2024}\right]<\frac{1}{2}.\frac{1}{4.5}=\frac{1}{40} \quad (1).$$

Với $n\in\mathbb{N}^*$, ta có:

$$\frac{1}{n^3}>\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}.\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right].$$

Áp dụng BĐT trên với $n=5,6,7,...,2023$ ta có:

$$P>\frac{1}{2}.\left[\frac{1}{5.6}-\frac{1}{6.7}+\frac{1}{6.7}-\frac{1}{7.8}+\frac{1}{7.8}-\frac{1}{8.9}+...+\frac{1}{2023.2024}-\frac{1}{2024.2025}\right]$$

$$=\frac{1}{2}.\left[\frac{1}{5.6}-\frac{1}{2024.2025}\right]$$

$$>\frac{1}{2}.\left[\frac{1}{5.6}-\frac{1}{390}\right]=\frac{12}{2.390}=\frac{1}{65}\quad(2).$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{1}{65}<\frac{1}{5^3}+\frac{1}{6^3}+\frac{1}{7^3}+\ldots+\ldots\frac{1}{2023^3}<\frac{1}{40}.$$

Nhận xét. + Với phần a) có bài toán tổng quát: *Chứng minh*:

$$\frac{5}{1.2.3}+\frac{8}{2.3.4}+\frac{11}{3.4.5}+\ldots+\frac{3n+2}{n(n+1)(n+2)}<2-\frac{1}{n+1}-\frac{2}{n+2}$$

(với $n\in\mathbb{N},n\geq 2$).

+ Với phần b) có bài toán tổng quát: *Chứng minh*:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{5.6}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]<\frac{1}{5^3}+\frac{1}{6^3}+\frac{1}{7^3}+\ldots+\ldots\frac{1}{n^3}<\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4.5}-\frac{1}{n(n+1)}\right]$$

(với $n\in\mathbb{N},n\geq 5$).

Bài 1.4. *Cho*

$$A=\frac{1}{14}+\frac{1}{29}+\ldots+\frac{1}{n^2+(n+1)^2+(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{1877}.$$

Chứng minh rằng: $0,15<A<0,25$.

Lời giải.

$$A=\frac{1}{1^2+2^2+3^2}+\frac{1}{2^2+3^2+4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2+(n+1)^2+(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{24^2+25^2+26^2}.$$

Đặt $B=n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=3n^2+6n+5$.

a) Với $n\geq 1$, ta có:

$$B<3n^2+9n+6=3(n^2+3n+2)=3(n+1)(n+2).$$

Áp dụng với $n=1,2,3,\ldots,24$ ta có:

$$A>\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\ldots+\frac{1}{25.26}\right]$$

$$=\frac{1}{3}.\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{25}-\frac{1}{26}\right)$$

$$=\frac{1}{3}.\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{26}\right)=\frac{2}{13}>0,15.$$

b) Với $n\geq 1$, ta có:

$$B>2n^2+6n+4=2(n+1)(n+2).$$

Áp dụng với $n=1,2,3,\ldots,24$ ta có:

$$A<\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{25.26}\right)$$

$$=\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{25}-\frac{1}{26}\right).$$

$$=\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{26}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2.26}<0,25.$$

Nhận xét. Ta có bài toán tổng quát: *Chứng minh*

$$\frac{1}{6}-\frac{1}{3(n+2)}<\frac{1}{1^2+2^2+3^2}+\frac{1}{2^2+3^2+4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2+(n+1)^2+(n+2)^2}<\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+2)}$$

(với $n\in\mathbb{N}^*$).

Bài 1.5. *Cho dãy số (u_n) xác định bởi*

$$u_n=(n^2+n+1)^2+1\ (\text{với } n\in\mathbb{N}^*).$$

Đặt $P_n=\dfrac{u_1.u_3.u_5\ldots u_{2n-1}}{u_2.u_4.u_6\ldots u_{2n}}$. *Chứng minh rằng*:

$$P_1+P_2+P_3+\ldots+P_n<\frac{1}{2}.$$

Lời giải. Ta có:

$$u_n=(n^2+n+1)^2+1=(n^2+1)^2+2n(n^2+1)+(n^2+1)$$

$$=(n^2+1)\left[(n+1)^2+1\right].$$

Suy ra:

$$\frac{u_{2n-1}}{u_{2n}}=\frac{(4n^2-4n+2)(4n^2+1)}{(4n^2+1)(4n^2+4n+2)}=\frac{(2n-1)^2+1}{(2n+1)^2+1}.$$

Do đó: $P_n=\dfrac{1^2+1}{3^2+1}.\dfrac{3^2+1}{5^2+1}.\dfrac{5^2+1}{7^2+1}\ldots\dfrac{(2n-1)^2+1}{(2n+1)^2+1}$

$$=\frac{2}{(2n+1)^2+1}=\frac{1}{2n^2+2n+1}$$

$$<\frac{1}{2n(n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$$ Vậy

$$P_1+P_2+\ldots+P_n<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}\right)<\frac{1}{2}.$$

Nhận xét. Ta chứng minh được:

$$P_1 + P_2 + P_3 + ... + P_n < \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right),$$

với $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 1.6. *Dãy số (u_n) được xác định như sau:*

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} \text{ với } n = 1,2,3,...,k.$$

Đặt $S = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_k$. Chứng minh rằng

$$18 < \frac{1}{S} \le 24.$$

Lời giải. Ta có $u_n > 0$ với $n = 1,2,3,...,k$.

Do đó với $k \ge 1$ thì $S \ge u_1 = \frac{1}{24} \Rightarrow \frac{1}{S} \le 24$ (1).

Với bất kì $n \ge 1$ ta có:

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{1}{3}.\frac{(n+3)-n}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{1}{3}.\left[\frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right].$$

Do đó: $3S = 3(u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_k)$

$$= \left(\frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{2.3.4}\right) + \left(\frac{1}{2.3.4} - \frac{1}{3.4.5}\right) + ...$$

$$+ \left(\frac{1}{k(k+1)(k+2)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}\right)$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} < \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow S < \frac{1}{18} \Leftrightarrow \frac{1}{S} > 18 \text{ (2)}.$$

Từ (1) và (2) suy ra: $18 < \frac{1}{S} \le 24$.

Nhận xét. Ta có bài toán tổng quát: *Dãy số (u_n) được xác định bởi:* $u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)....(n+t)}$ *với* $n = 1;2;3;...;k$ và $t \ge 1$.

Đặt $S = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_k$. Chứng minh rằng

$$t!.t < \frac{1}{S} \le (t+1)!.$$

Bài 1.7. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{2024} + \left(\frac{1}{2024} + \frac{1}{2024^2}\right)^2 + ...$$

$$+ \left(\frac{1}{2024} + \frac{1}{2024^2} + ... + \frac{1}{2024^{2023}}\right)^{2023} < \frac{1}{2022}.$$

Lời giải. Với $a, n \in \mathbb{N}, a, n > 1$ ta thu gọn tổng:

$$S_n = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} +,,,, \frac{1}{a^n}. \quad \text{Ta có:}$$

$$(a-1)S_n = aS_n - S_n = \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + ... + \frac{1}{a^{n-1}}\right)$$

$$-\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + ... + \frac{1}{a^n}\right) = 1 - \frac{1}{a^n} < 1$$

$$\Rightarrow S_n < \frac{1}{a-1} \text{ (1)}.$$

Áp dụng BĐT(1) cho $a = 2024$ và $n = 2,3,4,...,2023$ ta có:

$$P = \frac{1}{2024} + \left(\frac{1}{2024} + \frac{1}{2024^2}\right)^2$$

$$+ ... + \left(\frac{1}{2024} + \frac{1}{2024^2} + ... + \frac{1}{2024^{2023}}\right)^{2023}$$

$$\Rightarrow P < \frac{1}{2023} + \left(\frac{1}{2023}\right)^2 + \left(\frac{1}{2023}\right)^3 + ... + \left(\frac{1}{2023}\right)^{2023}.$$

Lại áp dụng bất đẳng thức (1) cho $a = 2023$ và $n = 2023$ ta có:

$$P < \frac{1}{2023} + \frac{1}{2023^2} + \frac{1}{2023^3} + ... + \frac{1}{2023^{2023}} < \frac{1}{2022}.$$

Suy ra điều phải chứng minh.

Bài 1.8. *Với $n \in \mathbb{N}^*$ chứng minh rằng:*

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^3}\right)....\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) < 3 \text{ (1)}.$$

Lời giải. Đặt $A = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^3}\right)....\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$.

- Với $n = 1$ thì $A = 1 + \frac{1}{2} < 3$, khi đó (1) đúng.

- Với $n \ge 2$ thì $A = \frac{3}{2}.\left(1 + \frac{1}{2^2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^3}\right)....\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$.

Nhận xét: Với $m \in \mathbb{N}, m \ge 2$ thì

$$1 + \frac{1}{2^m} < \frac{1}{2}.\frac{2^m - 1}{2^{m-1} - 1} \text{ (2)}.$$

Thật vậy, xét hiệu:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2^m-1}{2^{m-1}-1}-\left(1+\frac{1}{2^m}\right)=\frac{2^m-1}{2\left(2^{m-1}-1\right)}-\frac{2^m+1}{2^m}$$

$$=\frac{1}{2^m\left(2^{m-1}-1\right)}>0 \text{ (vì } m\ge 2\text{)}.$$

Do đó BĐT(2) được chứng minh.

Áp dụng bất đẳng thức, với $m=2,3,4,\dots,n$ ta có:

$$A<\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2^2-1}{2-1}\right)\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2^3-1}{2^2-1}\right)\dots\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2^n-1}{2^{n-1}-1}\right)$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\frac{\left(2^2-1\right)\left(2^3-1\right)\dots\left(2^n-1\right)}{(2-1)\left(2^2-1\right)\dots\left(2^{n-1}-1\right)}.$$

$$=3\cdot\frac{2^n-1}{2^n}<3.1=3.$$

Bài 1.9. *Cho*

$$A=\frac{1}{1.1!}+\frac{1}{2.2!}+\frac{1}{3.3!}+\dots+\frac{1}{2025.2025!}$$

(kí hiệu $n!=1.2.3\dots n$). Chứng minh rằng $A<\dfrac{3}{2}$.

Lời giải. Cách 1. Với $n\in\mathbb{N}, n\ge 2$ ta có $n(n-1)>1\Leftrightarrow n^2>n+1$. Do đó:

$$\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}=\frac{n}{(n+1)!}=\frac{n}{(n+1).n!}>\frac{1}{n.n!} \quad (2).$$

Áp dụng BĐT(2) vào biểu thức A với $n=2,3,4,\dots,2025$ ta có:

$$A=\frac{1}{1.1!}+\frac{1}{2.2!}+\frac{1}{3.3!}+\dots+\frac{1}{2025.2025!}$$

$$<1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\dots+\frac{1}{2025!}-\frac{1}{2026!}$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2026!}<\frac{3}{2}.$$

Cách 2. Với $n\in\mathbb{N}, n\ge 4$ thì

$$\frac{1}{n.n!}=\frac{1}{n.2.3\dots n}<\frac{1}{2n.2n}<\frac{1}{(2n-3).(2n-1)}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(2n-3)}-\frac{1}{(2n-1)}\right] \quad (3).$$

Áp dụng BĐT(3) vào biểu thức A với $n=4,5,6,\dots,2025$ ta có:

$$A=\frac{1}{1.1!}+\frac{1}{2.2!}+\frac{1}{3.3!}+\dots+\frac{1}{2025.2025!}$$

$$<1+\frac{1}{4}+\frac{1}{18}+\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{4047}-\frac{1}{4049}\right]$$

$$\Rightarrow A<1+\frac{1}{4}+\frac{1}{18}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{4049}\right)$$

$$<1+\frac{1}{4}+\frac{1}{18}+\frac{1}{10}=1+\frac{73}{180}<\frac{3}{2}.$$

DẠNG 2. CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VỀ DÃY SỐ LIÊN QUAN ĐẾN CĂN THỨC.

Bài 2.1. *Cho dãy số (a_n) được xác định như sau:*

$$a_n=\frac{1}{n^2(n+2)\sqrt{n+1}}, n=1,2,3,\dots$$

Chứng minh rằng: $a_1+a_2+a_3+\dots+a_n<\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

Lời giải. Cách 1. Với mỗi $n\in\mathbb{N}^*$ ta có:

$$a_n=\frac{1}{2n\sqrt{n+1}}\cdot\frac{2}{n(n+2)}=\frac{1}{2n\sqrt{n+1}}\cdot\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{(n+2)}\right]$$

$$=\frac{1}{2n^2\sqrt{n+1}}-\frac{1}{2n(n+2)\sqrt{n+1}}$$

$$<\frac{1}{2n^2\sqrt{n+1}}-\frac{1}{2(n+1)^2\sqrt{n+1}}.$$

Với $n=1,2,3,\dots$ ta có:

$$a_1+a_2+a_3+\dots+a_n<\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2.4\sqrt{3}}\right)$$

$$+\left(\frac{1}{2.4\sqrt{3}}-\frac{1}{2.9\sqrt{4}}\right)+\dots+\left[\frac{1}{2n^2\sqrt{n+1}}-\frac{1}{2.(n+1)^2\sqrt{n+2}}\right]$$

$$\Rightarrow a_1+a_2+a_3+\dots+a_n<\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2.(n+1)^2\sqrt{n+2}}<\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Cách 2. Với $n=1,2,3,\dots$ ta có:

$$2n^2\ge n+1\Leftrightarrow\sqrt{2}.n\ge\sqrt{n+1}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{2}.n}\le\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\Rightarrow a_n=\frac{\sqrt{2}}{n(n+2).\sqrt{2}.n\sqrt{n+1}}$$

$$\le\frac{\sqrt{2}}{n(n+2)\sqrt{n+1}.\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{2}}{n(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right].$$

Do đó:

$$a_1+a_2+a_3+....+a_n \le \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}\right)+\left(\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.4}\right)+ +....+\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)\right]$$

$$\Rightarrow a_1+a_2+a_3+....+a_n \le \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\frac{1}{1.2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right] < \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Bài 2.2. *Cho biểu thức*

$$A=\frac{1}{2\sqrt{1}}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{3}}+....+\frac{1}{2023\sqrt{2022}}.$$

Chứng minh $\frac{87}{89}<A<\frac{88}{45}$.

Lời giải. Với $n\in\mathbb{N}^*$, ta có:

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n}}{(n+1)n}=\frac{\sqrt{n}}{n}-\frac{\sqrt{n}}{(n+1)}>\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Áp dụng BĐT trên với $n=1,2,3,...,2022$, ta có:

$$A>\left(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+...+\left(\frac{1}{\sqrt{2022}}-\frac{1}{\sqrt{2023}}\right)$$

$\Rightarrow A>1-\frac{1}{\sqrt{2023}}>\frac{87}{89}$ (1). Lại có:

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}=\frac{2}{2\sqrt{(n+1)}}.\frac{1}{\sqrt{n}.\sqrt{n+1}}$$

$$<\frac{2}{\sqrt{(n+1)}+\sqrt{n}}.\frac{1}{\sqrt{n}.\sqrt{n+1}}<\frac{2\left[\sqrt{(n+1)}-\sqrt{n}\right]}{\sqrt{n}.\sqrt{n+1}}$$

$$=2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right).$$

Áp dụng BĐT trên với $n=1,2,3,...,2022$, ta có:

$$A<2\left(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+....+\frac{1}{\sqrt{2022}}-\frac{1}{\sqrt{2023}}\right)$$

$$=2\left(1-\frac{1}{\sqrt{2023}}\right)<\frac{88}{45}\ (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{87}{89}<A<\frac{88}{45}$.

Nhận xét. Bài toán tổng quát: *Chứng minh rằng:*

$$1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}<\frac{1}{2\sqrt{1}}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{3}}+....+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}<2\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

với $n\in\mathbb{N}^*$.

Bài 2.3. *Cho dãy số* (a_n) *được xác định như sau:*

$$a_1=1, a_{n+1}=\sqrt{a_n(a_n+1)(a_n+2)(a_n+3)+2}$$

$(n\in\mathbb{N}^*)$. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{a_1+2}+\frac{1}{a_2+2}+\frac{1}{a_3+2}+...+\frac{1}{a_{2024}+2}<\frac{1}{2}.$$

Lời giải. Ta có $a_n>0$ với $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Xét

$$a_{n+1}=\sqrt{a_n(a_n+1)(a_n+2)(a_n+3)+2}$$
$$>\sqrt{a_n(a_n+1)(a_n+2)(a_n+3)+1}$$
$$=\sqrt{(a_n^2+3a_n)(a_n^2+3a_n+2)+1}$$
$$=\sqrt{(a_n^2+3a_n+1)^2}=a_n^2+3a_n+1$$

$$\Rightarrow a_{n+1}+1>a_n^2+3a_n+2=(a_n+1)(a_n+2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_{n+1}+1}<\frac{1}{(a_n+1)(a_n+2)}=\frac{1}{a_n+1}-\frac{1}{a_n+2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_n+2}<\frac{1}{a_n+1}-\frac{1}{a_{n+1}+1}\ (\text{với } n\in\mathbb{N}^*).$$

Áp dụng BĐT trên với $n=1,2,3,...,2024$ ta có:

$$S=\frac{1}{a_1+2}+\frac{1}{a_2+2}+\frac{1}{a_3+2}+...+\frac{1}{a_{2024}+2}$$
$$<\frac{1}{a_1+1}-\frac{1}{a_2+1}+\frac{1}{a_2+1}-\frac{1}{a_3+1}$$
$$+\frac{1}{a_3+1}-\frac{1}{a_4+1}+...+\frac{1}{a_{2024}+1}-\frac{1}{a_{2025}+1}$$
$$=\frac{1}{a_1+1}-\frac{1}{a_{2025}+1}<\frac{1}{a_1+1}=\frac{1}{2}.$$

Nhận xét. Ta có bài toán tổng quát:

$$\frac{1}{a_1+2}+\frac{1}{a_2+2}+...+\frac{1}{a_n+2}<\frac{1}{a_1+1}-\frac{1}{a_{n+1}+1}$$

$(n\in\mathbb{N}^*)$.

Bài 2.4. *Chứng minh rằng:*

$$1+\sqrt{1+\frac{4}{3!}}+\sqrt[3]{1+\frac{9}{4!}}+....+\sqrt[n]{1+\frac{n^2}{(n+1)!}}<n+\frac{1}{2}$$

với $n\in\mathbb{N}, n\ge 2, n!=1.2.3....n.$

Lời giải. Trước hết, nhận xét rằng với $x>0$ và $k\in\mathbb{N}^*(k\ge 2)$ luôn có: $(1+x)^k>1+kx$ (1).

Thật vậy, với $k=2$ ta có:

$$(1+x)^2 = 1+2x+x^2 > 1+2x.$$

Vậy (1) đúng khi $k=2$. Giả sử (1) đúng với $k \in \mathbb{N}^*(k \geq 2)$ tức là $(1+x)^k > 1+kx$. Khi đó:

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k.(1+x) > (1+kx)(1+x)$$

$\Rightarrow (1+x)^{k+1} > 1+(k+1)x+kx^2 > 1+(k+1)x$. Do đó (1) đúng với $k+1$. Vậy (1) đúng với $\forall k \in \mathbb{N}^*(k \geq 2)$. Từ (1) suy ra: $\sqrt[k]{1+kx} < 1+x$.

Với $x = \dfrac{k}{(k+1)!}$, ta có:

$$\sqrt[k]{1+\frac{k^2}{(k+1)!}} < 1+\frac{k}{(k+1)!}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[k]{1+\frac{k^2}{(k+1)!}} < 1+\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!} \quad (2).$$

Đặt $P = 1+\sqrt{1+\dfrac{4}{3!}}+\sqrt[3]{1+\dfrac{9}{4!}}+....+\sqrt[n]{1+\dfrac{n^2}{(n+1)!}}$.

Áp dụng bất đẳng thức (2) với $k = 2;3;4;...;n$ ta có

$$P < 1+\left(1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\left(1+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}\right)+....+\left(1+\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right)$$

$$< n+\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)!} < n+\frac{1}{2}.$$

DẠNG 3. ỨNG DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC VỀ DÃY SỐ

Bài 3.1. *Cho* $A = \dfrac{3}{4}+\dfrac{8}{9}+\dfrac{15}{16}+...+\dfrac{999999}{1000000}$.

Tính $[A]$. *(Kí hiệu* $[a]$ *là số nguyên lớn nhất không vượt quá a).*

Lời giải. Ta có:

$$A = \left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(1-\frac{1}{9}\right)+\left(1-\frac{1}{16}\right)+...+\left(1-\frac{1}{1000000}\right)$$

$$= \left(1-\frac{1}{2^2}\right)+\left(1-\frac{1}{3^2}\right)+\left(1-\frac{1}{4^2}\right)+...+\left(1-\frac{1}{1000^2}\right)$$

$$= 999-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{1000^2}\right) = 999-B$$

trong đó $B = \dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}+...+\dfrac{1}{1000^2} > 0$,

suy ra $A < 999$. Ta có:

$$B = \frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{1000^2}$$

$$< \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{999.1000}$$

$$< \frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{999}-\frac{1}{1000}$$

$$= \frac{1}{1}-\frac{1}{1000} < 1.$$

Do đó $A = 999-B > 999-1 = 998$, suy ra $998 < A < 999$. Vậy $[A] = 998$.

Nhận xét. *Cho* $A = \dfrac{3}{4}+\dfrac{8}{9}+\dfrac{15}{16}+...+\dfrac{n^2-1}{n^2}$, *với* $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Ta cũng chứng minh được:

$$n-2 < A < n-1 \text{ và } [A] = n-2.$$

Bài 3.2. *Cho*

$$A = \left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(2+\frac{2}{2^2}\right)+\left(3+\frac{3}{2^3}\right)+....+\left(n+\frac{n}{2^n}\right)$$

(với $n \in \mathbb{N}^*$*). Tìm n để* $[A] = 4951$. *(Kí hiệu* $[x]$ *là số nguyên lớn nhất không vượt quá x).*

Lời giải. Ta có:

$$A = (1+2+3+...+n)+\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+...+\frac{n}{2^n}\right).$$

Đặt $B = \dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+...+\dfrac{n}{2^n}$, ta có:

$$B \geq \frac{1}{2}+\frac{2}{2^2} = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2.$$

Lại có: $B = 2B-B = \left(1+1+\dfrac{3}{2^2}+...+\dfrac{n}{2^{n-1}}\right)$

$$-\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+...+\frac{n}{2^n}\right)$$

$$= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}.$$

Đặt $C = 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+...+\dfrac{1}{2^{n-1}}$

$$\Rightarrow 2C = 2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{n-2}}.$$

Do đó: $C = 2C-C = 2-\dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Vậy $B = 2-\dfrac{1}{2^{n-1}}-\dfrac{n}{2^n} = 2-\dfrac{2+n}{2^n} < 2.$

Do đó $1 \le B < 2 \Rightarrow [B] = 1$.

Với $\forall n \in \mathbb{N}, n \ge 2$ thì $\dfrac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}^*$.

Do đó: $[A] = \dfrac{n(n+1)}{2} + [B] = \dfrac{n(n+1)}{2} + 1$.

Để $[A] = 4951$ thì $\dfrac{n(n+1)}{2} + 1 = 4951$

$\Leftrightarrow n(n+1) = 9900 \Leftrightarrow (n-99)(n+100) = 0 \Leftrightarrow n = 99$.

Vậy $n = 99$ là giá trị cần tìm.

Bài 3.3. *Cho*

$$S = \sqrt{\frac{2+1}{2}} + \sqrt[3]{\frac{3+1}{3}} + \sqrt[4]{\frac{4+1}{4}} + ... + \sqrt[2025]{\frac{2025+1}{2025}}.$$

Tính $[S]$. (Kí hiệu $[a]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá a).

Lời giải. + Ta có mỗi số hạng của tổng S đều lớn hơn 1, do đó $S > 2024$ (1).

+ *Nhận xét.* * Với $x > 0$ và $k \in \mathbb{N}^* (k \ge 2)$ ta luôn có: $(1+x)^k > 1 + kx$ (2).

Từ (2) suy ra: $\sqrt[k]{1+kx} < 1 + x$.

+ Với $x = \dfrac{1}{k^2}$ ta có:

$$\sqrt[k]{1+kx} = \sqrt[k]{1+\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{\frac{k+1}{k}} < 1 + \frac{1}{k^2} \quad (3).$$

Áp dụng BĐT(3), với $k = 2,3,4,...,2025$ cho 2024 số hạng của S, ta có:

$$S < \left(1+\frac{1}{2^2}\right) + \left(1+\frac{1}{3^2}\right) + \left(1+\frac{1}{4^2}\right) + ... + \left(1+\frac{1}{2025^2}\right)$$

$$< 2024 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{2025^2}$$

$$< 2024 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{2024.2025}$$

$$< 2024 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2024} - \frac{1}{2025}$$

$$= 2025 - \frac{1}{2025} < 2025 \ (4).$$

Từ (1), (4) suy ra: $2024 < S < 2025 \Rightarrow [S] = 2024$.

