TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

Tạp chí Toán học & Văn học trong nhà trường

Số 566
Tháng 8 - 2024
ISSN: 2734-9284

VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 61 - XUẤT BẢN TỪ 1964 - DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT Biên tập: (024) 35121607; ĐT Phát hành: (024) 35142649;
ĐT-Fax Hành chính: (024) 35121606 - Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com - Website: viennghiencuusachgd.com

Nhà Toán học Nga **Issai Schur**
(10/1/1875 – 10/1/1941)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

BẢNG GIÁ SÁCH GIÁO KHOA LỚP 11

ÁP DỤNG CHO NĂM HỌC 2024-2025

Chuẩn mực Khoa học Hiện đại

BỘ SÁCH KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

TT	Tên sách	Giá bìa (đồng/cuốn)	
1	Ngữ văn 11, tập một	22,000	23,000
2	Ngữ văn 11, tập hai	18,000	19,000
3	Toán 11, tập một	18,000	19,000
4	Toán 11, tập hai	16,000	16,000
5	Giáo dục thể chất 11 - Bóng đá	13,000	13,000
6	Giáo dục thể chất 11 - Cầu lông	13,000	13,000
7	Giáo dục thể chất 11 - Bóng chuyền	10,000	10,000
8	Giáo dục thể chất 11 - Bóng rổ	11,000	11,000
9	Hoạt động trải nghiệm, hướng nghiệp 11	11,000	11,000
10	Lịch sử 11	14,000	14,000
11	Địa lí 11	23,000	24,000
12	Giáo dục Kinh tế và Pháp luật 11	20,000	21,000
13	Vật lí 11	16,000	17,000
14	Hoá học 11	21,000	22,000
15	Sinh học 11	25,000	26,000
16	Công nghệ 11 - Cơ khí	20,000	21,000
17	Công nghệ 11 - Chăn nuôi	18,000	18,000
18	Tin học 11 - Định hướng Tin học ứng dụng	21,000	22,000
19	Tin học 11 - Định hướng Khoa học máy tính	20,000	21,000
20	Âm nhạc 11	15,000	18,000
21	Mĩ thuật 11 - Thiết kế mĩ thuật đa phương tiện	6,000	6,000
22	Mĩ thuật 11 - Thiết kế đồ hoạ	6,000	6,000
23	Mĩ thuật 11 - Thiết kế thời trang	7,000	7,000
24	Mĩ thuật 11 - Thiết kế mĩ thuật sân khấu, điện ảnh	6,000	6,000
25	Mĩ thuật 11 - Lí luận và lịch sử mĩ thuật	6,000	6,000
26	Mĩ thuật 11 - Điêu khắc	6,000	6,000
27	Mĩ thuật 11 - Kiến trúc	6,000	6,000
28	Mĩ thuật 11 - Hội hoạ	6,000	6,000
29	Mĩ thuật 11 - Đồ hoạ (tranh in)	6,000	6,000
30	Mĩ thuật 11 - Thiết kế công nghiệp	6,000	6,000
31	Giáo dục Quốc phòng và An ninh 11	15,000	15,000
32	Chuyên đề học tập Ngữ văn 11	13,000	14,000
33	Chuyên đề học tập Toán 11	11,000	12,000
34	Chuyên đề học tập Lịch sử 11	8,000	8,000
35	Chuyên đề học tập Địa lí 11	9,000	10,000
36	Chuyên đề học tập Giáo dục Kinh tế và Pháp luật 11	10,000	11,000
37	Chuyên đề học tập Vật lí 11	9,000	9,000
38	Chuyên đề học tập Hóa học 11	8,000	8,000
39	Chuyên đề học tập Sinh học 11	9,000	9,000
40	Chuyên đề học tập Công nghệ 11 - Cơ khí	10,000	12,000
41	Chuyên đề học tập Công nghệ 11 - Chăn nuôi	10,000	12,000
42	Chuyên đề học tập Tin học 11 - Định hướng Tin học ứng dụng	14,000	14,000
43	Chuyên đề học tập Tin học 11 - Định hướng Khoa học máy tính	13,000	13,000
44	Chuyên đề học tập Mĩ thuật 11	10,000	13,000
45	Chuyên đề học tập Âm nhạc 11	9,000	10,000