Nhận xét. Ta có kết quả tổng quát: *Với*

$$S = \sqrt{\frac{2+1}{2}} + \sqrt[3]{\frac{3+1}{3}} + \sqrt[4]{\frac{4+1}{4}} + ... + \sqrt[n]{\frac{n+1}{n}}$$

$(n \in \mathbb{N}, n \ge 2)$ *thì* $[S] = n - 1$.

Bài 3.4. *Viết 2024 số tự nhiên từ 1 đến 2024 theo một thứ tự nào đó được dãy số $a_1, a_2, a_3, ..., a_{2024}$. Tìm giá trị lớn nhất của tổng:*

$$P = \sqrt{a_1+a_2} + \sqrt{a_3+a_4} + \sqrt{a_5+a_6} + ... + \sqrt{a_{2023}+a_{2024}}.$$

Lời giải. Tính tổng

$$S = 1+2+3+...+2024 = \frac{(1+2024).2024}{2} = 1012.2025.$$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$\sqrt{2025.(a_1+a_2)} \le \frac{2025+(a_1+a_2)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a_1+a_2} \le \frac{2025+(a_1+a_2)}{2\sqrt{2025}}.$$

Tương tự có: $\sqrt{a_3+a_4} \le \dfrac{2025+(a_3+a_4)}{2\sqrt{2025}}, ...,$

$$\sqrt{a_{2023}+a_{2024}} \le \frac{2025+(a_{2023}+a_{2024})}{2\sqrt{2025}}.$$

Suy ra: $P \le \dfrac{1012.2025 + a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{2024}}{2\sqrt{2025}}$

$$= \frac{1012.2025+S}{2\sqrt{2025}} = \frac{1012.2025+1012.2025}{2\sqrt{2025}}$$

$$= 1012.\sqrt{2025}.$$

Đẳng thức xảy ra khi

$$a_1 + a_2 = a_3 + a_4 = ... = a_{2023} + a_{2024} = 2025.$$

Vậy max $P = 1012.\sqrt{2025}$ khi

$$a_1 + a_2 = a_3 + a_4 = ... = a_{2023} + a_{2024} = 2025.$$

Bài 3.5. *Cho*

$$S_n = 1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + ... + \frac{1}{1+2+3+....+n},$$

với $n \in \mathbb{N}^*$. Tìm số hữu tỉ a nhỏ nhất để

$$S_n < a, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Lời giải. Với $k \in \mathbb{N}^*$ thì

$$\frac{1}{1+2+3+....+k} = \frac{2}{k(k+1)}$$

$$= 2\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right).$$

Thay lần lượt $k = 1,2,3,...,n$ ta được:

$$S_n = 2.\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$= 2.\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}\right) = 2-\frac{2}{n+1} < 2.$$

Vậy $S_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Ta chứng minh $a = 2$ là số hữu tỉ nhỏ nhất để $S_n < a, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Thật vậy, giả sử tồn tại số hữu tỉ $b < 2$ sao cho $S_n < b, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó:

$$S_n = 2-\frac{2}{n+1} < b \Rightarrow 2-b < \frac{2}{n+1}.$$

Do $b < 2 \Leftrightarrow 2-b > 0$ suy ra: $n+1 < \frac{2}{2-b}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Điều này không xảy ra khi ta chọn n là số tự nhiên lớn hơn $\frac{2}{2-b}$. Vậy số hữu tỉ cần tìm là $a = 2$.

MỘT SỐ BÀI TOÁN TƯƠNG TỰ

1. a) Cho $A = \frac{1}{4}.\frac{3}{6}.\frac{5}{8}....\frac{995}{998}.\frac{997}{1000}$. Chứng minh rằng: $A < \frac{1}{12900}$.

b) Cho $S = \frac{2}{2^1}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+....+\frac{n+1}{2^n}+...+\frac{2025}{2^{2024}}$.

Chứng minh $S < 3$.

2. a) Cho $S = \frac{2024+2023}{2025+2024}+\frac{2024^2+2023^2}{2025^2+2024^2}$
$+\frac{2024^3+2023^3}{2025^3+2024^3}+...+\frac{2024^{2025}+2023^{2025}}{2025^{2025}+2024^{2025}}$.

Chứng minh $S < 2024$.

b) Cho

$$A = 4043^2; B = \frac{(3^4+3^2+1)(5^4+5^2+1).....(2021^4+2021^2+1)}{(2^4+2^2+1)(4^4+4^2+1)....(2020^4+2020^2+1)}.$$

Chứng minh $A < 12B$.

3. a) Cho $a, n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^6}-\frac{1}{a^8}+...+\frac{1}{a^{4n-2}}-\frac{1}{a^{4n}} < \frac{1}{a^2+1}.$$

b) Cho $n \in \mathbb{N}^*$ và $a > 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\frac{3}{a^3}+....+\frac{n}{a^n} < \frac{a}{(a-1)^2}.$$

c) Dãy số (a_n) được xác định như sau: $a_n = \frac{4n}{n^4+4}$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Chứng minh rằng

$$a_1+a_2+a_3+....+a_n < \frac{3}{2}.$$

4. Cho $n \in \mathbb{N}^*$, chứng minh rằng:

$$1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+...+\frac{1}{\sqrt[3]{n}} > \frac{3}{2}\left[\sqrt[3]{(n+1)^2}-1\right].$$

5. a) Chứng minh rằng tổng

$$A = \frac{n+1}{n^2+1}+\frac{n+1}{n^2+2}+\frac{n+1}{n^2+3}+...+\frac{n+1}{n^2+n}$$

($n \in \mathbb{N}, n > 1$) không phải là số nguyên.

b) Chứng minh biểu thức

$$P = \frac{1}{\sqrt{1^3}}+\frac{1}{\sqrt{1^3+2^3}}+\frac{1}{\sqrt{1^3+2^3+3^3}}+ ...+\frac{1}{\sqrt{1^3+2^3+3^3+...+2024^3}}$$

không phải là số tự nhiên.

6. Tìm số nguyên dương k sao cho dãy số sau gồm toàn số nguyên: $a_1 = 1, a_{n+1} = 5a_n + \sqrt{ka_n^2-8}$ với mọi $n = 1;2;3;.....$

7. a) Tìm phần nguyên của P, biết rằng

$$P = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+...+\frac{1}{\sqrt{999}+\sqrt{1000}}.$$

b) Cho $P = \sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}$
$+\sqrt{1+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}}+...+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}$

(với $n \in \mathbb{N}^*, n > 2$). Tìm phần nguyên của P.

8. Cho $A = \left(1+\frac{1}{2025}\right)\left(1+\frac{1}{2025^2}\right)\left(1+\frac{1}{2025^3}\right)...\left(1+\frac{1}{2025^n}\right)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ và $B = \frac{2025^2-1}{2024^2-1}$. Chứng minh $A < B$.

9. Cho n là số nguyên dương và kí hiệu $Ư(n) = \{d_1; d_2; d_3; ...; d_m\}$ là tập hợp tất cả các ước số nguyên dương của n. Chứng minh rằng

$$d_1^2+d_2^2+d_3^2+...+d_m^2 \le n^2\sqrt{n}.$$

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9, TP. HỒ CHÍ MINH MÔN TOÁN, NĂM HỌC 2023-2024

Câu 1. *Cho các số a, b, c > 0 thỏa mãn:*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=2024.$$

Tính giá trị của biểu thức

$$P=(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)=2024.$$

Lời giải. Ta có:

$$P=(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)$$

$$=\frac{a+b+c}{b+a}+\frac{a+b+c}{c+b}+\frac{a+b+c}{a+c}$$

$$=1+\frac{c}{b+a}+1+\frac{a}{c+b}+1+\frac{b}{a+c}$$

$$=3+2024=2027.$$

Câu 2. *Giải các phương trình*

a) $2\sqrt{x+1}=3x-2;$

b) $x+4=4x^2+2\sqrt{x+3}.$

Lời giải.

a) $2\sqrt{x+1}=3x-2 \Leftrightarrow \sqrt{x+1}=\frac{3}{2}x-1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}x-1\ge 0 \\ x+1=\left(\frac{3}{2}x-1\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \frac{2}{3} \\ \frac{9}{4}x^2-4x=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \frac{2}{3} \\ x\left(\frac{9}{4}x-4\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \frac{2}{3} \\ x=0 \text{ hoặc } x=\frac{16}{9} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{16}{9}.$$

Vậy tập nghiệm của PT là $S=\left\{\frac{16}{9}\right\}$.

b) Ta có: $x+4=4x^2+2\sqrt{x+3}$

$$\Leftrightarrow x+3-2\sqrt{x+3}+1=4x^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+3}-1\right)^2=(2x)^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+3}-1=2x \\ \sqrt{x+3}-1=-2x \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sqrt{x+3}=2x+1 & (1) \\ \sqrt{x+3}=-2x+1 & (2) \end{array}\right..$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1\ge 0 \\ x+3=(2x+1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \frac{-1}{2} \\ 4x^2+3x-2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \frac{-1}{2} \\ x=\frac{-3+\sqrt{41}}{8} \text{ hoặc } x=\frac{-3-\sqrt{41}}{8} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-3+\sqrt{41}}{8};$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+1\ge 0 \\ x+3=(-2x+1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\le \frac{1}{2} \\ 4x^2-5x-2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\le \frac{1}{2} \\ x=\frac{5+\sqrt{57}}{8} \text{ hoặc } x=\frac{5-\sqrt{57}}{8} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{5-\sqrt{57}}{8}.$$

Vậy tập nghiệm của PT đã cho là

$$S=\left\{\frac{-3+\sqrt{41}}{8};\frac{5-\sqrt{57}}{8}\right\}.$$

Câu 3. *Cho các số dương a, b, c thỏa mãn:*

$$ab + bc + ca = 3.$$

a) *Chứng minh rằng:* $a^4 + 7 \geq 2(a+b)(a+c)$.

b) *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$Q = \sqrt{\frac{bc}{a^4+7}} + \sqrt{\frac{ca}{b^4+7}} + \sqrt{\frac{ab}{c^4+7}}.$$

Lời giải. Ta có:

a) $a^4 + 7 = (a^2-1)^2 + 2a^2 + 6 \geq 2a^2 + 6 = 2(a^2+3)$

$$= 2(a^2 + ab + bc + ca) = 2(a+b)(a+c).$$

b) Theo câu a) và BĐT Cauchy ta có:

$$\sqrt{\frac{bc}{a^4+7}} \leq \sqrt{\frac{bc}{2(a+b)(a+c)}}$$
$$\leq \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{b}{a+b} + \frac{c}{a+c}\right) \ (1).$$

Tương tự:

$$\sqrt{\frac{ac}{b^4+7}} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{c}{c+b} + \frac{a}{a+b}\right) \ (2)$$

và $\sqrt{\frac{ba}{c^4+7}} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{a}{c+a} + \frac{b}{c+b}\right)$ (3).

Từ (1), (2) và (3) ta có:

$$Q \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{a+b}{a+b} + \frac{b+c}{c+b} + \frac{c+a}{c+a}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}.3 = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của Q là $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

Câu 4. *Cho hai phương trình* $x^2 - bx + c = 0$ (1) *và* $x^2 - b^2x + c^2 = 0$ (2) $(b, c \in \mathbb{Z})$.

Với x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1) và x_3, x_4 là hai nghiệm của phương trình (2) thỏa mãn $x_3 - x_1 = x_4 - x_2 = 1$. Tính giá trị của a, b, c.

Lời giải. Theo định lí Viète ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = b \\ x_1 x_2 = c \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x_3 + x_4 = b^2 \\ x_3 x_4 = c^2 \end{cases}.$$

Mà $x_3 - x_1 = x_4 - x_2 = 1$ (gt), do đó:

$$b^2 = x_3 + x_4 = 1 + x_1 + 1 + x_2 = 2 + b$$
$$b^2 - b - 2 = 0 \Rightarrow b = -1 \text{ hoặc } b = 2.$$
$$c^2 = x_3 x_4 = (1+x_1)(1+x_2) = 1 + x_2 + x_1 + x_1 x_2$$
$$= 1 + b + c.$$

Ta có: $c^2 - 1 - b - c = 0$.

- Nếu $b = -1$ thì $c^2 - c = 0 \Leftrightarrow c = 0$ hoặc $c = 1$.
- Nếu $b = 2$ thì $c^2 - c - 3 = 0 \Leftrightarrow c = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$.

Mặt khác $\Delta_1 = b^2 - 4c \geq 0$, $\Delta_2 = b^4 - 4c^2 \geq 0$ nên $b = -1, c = 0$ (thích hợp).

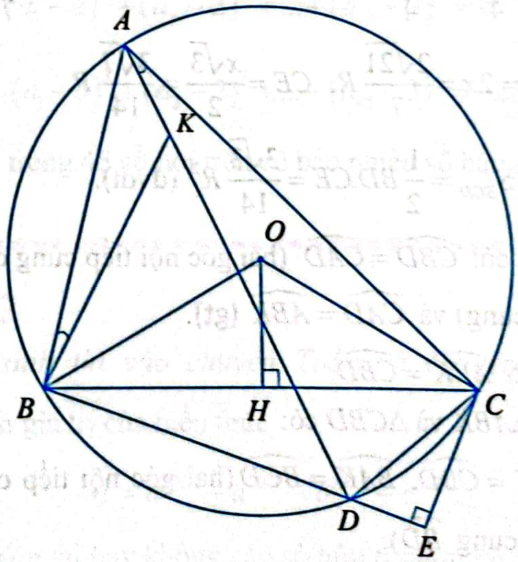
Câu 5. *Cho đường tròn (O; R) và dây cung $BC = R\sqrt{3}$ cố định. Gọi A là một điểm trên cung lớn $\widehat{BC}$ và D là một điểm trên cung nhỏ $\widehat{BC}$ thỏa mãn DB = 2DC.*

a) *Tính số đo góc $\widehat{BAC}$.*

b) *Tính diện tích tam giác BDC theo R.*

c) *Gọi K là một điểm trên AD thỏa mãn góc $\widehat{CAD} = \widehat{ABK}$. Tìm vị trí của A trên cung lớn $\widehat{BC}$ để diện tích tam giác ABK đạt giá trị lớn nhất.*

Lời giải.



a) Vẽ OH vuông góc với BC tại H.

ΔOBC có $OB = OC (= R)$

$\Rightarrow \Delta OBC$ cân tại O. Do đó OH là đường phân giác và là đường trung tuyến của ΔOBC. Suy ra:

$$BH = \frac{BC}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

Từ đó:

$$\sin\widehat{BOH} = \frac{BH}{OB} = \frac{R\sqrt{3}}{2R} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{BOH} = 60^0.$$

Do đó: $\widehat{BOC} = 2\widehat{BOH} = 120^0$.

Vậy $\widehat{BAC} = \frac{\widehat{BOC}}{2} = \frac{120^o}{2} = 60^0$.

b) Vẽ $CE \perp BD$ tại E.

Đặt $CD = x$, ta có: $BD = 2x$, $\widehat{CDE} = \widehat{BAC} = 60^0$.

ΔECD vuông tại E nên

$$CE = CD.\sin\widehat{CDE} = x\sin 60^0 = \frac{x\sqrt{3}}{2}.$$

và $ED = CD\cos\widehat{CDE} = x\cos 60^0 = \frac{x}{2}$.

Do đó: $EB = BD + ED = 2x + \frac{x}{2} = \frac{5x}{2}$.

ΔECD vuông tại E nên:

$$EB^2 + CE^2 = BC^2 \text{ (định lí Pythagore)}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{5x}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)^2 = (R\sqrt{3})^2$$

$$\Rightarrow \frac{25x^2}{4} + \frac{3x^2}{4} = 3R^2 \Rightarrow 7x^2 = 3R^2 \Rightarrow x = \frac{R\sqrt{21}}{7}.$$

$$BD = 2x = \frac{2\sqrt{21}}{7}R,\ CE = \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{7}}{14}R.$$

Vậy $S_{BCD} = \frac{1}{2}BD.CE = \frac{3\sqrt{3}}{14}R^2$ (đvdt).

c) Ta có: $\widehat{CBD} = \widehat{CAD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn một cung) và $\widehat{CAD} = \widehat{ABK}$ (gt).

Do đó $\widehat{ABK} = \widehat{CBD}$.

Xét ΔABK và ΔCBD có:

$\widehat{ABK} = \widehat{CBD}$, $\widehat{BAK} = \widehat{BCD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{BD}$).

Do đó:

$$\Delta ABK \sim \Delta CBD\ (g.g)$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABK}}{S_{CBD}} = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2.$$

Vì AB là dây cung của đường tròn (O) nên $AB \le 2R$. Ta có:

$$S_{ABK} = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2.S_{CBD} \le \left(\frac{2R}{R\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{14}R^2 = \frac{2\sqrt{3}}{7}R^2.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow A$ đối xứng với B qua O.

Vậy giá trị lớn nhất của diện tích ΔABK là $\frac{2\sqrt{3}}{7}R^2$ khi A là điểm đối xứng với B qua O.

Câu 6. a) *Cho p, q là các số nguyên tố thỏa mãn $(p+q)^2 + 3p + q$ là số chính phương. Tìm giá trị của p, q.*

b) *Số n gọi là số 'Tốt'' nếu n thỏa mãn là hiệu của hai số chính phương. Hỏi có bao nhiêu số "Tốt" không vượt quá 2024?*

Lời giải. a) Ta có:

$$(p+q)^2 < (p+q)^2 + 3p + q < (p+q)^2 + 4(p+q) + 4 = (p+q+2)^2.$$

Do đó:

$$(p+q)^2 + 3p + q = (p+q+1)^2 \Rightarrow p = q + 1.$$

- Nếu $q > 2$ thì $p > 3$ và p chia hết cho 2, vô lý.
- Nếu $q = 2$ thì $p = 3$. Ta có với $p = 3$ và $q = 2$ thì $(p+q)^2 + 3p + q = 36$ là số chính phương.

Vậy $p = 3$ và $q = 2$.

b) Giả sử tồn tại hai số tự nhiên x, y sao cho $n = x^2 - y^2$.

Nếu $x \vdots 2$ thì $x^2 \vdots 4$.

Nếu x không chia hết cho 2 thì đặt $x = 2m + 1$, $m \in \mathbb{Z}$. Ta có: $x^2 = (2m+1)^2 = 4m(m+1) + 1$ chia cho 4 dư 1. Do đó x^2 chia cho 4 dư 0 hoặc dư 1.

Tương tự y^2 chia cho 4 dư 0 hoặc dư 1.

(Xem tiếp trang 14)

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10, TRƯỜNG THPT CHUYÊN, ĐHSP HÀ NỘI - NĂM HỌC 2024 - 2025

VÒNG 1

(*Thời gian làm bài: 90 phút, dành cho mọi thí sinh thi vào trường chuyên*)

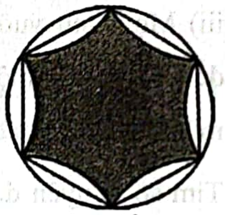
Bài 1 (3 *điểm*). a) Cho

$$A=\sqrt{11-6\sqrt{2}}+\sqrt{11+6\sqrt{2}}.$$

Tìm giá trị của A^3.

b) Cho b, c là hai số thực thỏa mãn $24b+c=-523$. Biết phương trình $x^2+bx+c=0$ có hai nghiệm là hai số nguyên dương. Tìm hai nghiệm đó.

Bài 2 (1,5 *điểm*). Bạn *Hạnh* làm một ngôi sao 6 cánh có dạng hình phẳng tô đậm như hình bên theo cách sau: Trên tờ giấy, bạn vẽ đường tròn bán kính 2cm, ngoại tiếp một lục giác đều. Sau đó, mỗi cung nhỏ căng dây cung là một cạnh của lục giác đều được lấy đối xứng qua cạnh đó. Hình phẳng tô đậm giới hạn bởi 6 cung tròn vừa được vẽ tạo thành ngôi sao bạn định làm. Em hãy giúp bạn *Hạnh* tìm diện tích ngôi sao 6 cánh đó (lấy giá trị của π là 3,14 và giá trị của $\sqrt{3}$ là 1,73).



Bài 3 (3 *điểm*). Cho tam giác ABC cân tại A. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $DB = 2DC$. Đường thẳng qua D song song với AC cắt cạnh AB tại E. Đường thẳng qua E song song với BC cắt cạnh AC tại F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt AD tại M (M khác A).

a) Chứng minh tứ giác $BDME$ và tứ giác $CDMF$ là hai tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $MB = 2MA$.

c) Chứng minh $\widehat{BMD}=2\widehat{CMD}$.

Bài 4 (1,5 *điểm*). Tìm số thực x sao cho các số $x+\sqrt{2024}$ và $\dfrac{185}{x}-\sqrt{2024}$ đều là các số nguyên.

Bài 5 (1 *điểm*). Cho 45 số $a_1, a_2, \ldots, a_{45}$, mỗi số chỉ nhận một trong ba giá trị 0; 2; 3. Biết rằng

$$(a_1-2)^2+(a_2-2)^2+\ldots+(a_{45}-2)^2=65$$

và $$(a_1-3)^3+(a_2-3)^3+\ldots+(a_{45}-3)^3=-280.$$

Hỏi trong 45 số nói trên có bao nhiêu số bằng 0?

****

VÒNG 2

(*Thời gian làm bài 120 phút, dùng riêng cho thí sinh thi vào chuyên Toán và chuyên Tin*)

Bài 1 (3 *điểm*). a) Cho hai số thực a, b thỏa mãn các điều kiện sau: $|a|<2024, |b|<2024$ và

$$\sqrt{a+2024}+\sqrt{2025-a}-\sqrt{2024-a}=$$
$$=\sqrt{b+2024}+\sqrt{2025-b}-\sqrt{2024-b}.$$

Tính giá trị của biểu thức

$$M=a^{2024}+a^{2025}-b^{2024}-b^{2025}.$$

b) Tồn tại hay không các số hữu tỉ dương a, b sao cho $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{\sqrt{2024}}$?

Bài 2 (2 *điểm*). Giả sử ta có quy tắc * mà với mỗi cặp số nguyên dương (a ; b), ta luôn xác định được chỉ một số nguyên dương tương ứng kí hiệu là $a * b$, sao cho ba điều kiện sau được thỏa mãn:

i) $a*a = a$ với mọi số nguyên dương a;

ii) $a*b = b*a$ với mọi số nguyên dương a và b;

iii) $a*b = (a-b)*b$ với mọi số nguyên dương a và b mà $a > b$.

a) Tính giá trị của 16*2024.

b) Hãy chỉ ra một quy tắc * thỏa mãn ba điều kiện trên.

Bài 3 (3 *điểm*). Cho đường tròn (O ; R) và dây cung BC cố định không đi qua tâm O. Điểm A di động trên (O ; R) sao cho tam giác ABC nhọn và $AB \neq AC$. Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H. Đường thẳng EF cắt (O ; R) tại hai điểm P và Q (điểm F nằm giữa hai điểm P và E). Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh

a) $AP^2 = AQ^2 = AH.AD$.

b) Bốn điểm P, Q, M, D cùng thuộc một đường tròn (ω).

c) Tâm I của đường tròn (ω) chạy trên một đường tròn cố định.

Bài 4 (1 *điểm*). Với $n \in \mathbb{N}^*$, ta đặt $f(n)$ là tổng các chữ số của số $3n^2 + n + 1$.

(Ví dụ: với $n = 3$ thì $3n^2 + n + 1 = 31$ và $f(3) = 4$).

Tìm giá trị nhỏ nhất có thể của $f(n)$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

Bài 5 (1 *điểm*). Cho bảng vuông kích thước 8×8 được chia thành 8 hàng, 8 cột, 64 ô vuông đơn vị có cùng kích thước. Ta lát kín bảng đó bằng các domino màu đen và domino màu trắng (mỗi domino như thế là hình gồm 2 ô vuông đơn vị có chung cạnh) thỏa mãn điều kiện sau:

i) Mỗi domino phủ đúng 2 ô vuông đơn vị của bảng;

ii) Hai domino không cùng phủ một ô vuông đơn vị của bảng;

iii) Mọi hình vuông 4 ô vuông đơn vị của bảng đều có ít nhất một ô vuông đơn vị được phủ bởi một domino màu đen.

Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất sao cho tồn tại một cách lát bảng ban đầu thỏa mãn ba điều kiện trên mà trong cách lát đó ta sử dụng đúng k domino màu đen.

NGUYỄN THANH HỒNG
(GV THPT chuyên, ĐHSP Hà Nội)
Giới thiệu

****

HƯỚNG DẪN ... (*Tiếp theo trang* 12)

Do đó $n = x^2 - y^2$ chia cho 4 có số dư khác 2. Ta chứng minh các số nguyên dương n chia cho 4 có số dư khác 2 đều là các số "tốt".

- Nếu $n = 4k + 1$ thì

$$n = 4k + 1 = (2k+1)^2 - (2k)^2.$$

- Nếu $n = 4k$ thì

$$n = 4k = (k+1)^2 - (k-1)^2.$$

- Nếu $n = 4k + 3$ thì

$$n = 4k + 3 = (2k+2)^2 - (2k+1)^2.$$

Các số nguyên dương từ 1 đến 2024 có: 506 số có dạng $4k + 1$; 506 số có dạng $4k$; 506 số có dạng $4k + 3$. Vậy có 506 + 506 + 506 = 1518 số "tốt" không vượt quá 2024.

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(TP. Hồ Chí Minh)
Sưu tầm và hướng dẫn giải

MỘT SỐ SAI LẦM THƯỜNG GẶP KHI GIẢI BÀI TOÁN CĂN BẬC HAI VÀ CÁC GIẢI PHÁP KHẮC PHỤC

NGUYỄN THỊ THU HẰNG
(GV THCS Nguyễn Tất Thành, Can Lộc, Hà Tĩnh)

Khi giải các bài toán chúng ta đã không ít lần mắc phải sai lầm đáng tiếc. Trong chuyên mục *Sai lầm ở đâu?*, có rất nhiều lời giải sai lầm đã được chỉ ra. Nhà sư phạm toán nổi tiếng *G.Polya* đã nói: *Con người phải biết học những sai lầm và thiếu sót của mình. A.A. Stoliar* còn nhấn mạnh: *Không được tiếc thời gian để phân tích trên giờ học các sai lầm của học sinh*, còn theo *J.A.Komenxkee* thì: *Bất kỳ một sai lầm nào cũng có thể làm cho học sinh kém đi nếu như giáo viên không chú ý ngay đến sai lầm đó, và hướng dẫn học sinh nhận ra, sửa chữa, khắc phục sai lầm.* Trong bài viết này chúng ta sẽ phân tích một số sai lầm thường gặp của học sinh khi giải toán về căn bậc hai.

1. Học sinh hiểu sai về căn bậc hai của một số dương *a* và căn bậc hai số học của một số dương *a*

Bài toán 1. *Tìm căn bậc hai số học của 36 rồi suy ra căn bậc hai của chúng.*

• ***Cách giải sai:***

Ta có: $\sqrt{36} = 6 \Rightarrow$ số 36 có 2 căn bậc hai được viết là $\sqrt{36} = 6$ và $\sqrt{36} = -6$ (!)

• ***Cách giải đúng:***

Căn bậc hai số học của 36 là : $\sqrt{36} = 6$

Còn căn bậc hai của là 36:

$$\sqrt{36} = 6 \text{ và } -\sqrt{36} = -6.$$

• ***Nguyên nhân:*** Học sinh hiểu sai về căn bậc hai của một số dương a và căn bậc hai số học của một số dương a, từ đó không phân biệt được hai vấn đề này.

Bài toán 2. *Tính* $\sqrt{49}$.

• ***Cách giải sai:*** *Học sinh đến đây sẽ giải sai như sau:*

$\sqrt{49} = 7$ và -7 có nghĩa là $\sqrt{49} = \pm 7$.

Như vậy học sinh đã tính ra được số $\sqrt{49}$ có hai căn bậc hai là hai số đối nhau là:

$$\sqrt{49} = 7 \text{ và } \sqrt{49} = -7.$$

+ ***Cách giải đúng:*** $\sqrt{49} = 7$ (có thể giải thích thêm vì $7 > 0$ và $7^2 = 49$).

Trong các bài toán về sau không cần yêu cầu học sinh phải giải thích.

Nguyên nhân: Do việc tìm căn bậc hai và căn bậc hai số học đã nhầm lẫn với nhau.

Bài toán 3: So sánh 9 và $\sqrt{10}$

• ***Cách giải sai:*** $9 < \sqrt{10}$ (vì $9 < 10$).

• ***Cách giải đúng:*** $81 > 10$ nên $\sqrt{81} > \sqrt{10}$.

Vậy $9 = \sqrt{81} > \sqrt{10}$.

• ***Nguyên nhân:*** HS sẽ không biết nên so sánh chúng theo hình thức nào vì theo định nghĩa số $\sqrt{10}$ chính là căn bậc hai số học của 10 do đó nếu đem so sánh với số 9 thì số 9 có hai căn bậc hai số học là 3 và -3 cho nên với suy nghĩ đó học sinh sẽ đưa ra lời giải sai như sau: $9 < \sqrt{10}$ (vì trong cả hai căn bậc hai của 9 đều nhỏ hơn $\sqrt{10}$).

Tất nhiên trong cái sai này của học sinh không phải các em hiểu nhầm ngay sau khi học xong bài này mà sau khi học thêm một loạt khái niệm và hệ thức mới thì học sinh sẽ không chú ý đến vấn đề quan trọng này nữa.

Bài toán 4. *Tính* $\sqrt{625}$.

• ***Cách giải sai:*** $\sqrt{625} = \sqrt{25} = \sqrt{5}$.

• ***Cách giải đúng là:*** $\sqrt{625} = 25$.

• ***Nguyên nhân:*** Ở đây học sinh nhầm tưởng căn bậc hai có tính chất rút gọn giống như phân số để đưa một phân số chưa tối giản trở thành một phân số tối giản.

2. Sai lầm khi HS không chú ý đến điều kiện để một biểu thức có căn bậc hai, $\sqrt{A}$ có nghĩa; các quy tắc nhân các căn bậc hai, chia căn bậc hai

Bài toán 1. *Tìm x biết*: $\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2}}=2.$

• ***Cách giải sai:***

$\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2}}=2 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x+2}=4 \Leftrightarrow x-1=4(x+2)$

$\Leftrightarrow x-1=4x+8 \Leftrightarrow 3x=-9 \Leftrightarrow x=-3$ (!)

• ***Cách giải đúng***: ĐKXĐ:

$$\begin{cases} x-1\ge 0 \\ x+2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x>-2 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 1.$$

Khi đó : $\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2}}=2 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x+2}=4$

$\Leftrightarrow x-1=4(x+2) \Leftrightarrow x-1=4x+8$

$\Leftrightarrow 3x=-9 \Leftrightarrow x=-3$ (không thỏa mãn ĐKXĐ).

Vậy không tồn tại giá trị của x để $\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2}}=2.$

Bài toán 2. (Bài tập 1.29, Sách bài tập cơ bản và nâng cao Đại số 9).

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A=x+\sqrt{x}.$

• ***Cách giải sai***: Ở bài này HS thường không tìm điều kiện để $\sqrt{x}$ xác định mà vội vàng tìm giá trị nhỏ nhất của A bằng cách dựa vào đẳng thức $x^2+x=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$ mà biến đổi:

$$A=x+\sqrt{x}=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\ge -\frac{1}{4}$$

$\Rightarrow \min A=-\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \sqrt{x}+\dfrac{1}{2}=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{4}.$

Vậy $\min A=-\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{4}.$

• ***Cách giải đúng:*** $\sqrt{x}$ xác định khi $x\ge 0$.

Do đó: $A=x+\sqrt{x}\ge 0 \Rightarrow \min A=0 \Leftrightarrow x=0.$

• ***Nguyên nhân***: Khi làm bài HS chưa nắm vững và cũng không chú ý điều kiện để $\sqrt{A}$ tồn tại. HS chưa nắm rõ các quy tắc nhân các căn bậc hai, chia hai căn bậc hai.

3. Sai lầm khi học sinh chưa hiểu đúng về định nghĩa giá trị tuyệt đối của một số.

Bài toán 1. *Rút gọn biểu thức sau:*

$$A=2\sqrt{a^2}-5a \quad (\text{với } a<0).$$

• ***Cách giải sai:*** $A=2\sqrt{a^2}-5a=2|a|-5a$

$=2a-5a=-3a$ (với $a<0$) (!)

• ***Cách giải đúng:***

$A=2\sqrt{a^2}-5a=2|a|-5a=-2a-5a$

$=-7a$ (với $a<0$).

Bài toán 2. *Tìm x biết*: $\sqrt{4(1-x)^2}-6=0.$

• ***Cách giải sai:***

$\sqrt{4(1-x)^2}-6=0 \Leftrightarrow 2\sqrt{(1-x)^2}=6$

$\Leftrightarrow 2(1-x)=6 \Leftrightarrow 1-x=3 \Leftrightarrow x=-2.$

• ***Cách giải đúng:***

$\sqrt{4(1-x)^2}-6=0 \Leftrightarrow 2\sqrt{(1-x)^2}=6$

$\Leftrightarrow \sqrt{(1-x)^2}=3 \Leftrightarrow |1-x|=3.$

Ta phải đi giải hai phương trình sau :

+) $1-x=3 \Leftrightarrow x=-2.$

+) $1-x=-3 \Leftrightarrow x=4.$

Vậy ta tìm được hai giá trị của x là

$$x_1=-2 \text{ và } x_2=4.$$

• ***Nguyên nhân***: HS chưa hiểu rõ về số âm và số đối của một số mà HS chỉ hiểu $a<0$ thì $|a|=a$.

4. Sai lầm khi HS chưa nắm vững hằng đẳng thức: $\sqrt{A^2}=|A|$

Bài toán 1. (Bài tập 9d, SGK Toán 9, tập 1)

Tìm x biết : $\sqrt{9x^2}=|-12|.$

• ***Cách giải sai:*** $\sqrt{9x^2}=|-12| \Rightarrow \sqrt{9x^2}=12.$ Vì $\sqrt{9x^2}=\sqrt{(3x)^2}=3x$ nên ta có: $3x=12 \Rightarrow x=4.$

• ***Cách giải đúng:*** Vì $\sqrt{9x^2}=\sqrt{(3x)^2}=|3x|$ nên ta có: $|3x|=|-12| \Rightarrow 3x=12$ hoặc $3x=-12.$

Vậy $x=4$ hoặc $x=-4.$

Bài toán 2. (Bài tập 14c, SGK Toán 9, tập 1)

Rút gọn biểu thức: $\sqrt{(4-\sqrt{17})^2}.$

• ***Cách giải sai***:

HS1: $\sqrt{(4-\sqrt{17})^2} = |4-\sqrt{17}| = 4-\sqrt{17}$;

HS2: $\sqrt{(4-\sqrt{17})^2} = 4-\sqrt{17}$.

• ***Cách giải đúng***:

$$\sqrt{(4-\sqrt{17})^2} = |4-\sqrt{17}| = \sqrt{17}-4.$$

Bài toán 3. *Khi so sánh hai số a và b. Một HS phát biểu như sau: "Bất kì hai số nào cũng bằng nhau" và thực hiện như sau:*

Ta lấy hai số a và b tùy ý. Giả sử $a > b$.

Ta có: $a^2 - 2ab + b^2 = b^2 - 2ab + a^2$

hay $(a-b)^2 = (b-a)^2$ (1).

Lấy căn bậc hai hai vế ta được:

$$\sqrt{(a-b)^2} = \sqrt{(b-a)^2} \Leftrightarrow a-b = b-a.$$

Từ đó: $2a = 2b \Rightarrow a = b$.

Vậy bất kì hai số nào cũng bằng nhau.

• ***HS này sai lầm ở chỗ:***

Sau khi lấy căn bậc hai hai vế của đẳng thức (1) phải được kết quả: $|a-b| = |b-a|$ chứ không thể có $a-b = b-a$.

• ***Nguyên nhân***: Học sinh chưa nắm vững hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$, giá trị tuyệt đối của một số âm.

Bài toán 4. *Tìm x sao cho B có giá trị là 16.*

$$B = \sqrt{16x+16} - \sqrt{9x+9} + \sqrt{4x+4} + \sqrt{x+1}$$

với $x \ge -1$.

• ***Cách giải sai:***

$$B = 4\sqrt{x+1} - 3\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x+1}$$
$$= 4\sqrt{x+1} \ (x \ge -1).$$

Ta có: $16 = 4\sqrt{x+1} \Leftrightarrow 4 = \sqrt{x+1}$

$$\Leftrightarrow 4^2 = \sqrt{(x+1)^2} \Leftrightarrow 16 = \sqrt{(x+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow 16 = |x+1| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}16 = x+1\\16 = -(x+1)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 15\\x = -17\end{array}\right..$$

• ***Cách giải đúng***:

$$B = 4\sqrt{x+1} - 3\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x+1}$$
$$= 4\sqrt{x+1} \ (x \ge -1).$$

Ta có: $16 = 4\sqrt{x+1} \Leftrightarrow 4 = \sqrt{x+1}$ (do $x \ge -1$)

$\Leftrightarrow 16 = x+1 \Rightarrow x = 15$.

• ***Nguyên nhân***: Với cách giải trên ta được hai giá trị của x là $x_1 = 15$ và $x_2 = -17$ nhưng chỉ có giá trị $x_1 = 15$ là thoả mãn, còn giá trị $x_2 = -17$ không đúng. Đâu là nguyên nhân của sự sai lầm đó? Chính là sự áp dụng quá rập khuôn vào công thức mà không để ý đến điều kiện đã cho của bài toán, với $x \ge -1$ thì các biểu thức trong căn luôn tồn tại nên không cần đưa ra biểu thức chứa dấu giá trị tuyệt đối nữa.

5. Sai lầm khi học sinh chưa nắm vững các phép biến đổi biểu thức chứa căn bậc hai.

Bài toán 1. (Bài tập 58c, SGK Toán 9, tập 1)

Rút gọn biểu thức sau:

$$\sqrt{20} - \sqrt{45} + 3\sqrt{18} + \sqrt{72}.$$

• ***Cách giải sai:***

$$\sqrt{20} - \sqrt{45} + 3\sqrt{18} + \sqrt{72}$$
$$= \sqrt{4.5} - \sqrt{9.5} + 3\sqrt{9.2} + \sqrt{36.2}$$
$$= 2\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 9\sqrt{2} + 6\sqrt{2}$$
$$= -\sqrt{5} + 15\sqrt{2} = 14\sqrt{7}.$$

• ***Cách giải đúng là:***

$$\sqrt{20} - \sqrt{45} + 3\sqrt{18} + \sqrt{72}$$
$$= \sqrt{4.5} - \sqrt{9.5} + 3\sqrt{9.2} + \sqrt{36.2}$$
$$= 2\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 9\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 15\sqrt{2} - \sqrt{5}.$$

• ***Nguyên nhân***: Sai lầm ở chỗ HS chưa nắm vững công thức biến đổi:

$$x\sqrt{A} + y\sqrt{B} - z\sqrt{A} + m = (x-z)\sqrt{A} + y\sqrt{B} + m.$$

6. Những sai lầm của HS khi đưa thừa số ra ngoài dấu căn, đưa thừa số vào trong dấu căn, sử dụng định nghĩa căn bậc hai số học để giải phương trình.

Bài toán 1. *Rút gọn:*

$$A = \sqrt{3^2x} + \sqrt{(-5)^2x} - \sqrt{4x} \ (\textit{với } x \ge 0).$$

• ***Cách giải sai***: $A = \sqrt{3^2x} + \sqrt{(-5)^2x} - \sqrt{4x}$

$$= 3\sqrt{x} - 5\sqrt{x} - 2\sqrt{x} = -4\sqrt{x}.$$

• ***Cách giải đúng***: Với $x \ge 0$ ta có:

$$A = \sqrt{3^2x} + \sqrt{(-5)^2x} - \sqrt{4x}$$
$$= |3|\sqrt{x} + |-5|\sqrt{x} - |2|\sqrt{x} = 6\sqrt{x}.$$

Bài toán 2. (Bài 3b, SBT toán 9)

Rút gọn biểu thức: $M = 2x\sqrt{\frac{-3}{x}} + \sqrt{-48x}$.

• ***Cách giải sai:***

$$M = 2x\sqrt{\frac{-3}{x}} + \sqrt{-48x} = 2\sqrt{\frac{-3x^2}{x}} + 4\sqrt{-3x}$$
$$= 2\sqrt{-3x} + 4\sqrt{-3x} = 6\sqrt{-3x} \ \ (!)$$

• ***Cách giải đúng:***

Điều kiện để M xác định là: $x < 0$. Khi đó:

$$M = -2\sqrt{\frac{-3(-x)^2}{x}} + \sqrt{16.(-3)x}$$
$$= -2\sqrt{-3x} + 4\sqrt{-3x} = 2\sqrt{-3x}.$$

Bài toán 3. (Bài tập 1, sách nâng cao toán 9 tập 1)

Giải phương trình: $\sqrt{14-x} = x-2$ (*).

• ***Cách giải sai :***

$$(*) \Leftrightarrow (x-2)^2 = 14 - x \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x^2 - 5x) + (2x - 10) = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-5).(x+2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = -2 \end{array}\right..$$

Vậy phương trình (*) có hai nghiệm:

$x_1 = 5$ và $x_2 = -2$ (!)

• ***Cách giải đúng :***

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ (x-2)^2 = 14 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 4x + 4 = 14 - x \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ (x^2 - 5x) + (2x - 10) = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ (x-5)(x+2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = -2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 5.$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm: $x = 5$.

Bài toán 4. *Rút gọn biểu thức:*

$$M = \frac{\sqrt{y^2} - \sqrt{xy}}{-y} - \sqrt{\frac{x}{y}}.$$

• ***Cách giải sai:***

$$M = \frac{\sqrt{y^2} - \sqrt{xy}}{-y} - \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{xy} - \sqrt{y^2}}{y} - \sqrt{\frac{x}{y}}$$
$$= \frac{\sqrt{y}\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)}{\sqrt{y}.\sqrt{y}} - \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{y}} - \sqrt{\frac{x}{y}}$$
$$= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} - 1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = -1 \ \ (!)$$

• ***Cách giải đúng:***

ĐKXĐ: $xy \geq 0; y \neq 0$. Ta xét hai trường hợp:

TH1: $x \leq 0; y < 0$. Khi đó:

$$M = \frac{\sqrt{y^2} - \sqrt{xy}}{-y} - \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{y^2} - \sqrt{xy}}{\sqrt{y^2}} - \sqrt{\frac{x}{y}}$$
$$= 1 - \sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{x}{y}} = 1 - 2\sqrt{\frac{x}{y}}.$$

TH2: $x \geq 0; y > 0$. Khi đó:

$$M = \frac{\sqrt{y^2} - \sqrt{xy}}{-y} - \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{y}\left(\sqrt{y} - \sqrt{x}\right)}{-\sqrt{y}\sqrt{y}} - \sqrt{\frac{x}{y}}$$
$$= \frac{\sqrt{y} - \sqrt{x}}{-\sqrt{y}.} - \sqrt{\frac{x}{y}} = -1 + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = -1.$$

Vậy: nếu $x \leq 0; y < 0$ thì $M = 1 - 2\sqrt{\frac{x}{y}}$;

nếu $x \geq 0; y > 0$ thì $M = -1$.

• ***Nguyên nhân***: HS nắm chưa vững quy tắc $\sqrt{A^2B} = |A|\sqrt{B}$ với $B \geq 0$, điều kiện để một thừa số đưa được vào trong dấu căn bậc hai, điều kiện để $\sqrt{A}$ tồn tại, định nghĩa căn bậc hai số học, quy tắc khai phương một thương.

7. Khi trục căn thức ở mẫu, khai phương một tích, khai phương một thương học sinh thường mắc phải một số sai lầm

Bài toán 1. (Bài tập 32b, SGK Toán 9, tập 1)

Tính: $\sqrt{1,44.1,21 - 1,44.0,4}$.

• ***Cách giải sai:***

$$\sqrt{1,44.1,21 - 1,44.0,4} = \sqrt{1,44.1,21} - \sqrt{1,44.0,4}$$
$$= 1,2.1,1 - 1,2.0,2 = 1,08 \ (!)$$

• ***Cách giải đúng:***

$$\sqrt{1,44.1,21 - 1,44.0,4} = \sqrt{1,44.(1,21 - 0,4)}$$
$$= \sqrt{1,44.0,81} = 1,2.0,9 = 1,08.$$

Bài toán 2. *Tính:* a) $\sqrt{81.256}$; b) $\sqrt{\frac{625}{16}}$.

• ***Cách giải sai:***

a) $\sqrt{81.256} = \sqrt{9}.\sqrt{16} = \sqrt{3}.\sqrt{4} = 12$ (!)

b) $\sqrt{\dfrac{625}{16}}=\sqrt{\dfrac{25}{4}}=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\dfrac{5}{2}$ (!)

• ***Cách giải đúng:***

a) $\sqrt{81.256}=\sqrt{81}.\sqrt{256}=9.16=144.$

b) $\sqrt{\dfrac{625}{16}}=\dfrac{\sqrt{625}}{\sqrt{16}}=\dfrac{25}{4}.$

Bài toán 3. ***Khi giải bài toán về trục căn thức ở mẫu***

• ***Cách giải sai:***

a) $\dfrac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}.\sqrt{5}+2}{(\sqrt{3})^2}=\dfrac{\sqrt{15}+2}{3}.$

b) $\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}=\dfrac{2(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}-1)^2}=\dfrac{2(\sqrt{5}-1)}{5-1}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

hoặc $\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}=\dfrac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}=\dfrac{2(\sqrt{5}+1)}{5+1}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{3}$

hoặc $\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}=\dfrac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}=\dfrac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5})^2-1}$

$=\dfrac{2(\sqrt{5}+1)}{25-1}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{12}$

hoặc $\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}=\dfrac{2(\sqrt{5}+1)}{\sqrt{5}-1(\sqrt{5}+1)}=\dfrac{2(\sqrt{5}+1)}{-1}=-2(\sqrt{5}+1)$

hoặc $\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}=\dfrac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}=\dfrac{2(\sqrt{5}+1)}{5-1}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}.$

c) $\dfrac{5}{2\sqrt{7}+3}=\dfrac{5\sqrt{7}}{2\sqrt{7}.\sqrt{7}+3}=\dfrac{5\sqrt{7}}{2.7+3}=\dfrac{5\sqrt{7}}{17}$

hoặc $\dfrac{5}{2\sqrt{7}+3}=\dfrac{5(\sqrt{7}-3)}{2(\sqrt{7}+3)(\sqrt{7}-3)}=\dfrac{5(\sqrt{7}-3)}{2(7-9)}$

$=\dfrac{5(\sqrt{7}-3)}{-4}=\dfrac{-5(\sqrt{7}-3)}{4}.$

d) $\dfrac{2\sqrt{a}}{2\sqrt{a}+3}=\dfrac{1}{3}$ hoặc

$\dfrac{2\sqrt{a}}{2\sqrt{a}+3}=\dfrac{2\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}+3).(2\sqrt{a}-3)}=\dfrac{2\sqrt{a}}{2(\sqrt{a})^2-3^2}=\dfrac{2\sqrt{a}}{2a-9}.$

• ***Cách giải đúng:***

a) $\dfrac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{3})^2}=\dfrac{\sqrt{15}+2\sqrt{3}}{3}.$

b) $\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}=\dfrac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}=\dfrac{2(\sqrt{5}+1)}{5-1}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}.$

c) $\dfrac{5}{2\sqrt{7}+3}=\dfrac{5.\left(2\sqrt{7}-3\right)}{\left(2\sqrt{7}+3\right).\left(2\sqrt{7}-3\right)}$

$=\dfrac{5.\left(2\sqrt{7}-3\right)}{\left(2\sqrt{7}\right)^2-3^2}=\dfrac{5.\left(2\sqrt{7}-3\right)}{28-9}=\dfrac{10\sqrt{7}-15}{19}.$

d) $\dfrac{2\sqrt{a}}{2\sqrt{a}+3}=\dfrac{2\sqrt{a}.\left(2\sqrt{a}-3\right)}{\left(2\sqrt{a}+3\right).\left(2\sqrt{a}-3\right)}$

$=\dfrac{2\sqrt{a}.\left(2\sqrt{a}-3\right)}{\left(2\sqrt{a}\right)^2-3^2}=\dfrac{4a-6\sqrt{a}}{4a-9}$

với $a\ge 0$ và $a\ne\dfrac{9}{4}.$

• ***Nguyên nhân:*** + HS chưa biết biến đổi biểu thức dưới dấu căn bậc hai thành dạng tích để khai phương mà ngộ nhận sử dụng công thức

"$\sqrt{A+B}=\sqrt{A}+\sqrt{B}$" tương tự như

$\sqrt{A.B}=\sqrt{A}.\sqrt{B}$ (với $A\ge 0, B\ge 0$)

để tính.

+ HS hiểu mơ hồ về quy tắc khai phương một tích, khai phương một thương.

+ HS mất kiến thức căn bản ở lớp dưới nhất là các hằng đẳng thức và tính chất cơ bản của phân thức.

+ HS chưa hiểu rõ quy tắc trục căn thức bậc hai ở mẫu và như thế nào là hai biểu thức liên hợp của nhau, hai biểu thức này liên quan đến hằng đẳng thức: $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$.

8. Sai lầm trong kỹ năng biến đổi.

Trong khi học sinh thực hiện phép tính các em có đôi khi bỏ qua các dấu của số hoặc chiều của bất đẳng thức dẫn đến giải bài toán bị sai.

Bài toán 1. *Tìm x biết:*

$$\left(4-\sqrt{17}\right).2x<\sqrt{3}.\left(4-\sqrt{17}\right).$$

• ***Cách giải sai:*** $\left(4-\sqrt{17}\right).2x<\sqrt{3}.\left(4-\sqrt{17}\right)$

$\Leftrightarrow 2x<\sqrt{3}$ (chia cả hai vế cho $4-\sqrt{17}$) $\Leftrightarrow x<\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

• ***Cách giải đúng*** : Vì $4 = \sqrt{16} < \sqrt{17}$ nên $4-\sqrt{17} < 0$, do đó ta có:

$$4-\sqrt{17}.2x < \sqrt{3}.\left(4-\sqrt{17}\right) \Leftrightarrow 2x > \sqrt{3} \Leftrightarrow x > \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

• ***Nguyên nhân:*** Nhìn qua thì thấy học sinh giải đúng và không có vấn đề gì. Học sinh khi nhìn thấy bài toán này thấy bài toán không khó nên đã chủ quan không để ý đến dấu của bất đẳng thức: *"Khi nhân hoặc chia cả hai vế của bất đẳng thức với cùng một số âm thì bất đẳng thức đổi chiều"*.

Bài toán 2. *Rút gọn biểu thức:* $\dfrac{x^2-3}{x+\sqrt{3}}$.

• ***Cách giải sai:***

$$\frac{x^2-3}{x+\sqrt{3}} = \frac{\left(x-\sqrt{3}\right).\left(x+\sqrt{3}\right)}{x+\sqrt{3}} = x-\sqrt{3}.$$

• ***Cách giải đúng:*** Biểu thức đó là một phân thức, để phân thức tồn tại thì cần phải có $x+\sqrt{3} \neq 0$ hay $x \neq -\sqrt{3}$. Khi đó, ta có:

$$\frac{x^2-3}{x+\sqrt{3}} = \frac{\left(x-\sqrt{3}\right).\left(x+\sqrt{3}\right)}{x+\sqrt{3}} = x-\sqrt{3}$$

(với $x \neq -\sqrt{3}$).

• ***Nguyên nhân:*** Rõ ràng nếu $x = -\sqrt{3}$ thì $x + \sqrt{3} = 0$, khi đó biểu thức $\dfrac{x^2-3}{x+\sqrt{3}}$ sẽ không tồn tại. Mặc dù kết quả giải được của học sinh đó không sai, nhưng sai trong lúc giải vì không có căn cứ lập luận, vì vậy biểu thức trên có thể không tồn tại thì làm sao có thể có kết quả được.

Bài toán 3. *Rút gọn M, rồi tìm giá trị nhỏ nhất của M.*

$$M = \left(\frac{1}{a-\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a}-1}\right) : \frac{\sqrt{a}+1}{a-2\sqrt{a}+1} \text{ với } a > 0.$$

• ***Cách giải sai:*** $M = \left(\dfrac{1}{a-\sqrt{a}} + \dfrac{1}{\sqrt{a}-1}\right) : \dfrac{\sqrt{a}+1}{a-2\sqrt{a}+1}$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{a}}{\sqrt{a}.\left(\sqrt{a}-1\right)}\right) \cdot \frac{\left(\sqrt{a}-1\right)^2}{\sqrt{a}+1} = \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}}.$$

Ta có: $M = \dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} - \dfrac{1}{\sqrt{a}} = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{a}}.$

Khi đó, ta nhận thấy $M < 1$ vì $a > 0$. Do đó:

$$\min M = 0 \Leftrightarrow a = 1.$$

• ***Cách giải đúng:***

$M = \left(\dfrac{1}{a-\sqrt{a}} + \dfrac{1}{\sqrt{a}-1}\right) : \dfrac{\sqrt{a}+1}{a-2\sqrt{a}+1}$ có $a > 0$ và $\sqrt{a}-1 \neq 0$ hay $a > 0$ và $a \neq 1$.

Với điều kiện trên, ta có: $M = \dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}}$. Xét hai trường hợp :

TH1: $\sqrt{a} > 1 \Leftrightarrow a > 1$. Khi đó $M = \dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}} > 0$.

TH2: $0 < \sqrt{a} < 1 \Leftrightarrow 0 < a < 1$. Khi đó:

$$M = \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}} < 0.$$

Vậy M không có giá trị nhỏ nhất.

• ***Nguyên nhân:*** Nhìn vào kết quả của bài toán rút gọn thì không sai, nhưng sai ở chỗ học sinh lập luận và đưa ra kết quả về giá trị nhỏ nhất của M. Rõ ràng học sinh không để ý đến chi tiết: Khi $a = 1$ thì $\sqrt{a} = 1$ do đó $\sqrt{a}-1 = 0$, điều này sẽ mâu thuẫn trong điều kiện tồn tại của phân thức.

Các bạn hãy giải các bài tập sau và đừng mắc các sai lầm như trên nhé!

Bài 1. a) Tìm căn bậc hai số học của 9 rồi suy ra căn bậc hai của chúng.

b) Tìm căn bậc 2 của 81 c) So sánh 5 và $\sqrt{21}$.

Bài 2. Tìm x, biết:

a) $\sqrt{1+x} + \dfrac{1}{2}\sqrt{16x+16} - 6 = 0$;

b) $\sqrt{x^2-4x+4} - 3 = 0$;

c) $\sqrt{x} < 3$ d) $3x - \sqrt{x+1} + 1 = 0$.

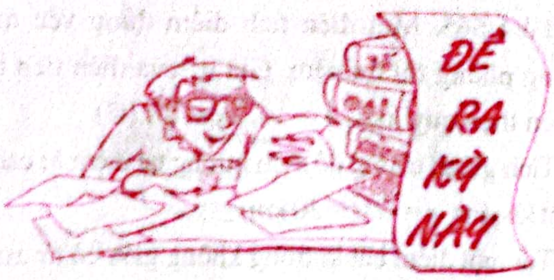
Bài 3. Rút gọn:

a) $\dfrac{2}{x-1}\sqrt{\dfrac{x^2-2x+1}{4x^2}}$ với $x > 0, x \neq 1$;

b) $\sqrt{\left(\sqrt{a-1}+1\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{a-1}-1\right)^2}$ với $a \geq 1$.

Bài 4. Trục căn thức ở mẫu: a) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$

b) $\dfrac{1}{3-\sqrt{7}} - \dfrac{1}{3+\sqrt{7}}$ c) $\dfrac{1}{3-\sqrt{5}} - \dfrac{1}{\sqrt{5}+1}$.



CÁC LỚP THCS

Bài T1/565 (Lớp 6). Tìm số tự nhiên có ba chữ số sao cho bình phương chữ số hàng đơn vị ta được một số có hai chữ số được thành lập từ chữ số hàng trăm và hàng chục (theo thứ tự từ trái qua phải) và tích của số mới thành lập với chữ số hàng đơn vị ta được số có hai chữ số chính là chữ số hàng chục và hàng đơn vị (cũng theo thứ tự từ trái qua phải).

LÊ QUANG HẢO
(GV THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt, Kiên Giang)

Bài T2/565 (Lớp 7). Cho a, b là các số thực thỏa mãn $a^3+b^3=3191$ và $(a+b)(a+1)(b+1)=2023$. Tính giá trị của tổng $S=a+b$.

NGUYỄN TÁN NGỌC
(GV THCS P. Bình Định, An Nhơn, Bình Định)

Bài T3/565. Tìm các nghiệm tự nhiên của phương trình

$$x^2(x^3+2xy^3+68x-4y)=8y^4+272y+1817.$$

BÙI HẢI QUANG
(GV THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, Phú Thọ)

Bài T4/565. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AC=2AB$. Kẻ đường cao AH. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $BA=BD$. Tính tỷ số $\frac{DH}{AH}$.

ĐOÀN CÁT NHƠN
(GV THCS P. Bình Định, An Nhơn, Bình Định)

Bài T5/565. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{a^5}{\sqrt{b+c}}+\frac{b^5}{\sqrt{c+a}}+\frac{c^5}{\sqrt{a+b}}.$$

LẠI QUANG THỌ
(Phòng GD&ĐT Tam Dương, Vĩnh Phúc)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/565. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=6\left[\frac{1}{a^2(b+c)}+\frac{1}{b^2(c+a)}+\frac{1}{c^2(a+b)}\right]-5(a^2+b^2+c^2).$$

TRẦN VĂN THƯƠNG
(GV THPT Phú Mỹ, Bà Rịa – Vũng Tàu)

Bài T7/565. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^4-y^4=\dfrac{1562x-1563y}{4xy} \\ x^4+14x^2y^2+y^4=\dfrac{1563x+1562y}{x^2+y^2} \end{cases}.$$

ĐÀO CHÍ THANH
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T8/565. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, có đáy ABC là tam giác vuông tại A. Điểm S là trung điểm của AA'. Chứng minh rằng

$$\text{mp}(SBC)\perp\text{mp}(SB'C')\Leftrightarrow\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}=\frac{4}{AA'^2}.$$

NGUYỄN ANH VŨ
(GV THPT chuyên Chu Văn An, Bình Định)

Bài T9/565. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$a^2b^2c^2\ge\frac{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b)(b+c)(c+a)}{8}.$$

PHẠM VĂN THUẬN
(565 Nguyễn Trãi, Thanh Xuân, Hà Nội)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/565. Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho p là ước của $1^{p-1}+2^{p-1}+\ldots+2012^{p-1}$.

NGUYỄN TUẤN NGỌC
(GV THPT chuyên Tiền Giang)

Bài T11/565. Tồn tại hay không đa thức $P(x)$ bậc 2024 có hệ số thực thỏa mãn bất đẳng thức

$$P^3(a)+P^3(b)+P^3(c)\ge 3P(a)P(b)P(c)$$

với mọi số thực a, b, c mà $a+b+c=0$ và đa thức $P(x)$ có thể có 2024 nghiệm thực khác nhau?

NGUYỄN ĐỨC TƯỜNG

(Pleiku)

Bài T12/565. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). α là một góc thay đổi. Phép quay tâm O, góc quay α biến A, B, C lần lượt thành D, E, F. Đường tròn $(D; DA)$ cắt AC, AB lần lượt tại A_c, A_b; đường tròn $(E; EB)$ cắt BA, BC lần lượt tại B_a, B_c; đường tròn $(F; FC)$ cắt CA, CB lần lượt tại C_a, C_b. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác tạo bởi giao điểm các đường thẳng A_cA_b, B_aB_c, C_aC_b chuyển động trên một đường tròn cố định.

NGUYỄN VĂN LINH

(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài L1/565. Một điện tích điểm đứng yên tại O trong phòng thí nghiệm. Giá trị của điện tích biến thiên theo quy luật: $q=10^{-6}\cos 10^5 t$ (C).

a) Tính giá trị cường độ điện trường tại điểm M cách O một khoảng $r=OM=30$ km.

b) Tại một điểm bất kì trong không gian có từ trường biến thiên không? Tại sao?

VIỆT CƯƠNG *(Hà nội)*

Bài L2/565. Ở nơi phát người ta truyền công suất truyền tải điện năng là 1,2 MW dưới điện áp 6 kV. Điện trở của đường dây truyền tải từ nơi phát đến nơi tiêu thụ là 4,05 Ω. Hệ số công suất của đoạn mạch 0,9. Giá điện 1800 đồng/kWh thì trung bình trong 30 ngày, số tiền khấu hao bao nhiêu?

THANH LÂM *(Hà nội)*

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/565 (For 6th grade). Find three-digit natural numbers such that the square of the units digit gives us a two-digit number formed from the hundreds and tens digits (in order from left to right) and the product of the new number with the units digit is a two-digit number formed from the tens and units digits (also in order from left to right).

Problem T2/565 (For 7th grade). Let a , b be real numbers satisfying $a^3+b^3=3191$ and $(a+b)(a+1)(b+1)=2023$.

Calculate the value of the sum $S=a+b$.

Problem T3/565. Find natural solutions of the equation

$$x^2(x^3+2xy^3+68x-4y)=8y^4+272y+1817.$$

Problem T4/565. Let triangle ABC be right-angled at A and has $AC=2AB$. Draw the altitude AH. On the side BC, take the point D so that $BA=BD$. Calculate the ratio $\dfrac{DH}{AH}$.

Problem T5/565. Given positive real numbers a, b, c satisfying $abc=2$. Find the minimum value of the expression $P=\dfrac{a^5}{\sqrt{b+c}}+\dfrac{b^5}{\sqrt{c+a}}+\dfrac{c^5}{\sqrt{a+b}}$.

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/565. Given positive real numbers a, b, c satisfying $a+b+c=3$. Find the minimum value of the expression

$$P=6\left[\frac{1}{a^2(b+c)}+\frac{1}{b^2(c+a)}+\frac{1}{c^2(a+b)}\right]-5(a^2+b^2+c^2).$$

(Xem tiếp trang 31)

Bài T1/561. *Cho biểu thức*

$$S=\frac{1}{4}+\frac{2}{4^2}+\frac{3}{4^3}+...+\frac{2025}{4^{2025}}.$$

Chứng minh rằng $S<\frac{1}{2}$.

Lời giải. Ta giải bài toán tổng quát hơn khi đặt $a=4$, tức là cho $S=\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\frac{3}{a^3}+...+\frac{2025}{a^{2025}}$ với số nguyên dương $a\geq 4$ và chứng minh rằng $S<\frac{1}{2}$. Tính

$$aS-S=a\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\frac{3}{a^3}+...+\frac{2025}{a^{2025}}\right)-S$$

$$=1+\frac{2}{a}+\frac{3}{a^2}+\frac{4}{a^3}+...+\frac{2025}{a^{2024}}$$

$$-\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\frac{3}{a^3}+...+\frac{2025}{a^{2025}}\right)$$

$$=1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}+...+\frac{1}{a^{2024}}-\frac{2025}{a^{2025}}\ (*).$$

Đặt $P=1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}+...+\frac{1}{a^{2024}}$, theo đẳng thức (*) trên với $a\geq 4$ có: $(a-1)S<P$ (**).

Tính $aP-P=a\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}+...+\frac{1}{a^{2024}}\right)$

$$-\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}+...+\frac{1}{a^{2024}}\right)$$

$$=a-\frac{1}{a^{2024}}<a \text{ với } a\geq 4$$

hay là $(a-1)P<a$. Từ đó và (**) có:

$$(a-1)^2S<(a-1)P<a \text{ hay là } S<\frac{a}{(a-1)^2}.$$

Nói riêng khi $a=4$ thì $S<\frac{4}{9}<\frac{1}{2}$.

Chú ý rằng $2a<(a-1)^2$ chỉ khi $a(a-4)+1>0$, tức là đúng với $a\geq 4$, còn khi thay 2025 bởi số nguyên dương $k\geq 1$ nào đó thì lập luận trên vẫn đúng.

Nhận xét. Bạn *Lưu Diệp Chi* đã giải bài toán tổng quát khi thay 4 bởi số nguyên dương a và thay 2025 bởi số nguyên dương k nhưng đặt điều kiện của a chưa chuẩn. Các bạn sau có lời giải đúng:

Phú Thọ: *Nguyễn Linh Vân, Đặng Kiều Trang, Đinh Văn Vũ Phong*, 6C, THCS Thị Trấn 2, Yên Lập; **Thái Bình:** *Lưu Diệp Chi*, 6A5, THCS Kỳ Bá, TP. Thái Bình; **Nghệ An:** *Nguyễn Sỹ Bảo Long, Nguyễn Thái Dũng, Phạm Nguyễn Nguyệt Linh, Nguyễn Đắc Sang, Nguyễn Thị Kim Ngân*, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Đinh Bảo Ngân*, 6A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Quảng Ngãi:** *Trần Văn Phụng*, 6C, THCS Nguyễn Kim Vang, Nghĩa Hành; **Cộng hòa Áo:** *Lê Bạch Hải Đăng*, 1B, Trường Quốc tế song ngữ cấp 2, 3 GIBS, TP. Graz.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/561. *Cho a, b là các số nguyên thỏa mãn* $M=4a^2+b^2+2ab+4b+2$ *chia hết cho 5. Tìm số dư khi chia* $2023(a-b)+2024$ *cho 5.*

Lời giải. Biến đổi M như sau:

$$M=4a^2+b^2+2ab+4b+2$$
$$=5a^2+b^2+2b(a+2)+(a+2)^2$$
$$-(a+2)^2+2-a^2$$
$$=5a^2+(a+b+2)^2-2(a+1)^2.$$

Do a, b là các số nguyên nên a^2; $a+b+2$; $a+1$; M là các số nguyên và $5a^2 \vdots 5$. Để M chia hết cho 5 thì cần $(a+b+2)^2-2(a+1)^2$ chia hết cho 5.

Đặt $x=a+b+2$; $y=a+1$ (do $a, b\in\mathbb{Z}$ nên $x, y\in\mathbb{Z}$), ta có x^2-2y^2 chia hết cho 5 (*).

Ta biết rằng: Một số chính phương chia cho 5 dư 0, 1, 4.

+ Nếu y^2 : 5 dư 1 thì từ (*) suy ra x^2 : 5 dư 2 (loại vì x^2 : 5 dư 0, 1, 4).

+ Nếu y^2 : 5 dư 4 thì từ (*) suy ra x^2 : 5 dư 3 (loại vì x^2 : 5 dư 0, 1, 4).

+ Nếu $y^2 \vdots 5$ thì từ (*) suy ra $x^2 \vdots 5$. Từ đó suy ra x, y cùng chia hết cho 5. Ta có:

$\begin{cases}(a+b+2)\vdots 5\\(a+1)\vdots 5\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(a+b+2)-(a+1)=(b+1)\vdots 5\\(a+1)\vdots 5\end{cases}$

$\Rightarrow (a+1)-(b+1)=(a-b)\vdots 5.$

Vì vậy $2023(a-b)+2024$ chia cho 5 dư 4.

Nhận xét. Bài này có nhiều bạn tham gia gửi bài với cách làm tương tự như trên. Tuy nhiên, nhiều bạn sau khi dẫn đến $(a+b+2)^2-2(a+1)^2$ chia hết cho 5 đã suy ra ngay $(a+b+2)^2$ và $(a+1)^2$ cùng chia hết cho 5 mà bỏ qua các bước suy luận.

Tuyên dương các bạn sau có lời giải có lập luận chặt chẽ và ngắn gọn:

Thái Bình: *Lưu Diệp Chi*, 6A5, THCS Kỳ Bá, TP Thái Bình; **Cộng hoà Áo:** *Lê Bạch Hải Đăng*, 1B, Trường Quốc tế song ngữ cấp 2, 3, G 183, TP. Graz.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T3/561. *Gọi H là tập hợp gồm 7 điểm phân biệt $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$ bất kỳ thuộc hình tròn tâm O bán kính R = 2024. Với mỗi $i, j \in \{1,2,3,...,7\}$, ký hiệu $d(A_i, A_j)$ là khoảng cách giữa hai điểm A_i, A_j. Gọi*

$$\mu(H)=\min\{d(A_i,A_j)\,|\,1\le i,j\le 7\}.$$

Hãy tìm giá trị lớn nhất của $\mu(H)$.

Lời giải. Xét lục giác đều $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ nội tiếp đường tròn (O). Hình tròn (O) được chia thành sáu hình quạt tròn $B_1OB_2, B_2OB_3, \ldots, B_6OB_1$. Bảy điểm $A_1, A_2, \ldots, A_7$ thuộc hình tròn (O) nên theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại hai điểm cùng thuộc vào một quạt tròn. Không mất tính tổng quát, giả sử A_1, A_2 cùng thuộc quạt tròn B_1OB_2.

Nếu một trong hai điểm A_1, A_2 trùng với tâm O, giả sử là A_1, thì $A_1A_2 = OA_2 = \max(OA_1, OA_2)$.

Nếu A_1, A_2 không trùng với tâm O thì ba điểm A_1, A_2, O lập thành một tam giác. Ta thấy $\widehat{A_1OA_2} \le \widehat{B_1OB_2} = 60^0$. Suy ra:

$$\max(\widehat{OA_1A_2}, \widehat{OA_2A_1}) \ge 60^\circ \ge \widehat{A_1OA_2}.$$

Theo bất đẳng thức trong tam giác thì $A_1A_2 \le \max(OA_1, OA_2) \le R$. Rõ ràng là $A_1A_2 \ge \mu(H)$ nên $\mu(H) \le R = 2024$.

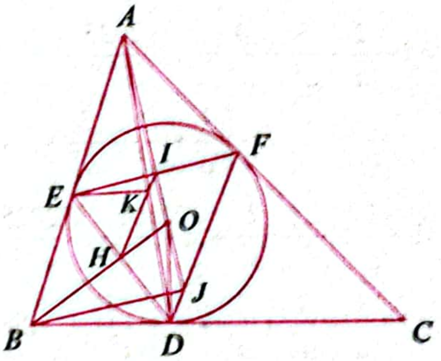
Hơn nữa, khi $A_i \equiv B_i, i=1,2,\ldots,6$ và $A_7 \equiv O$ thì ta có $A_iA_j = R = 2024$ với mọi $i \ne j$, kéo theo $\mu(H) = R = 2024$. Vậy giá trị lớn nhất của $\mu(H)$ là 2024.

Nhận xét. Bài toán này không khó, chỉ là bài toán áp dụng nguyên lý Dirichlet cơ bản nhưng rất tiếc không có bạn nào gửi lời giải. Xem ra các bài toán Tổ hợp vẫn là những bài toán làm cho các bạn "ngại".

NGUYỄN TIẾN LÂM

Bài T4/561. *Cho tam giác ABC (AB khác AC) ngoại tiếp đường tròn (O). Gọi D, E, F theo thứ tự là tiếp điểm của (O) với các cạnh BC, AB và AC. H là giao điểm của DE với BO, I là giao điểm của FE với AO. Qua E vẽ đường thẳng song song với BC cắt HI tại K. Chứng minh ba điểm A, K, D thẳng hàng.*

Lời giải. (Theo bạn *Nguyễn Bảo Khánh*, 9C, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, Thanh Hóa).



Gọi J là giao điểm của DF và AO. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có OA, OB lần lượt là trung trực của EF, ED, hơn nữa I, H lần lượt là trung điểm của EF, ED.

Vì O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nên

$$\widehat{AOB} = 180^\circ - \frac{\widehat{A}}{2} - \frac{\widehat{B}}{2} = 90^\circ + \frac{\widehat{C}}{2} \quad (1).$$

Mặt khác, tam giác DCF cân tại C (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) nên: $\widehat{BDF} = 90^\circ + \dfrac{\widehat{C}}{2}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $OJDB$ nội tiếp, dẫn đến $\widehat{OJB} = \widehat{ODB} = 90^0$. Từ đó suy ra $BJ \parallel EF$.

Ta cũng có $HI \parallel DF$ (tính chất đường trung bình).

Gọi K' là giao điểm của AD và HI, áp dụng định lí Thales ta có: ΔABJ có $EI // BJ$: $\frac{IA}{IJ} = \frac{EA}{EB}$ (3);

ΔAJD có $K'I // DJ$: $\frac{IA}{IJ} = \frac{K'A}{K'D}$ (4).

Từ (3) và (4) ta có $\frac{EA}{EB} = \frac{K'A}{K'D}$.

Từ đó suy ra $EK' // BD$ (định lí Thales đảo).

Suy ra $K' \equiv K$. Do đó A, K, D thẳng hàng.

Nhận xét. Chỉ có bạn *Nguyễn Bảo Khánh*, 9C, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa** và bạn *Nguyễn Văn Đức Thắng*, 9A, THCS Quỳnh Trang, TX. Hoàng Mai, **Nghệ An** cho lời giải đúng.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/561. *Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $0 < x \le y < z$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức* $P = \frac{1}{x}(y-z) + \frac{1}{y}(z+x) + \frac{1}{z}(y-x)$.

Lời giải. Ta có: $P = \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{y} + \frac{y}{z} - \frac{z}{x} - \frac{x}{z}$.

Từ giả thiết $0 < x \le y < z$, ta có:

$$(x-y)(y-z) \ge 0 \Rightarrow y^2 + xz \le xy + yz \quad (1).$$

Dấu bằng đạt được khi và chỉ khi $x = y < z$.

Chia cả hai vế của (1) cho $xy > 0$, ta có:

$$\frac{y}{x} + \frac{z}{y} \le 1 + \frac{z}{x} \quad (2).$$

Lại chia cả hai vế của (1) cho $yz > 0$, ta có:

$$\frac{y}{z} + \frac{x}{y} \le \frac{x}{z} + 1 \quad (3).$$

Cộng theo vế của (2), (3) ta được:

$$\frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{y}{z} + \frac{x}{y} \le 2 + \frac{z}{x} + \frac{x}{z}$$

$$\Rightarrow P = \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{y} + \frac{y}{z} - \frac{z}{x} - \frac{x}{z} \le 2.$$

Dấu bằng đạt được khi và chỉ khi $x = y < z$.

Vậy $\max P = 2$, giá trị đó đạt được khi và chỉ khi $x = y < z$.

Nhận xét. Có thể giải bài toán bằng cách biến đổi

$$P = \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) - \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right)$$

$$= 2 + \frac{(y-x)^2}{xy} + 2 + \frac{(z-y)^2}{zy} - 2 - \frac{(z-x)^2}{xz}$$

$$= 2 + \frac{z(y-x)^2 + x(z-y)^2 - y(z-x)^2}{xyz};$$

sau khi rút gọn, ta được:

$$P = 2 + \frac{(x-y)(x+z)(z-y)}{xyz} \le 2$$

vì với $0 < x \le y < z$ có $\frac{(x-y)(x+z)(z-y)}{xyz} \le 0$.

Các bạn sau đây có bài giải tốt:

Thanh Hóa: *Nguyễn Bảo Khánh*, 9C, Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; **Hưng Yên:** *Lê Tuấn Hiệp*, 8C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; **Thái Bình:** *Lưu Diệp Chi*, 6A5, THCS Kỳ Bá, TP. Thái Bình; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Phương Hoàng Minh*, 10E2, TH, THCS, THPT Lê Thánh Tông, Q. Tân Phú, *Nguyễn Chánh Thiện*, 9/12, THCS Lê Quý Đôn, quận 3.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T6/561. *Không sử dụng công thức nghiệm cho phương trình bậc ba, giải phương trình sau trên tập số thực:* $2x^3 - 6x + 5 = 0$ (1).

Lời giải. Cách 1. (Theo bạn *Hà Phương Anh*, 10 chuyên Toán, THPT chuyên Hùng Vương, TP. Việt Trì, Phú Thọ).

Ta có: (1) $\Leftrightarrow x^3 - 3x + \frac{5}{2} = 0$. Đặt $x = v - u$, vì

$$(v-u)^3 + 3uv(v-u) + u^3 - v^3 = 0$$

$$\Rightarrow x^3 + 3uvx + u^3 - v^3 = 0.$$

Đồng nhất hệ số từ hai PT trên ta được:

$$\begin{cases} u^3 - v^3 = \frac{5}{2} \\ uv = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 + \frac{1}{u^3} = \frac{5}{2} \\ -v = \frac{1}{u} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u^6 - 5u^3 + 2 = 0 \\ uv = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u^3 = 2 \\ uv = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} u^3 = \frac{1}{2} \\ uv = -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = \sqrt[3]{2}, v = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \\ u = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}, v = -\sqrt[3]{2} \end{array}\right.$$

Được quét bằng CamScanner

$$\Rightarrow x = v - u = -\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}}.$$

Thử lại ta thấy nghiệm này thỏa mãn.

Vậy PT đã cho có nghiệm $x = -\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

Cách 2. (Theo bạn *Lưu Diệp Chi*, 6A5, THCS Kỳ Bá, TP. Thái Bình, **Thái Bình**).

Ta có: $2x^3 - 6x + 5 = 2(x+2)(x-1)^2 + 1$. Từ đó với $x \geq -2$ thì $2x^3 - 6x + 5 \geq 1 > 0$. PT đã cho vô nghiệm.

Với $x < -2$ (*), đặt $x = t + \frac{1}{t}$ $(t < 0, t \neq -1)$. Khi đó PT đã cho trở thành:

$$2\left(t+\frac{1}{t}\right)^3 - 6\left(t+\frac{1}{t}\right) + 5 = 0 \Leftrightarrow 2t^3 + \frac{2}{t^3} + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2t^6 + 5t^3 + 2 = 0 \Leftrightarrow (2t^3+1)(t^3+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}; t = -\sqrt[3]{2}.$$

+) Với $t = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ thì $x = -\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

+) Với $t = -\sqrt[3]{2}$ thì $x = -\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

Đối chiếu với điều kiện (*) ta thấy PT đã cho có nghiệm $x = -\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

Nhận xét. Có thể sử dụng hằng đẳng thức:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$
$$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$$

để biến đổi PT đã cho ta cũng đi đến kết quả cần tìm. Ngoài hai bạn *Hà Phương Anh* và *Lưu Diệp Chi*, các bạn sau cũng có lời giải tốt: **Vĩnh Phúc:** *Bạch Thái Sơn*, 11A2, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hưng Yên:** *Lê Tuấn Hiệp*, 8C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; **Thanh Hoá:** *Nguyễn Bảo Khánh*, 9C, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hoá; **Đồng Tháp:** *Võ Hải Yến*, 11H, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, TP. Cao Lãnh.

HỒ HẢI

Bài T7/561. *Không dùng máy tính hay bảng số, hãy tính* $\sin 3^0$.

Lời giải. (Của bạn *Hà Phương Anh*, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương, **Phú Thọ**).

Ta có: $\cos 36^0 = \sin 54^0$

$$\Leftrightarrow \cos(2.18^0) = \sin(3.18^0)$$
$$\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 18^0 = 3\sin 18^0 - 4\sin^3 18^0.$$

Đặt $\sin 18^0 = x$ $(0 < x < 1)$, ta có phương trình:

$$1 - 2x^2 = 3x - 4x^3 \Leftrightarrow 4x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = 0$$

$\Leftrightarrow (x-1)(4x^2+2x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (không thỏa mãn), $x = -\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ (không thỏa mãn),

$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ (thỏa mãn).

Suy ra: $\sin 18^0 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

$$\Rightarrow \cos 18^0 = \sqrt{1 - \sin^2 18^0} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

Lại có: $\sin^2 15^0 = \frac{1 - \cos 30^0}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$

$$\Rightarrow \sin 15^0 = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}, \cos 15^0 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}.$$

Do đó: $\sin 3^0 = \sin(18^0 - 15^0)$

$$= \sin 18^0 \cos 15^0 - \cos 18^0 \sin 15^0$$

$$= \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} - \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

$$= -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{10+5\sqrt{3}} + \sqrt{(10+2\sqrt{5})(2-\sqrt{3})}}{8}.$$

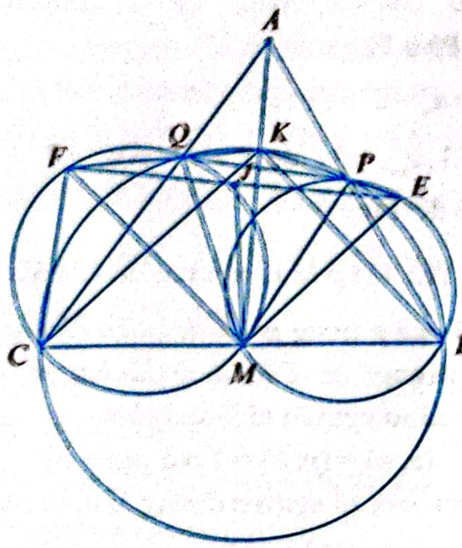
Nhận xét. Bạn *Ngô Văn Trường*, 10A1, THPT Hoàng Mai, TX. Hoàng Mai, **Nghệ An** có lời giải tương tự như lời giải của bạn *Anh*. Ngoài cách giải trên, bạn *Nguyễn Chánh Thiện*, 9/12, THCS Lê Quý Đôn, Q. 3, **TP. Hồ Chí Minh** và bạn *Bạch Thái Sơn*, 11A2, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc** đưa ra cách giải bằng hình học khá thú vị. Xin hoan nghênh các bạn.

NHƯ HOÀNG

Bài T8/561. *Cho tam giác ABC nhọn (AB < AC) với M là trung điểm của BC và đường tròn (M, MB) cắt lại AB, AM, AC lần lượt tại P, K, Q. Tia KP cắt lại đường tròn ngoại tiếp tam giác*

BMP tại E và tia KQ cắt lại đường tròn ngoại tiếp tam giác CMQ tại F. Gọi J là trung điểm của EF. Chứng minh JM vuông góc với BC.

Lời giải. **(Dựa theo bạn** *Hà Phương Anh*, **10 chuyên Toán, THPT chuyên Hùng Vương, TP. Việt Trì, Phú Thọ).**



Kí hiệu (XYZ) chỉ đường tròn đi qua ba điểm X, Y, Z. Ta có $\overline{AB}.\overline{AP}=\overline{AC}.\overline{AQ}\Rightarrow \mathcal{P}_{A/(BMP)}=\mathcal{P}_{A/(CMQ)}$, suy ra A thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn (BMP), (CMQ) $\Rightarrow AM$ là trục đẳng phương của hai đường tròn (BMP), (CMQ).

Vì $K\in AM\Rightarrow \mathcal{P}_{K/(BMP)}=\mathcal{P}_{K/(CMQ)}$

$$\Rightarrow \overline{KP}.\overline{KE}=\overline{KQ}.\overline{KF}\Rightarrow KP.KE=KQ.KF$$

nên tứ giác $EPQF$ nội tiếp.

Từ các tứ giác nội tiếp $PEBM$, $EPQF$, $PQCB$, $KQCB$, ta có:

$$\widehat{JEM}=\widehat{PEM}-\widehat{PEJ}=\widehat{PBM}-\widehat{KQP}$$
$$=\widehat{AQP}-\widehat{KQP}=\widehat{KQA}=\widehat{KBC}.$$

Tương tự, từ các tứ giác nội tiếp $QFCM, EPQF, PQCB, KPBC\Rightarrow \widehat{JFM}=\widehat{KCB}$

$$\Rightarrow \widehat{JEM}+\widehat{JFM}=\widehat{KBC}+\widehat{KCB}=90^\circ\Rightarrow \widehat{FME}=90^0.$$

Tam giác FME vuông tại M, từ giả thiết J là trung điểm EF

$$\Rightarrow JE=JM=JF\Rightarrow \widehat{JME}=\widehat{JEM}=\widehat{KQA}.$$

Mặt khác:

$$\widehat{KQA}=\widehat{FQC}=\widehat{FMC}\Rightarrow \widehat{JMC}=\widehat{JMF}+\widehat{FMC}$$
$$=\widehat{JMF}+\widehat{JME}=90^0$$

$\Rightarrow JM\perp BC$. Ta được điều phải chứng minh.

Nhận xét. Ngoài bạn *Hà Phương Anh*, các bạn sau cũng có lời giải tốt:

Thanh Hoá: *Nguyễn Bảo Khánh*, 9C, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hoá; **Nghệ An:** *Trần Quang Nhật*, 10A1, THPT chuyên ĐH Vinh, *Phan Đại Hoàng*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Như Thuật*, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế; **Quảng Nam:** *Nguyễn Trí Hiển*, 10 chuyên Toán, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, TP. Tam Kỳ; **Bình Định:** *Trần Ngọc Tuyên*, 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Quy Nhơn; **Phú Yên:** *Huỳnh Trần Gia Huy*, 10 Toán 1, THPT chuyên Lương Văn Chánh, TP. Tuy Hoà.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/561. *Cho a, b, c là các số nguyên dương thỏa mãn $a+b+c=100$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức*

$$P=a^2b+b^2c+c^2a+abc.$$

Lời giải. **(Của bạn** *Nguyễn Phương Hoàng Minh*, **10E2, TH, THCS, THPT Lê Thánh Tông, TP. Hồ Chí Minh)**

• *Tìm giá trị nhỏ nhất của P.*

Ta có: $(a-1)(b-1)\ge 0\Leftrightarrow ab\ge a+b-1$

$$\Leftrightarrow a^2b\ge a^2+ab-a.$$

Tương tự: $b^2c\ge b^2+bc-b;\quad c^2a\ge c^2+ca-c.$

Mặt khác: $(a-1)(b-1)(c-1)\ge 0$

$$\Leftrightarrow abc\ge ab+bc+ca-a-b-c+1.$$

Do đó:

$$P\ge a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)-2(a+b+c)+1$$
$$=(a+b+c-1)^2=99^2=9801.$$

$P=9801$ khi $(a,b,c)=(1,1,98)$ và các hoán vị.

Vậy min $P=9801$.

• *Tìm giá trị lớn nhất của P.*

Xét ba số: $a - b$, $b - c$, $c - a$. Theo nguyên lý Dirichlet luôn tồn tại ít nhất hai số có tích không âm. Không mất tính tổng quát, giả sử hai số đó là $a - b$ và $b - c$. Khi đó:

$$(a-b)(b-c) \ge 0 \Leftrightarrow b^2 + ca \le b(a+c).$$

Suy ra: $P = ab(a+c) + c(b^2 + ca)$

$$\le ab(a+c) + bc(a+c) = b(a+c)^2 = b(100-b)^2.$$

Ta sẽ chứng minh:

$b(100-b)^2 \le 33.67^2$ (1) với $b \in \mathbb{N}^*, 1 \le b \le 98$.

Thật vậy: (1) $\Leftrightarrow b^3 - 200b^2 + 10000b - 33.67^2 \le 0$

$\Leftrightarrow (b-33)(b^2 - 167b + 4489) \le 0$ (2).

Tam thức $b^2 - 167b + 4489$ có hai nghiệm:

$$b_1 = \frac{167 - \sqrt{9933}}{2} \approx 33{,}7;\ b_2 = \frac{167 + \sqrt{9933}}{2} \approx 133{,}3.$$

Ta có bảng xét dấu VT(2)

b	$-\infty$ 33 b_1 b_2 $+\infty$
$b-33$	− 0 + + +
$b^2 - 167b + 4489$	+ + 0 − 0 +
VT(2)	− 0 + 0 − 0 +

Từ bảng xét dấu ta thấy: Với $b \le 33$ thì (2) đúng, do đó (1) đúng. Với $b > 33 \Rightarrow 34 \le b \le 98$, thì (2) đúng và do đó (1) đúng. Vậy (1) đúng với $b \in \mathbb{N}^*$ và $1 \le b \le 98$. Do đó $P \le 33.67^2 = 148137$.

$P = 148137$ khi $(a, b, c) = (33, 33, 34)$ và các hoán vị. Vậy max$P = 148137$.

Nhận xét. Có hai bạn giải sai, những bạn còn lại đều có kết quả đúng. Ngoài bạn *Minh*, các bạn có lời giải đúng là: **Vĩnh Phúc:** *Bạch Thái Sơn*, 11A2, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Phú Yên:** *Huỳnh Trần Gia Huy*, 10 Toán 1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Bảo Khánh*, 9C, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; **Bình Định:** *Nguyễn Trần Ngọc Thiện*, 10TA1, THPT số 1, Tuy Phước; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Đức Thắng*, 9A, THCS Quỳnh Trang, TX, Hoàng Mai.

TRẦN HỮU NAM

Bài T10/561. *Cho dãy số (u_n) được xác định bởi*

$$\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2^n, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $25 | u_p$.

Lời giải. (Dựa trên lời giải của bạn *Hà Phương Anh*, 10 chuyên Toán, THPT chuyên Hùng Vương, **Phú Thọ**)

Đặt $v_n = u_n - 2^n$. Ta có:

$$v_1 = 3, v_{n+1} = 3v_n \Rightarrow v_n = 3^n \Rightarrow u_n = 2^n + 3^n.$$

Ta có bổ đề sau

Bổ đề LTE: *Với p là số nguyên tố, ký hiệu $v_p(x)$ là số mũ của p trong phân tích tiêu chuẩn của số nguyên dương x. Cho a, b là hai số nguyên dương, p là số nguyên tố lẻ sao cho*

$$(p, a) = (p, b) = 1 \text{ và } p | a + b.$$

Khi đó với mỗi số nguyên dương lẻ n, ta có:

$$v_p(a^n + b^n) = v_p(a+b) + v_p(n).$$

Với $p = 2$ ta có $u_2 = 13$ không chia hết cho 25.

Với $p > 2$ thì p là số lẻ. Áp dụng bổ đề LTE ta có:

$$v_5(u_p) = v_5(2^p + 3^p) = v_5(2+3) + v_5(p) = 1 + v_5(p).$$

Ta có: $25 | u_p \Leftrightarrow v_5(u_p) \ge 2 \Leftrightarrow v_5(p) \ge 1 \Rightarrow 5 | p$.

Vì p là số nguyên tố nên suy ra $p = 5$. Thử lại ta có $u_5 = 275$ chia hết cho 25. *Trả lời*: $p = 5$.

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tốt: **Hà Tĩnh:** *Trần Duy Hưng*, 10T2, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Vĩnh Phúc:** *Bạch Thái Sơn*, 11A2, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **TP. Hồ Chí Minh:** *Đỗ Đình Thiên Phú*, 10, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Phú Yên:** *Huỳnh Trần Gia Huy*, 10 Toán 1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Bình Phước:** *Đặng Hoàng Long*, 11T, THPT chuyên Bình Long.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/561. *Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:*

$$f\left((x+y)^2\right) = x^2 + 2xf(y) + \left(f(y)\right)^2 \quad (1),$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Lời giải. (Theo đa số các bạn)

Giả sử $f(t)$ thỏa mãn (1). Thay $x=0, y=0$ vào (1) ta được:

$$f(0)=(f(0))^2 \Leftrightarrow f(0)=0 \text{ hoặc } f(0)=1.$$

• Xét trường hợp $f(0)=0$.

Thay $x=-t, y=t$ vào (1), ta thu được:

$0=t^2-2tf(t)+(f(t))^2, \forall t\in\mathbb{R} \Leftrightarrow f(t)=t, \forall t\in\mathbb{R}.$

Thử lại, ta thấy hàm này thỏa mãn bài ra.

• Xét trường hợp $f(0)=1$. Thay $y=0$ vào (1) ta thu được: $f(x^2)=(x+1)^2, \forall x\in\mathbb{R}$. Từ đây suy ra $f(1)=4$ và $\quad f((x+1)^2)=(x+2)^2, \forall x\in\mathbb{R}$ (2).

Thế $y=1$ vào (1) ta được:

$$f((x+1)^2)=x^2+8x+16, \forall x\in\mathbb{R}.$$

Kết hợp với (2) suy ra:

$$(x+2)^2=x^2+8x+16, \forall x\in\mathbb{R}.$$

Điều này không xảy ra.

Kết luận: $f(t)=t$ là nghiệm duy nhất của bài toán.

Nhận xét. Đây là dạng toán về phương trình hàm một biến với cặp biến tự do sinh bởi hằng đẳng thức đại số dạng cơ bản, tương đối đơn giản. Đa số các bạn đều giải theo cách như đã trình bày ở trên. Các bạn sau đây có lời giải đúng:

Bình Định: *Nguyễn Nguyên Thịnh*, 10T, *Trần Ngọc Tuyên*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bình Phước:** *Đặng Hoàng Long*, 11T, THPT chuyên Bình Long; **Vĩnh Phúc:** *Bạch Thái Sơn*, 11A2, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Khắc Anh Minh*, 11T2, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Nghệ An:** *Phan Đại Hoàng*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Phú Thọ:** *Hà Phương Anh*, 10T, THPT chuyên Hùng Vương; **Phú Yên:** *Huỳnh Trần Gia Huy*, 10T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Quảng Nam:** *Nguyễn Trí Hiền*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Bảo Khánh*, 9C, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa.

NGUYỄN VĂN MẬU

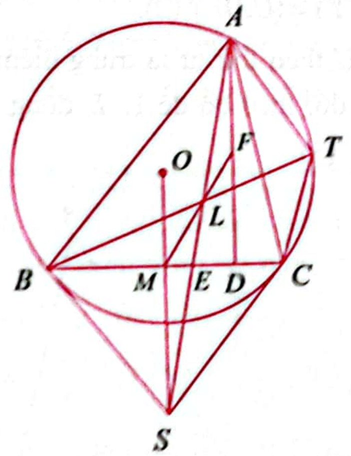
Bài T12/561. *Gọi L là điểm Lemoine của tam giác ABC. M, N, P theo thứ tự là trung điểm của BC, CA, AB. K là điểm đẳng giác của L đối với tam giác MNP. Chứng minh K thuộc đường thẳng Euler của tam giác ABC.*

Lời giải. Ta cần có hai bổ đề.

Bổ đề 1. *Cho tam giác ABC, đường cao AD, L là điểm Lemoine. M là trung điểm của BC. Khi đó LM đi qua trung điểm của AD.*

Chứng minh. Gọi S là giao điểm của các tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC; E là giao điểm của AS và BC; F là giao điểm của LM và AD; T là giao điểm thứ hai của BL và (O).

Vì L là điểm Lemoine của tam giác ABC nên tứ giác $ABCT$ điều hòa. Do đó:



$$M(ADFS)=(AELS)=B(AELS)$$
$$=B(ACTS)=B(ACTB)=(ACTB)=-1.$$

Từ đó, chú ý rằng $MS//AD$, suy ra $FA=FD$.

Bổ đề 2. *Tâm đường tròn ngoại tiếp và trực tâm của một tam giác là hai điểm đẳng giác của tam giác đó.*

Phép chứng minh bổ đề 2 rất quen thuộc, không trình bày ở đây.

Trở lại giải bài toán trên.

Gọi O, E theo thứ tự là tâm các đường tròn (ABC), (MNP); B', C' theo thứ tự là giao điểm thứ hai của (MNP) và AC, AB; Y, Z theo thứ tự là giao điểm thứ hai của (MNP) và BB', CC'; T, V theo thứ tự là giao điểm của MP, MN và BB'; U, W theo thứ tự là giao điểm của MN, MP và CC'.

Dễ thấy $NM // AB$; $PM // AC$. Do đó:

$$(YM,YV)\equiv(YM,YB')\equiv(NM,NB')(\bmod\pi)$$
$$\equiv(AB,AC)\equiv-(AC,AB)$$
$$\equiv-(PM,PC')(\bmod\pi)$$
$$\equiv-(ZM,ZC')\equiv-(ZM,ZW)(\bmod\pi).$$

Dễ thấy $YB'\perp NB'$; $UC'\perp PC'$. Do đó E là trung điểm chung của NY, PZ (1).

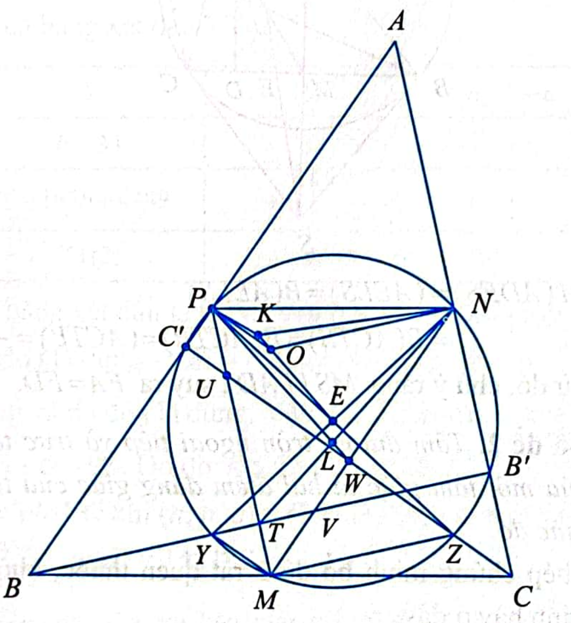
Từ (1) suy ra $\widehat{YMV}=\frac{\pi}{2}=\widehat{ZMW}$.

Vậy các tam giác MYV, MZW đồng dạng (ngược hướng). Từ đó, chú ý rằng

$$MT\,//\,AC\perp BB'\equiv YV;$$
$$MU\,//\,AB\perp CC'\equiv ZW,$$

suy ra: $(TVY)=(UZW)$ (2).

Dễ thấy T, U theo thứ tự là trung điểm của BB' và CC'. Do đó, theo bổ đề 1, L đồng thời thuộc NT và PU (3).



Dễ thấy O là trực tâm của tam giác MNP và $TV\equiv BB'\perp AC$; $UW\equiv CC'\perp AB$. Do đó $ON\,//\,TV; OP\,//\,UW$ và, theo bổ đề 2, O, E là hai điểm liên hợp đẳng giác đối với tam giác MNP và (4). Từ (1), (2), (3) và (4), chú ý rằng phép đối xứng trục bảo toàn tỉ số kép, suy ra:

$$N(KPOE)=N(LMEO)=N(TVYO)=(TVY)$$
$$=(UZW)=P(UWZO)=P(LMEO)=P(KNOE).$$

Vậy K thuộc OE. Nói cách khác K thuộc đường thẳng Euler của tam giác ABC.

Nhận xét. 1) Bài toán này khó, chỉ có bốn bạn tham gia giải.

2) Xin nêu tên cả bốn bạn: **Hà Tĩnh:** *Trần Duy Hưng*, 10T2, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Nam:** *Nguyễn Trí Hiền*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Bình Định:** *Trần Ngọc Tuyên*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Phú Yên:** *Nguyễn Tấn Nguyên Chương*, 11T, THPT chuyên Lương Văn Chánh.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/561. *Hai điểm A, B nằm trên cùng một đường thẳng đi qua nguồn âm S và ở cùng một phía so với nguồn âm. Coi nguồn âm là đẳng hướng và môi trường không hấp thụ âm. Biết mức cường độ âm tại A là* L_A = 50 dB, *tại B là* L_B = 30 dB. *Cho C là một điểm trên đoạn AB mà* $CB=2CA$. *Tính mức cường độ âm tại C.*

Lời giải. Ta có:

$$L_A-L_B=10\lg\frac{I_A}{I_B}=10\lg\left(\frac{SB}{SA}\right)^2=20\text{ dB}$$
$$\Rightarrow SB=10SA;\ SC=4SA;$$
$$L_A-L_C=10\lg\left(\frac{SC}{SA}\right)^2=10\lg 16\approx 12\text{ dB}$$
$$\Rightarrow L_C\approx 38\text{dB}.$$

Nhận xét. Chúc mừng hai bạn đã có lời giải đúng cho đề ra kì này: *Phạm Xuân Khánh*, 12A2, THPT Tam Phước, Biên Hòa, **Đồng Nai**; *Lê Thị Hồng Nga*, 11 Hóa, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp**.

NGUYỄN XUÂN QUANG

Bài L2/561. *Đoạn mạch AB gồm biến trở, cuộn cảm thuần và tụ điện mắc nối tiếp. Đặt vào hai đầu đoạn mạch điện áp* $u=U\sqrt{2}\cos\omega t$ (V). *Khi* $R=R_0$ *thì công suất tiêu thụ trên đoạn mạch AB đạt cực đại bằng* P_m. *Khi* $R=R_1$ *hoặc* $R=R_2$ *thì công suất tiêu thụ trên đoạn mạch AB bằng nhau bằng* 120 W *và có hệ số công suất tương ứng là* $k_1=0{,}6$ *và* $k_2=0{,}8$. *Tính giá trị của* P_m.

Lời giải. Khi $R = R_0$ thì $R_0 = |Z_L - Z_C|$ và $\mathscr{P}_m = \dfrac{U^2}{2R_0}$. Khi $R = R_1$ hoặc khi $R = R_2$ thì công suất bằng nhau: R_1, R_2 là hai nghiệm của phương trình $R^2 - \dfrac{U^2}{\mathscr{P}}R + (Z_L - Z_C)^2 = 0$

$$\Rightarrow P = \frac{U^2}{R_1 + R_2}.$$

Suy ra $\dfrac{\mathscr{P}_m}{\mathscr{P}} = \dfrac{R_1 + R_2}{2R_0}$ (1). Mà $R_1R_2 = (Z_L - Z_C)^2$ nên hệ số công suất: $k = \dfrac{R}{Z} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{Z_L - Z_C}{R}\right)^2}}$

$$\Rightarrow k_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{R_0}{R_1}\right)^2}};\ k_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{R_0}{R_2}\right)^2}}\ (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{\mathscr{P}_m}{\mathscr{P}} = \frac{1}{2}\left(\frac{R_1}{R_0} + \frac{R_2}{R_0}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{k_1}{\sqrt{1 - k_1^2}} + \frac{k_2}{\sqrt{1 - k_2^2}}\right) = \frac{25}{24}$$

$\Rightarrow P_m = 125$ W.

Nhận xét. Chúc mừng các bạn đã có lời giải đúng cho đề ra kì này: *Lê Đình Khánh Duy*, 12 Lý, THPT chuyên Tiền Giang, **Tiền Giang**; *Phạm Xuân Khánh*, 12A2, THPT Tam Phước, Biên Hòa, **Đồng Nai**; *Trương Đình Phúc*, 11 Lý 2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

****

PROBLEMS . . . *(Tiếp theo trang 22)*

Problem T7/565. Solve the system of equations

$$\begin{cases} x^4 - y^4 = \dfrac{1562x - 1563y}{4xy} \\ x^4 + 14x^2y^2 + y^4 = \dfrac{1563x + 1562y}{x^2 + y^2} \end{cases}.$$

Problem T8/565. Given a right prism $ABC.A'B'C'$, with the base ABC is a right triangle at A. Let S be the midpoint of AA'. Prove that

$$(SBC) \perp (SB'C') \Leftrightarrow \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{4}{AA'^2}.$$

Problem T9/565. Let a, b, c be the lengths of the three sides of a triangle. Prove that

$$a^2b^2c^2 \geq \frac{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b)(b+c)(c+a)}{8}.$$

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/565. Find all prime numbers p such that p is a divisor of

$$1^{p-1} + 2^{p-1} + \ldots + 2012^{p-1}.$$

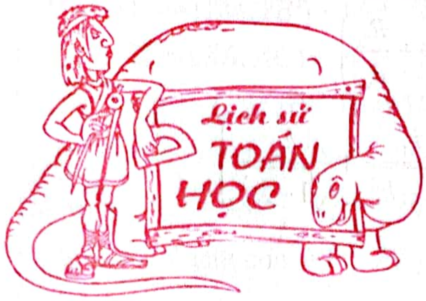
Problem T11/565. Whether or not there exists a polynomial $P(x)$ of degree 2024 with real coefficients satisfying the inequality

$$P^3(a) + P^3(b) + P^3(c) \geq 3P(a)P(b)P(c)$$

for all real numbers a, b, c such that $a + b + c = 0$ and the polynomial $P(x)$ can have 2024 different real roots?

Problem T12/565. Given a triangle ABC inscribed in a circle (O). The rotation with the center O and the angle of α, which can vary, turns A, B, C into D, E, F respectively. The circle $(D; DA)$ intersects AC, AB at A_c, A_b respectively; the circle $(E; EB)$ intersects BA, BC at B_a, B_c respectively; the circle $(F; FC)$ intersects CA, CB at C_a, C_b respectively. Prove that the center of the circumcircle of the triangle created by the intersection of the lines A_cA_b, B_aB_c, C_aC_b moves on a fixed circle.

DR. NGUYEN PHU HOANG LAN
(University of Education, VNU, Hanoi)



ARCHIMEDES
NHÀ TOÁN HỌC VĨ ĐẠI NHẤT CỦA TOÀN THẾ GIỚI CỔ ĐẠI

NGUYỄN THỦY THANH
(Trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Archimedes (287 - 212 tr.CN) thuộc vào số những thiên tài rất hiếm hoi mà những phát minh của họ đã chiếu rọi và vạch ra con đường phát triển cho nền khoa học thế giới qua hàng thế kỷ.

Archimedes (287 - 212 tr.CN)

Ông sinh ra và lớn lên ở thành phố Siracuse trên đảo Sicille là thuộc địa của Hy Lạp Cổ đại, nay thuộc Italia. Vào thời điểm đó ở Hy Lạp Cổ đại đã hình thành nên các trường phái toán học. Điều đó đã dẫn tới sự hình thành, ra đời và phát triển một nền toán học *suy diễn và quy nạp* cho đến tận ngày nay. Ở đây phương pháp suy diễn cần được hiểu là từ các chân lý đã biết sẽ rút ra các chân lý mới sao cho lôgic suy diễn đảm bảo tính đúng đắn của các kết quả mới.

Trong nền toán học đó, *Archimedes được xem là nhà toán học vĩ đại nhất thời cổ đại và là một trong những nhà toán học vĩ đại nhất mọi thời đại.*

I. MỘT PHÁT HIỆN BẤT NGỜ . . . .

Vào thế kỷ III tr.CN *Archimedes* đã gửi cho bạn ông là nhà bác học *Eratosthenes* ở thư viện Alexandria (Ai cập) một công trình có tên "*Phương pháp*" dưới dạng bức thư. Trong "Bức thư" đó ông thông báo một loạt kết quả toán học mới mà ông thu được nhờ *phương pháp nguyên tử* (bất khả phân!) để thế hệ sau tham khảo.

Đáng tiếc là "Bức thư" đó bị thất lạc hơn hai nghìn năm. Do đó không ai biết được gì về *Phương pháp* và *Kết quả* mà *Archimedes* đạt được.

Và, *một phát hiện bất ngờ* đã xảy ra ... "Bức thư" đó của *Archimedes* đã được Giáo sư người Đan Mạch là *Johan Ludvig Heiberg* (1854 - 1928) phát hiện ra vào năm 1906 gần 2200 năm sau tại thành phố Constantinople - tức là Istanbul (Thổ Nhĩ Kỳ) ngày nay.

Như vậy các nhà toán học thời kỳ XVII như *J. Kepler*, *G. Galilei*, *B. Cavalieri*, ... không hề được biết nội dung bức thư này.

Mặc dù vậy, *J. Kepler* đã đầu tiên phát hiện ra phương pháp của *Archimedes* và thậm chí còn mở rộng phạm vi áp dụng của nó với việc tính thêm được thể tích của 87 vật thể tròn xoay mới ...[(1)].

(1) Phichtengon, *Cơ sở Giải tích toán học*, Hà Nội, 1972 (tr.350)

Nghiên cứu "Bức thư" của *Archimedes* và sự phát triển toán học thế kỷ XVII người ta cho rằng *"người thầy thực sự của các nhà toán học thế kỷ XVII là Archimedes"*. [1] Cũng từ "Bức thư" này người ta mới nhận ra rằng *Archimedes* đã vượt trước thời đại mình quá xa ... Chẳng hạn, tại đây ông đã nói về "*sự phát minh ra phương pháp tổng tích phân và cái gọi là phương pháp vi phân*". [2]

II. CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN CỦA ARCHIMEDES.

Theo *Archimedes*, gần như trong mọi lĩnh vực toán học (đặc biệt là trong hình học) bài toán xấp xỉ các đối tượng phức tạp bằng các đối tượng đơn giản hơn là có vai trò gợi mở hết sức lớn ... Chẳng hạn, khi tính các đại lượng hình học ông đã áp dụng nguyên lý của *Democritos* về khả năng xấp xỉ một hình cho trước bởi một hình xấp xỉ đơn giản hơn với độ chính xác tùy ý.

Từ đó xuất hiện cách xấp xỉ hình (vật thể) bởi *hình hay vật thể bậc thang nội và ngoại tiếp* do Archimedes đề ra để tính các đại lượng hình học.[3] Theo thuyết nguyên tử của Democritos, việc tính các đại lượng hình học của các hình bậc thang này được quy về tính tổng diện tích - thể tích mọi "nguyên tử" tạo nên hình bậc thang đó, ở đây các đại lượng hình học diện tích - thể tích đối với nguyên tử xem như đã biết. Cũng từ đó hình thành nên các *phương pháp tích phân* (*hay phương pháp tổng trên và tổng dưới*) của *Archimedes* đi trước thời đại hơn hai nghìn năm.

Nội dung của phương pháp đó là như sau:

Giả sử cần tính đại lượng V của một hình nào đó (có thể là thể tích hoặc diện tích). *Archimedes* đã nội tiếp trong hình này và ngoại tiếp ngoài nó các hình bậc thang lập nên từ các phần tử sơ cấp mà đại lượng của chúng có thể tính được.

Lấy tổng mọi phần tử này ông thu được thể tích hay diện tích tương ứng của hình ngoại tiếp S^* (tổng trên) và hình nội tiếp S_* (tổng dưới). Khi đó $S_* < V < S^*$. Tiếp đó, *Archimedes* đã xác lập rằng hiệu $S^* - S_*$ có thể làm cho bé tùy ý khi số các phần tử sơ cấp tăng lên còn kích thước của chúng thì giảm xuống. Từ đó ông tìm được giá trị chung như là giới hạn của các tổng S_* và S^*.

Mặc dù ông chưa phân biệt một cách rạch ròi nhưng trong mọi trường hợp ông thu được rằng các tổng dưới đơn điệu tăng còn các tổng trên thì đơn điệu giảm.

Đây chính là phương pháp chung để ông tính được diện tích các hình cong và thể tích của các vật thể giới hạn bởi mặt cong.

III. PHÁT MINH RA SỐ π

Việc tính được tỷ số giữa độ dài đường tròn với đường kính của nó có ý nghĩa cực kỳ to lớn đối với sự phát triển của toán học.

Trong công trình *"Về đo đạc hình tròn" Archimedes* đã công bố giá trị xấp xỉ nổi tiếng mà ông tính được đối với số π mà lịch sử toán học (LSTH) gọi là "*số Archimedes*" là $3\frac{1}{7}$ và thuật toán học mà ông sử dụng được gọi là "*thuật toán Archimedes*". Kết quả là ông đã ước lượng được độ chính xác của giá trị xấp xỉ đó.

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Để chứng minh điều đó ông đã dựng các đa giác đều nội tiếp và ngoại tiếp 96 cạnh và tính độ dài của chúng. Tiếp đó ông sử dụng phương pháp ước lượng tổng trên và tổng dưới để tìm giới hạn. Cũng trong công trình này ông đã chứng minh rằng diện tích hình tròn bán kính R là bằng πR^2.

(1) Rupnhikov, *Lịch sử toán học*, T1, tr.75.

(2) Nguyễn Thủy Thanh, Tạp chí TH&TT, N°550, tr. 15 – 18

Nhờ phát minh ra số π, *Archimedes* đã chuyển sang áp dụng để tính một số đại lượng hình học. Đặc biệt, trong công trình *"Về hình cầu và hình trụ"* ông tìm được biểu thức tính diện tích mặt cầu (dưới dạng: diện tích mặt cầu bằng bốn lần diện tích hình tròn lớn), tức là bằng $4\pi R^2$. Ông là người đầu tiên chứng minh rằng thể tích hình cầu bán kính R bằng hai phần ba thể tích hình trụ ngoại tiếp hình cầu đó, tức là bằng $\frac{4}{3}\pi R^3$. Ông rất tự hào về thành tựu này của mình bởi vì trước ông không ai có thể làm được. Ông phấn chấn với phát minh đặc biệt này đến mức đã bày tỏ với bạn bè mình một di nguyện: khi ông mất đi, hãy khắc trên tấm bia mộ của ông một hình cầu nội tiếp trong một hình trụ!

Năm 75 tr.CN, tức là 135 năm sau khi ông mất, nhà hùng biện người La Mã là *Cicero* (1) đã tìm kiếm và phát hiện ra ngôi mộ của ông đã hoang tàn và bị che phủ rậm rạp ...

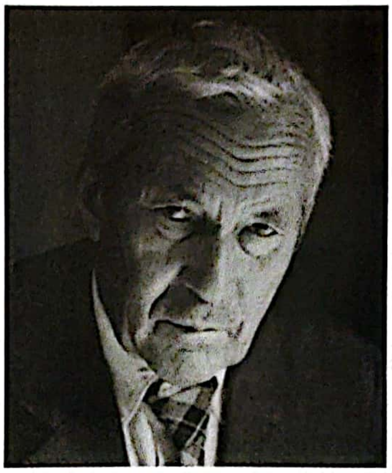
Ngài *Cicero* đã cho dọn dẹp và nhìn thấy hình khắc trên bia mộ mà *Archimedes* đã trối trăng lại cùng một số câu thơ mà người đời tặng ông ...

IV. ÁP DỤNG PHƯƠNG PHÁP TỔNG TÍCH PHÂN ĐỂ TÍNH ĐẠI LƯỢNG HÌNH HỌC

Trong các công trình "*Về hình cầu và hình trụ*", "*Về các đường xoắn ốc*" và "*Về các khối nêm và phỏng cầu*" ("Về các canoid và spheroid") *Archimedes* đã áp dụng phát minh của mình để tính các đại lượng hình học.

Trong Từ điển bách khoa Toán học, Viện sỹ Viện Hàn Lâm khoa học Liên Xô *A.N. Kolmogorov* (2) viết:

"Công lao cơ bản của Archimedes trong hình học là ông đã xác định được diện tích và thể tích của nhiều loại hình khác nhau như: diện tích viên phân parabol, diện tích mặt cầu, thể tích hình cầu và chỏm cầu, chỏm paraboloid, ... Trong nhiều trường hợp, các tính toán của Archimedes là tương đương với việc áp dụng các tổng tích phân Darboux và tìm giới hạn của chúng như ngày nay".



A.N. Kolmogorov (1903 – 1987)

Chẳng hạn, nhờ phương pháp tích phân của mình (lập hình bậc thang xấp xỉ, lập tổng trên và tổng dưới) *Archimedes* đã tính được thể tích của các hình như: chỏm cầu, chỏm ellipxoid, chỏm paraboloid và chỏm hypecbolid hai tầng tròn xoay. Ông cũng đã chứng minh diện tích của một ellip bằng πab, trong đó a và b là các bán trục.

Trong khi tìm cách phát triển môn hình học, *Archimedes* cũng đồng thời tạo nên được điểm mốc quan trọng nhất trong Lịch sử khoa học là sự ra đời của môn Giải tích toán học - một lý thuyết mà thiếu nó khó có thể hình dung việc nghiên cứu sự phát triển của giới tự nhiên và kỹ thuật sẽ diễn ra thế nào ...

V. CÁC PHƯƠNG PHÁP VI PHÂN CỦA ARCHIMEDES.

Các nhà toán học cổ Hy Lạp đã từng nghiên cứu và giải quyết những bài toán về tiếp tuyến với

(1). M.T. Cicero (106 - 43 tr.CN) là nhà hùng biện và nhà triết học La Mã.

(2) *Từ điển Bách khoa Toán học*, Mosc. - 1988, tr.15 (tiếng Nga).

đường cong và tìm giá trị cực đại và cực tiểu của một đại lượng biến thiên. Bấy giờ, tiếp tuyến với đường cong được họ định nghĩa như là *đường thẳng gặp đường cong* ấy nhưng không cắt nó. Rõ ràng là định nghĩa này không giống định nghĩa ngày nay đang dùng. Chỉ có *Archimedes* là sử dụng cách thức tương tự như phép tính vi phân đang sử dụng ngày nay. Đó là khi ông trình bày cách xác định tiếp tuyến với đường xoắn mang tên ông tại bất cứ điểm nào của nó. Ở đây đường xoắn là đường cong được vạch nên bởi một điểm M đồng thời chuyển động đều theo một đường thẳng trong khi đường thẳng này quay đều xung quanh một điểm O thuộc đường thẳng đó và ở thời điểm đầu của chuyển động điểm M trùng với tâm quay O của đường thẳng.

Trong tác phẩm "*Về các đường xoắn*" của mình ông đã trình bày một cách đầy đủ phép dựng tiếp tuyến với đường xoắn mang tên ông [(1)].

Bên cạnh đó, trong một công trình của mình ông đã khảo sát bài toán cực trị và khẳng định rằng cực trị của biểu thức $W = x^2(a - x)$ đạt được khi $x = \dfrac{2a}{3}$ và đó là cực đại $W_{max} = \dfrac{4a^3}{27}$.

Điều đặc biệt là đối với bài toán này ông đã giải quyết nhờ phương pháp đưa vấn đề xác định cực trị về bài toán tiếp tuyến [(2)].

Liên quan đến việc giải bài toán tiếp tuyến *Archimedes* còn đưa vào khảo sát một công cụ gọi là "*tam giác vi phân*" mà sau này *Leibniz* gọi là "tam giác đặc trưng". Đó là tam giác vuông tạo thành bởi hai cạnh góc vuông là các số gia tọa độ Δx và Δy giữa hai giao điểm của đường cong và cát tuyến, còn "cạnh huyền" là số gia độ dài cung đường cong giữa hai giao điểm của cát tuyến với đường cong và $\Delta S^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$. Về sau, *Leibniz* và các nhà toán học thế kỷ XVI - XVII đã sử dụng tam giác vi phân này làm một điểm xuất phát khi xây dựng phép tính vi phân.

W.V. Leibniz (1646 - 1716)

VI. PHÉP TÍNH CÁC VÔ CÙNG BÉ

Như vậy các phát minh lớn nhất của *Archimedes* trong toán học đều gắn liền với các phương pháp mà ông đã sáng tạo ra.

Các phương pháp đó là:

(i) Phương pháp vét kiệt;

(ii) Các phương pháp tổng tích phân;

(iii) Các phương pháp vi phân.

Các phương pháp này lại gắn liền với bài toán xác định diện tích, thể tích, tiếp tuyến và cực trị. Để giải quyết những bài toán này ông đã sáng tạo ra những phương pháp cơ bản mà chúng ta sử dụng cho đến tận bây giờ: phương pháp các tổng tích phân trên và dưới và phương pháp đưa bài toán học cực trị về xác định tiếp tuyến ...

Những tiến bộ có tính nguyên tắc tiếp đến theo đường hướng này ắt phải dẫn tới đích là xây dựng phép tính các vô cùng bé (PTVCB). Lịch sử toán học chứng tỏ rằng chỉ sau khi *Viète - Descartes xây dựng Đại số chữ và Descartes -*

---

(1) A.P. Iuskevich, *Lịch sử toán học từ cổ đại đến đầu thế kỷ XIX*, Nauka - Mosc., 1970, tr. 126 - 127.

(2) K.A. Rưpnhikov, *Lịch sử toán học*, Tập 1, Hà Nội - 1967, tr. 83 - 85.

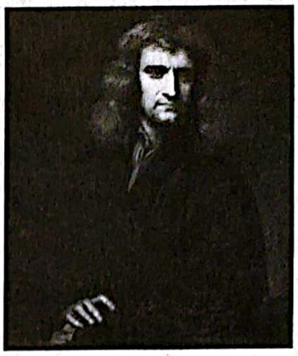
Fermat xây dựng hình học giải tích cùng với sự phát triển của những phần toán học khác PTVCB mới đủ điều kiện để ra đời. *Và nó đã ra đời* !

F. Viète (1540 – 1603)

Thắng lợi hết sức to lớn này có được là nhờ những khối óc và nhiệt huyết của cả một thế hệ nhà toán học lừng danh thế kỷ XVI - XVII bắt đầu từ *Kepler* và *Galilei* và kết thúc với *Newton - Leibniz*.

J. Kepler (1571 – 1630)

G. Galilei (1564 – 1642)



I. Newton (1643 – 1727)

Tất cả các nhà toán học này đều ít nhiều xuất phát từ các công trình của *Archimedes* bằng cách khái quát hóa hoặc làm mạnh các phương pháp của ông.

Khi đánh giá ý nghĩa của các công trình của *Archimedes* đối với *phép tính mới*, nhà toán học Đức *Leibniz* viết:

"*Khi đọc một cách kỹ càng tác phẩm của Archimedes bạn sẽ hoàn toàn không còn chút kinh ngạc nào đối với những phát minh mới nhất của các nhà hình học*". [1]

Điều đó cũng có nghĩa rằng trong "*Thắng lợi tối cao của trí óc con người như sự phát minh ra Phép tính các đại lượng vô cùng bé* (*PTVCB*) *vào nửa cuối thế kỷ XVII*" [2] đã có sự đóng góp to lớn của *Archimedes* ...

VII. TIÊN ĐỀ ARCHIMEDES .

Đầu tiên, tiên đề Archimedes được phát biểu đối với các đoạn thẳng với một nội dung như sau.

Nếu a và b là hai đoạn thẳng bất kỳ trên đường thẳng thì bằng cách đặt liên tiếp đoạn bé nhất trong hai đoạn đó với chính nó đủ một số lần bao giờ cũng có thể thu được một đoạn thẳng phủ hết đoạn lớn nhất.

Tiên đề Archimedes có thể phát biểu tương tự đối với đại lượng diện tích, thể tích, các số dương ... Nói chung, một đại lượng cho trước thỏa mãn các điều kiện của tiên đề Archimedes

(1) A. P. Iuskevich, Sách đã dẫn, tr. 129.

(2) C. Mac và Ph. Ang-ghen, T.20, tr. 768, 1994.

nếu đối với hai giá trị bất kỳ A, B của nó mà $A < B$ thì luôn luôn tìm được số nguyên m sao cho $Am > B$.

Tiên đề Archimedes đã được *Archimedes* phát biểu rành mạch vào thế kỷ thứ III tr.CN trong tác phẩm "*Hình cầu và hình trụ*" của ông. Ý nghĩa của tiên đề này được sáng tỏ rõ ràng vào thế kỷ thứ XIX. Ngày nay nó trở thành *tiên đề thứ tự* trong Lý thuyết số thực hiện đại.

Đối với các số dương a và b ($a < b$) thì luôn luôn có thể cộng a với chính nó đủ một số lần sao cho tổng thu được có tính chất

$$\underbrace{a + a + ... + a}_{m \text{ lần}} = a \times m > b.$$

Nếu áp dụng các tính chất quen thuộc của số hữu tỷ thì điều đó tương đương với bất đẳng thức $n > \frac{b}{a}$. Nếu ký hiệu thương $\frac{b}{a}$ bởi c thì ta thu được dạng đơn giản của tiên đề Archimedes thường được trình bày trong các giáo trình Giải tích toán học: *Với mọi số* $c > 0$, *tồn tại số tự nhiên* n *sao cho* $n > c$.

Cũng từ đây ông kết luận rằng dãy các số tự nhiên 1, 2, 3, ... là vô hạn.

VIII. CÁC CỐ THỂ ARCHIMEDES

Cách đây hơn hai nghìn năm trong khi nghiên cứu cấu trúc của vật chất nhà triết học vĩ đại nhất thời cổ đại *Platon* (427 - 347 tr.CN) đã khẳng định rằng: *chỉ tồn tại năm khối đa diện lồi đều*. Người ta đặt tên các đa diện này là các *đa diện Platon*. Đó là các đa diện lồi đều: tứ diện đều, đa diện sáu mặt đều hay khối lập phương (lục diện đều), đa diện tám mặt đều (bát diện đều), đa diện mười hai mặt đều (thập nhị diện đều) và đa diện hai mươi mặt đều (nhị thập diện đều).

Tiếp đó, trong một công trình phát minh của mình *Archimedes* đã chứng minh rằng chỉ tồn tại 13 (và chỉ có 13) cố thể gọi là 13 *khối đa diện lồi bán đều* mà LSKH gọi là các *cố thể Archimedes*. Ở đây, *khối đa diện bán đều là khối đa diện có các cạnh bằng nhau, số các mặt của khối tại một đỉnh nhiều hơn hai loại mặt đa giác đều được tổ chức theo một quy luật nhất định.*

Archimedes đã chứng tỏ rằng trong số 13 khối đa diện bán đều có một số khối có thể suy ra từ đa diện Platon bằng cách cắt cụt các đỉnh của nó một cách thích hợp. Chẳng hạn, khi đồng loạt cắt cụt các đỉnh của tứ diện Platon một cách hợp lý ta thu được đa diện bán đều gồm bốn mặt lục giác đều và bốn mặt tam giác đều. Hình lập phương cắt cụt các đỉnh một cách thích hợp cho ta khối đa diện bán đều với sáu mặt là lục giác đều và tám mặt còn lại là những tam giác đều. Nếu cắt sâu hơn các đỉnh của hình lập phương thì thu được một khối đa diện bán đều gồm sáu mặt là hình vuông và tám mặt là tam giác đều ... Sử dụng công cụ tìm kiếm bạn đọc sẽ nhìn thấy các biểu tượng lung linh của các cố thể Archimedes ...

Bên cạnh những thành tựu vĩ đại nhất trong toán học thời Cổ đại, *Archimedes* cũng đã có những phát minh chói lọi và đáng ghi nhớ trong Cơ học, Thủy tĩnh học và Thiên văn học.

Trong giáo trình PTVCB của mình, nhà toán học Hoa Kỳ là *Georg F. Simmons* (1925 - 2019) viết rằng:

"*Trong tất cả những thành công của con người về toán học và vật lý trên mọi lục địa và trong mọi nền văn minh từ thuở sơ khai cho đến thế kỷ XVII ở Phương Tây, thành tựu của Archimedes được coi là lớn nhất. Ông chính là một nền văn minh vĩ đại nhất*".(1)

Những thành tựu của nền văn minh đó đã đi vào sách giáo khoa của mọi thế hệ học trò của mọi thời đại và mọi dân tộc ... Nền văn minh đó đã và đang hiển hiện trong quá khứ, hiện tại và sẽ mãi mãi rọi sáng cho cuộc sống tương lai của nền khoa học nhân loại.

---

(1) George F. Simmons, *Giải tích nhiều biến số*, tr. 277, Trường ĐH Thủy lợi, Hà Nội - 2007.

PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA KHÔNG CÓ NGHIỆM HỮU TỶ VÀ CÁC ỨNG DỤNG

LÊ LÊ
(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Ninh Thuận)

Bài viết này gồm hai phần: Phần 1 đưa ra sáu kết quả của phương trình bậc ba không có nghiệm hữu tỷ; phần 2 nêu các ứng dụng của phương trình bậc ba trong các bài toán bất đẳng thức và phương trình.

PHẦN 1. MỘT SỐ KẾT QUẢ CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA KHÔNG CÓ NGHIỆM HỮU TỶ

Không mất tổng quát, ta có thể giả sử phương trình bậc ba có dạng $x^3+ax^2+bx+c=0$ (1).

1.1. Sử dụng tịnh tiến biến $x=t+\alpha$. Khi đó (1) trở thành $(t+\alpha)^3+a(t+\alpha)^2+b(t+\alpha)+c=0$ hay

$$t^3+3t^2\alpha+3t\alpha^2+\alpha^3+at^2+2at\alpha+a\alpha^2+bt+b\alpha+c=0.$$

Để mất số hạng bậc hai của biến, ta chọn $\alpha=-\frac{a}{3}$.

Kết quả 1.

$$x^3+ax^2+bx+c=0\ (1)\xrightarrow{x=t-\frac{a}{3}}t^3+pt+q=0\ (2).$$

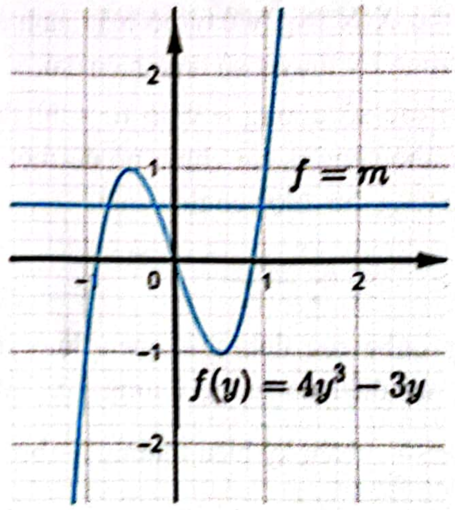
1.2. Sử dụng phép vị tự biến $t=\beta y$.

Khi $\begin{cases}t^3+pt+q=0 & (2)\\ p<0\end{cases}$, đặt $t=\beta y$ thì (2) trở thành $(\beta y)^3+p\beta y+q=0$. Để lượng giác hoá, ta chọn $\frac{\beta^3}{4}=\frac{p\beta}{-3}$ hay $\beta=2\sqrt{\frac{-p}{3}}$.

Kết quả 2.

$$\begin{cases}t^3+pt+q=0\ (2)\\ p<0\end{cases}\xrightarrow{t=2\sqrt{\frac{-p}{3}}y}4y^3-3y=m\ (3).$$

1.3. Khi $\begin{cases}4y^3-3y=m & (3)\\ |m|<1\end{cases}$ thì (3) có 3 nghiệm phân biệt thuộc $(-1;1)$.



Đặt $y=\cos\alpha$, (3) trở thành

$$4\cos^3\alpha-3\cos\alpha=m$$
$$\Leftrightarrow\cos3\alpha=\cos\beta.$$

Do phương trình có đúng 3 nghiệm phân biệt, ta chọn $y_1=\cos\frac{\beta}{3}, y_{2,3}=\cos\frac{\beta\pm2\pi}{3}$.

Kết quả 3.

$$\begin{cases}4y^3-3y=m\ (3)\\ |m|<1\end{cases}\xrightarrow{y=\cos\alpha}y_1=\cos\frac{\beta}{3}, y_{2,3}=\cos\frac{\beta\pm2\pi}{3}$$

Nhận xét. Phương trình (3) có 3 nghiệm thực khi và chỉ khi $|m|\le1$.

1.4. Khi $\begin{cases}4y^3-3y=m & (3)\\ |m|>1\end{cases}$ thì (3) có nghiệm duy nhất nằm ngoài đoạn $[-1;1]$. (Không xét trường hợp $|m|=1$ vì khi đó (3) có nghiệm hữu tỷ).

Đặt $y=\frac{1}{2}\left(u+\frac{1}{u}\right)$, (3) trở thành

$$\left(u+\frac{1}{u}\right)^3-3\left(u+\frac{1}{u}\right)=2m$$

hay
$$(u^3)^2-2mu^3+1=0.$$

Do $\Delta' = m^2 - 1 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$u_1 = \sqrt[3]{m - \sqrt{m^2-1}}, u_2 = \sqrt[3]{m + \sqrt{m^2-1}}.$$

Khi đó với chú ý $u_1u_2 = 1$, (3) có nghiệm duy nhất vì $y_1 = \frac{1}{2}\left(u_1 + \frac{1}{u_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u_2} + u_2\right) = y_2$.

Kết quả 4.

$$\begin{cases} 4y^3 - 3y = m \ \ (3) \\ |m| > 1 \end{cases} \xrightarrow{y = \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right)}$$

$$y = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{m - \sqrt{m^2-1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{m - \sqrt{m^2-1}}}\right).$$

1.5. Khi $\begin{cases} t^3 + pt + q = 0 \ \ (2) \\ p > 0 \end{cases}$ thì vế trái của phương trình (2) là biểu thức xác định hàm bậc ba đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên (2) có nghiệm duy nhất. Tương tự phần 1.2 ta có

Kết quả 5.

$$\begin{cases} t^3 + pt + q = 0 \ \ (2) \\ p > 0 \end{cases} \xrightarrow{t = 2\sqrt{\frac{p}{3}}y} 4y^3 + 3y = m \ \ (4).$$

1.6. Tương tự 1.4, đặt $y = \frac{1}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right)$, (3) trở thành: $\left(u - \frac{1}{u}\right)^3 + 3\left(u - \frac{1}{u}\right) = 2m$

hay $\quad (u^3)^2 - 2mu^3 - 1 = 0.$

Do $\Delta' = m^2 + 1 > 0$ phương trình có hai nghiệm phân biệt $u_1 = \sqrt[3]{m - \sqrt{m^2+1}}, u_2 = \sqrt[3]{m + \sqrt{m^2+1}}$.

Khi đó với chú ý $u_1u_2 = -1$, (4) có nghiệm duy nhất vì $y_1 = \frac{1}{2}\left(u_1 - \frac{1}{u_1}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{u_2} + u_2\right) = y_2$.

Kết quả 6.

$$4y^3 + 3y = m \ \ (4) \xrightarrow{y = \frac{1}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right)}$$

$$y = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{m - \sqrt{m^2+1}} - \frac{1}{\sqrt[3]{m - \sqrt{m^2+1}}}\right).$$

PHẦN 2. CÁC ỨNG DỤNG

Bài 1. *Giải phương trình*

$$8x^3 + 24x^2 + 6x - 10 - 3\sqrt{6} = 0.$$

Lời giải. Phương trình được viết lại

$$x^3 + 3x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{10 + 3\sqrt{6}}{8} = 0.$$

Đặt $x = y - 1 \Rightarrow y^3 - \frac{9}{4}y - \frac{3\sqrt{6}}{8} = 0.$

Đặt $y = 2\sqrt{\frac{9}{4.3}}t = \sqrt{3}t \Rightarrow 4t^3 - 3t = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Đặt $t = \cos\alpha \Rightarrow \cos 3\alpha = \cos\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow t_1 = \cos\frac{\pi}{12}, t_2 = \cos\frac{3\pi}{4}, t_3 = \cos\frac{7\pi}{12}.$

Vậy phương trình có các nghiệm:

$$x_1 = \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{12} - 1, x_2 = \sqrt{3}\cos\frac{3\pi}{4} - 1,$$

$$x_3 = \sqrt{3}\cos\frac{7\pi}{12} - 1.$$

Bài 2. *Giải phương trình*

$$x^3 - 3x^2 + 4x + 11 = 0.$$

Lời giải. Đặt $x = t + 1 \Rightarrow t^3 + t + 13 = 0.$

Đặt $t = 2\sqrt{\frac{1}{3}}y \Rightarrow \frac{8}{3\sqrt{3}}y^3 + \frac{2}{\sqrt{3}}y + 13 = 0$

$$\Leftrightarrow 8y^3 + 6y + 39\sqrt{3} = 0.$$

Đặt $y = \frac{1}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right) \Rightarrow u^3 - \frac{1}{u^3} + 39\sqrt{3} = 0$

$\Leftrightarrow u^6 + 39\sqrt{3}u^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow u^3 = \frac{-39\sqrt{3} + \sqrt{4567}}{2}.$

Vậy phương trình có nghiệm:

$$x = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\sqrt[3]{\frac{-39\sqrt{3} + \sqrt{4567}}{2}} - \sqrt[3]{\frac{2}{-39\sqrt{3} + \sqrt{4567}}}\right].$$

Bài 3. (TH&TT số 467) *Cho ba số thực x, y, z thoả mãn các điều kiện* $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ xy + yz + zx = -9 \end{cases}$.

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $f = xyz$.

Lời giải.

Ta có x, y, z là 3 nghiệm thực của phương trình:

$$t^3 - 3t^2 - 9t - f = 0.$$

Đặt $t = u + 1$, ta được:

$$u^3 - 12u - f - 11 = 0.$$

Đặt $u = 4v$, phương trình trở thành:

$$4v^3 - 3v = \frac{f+11}{16}.$$

Phương trình có 3 nghiệm thực khi:

$$\left|\frac{f+11}{16}\right| \le 1 \text{ hay } -27 \le f \le 5.$$

Do đó: $\min f = -27$ khi x, y, z là 3 nghiệm thực phương trình $t^3 - 3t^2 - 9t + 27 = 0$ hay $(x;y;z) = (-3;3;3)$ và các hoán vị.

$\max f = 5$ khi x, y, z là 3 nghiệm thực phương trình $t^3 - 3t^2 - 9t - 5 = 0$ hay $(x;y;z) = (-1;-1;5)$ và các hoán vị.

(Bài toán này được giải trong TH&TT số 471. Có hai bạn đọc đưa ra cách giải dựa trên công thức Cardano, không được học trong chương trình trung học phổ thông).

Bài 4. *Cho ba số thực x, y, z thoả mãn các điều kiện $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=2 \end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^3 + y^3 + z^3$.*

Lời giải. Ta có:

$$xy + yz + zx = \frac{(x+y+z)^2 - (x^2+y^2+z^2)}{2} = -1;$$

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) = 0.$$

Cho nên $P = 3xyz = 3f$ với $f = xyz$.

Do $\begin{cases} x+y+z=0 \\ xy+yz+zx=-1 \\ xyz=f \end{cases}$ nên x, y, z là 3 nghiệm thực của phương trình $t^3 - t - f = 0$.

Đặt $t = \frac{2\sqrt{3}}{3}u$, ta được $4u^3 - 3u = \frac{3\sqrt{3}}{2}f$.

Phương trình trên có 3 nghiệm thực khi

$$\left|\frac{3\sqrt{3}f}{2}\right| \le 1 \text{ hay } \frac{-2\sqrt{3}}{9} \le f \le \frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

Do đó: $\min P = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ khi u_1, u_2, u_3 là 3 nghiệm thực phương trình: $4u^3 - 3u = -1$ hay $(u_1;u_2;u_3) = \left(\cos\frac{\pi}{3};\cos\pi;\cos\frac{5\pi}{3}\right)$ và các hoán vị. Tức là $(x;y;z) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{-2\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ và các hoán vị; $\max P = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ khi u_1, u_2, u_3 là 3 nghiệm thực phương trình $4u^3 - 3u = 1$ hay $(u_1;u_2;u_3) = \left(\cos 0;\cos\frac{2\pi}{3};\cos\frac{4\pi}{3}\right)$ và các hoán vị. Tức là $(x;y;z) = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3};\frac{-\sqrt{3}}{3};\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)$ và các hoán vị.

Bài 5. (TH&TT số 417) *Cho các số thực x, y, z thoả mãn các điều kiện $\begin{cases} x,y,z \in \mathbb{R} \\ x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$. Chứng minh $P = x^2y^2z^2 \le \frac{1}{54}$.*

Lời giải. Do $\begin{cases} x+y+z=0 \\ xy+yz+zx=-\frac{1}{2} \\ xyz=f \end{cases}$ nên x, y, z là 3 nghiệm thực của phương trình: $t^3 - \frac{1}{2}t - f = 0$.

Đặt $t = \frac{\sqrt{6}}{3}u$, ta được: $4u^3 - 3u = 3\sqrt{6}f$.

Phương trình có 3 nghiệm thực khi

$$\left|3\sqrt{6}f\right| \le 1 \text{ hay } P = x^2y^2z^2 = f^2 \le \frac{1}{54}.$$

Bài 6. (THTT số 464) *Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=8$ và $ab+bc+ac=-4$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $P=\dfrac{a^3+b^3+c^3}{a^4+b^4+c^4}$.

Lời giải. Ta có:

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=0;$$

$$a^4+b^4+c^4=\left(a^2+b^2+c^2\right)^2-2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right).$$

Mà

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)$$
$$=16$$

$$\Rightarrow a^4+b^4+c^4=32;$$

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)$$
$$=0$$

$$\Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc.$$

Ta đưa về bài toán: *Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a+b+c=0$ và $ab+bc+ac=-4$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P=\frac{3}{32}abc.$$

Đặt $abc=f$ thì a,b,c là 3 nghiệm thực của phương trình $t^3-4t-f=0$.

Đặt $t=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}u$, ta được: $4u^3-3u=\dfrac{3\sqrt{3}}{16}f$.

Phương trình có 3 nghiệm thực khi

$$\left|\frac{3\sqrt{3}f}{16}\right|\le 1 \text{ hay } \frac{-16\sqrt{3}}{9}\le f\le\frac{16\sqrt{3}}{9}.$$

Do đó:

$\min P=-\dfrac{\sqrt{3}}{6}\Leftrightarrow f=-\dfrac{16\sqrt{3}}{9}$ khi khi u_1,u_2,u_3 là 3 nghiệm thực phương trình $4u^3-3u=-1$ hay $(u_1;u_2;u_3)=\left(\cos\dfrac{\pi}{3};\cos\pi;\cos\dfrac{5\pi}{3}\right)$ và các hoán vị, tức là $(a;b;c)=\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3};\dfrac{-4\sqrt{3}}{3};\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ và các hoán vị.

$\max P=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ khi u_1,u_2,u_3 là 3 nghiệm thực phương trình $4u^3-3u=1$ hay $(u_1;u_2;u_3)=\left(\cos 0;\cos\dfrac{2\pi}{3};\cos\dfrac{4\pi}{3}\right)$ và các hoán vị. Tức là $(a;b;c)=\left(\dfrac{4\sqrt{3}}{3};\dfrac{-2\sqrt{3}}{3};\dfrac{-2\sqrt{3}}{3}\right)$ và các hoán vị.

Bài 7. *Giải phương trình* $8x^3-4x-1=\sqrt[3]{6x+1}$.

Lời giải. Phương trình được viết lại

$$(2x)^3+2x=\left(\sqrt[3]{6x+1}\right)^3+\sqrt[3]{6x+1}.$$

Sử dụng hàm $f(t)=t^3+t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên ta có: $\sqrt[3]{6x+1}=2x\Leftrightarrow 4x^3-3x=\dfrac{1}{2}$.

Đặt $x=\cos\alpha$, phương trình trở thành:

$$\cos 3\alpha=\cos\frac{\pi}{3}.$$

Do đó phương trình có 3 nghiệm:

$$x_1=\cos\frac{\pi}{9},x_2=\cos\frac{5\pi}{9},x_3=\cos\frac{7\pi}{9}.$$

Bài 8. *Cho số thực x thỏa mãn*

$$\left(3+2\sqrt{2}\right)^x=\left(\sqrt{2}-1\right)^x+3.$$

Chứng minh $\left(\sqrt{2}+1\right)^x=2\cos\dfrac{\pi}{9}$.

Lời giải. Ta có:

$$\left(3+2\sqrt{2}\right)^x=\left(\sqrt{2}-1\right)^x+3$$
$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{2}+1\right)^{3x}-3\left(\sqrt{2}+1\right)^x-1=0.$$

Đặt $t=\left(\sqrt{2}+1\right)^x>0\Rightarrow t^3-3t-1=0$.

Đặt $t=2u\Rightarrow 4u^3-3u=\dfrac{1}{2}$

$$\Rightarrow u_1=\cos\frac{\pi}{9},u_2=\cos\frac{5\pi}{9}<0,u_3=\cos\frac{7\pi}{9}<0.$$

Vậy $\left(\sqrt{2}+1\right)^x=2\cos\dfrac{\pi}{9}$.

Bài 9. *Giải phương trình*

$$\left(8\sin^3 x+1\right)^3-162\sin x+27=0.$$

Lời giải. Phương trình được viết lại

$$8\sin^3 x+1=\sqrt[3]{162\sin x-27}$$

$$\Leftrightarrow (6\sin x)^3+27.6\sin x=(\sqrt[3]{162\sin x-27})^3+27\sqrt[3]{162\sin x-27}$$

$$\Leftrightarrow 6\sin x=\sqrt[3]{162\sin x-27}$$

$$\Leftrightarrow 4(\sin x)^3-3\sin x=-\frac{1}{2}.$$

(Tính toán chi tiết xin dành cho bạn đọc).

Dùng kết quả trên và các kết quả tương tự, ta giải được các bài sau:

BÀI TẬP

Bài 1. Giải các phương trình :

1) $x^3-3x^2+4x+11=0$ 2) $x^3+3x^2+2x-1=0$

3) $x^3-x^2-2x+1=0$ 4) $x^3+6x+4=0$

5) $4x^3-3x=3$ 6) $x^3+2x^2+3x+1=0$

7) $2x^3+5x^2+4x+2=0$ 8) $x^3-5x^2+4x+1=0$

9) $8x^3+24x^2+6x-10-3\sqrt{6}=0$

10) $x^3+6x^2+8x+9=0$

11) $8x^3-6x-1=0$

12) $x^3-3\sqrt{3}x^2-3x+\sqrt{3}=0$

13) $x^3+6x^2+10x+13=2\sqrt[3]{4x-1}$

14) $8x^3+12x^2+7x+5=2\sqrt[3]{3x-2}$

15) $162x+27\sqrt{3}=\left(8x^3-\sqrt{3}\right)^3$

16) $\left(x^3+9x-45\right)^3+81\left(x^3+9x-45\right)=1215+81x$

17) $x^3+1=3\sqrt[3]{3x-1}$

18) $\left(8\sin^3 x+1\right)^3-162\sin x+27=0$

19) $\left(4x^3-x+3\right)^3=x^3+\frac{3}{2}$

20) $\sqrt[3]{x+3}=x^3-3$

21) $\sqrt[3]{x-9}=x^3-9x^2+27x-21$

22) $\left(4x^3-x+3\right)^3-x^3=\frac{3}{2}$

23) $x^3-2x+7=\sqrt[3]{3x^2+6x-5}$

24) $3x^3-6x^2-3x-17=3\sqrt[3]{9\left(-3x^2+21x+5\right)}.$

Bài 2. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn

$$x+y+z=4, xy+yz+zx=5.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P=(x^3+y^3+z^3)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right).$

Bài 3. Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=6$ và $ab+bc+ac=-3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=a^6+b^6+c^6$.

Bài 4. Cho a, b, c là 3 số thực thoả mãn

$$a+b+c=0, a^2+b^2+c^2=1.$$

Tìm giá trị lớn nhất $P=a^5+b^5+c^5$.

Bài 5. Cho a, b, c là 3 số thực thoả mãn

$$a,b,c>0, a+b+c=3, a^2+b^2+c^2=4.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của

$$P=a^2b^2c^2,\ Q=\frac{a}{b}.$$

Bài 6. Cho a, b, c là 3 số thực thoả mãn $a,b,c>0$, $a+b+c=6$, $a^2+b^2+c^2=14$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{4a+b}{c}.$$

Bài 7. Cho x, y, z là 3 số thực thoả mãn $x^2+xy+y^2=3, y^2+yz+z^2=16$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=xy+yz+zx$.

Bài 8. Cho x, y, z là 3 số thực thoả mãn $x^2+y^2+z^2=5, x-y+z=3$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x+y-2}{z+2}$.

Bài 9. (*British Mathematical Olympiad 1996*) Cho x, y, z là 3 số thực thoả mãn

$$\begin{cases}x,y,z\in\mathbb{R}\\ x+y+z=0\\ x^2+y^2+z^2=6\end{cases}.$$

Tìm giá trị lớn nhất của $P=x^2y+y^2z+z^2x.$

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN
BÀI SỐ 106

PROBLEM: *The function f is defined by $f(x) = a\sin(bx + c) + d$, for constants a, b, c and d. In the xy - plane, the point (2; 2) represent a minimum point and the point (4; 4) represent the next maximum point on the graph of f. What are the values of b?*

Solution. The function f is of a form of a sine function and the horizontal difference between two nearest extreme points is 2. Therefore, the period of the function f is 4.

Hence $\dfrac{2\pi}{b} = 4$ (why?) and then $b = \dfrac{\pi}{2}$.

Remark: The problem is selected from an AP-precalculus practice exam.

TỪ VỰNG

minimum point : *điểm cực tiểu*

maximum point : *điểm cực đại*

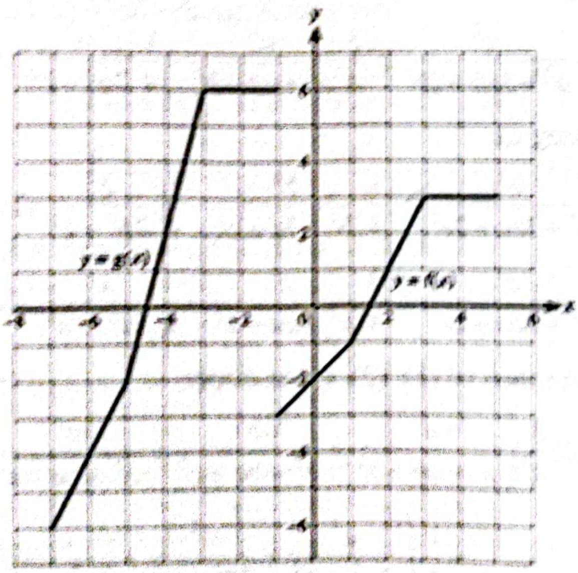
extreme points : *các điểm cực trị*

NGUYEN PHU HOANG LAN
(University of Education, VNU, Hanoi)

****

BÀI DỊCH SỐ 104

BÀI TOÁN. *Sơ đồ dưới đây biểu thị đồ thị các hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$. Mô tả đầy đủ trình tự của hai phép biến đổi đồ thị hàm số $y = f(x)$ thành đồ thị $y = g(x)$.*



Lời giải. Đầu tiên, chúng ta có thể giãn đồ thị của hàm số $y = f(x)$ theo chiều dương của trục Oy với hệ số 2.

Sau đó chúng ta tịnh tiến đồ thị mới này theo vectơ có toạ độ $(-6\,;\,0)$ để được đồ thị hàm số $y = g(x)$.

Lưu ý: Bài tập này được sưu tầm từ một bài thi toán trình độ AS.

Nhận xét. Rất tiếc kỳ này không có bạn nào gửi bài dịch về Toà soạn.

HỒ HẢI *(Hà Nội)*

NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN

BÀI TOÁN 85. *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2}{a^2+3ab+2b^2}+\frac{b^2}{b^2+3bc+2c^2}+\frac{c^2}{c^2+3ca+2a^2}\ge\frac{1}{2}.$$

Lời giải. Đặt vế trái của bài toán là M.

Cách 1. Ta thấy

$$M=\frac{a^2}{(2a^2+3ab+2b^2)-a^2}+\frac{b^2}{(2b^2+3bc+2c^2)-b^2}+\frac{c^2}{(2c^2+3ca+2a^2)-c^2}$$

$$=\frac{a^2}{(2a^2+3ab+2b^2)-a^2}+1+\frac{b^2}{(2b^2+3bc+2c^2)-b^2}+1+\frac{c^2}{(2c^2+3ca+2a^2)-c^2}+1-3$$

$$=\frac{1}{1-\frac{a^2}{2a^2+3ab+2b^2}}+\frac{1}{1-\frac{b^2}{2b^2+3bc+2c^2}}+\frac{1}{1-\frac{c^2}{2c^2+3ca+2a^2}}-3.$$

Theo BĐT Schwarz ta có:

$$M\ge\frac{9}{3-\left(\frac{a^2}{2a^2+3ab+2b^2}+\frac{b^2}{2b^2+3bc+2c^2}+\frac{c^2}{2c^2+3ca+2a^2}\right)}-3$$

Bây giờ ta đi đánh giá biểu thức

$$P=\frac{a^2}{2a^2+3ab+2b^2}+\frac{b^2}{2b^2+3bc+2c^2}+\frac{c^2}{2c^2+3ca+2a^2}.$$

Thật vậy ta dễ dàng chứng minh được

$$\frac{7a^2}{2a^2+3ab+2b^2}\ge\frac{3a^2}{a^2+ab+b^2}.$$

Đánh giá tương tự với hai biểu thức còn lại, rồi cộng theo vế ba bất đẳng thức đó lại sẽ được:

$$\frac{7}{3}P\ge\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^2}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^2}{c^2+ca+a^2}.$$

Tiếp theo ta đánh giá biểu thức:

$$Q=\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^2}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^2}{c^2+ca+a^2}.$$

Thật vậy theo bất đẳng thức Schwarz thì

$$\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{c^2}{c(a+b+c)}\ge\frac{(a+c)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca};$$

$$\frac{b^2}{b^2+bc+c^2}+\frac{a^2}{a(a+b+c)}\ge\frac{(b+a)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca};$$

$$\frac{c^2}{c^2+ca+a^2}+\frac{b^2}{b(a+b+c)}\ge\frac{(c+b)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}.$$

Cộng theo vế ba BĐT trên rồi rút gọn sẽ được:

$$Q+1\ge2\Leftrightarrow Q\ge1.\ \text{Vậy}$$

$$\frac{7}{3}P\ge\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^2}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^2}{c^2+ca+a^2}\ge1\Rightarrow P\ge\frac{3}{7}.$$

Do đó:

$$M\ge\frac{9}{3-\left(\frac{a^2}{2a^2+3ab+2b^2}+\frac{b^2}{2b^2+3bc+2c^2}+\frac{c^2}{2c^2+3ca+2a^2}\right)}-3$$

$$\ge\frac{9}{3-\frac{3}{7}}-3=\frac{1}{2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài toán được chứng minh.

Cách 2. Theo BĐT Schwarz ta có:

$$\frac{a^2}{a^2+3ab+2b^2}+\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{2a^2+b^2}\ge\frac{\left(a+\frac{a}{2}\right)^2}{3(a^2+ab+b^2)}=\frac{3}{4}.\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^2}{a^2+3ab+2b^2}\ge\frac{3}{4}.\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}-\frac{1}{4}.\frac{a^2}{2a^2+b^2}\ (1).$$

Tương tự:

$$\frac{b^2}{b^2+3bc+2c^2}\ge\frac{3}{4}.\frac{b^2}{b^2+bc+c^2}-\frac{1}{4}.\frac{b^2}{2b^2+c^2}\ (2);$$

$$\frac{c^2}{c^2+3ca+2a^2}\ge\frac{3}{4}.\frac{c^2}{c^2+ca+a^2}-\frac{1}{4}.\frac{c^2}{2c^2+a^2}\ (3).$$

Cộng theo vế (1), (2), (3) ta được:

$$M\ge\frac{3}{4}.\left(\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^2}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^2}{c^2+ca+a^2}\right)-\frac{1}{4}.\left(\frac{a^2}{2a^2+b^2}+\frac{b^2}{2b^2+c^2}+\frac{c^2}{2c^2+a^2}\right).$$

Theo cách 1 ta có:

$$\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^2}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^2}{c^2+ca+a^2}\ge 1.$$

Mặt khác ta có:

$$\frac{a^2}{2a^2+b^2}+\frac{b^2}{2b^2+c^2}+\frac{c^2}{2c^2+a^2}$$
$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{2a^2+b^2}+\frac{c^2}{2b^2+c^2}+\frac{a^2}{2c^2+a^2}\right).$$

Theo BĐT Schwarz ta có:

$$\frac{a^2}{2a^2+b^2}+\frac{b^2}{2b^2+c^2}+\frac{c^2}{2c^2+a^2}$$
$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{2a^2+b^2}+\frac{c^2}{2b^2+c^2}+\frac{a^2}{2c^2+a^2}\right)$$
$$\le\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left[\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2}\right]=1.$$

Do đó $\frac{a^2}{2a^2+b^2}+\frac{b^2}{2b^2+c^2}+\frac{c^2}{2c^2+a^2}\le 1.$

Vậy $M\ge\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$

Cách 3. Trước hết ta chứng minh

$$\frac{a^2}{a^2+3ab+2b^2}\ge\frac{7}{12}\cdot\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}-\frac{1}{36}\quad(4).$$

Thật vậy BĐT tương đương với bất đẳng thức sau

$$\frac{(a-b)^2\left(16a^2+9ab+2b^2\right)}{36(a+b)(a+2b)\left(a^2+ab+b^2\right)}\ge 0.$$

BĐT trên luôn đúng. Tương tự:

$$\frac{b^2}{b^2+3bc+2c^2}\ge\frac{7}{12}\cdot\frac{b^2}{b^2+bc+c^2}-\frac{1}{36}\quad(5);$$

$$\frac{c^2}{c^2+3ca+2a^2}\ge\frac{7}{12}\cdot\frac{c^2}{c^2+ca+a^2}-\frac{1}{36}\quad(6).$$

Cộng theo vế (4), (5), (6) ta sẽ được:

$$M\ge\frac{7}{12}\cdot\left(\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^2}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^2}{c^2+ca+a^2}\right)-\frac{1}{12}.$$

Theo cách 1 ta có:

$$\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^2}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^2}{c^2+ca+a^2}\ge 1.$$

Suy ra: $M\ge\frac{7}{12}-\frac{1}{12}=\frac{1}{2}.$

Cách 4. Sử dụng bổ đề quen thuộc:

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\ge 3\left(a^3b+b^3c+c^3a\right)$$

Thật vậy BĐT tương đương với:

$$\frac{1}{2}\left(a^2-ab+2bc-b^2-ca\right)^2+\frac{1}{2}\left(b^2-bc+2ca-c^2-ab\right)^2$$
$$+\frac{1}{2}\left(c^2-ca+2ab-a^2-bc\right)^2\ge 0.$$

Áp dụng BĐT Schwaz ta có:

$$M=\frac{a^4}{a^4+3a^3b+2a^2b^2}+\frac{b^4}{b^4+3b^3c+2b^2c^2}+\frac{c^4}{c^4+3c^3a+2c^2a^2}$$
$$\ge\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2+3\left(a^3b+b^3c+c^3a\right)}\ge\frac{1}{2}.$$

Bài toán được chứng minh.

ĐÀO VĂN NAM
(GV TH&THCS May Academy, Hoàng Mai, Hà Nội)

Nhận xét. Kỳ này hai bạn *Đặng Đình Minh Trí*, 8C2, THCS Lạc Viên, Ngô Quyền, **Hải Phòng**, *Nguyễn Văn Đức Thắng*, 9A, THCS Quỳnh Trang, TX. Hoàng Mai, **Nghệ An** cũng đóng góp một số cách giải tương tự như các cách trong bài viết trên. Xin hoan nghênh các bạn.

LÊ MAI *(Hà Nội)*

Mời các bạn gửi lời giải **BÀI TOÁN 87** dưới đây về Toà soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 31.8.2024.

BÀI TOÁN 87. *Cho các số thực x, y thỏa mãn*

$$x^2+y^2-xy=4.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x^2+y^2$.

NGUYỄN VĂN XÁ
(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)

BÀI TOÁN 93 (USAMO, 1974). *Cho a, b, c là ba số nguyên phân biệt P là một đa thức với hệ số nguyên. Chứng minh rằng không thể xảy ra đồng thời $P(a) = b$, $P(b) = c$, $P(c) = a$.*

Lời giải. Cách 1. Giả sử các điều kiện $P(a) = b$, $P(b) = c$, $P(c) = a$ là xảy ra đồng thời. Ta có:

$$P(x) - b = (x-a)P_1(x) \quad (1);$$

$$P(x) - c = (x-b)P_2(x) \quad (2);$$

$$P(x) - a = (x-c)P_3(x) \quad (3).$$

Trong các số a, b, c ta chọn 2 số có giá trị tuyệt đối của hiệu hai số đó lớn nhất. Không mất tính tổng quát, ta giả sử 2 số đó là a và c. Khi đó:

$$|a-b| < |a-c| \quad (4).$$

Trong (1) thay x bởi c ta được:

$$a - b = (c-a)P_1(c).$$

Do $P_1(c)$ là số nguyên nên ta có: $|a-b| \geq |c-a|$, điều này mâu thuẫn với (4). Điều mẫu thuẫn này chứng tỏ giả sử $P(a) = b$, $P(b) = c$, $P(c) = a$ là xảy ra đồng thời là sai. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Cách 2. (Của bạn *Đặng Đình Minh Trí*, 8C2, THCS Lạc Viên, Ngô Quyền, Hải Phòng)

Bổ đề. *Với a, b là hai số nguyên phân biệt và P(x) là đa thức với hệ số nguyên thì*

$$P(a) - P(b) \vdots (a-b).$$

Thật vậy, do a là nghiệm của đa thức $P(x) - P(a)$ nên $P(x) - P(a) = (x-a)Q(x)$, trong đó $Q(x)$ là đa thức với hệ số nguyên. Cho $x = b$ ta được:

$$P(b) - P(a) = (b-a)Q(b) \Rightarrow P(a) - P(b) \vdots (a-b).$$

Bổ đề được chứng minh. Trở lại bài toán, ta có:

$$b - c = P(a) - P(b) \vdots (a-b) \quad (5);$$

$$c - a = P(b) - P(c) \vdots (b-c) \quad (6);$$

$$a - b = P(c) - P(a) \vdots (c-a) \quad (7).$$

Do a, b, c là các số nguyên phân biệt nên từ (5), (6), (7) suy ra: $|a-b| \leq |b-c| \leq |c-a| \leq |a-b|$. Do đó: $|a-b| = |b-c| = |c-a|$ (8). Trong 3 số a, b, c giả sử a là số lớn nhất thì từ (8) suy ra $b = c$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết a, b, c phân biệt. Suy ra điều phải chứng minh.

Nhận xét. Ngoài bạn *Trí*, bạn *Vũ Minh Quang*, 10T2, THPT chuyên Lam Sơn, **Thanh Hóa** cũng có lời giải đúng. Xin hoan nghênh hai bạn.

NHƯ HOÀNG

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 31.8.2024.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

BÀI TOÁN 95. *Cho các số nguyên dương a, b, c đều lớn hơn 1 thỏa mãn*

$$\sin A.\sin B \leq \sin^2\frac{C}{2}.\sqrt[a]{N\sqrt[b]{N\sqrt[c]{N}}} = \sqrt[36]{N^{25}}$$

với mọi $N > 1$. Giá trị của b bằng bao nhiêu?

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5 **E.** 6.

KHÁNH HỮU (*Hà Nội*)

***

SAI LẦM... *(Tiếp theo trang 47)*

Suy ra $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = 8$. Ta có:

$$P = |i(\overline{z}+1) - w| \leq |i \cdot \overline{z}| + |-w| + |i| = 8 + 6 + 1 = 15.$$

Dẫn tới $M = \max P = 15$. Ta lại có:

$$P = |i(\overline{z}+1) - w| = |(i \cdot \overline{z} - w) + i|$$

$$\geq \big||i.\overline{z}| - |w| - |i|\big| = |8 - 6 - 1| = 1.$$

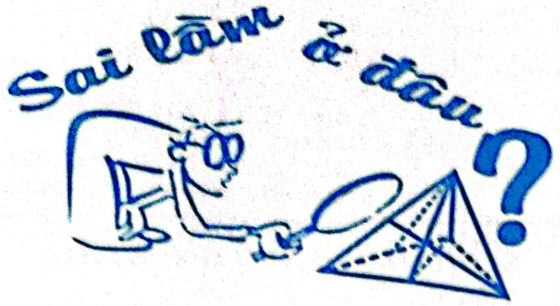
Suy ra $m = \min P = 1$. Vậy $M - m = 14 \in (10;16)$.

Chọn đáp án C.

Theo các bạn, đáp số của bạn Ngọc Lan có đúng không?

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)



GIẢI ĐÁP: TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN ĐI QUA MỘT ĐIỂM

(*Đề đăng trên TH&TT số 561, tháng 3 năm 2024*)

Phân tích sai lầm.

Lời giải của bạn *Tuấn* sai vì chưa xét trường hợp đường thẳng $x+3=0$ có là tiếp tuyến của đường tròn (C) hay không.

Lời giải của bạn *Dung* sai do giải phương trình $-4ab+3b^2=0 \Rightarrow -4a+3b=0$ thiếu trường hợp $b=0$.

Lời giải đúng. Phương trình đường tròn $(C):(x-2)^2+(y+3)^2=25$. Suy ra đường tròn (C) có tâm $I(2;-3)$ bán kính $R=5$.

Gọi $\vec{n}=(a;b)$ là vectơ pháp tuyến của đường thẳng (Δ).

Đường thẳng (Δ) đi qua điểm $A(-3;7)$ nên đường thẳng (Δ) có phương trình:

$$a(x+3)+b(y-7)=0 \Leftrightarrow ax+by+3a-7b=0.$$

(Δ) là tiếp tuyến của đường tròn (C) khi và chỉ khi $d(I,\Delta)=R \Leftrightarrow \dfrac{|a.2+b.(-3)+3a-7b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=5$

$$\Leftrightarrow \frac{|5a-10b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=5 \Leftrightarrow \frac{|a-2b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=1$$

$$\Leftrightarrow |a-2b|=\sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow (a-2b)^2=a^2+b^2$$

$$\Leftrightarrow a^2-4ab+4b^2=a^2+b^2 \Leftrightarrow -4ab+3b^2=0$$

$$\Leftrightarrow b(-4a+3b)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ -4a+3b=0 \end{array}\right.$$

Với $b=0$ chọn $a=1$ suy ra phương trình đường thẳng (Δ) là $x+3=0$.

Với $-4a+3b=0$ chọn $a=3 \Rightarrow b=4$ suy ra phương trình đường thẳng (Δ) là $3x+4y-19=0$.

Vậy đường tròn (C) đã cho có hai tiếp tuyến đi qua điểm $A(-3;7)$ là:

$$x+3=0 \text{ và } 3x+4y-19=0.$$

Nhận xét. Các bạn sau đã phát hiện được sai lầm và đưa ra lời giải đúng: *Huỳnh Trịnh Vĩnh Phú*, 10A1, TH, THCS, THPT Lê Thánh Tông, TP. Hồ Chí Minh; *Hà Phương Anh*, 10 chuyên Toán, THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ; *Nguyễn Trần Ngọc Thiện*, 10TA1, THPT số 1 Tuy Phước, *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, Bình Định. Hoan nghênh các bạn.

KIHIVI

BÀI TOÁN VỀ SỐ PHỨC !

Bài toán. *Xét các số phức z,w thoả mãn $|w|=6$, $|iw-\bar{z}|=10$ và $z.w$ là số thực. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|i(\bar{z}+1)-w|$. Hiệu $M-m$ thuộc khoảng nào sau đây?*

A. $\left(\dfrac{1}{2};3\right)$. **B.** $(3;10)$.

B. **C.** $(10;16)$. **D.** $(16;25)$.

Lời giải của bạn Ngọc Lan: Gọi $w=a+bi$, $z=x+yi$, trong đó $a,b,x,y\in\mathbb{R}$. Ta có:

$$\begin{cases} |w|=6 \\ |iw-\bar{z}|=10 \\ z\cdot w\in\mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=36 \\ (-x-b)^2+(a+y)^2=100 \\ ay+bx=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=36 \\ x^2+y^2=64. \\ ay+bx=0 \end{cases}$$

(*Xem tiếp trang 46*)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 565 (7.2024)
Tòa soạn : 187B, Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607,
ĐT Phát hành: 024.35142649, 024.35682701
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TRONG SỐ NÀY

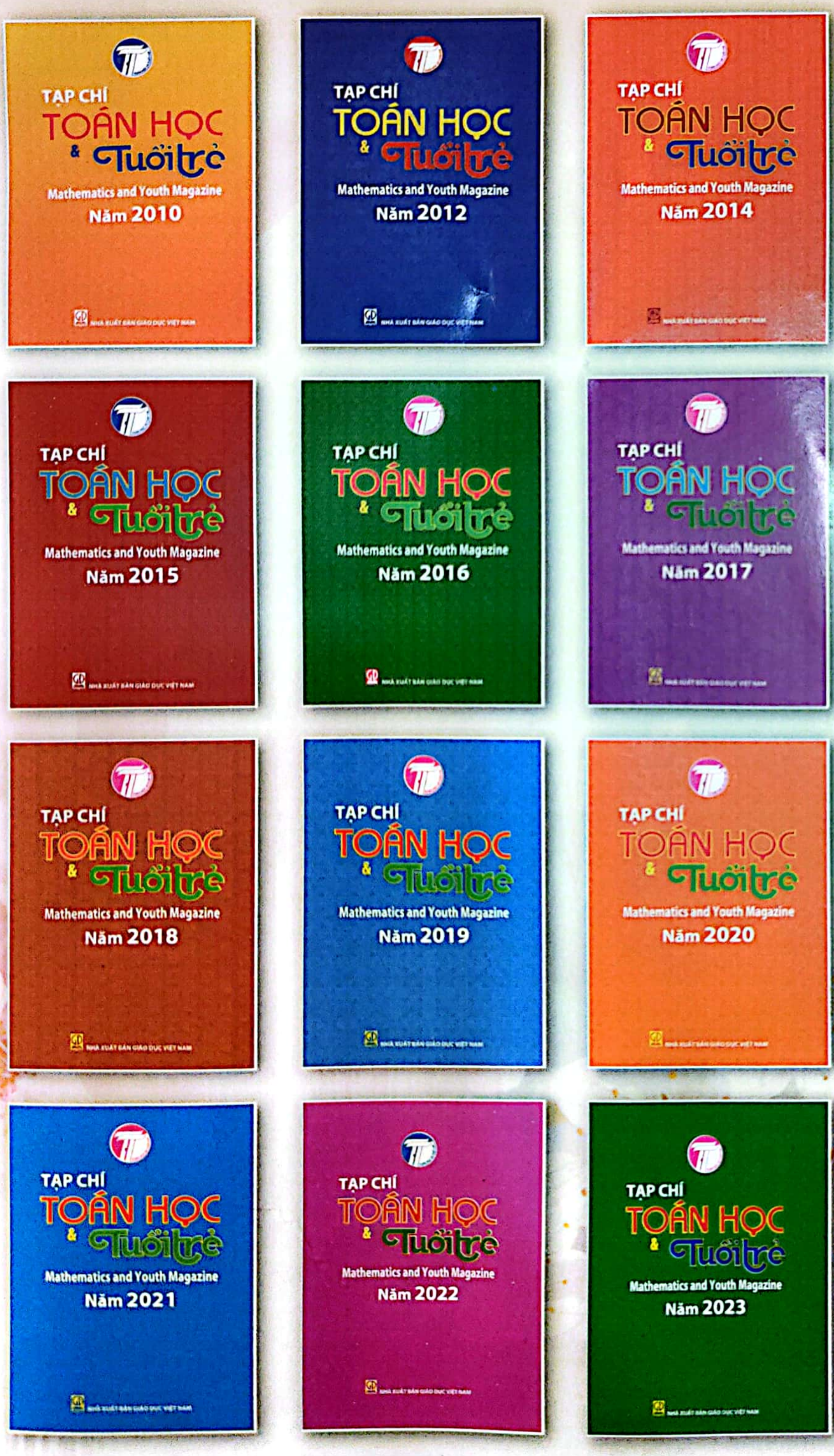
Biên tập: LÊ MAI, NHƯ HOÀNG
Trị sự, phát hành: HOÀNG THỊ KIM PHƯỢNG, TRẦN THỊ MINH HIỀN
Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG
Thiết kế, chế bản: MINH HÒA

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Bộ đóng tập

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ HÀNG NĂM



Năm 2010
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 99.000 đồng

Năm 2012
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 152.000 đồng

Năm 2014
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 185.000 đồng

Năm 2015
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2016
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2017
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2018
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2019
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2020
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 210.000 đồng

Năm 2021
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 240.000 đồng

Năm 2022
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 260.000 đồng

Năm 2023
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 260.000 đồng

Mọi chi tiết xin liên hệ:
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
Địa chỉ: 187B Giảng Võ, Hà Nội
- Điện thoại: 024.35121606 - 024.35121607
- Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

THƯ NGỎ

Bạn đọc thân mến!

Trong 60 năm qua, Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ không ngừng phát triển và đã trở thành người bạn thân thiết của nhiều thế hệ học sinh, giáo viên và bạn đọc yêu toán trên cả nước. Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ đã nhận nhiều Giấy khen, Huân huy chương và những phần thưởng cao quý khác mà Đảng và Nhà nước trao tặng. Điều này có được là nhờ công sức của các nhà toán học, các nhà sư phạm, các ủy viên hội đồng biên tập, các công tác viên và bạn đọc yêu toán trên cả nước. Thay mặt Ban biên tập, chúng tôi xin cảm ơn bạn đọc gần xa, các nhà khoa học và các cộng tác viên về những đóng góp to lớn đó.

Để chào mừng 60 năm thành lập và phát triển Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, từ tháng 4.2024, Ban biên tập sẽ mở chuyên mục: ***Những hồi ức, những kỷ niệm về Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ***. Nội dung các bài trong chuyên mục này sẽ viết về những hồi ức, những kỷ niệm, gắn bó của bạn đọc với Toán học và Tuổi trẻ; những ảnh hưởng, đóng góp của Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ đối với phong trào học toán, giải toán,... trên toàn quốc.

Bài viết có thể viết trên giấy hoặc đánh máy vi tính (nên bằng chương trình soạn thảo văn bản word). Trên bài viết cần ghi rõ: Họ tên, địa chỉ, số điện thoại. Bài viết không quá 4 trang đánh máy.

Bài viết có thể gửi về Tòa soạn:

- Gửi file word theo địa chỉ email: *toanhoctuoitrevietnam@gmail.com*

- Gửi bài theo đường Bưu điện. Phong bì có dán tem, gửi về địa chỉ: *Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, 187B Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội.*

- Hoặc đến Toà soạn Tạp chí gửi trực tiếp.

Ban biên tập mong muốn nhận được các bài viết từ bạn đọc. Trân trọng cảm ơn!

TH&TT

CUỘC THI VIẾT CHUYÊN ĐỀ TOÁN CHÀO MỪNG 60 NĂM TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Để chào mừng 60 năm thành lập và phát triển Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, Ban biên tập tổ chức cuộc thi viết chuyên đề Toán cho bậc THCS và THPT.

• **Đối tượng dự thi:** Giáo viên đã hoặc đang dạy ở bậc THCS, THPT, Giảng viên, Sinh viên ở các trường Đại học, Cao đẳng và bạn đọc yêu thích Toán.

• **Nội dung bài dự thi:** Là các chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi toán; các chuyên đề ôn tập, ôn thi cuối cấp; những tìm tòi, sáng tạo trong việc dạy học Toán (bậc THCS, THPT).

• **Thể lệ cuộc thi:** Mỗi người tham gia cuộc thi được gửi không quá 3 bài dự thi khác nhau. Các bài dự thi có thể là các sáng kiến kinh nghiệm đã đăng ký, hoặc đạt giải ở Trường, Phòng, Sở,... nhưng chưa từng được xuất bản thành sách, báo, tạp chí và cũng chưa tham gia cuộc thi nào khác.

Kết quả cuộc thi sẽ được công bố trên TH&TT tháng 11 năm 2024 (Số 569). Các bài hay có thể được chọn đăng trên Tạp chí hoặc in thành sách. Các tác giả được hưởng nhuận bút theo quy định của Tạp chí. Bài viết tham dự cuộc thi thuộc bản quyền của TH&TT.

• **Thời hạn gửi bài dự thi:** Trước ngày 15/10/2024.

• **Quy cách bài dự thi:** Bài dự thi được đánh máy vi tính, nên dùng chương trình soạn thảo văn bản word (có file). Trên mỗi bài dự thi ghi rõ: Họ và tên, địa chỉ Trường, xã (phường), huyện (quận), tỉnh (thành phố), số điện thoại. Bài dự thi không quá 15 trang đánh máy. Trên cùng của trang 1 mỗi bài dự thi ghi rõ:

Bài dự thi viết chuyên đề Toán
chào mừng 60 năm TH&TT.

• **Cách gửi bài dự thi:** Bài dự thi gửi về Tòa soạn TH&TT bằng cách:

- Gửi file word theo địa chỉ email:
toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

- Gửi bài theo đường Bưu điện. Phong bì có dán tem, gửi về địa chỉ:

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ
187B Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội.

- Hoặc đến Toà soạn Tạp chí gửi trực tiếp.

• **Giải thưởng:** Những người đoạt giải sẽ được nhận Giấy chứng nhận và Tặng phẩm của Tạp chí.

TH&TT

Giấy phép XB số 534/GP-BTTTT cấp ngày 19.11.2020; Mã số: 8BT7M24
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 7 năm 2024
Giá: 18.000 đồng
Mười tám nghìn đồng