BỘ SÁCH CHÂN TRỜI SÁNG TẠO

TT	Tên sách	Giá bìa (đồng/cuốn)	
1	Ngữ văn 11, tập một	20,000	21,000
2	Ngữ văn 11, tập hai	16,000	17,000
3	Toán 11, tập một	21,000	22,000
4	Toán 11, tập hai	16,000	16,000
5	Lịch sử 11	15,000	15,000
6	Địa lí 11	23,000	24,000
7	Giáo dục Kinh tế và Pháp luật 11	23,000	24,000
8	Vật lí 11	18,000	18,000
9	Hoá học 11	20,000	20,000
10	Sinh học 11	26,000	27,000
11	Âm nhạc 11	23,000	23,000
12	Chuyên đề học tập Ngữ văn 11	12,000	12,000
13	Chuyên đề học tập Toán 11	14,000	14,000
14	Chuyên đề học tập Lịch sử 11	8,000	9,000
15	Chuyên đề học tập Địa lí 11	8,000	8,000
16	Chuyên đề học tập Giáo dục Kinh tế và Pháp luật 11	11,000	11,000
17	Chuyên đề học tập Vật lí 11	9,000	9,000
18	Chuyên đề học tập Hóa học 11	9,000	9,000
19	Chuyên đề học tập Sinh học 11	11,000	11,000
20	Chuyên đề học tập Âm nhạc 11	10,000	11,000
21	Hoạt động trải nghiệm, hướng nghiệp 11 (bản 1)	13,000	14,000
22	Hoạt động trải nghiệm, hướng nghiệp 11 (bản 2)	13,000	14,000
23	Giáo dục Quốc phòng và An ninh 11	15,000	15,000

SÁCH GIÁO KHOA TIẾNG ANH

Bộ sách hợp tác xuất bản với Pearson Education

TT	Tên sách	Giá bìa (đồng/cuốn)
1	Tiếng Anh 11 - Global Success	58,000

Bộ sách hợp tác xuất bản với Oxford University Press

TT	Tên sách	Giá bìa (đồng/cuốn)
1	Tiếng Anh 11 - Friends Global	103,000

Đ

DÀNH CHO TRUNG HỌC CƠ SỞ

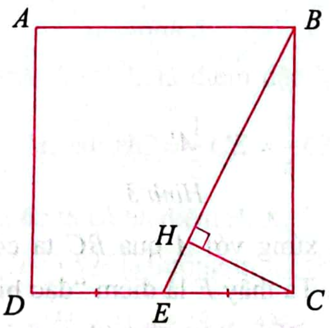
TÍNH CHẤT ĐIỂM "ĐẶC BIỆT" TRONG HÌNH VUÔNG VÀ ÁP DỤNG

TRẦN THANH HƯNG
(GV THCS Võ Trứ, Tuy An, Phú Yên)

Khi giải toán, có thể chúng ta đã gặp nhiều bài toán "họ hàng" với nhau, tức là giả thiết hay kết luận của những bài toán tương đương nhau. Đôi khi ta giải được bài này nhưng sau đó lại lúng túng với bài kia. Nguyên nhân là ta không thấy được sự tương đương giữa các bài toán ấy. Bài viết này xin chia sẻ cách giải một số bài toán thông qua tính chất của một điểm "đặc biệt". Nó giống như "chìa khóa" để giải quyết khá nhiều bài toán về hình vuông.

I. ĐỊNH NGHĨA

Cho hình vuông $ABCD$ có E là trung điểm của cạnh DC. Xét tam giác vuông BCE, gọi H là hình chiếu vuông góc của đỉnh C trên cạnh huyền BE. Ta gọi điểm H là điểm "đặc biệt" của hình vuông $ABCD$ ứng với đoạn BE (h.1).



Hình 1

Với định nghĩa trên, ứng với mỗi đoạn thẳng nối trung điểm một cạnh với đỉnh không nằm trên cạnh đó của hình vuông thì có một điểm "đặc biệt".

II. TÍNH CHẤT

Cho hình vuông ABCD có độ dài cạnh là a. Gọi E, M lần lượt là trung điểm của đoạn CD và BC; H là điểm đặc biệt ứng với đoạn BE; F là trung điểm của BH. Tia CH cắt AD tại G; tia DH cắt BC tại K; Tia AH cắt CD tại I. Ta có các tính chất sau:

1) *Điểm F là điểm "đặc biệt" ứng với đoạn AM.*

2) $AH = DF = a$.

3) $\widehat{EFC} = 45^0$.

4) *H là trọng tâm của tam giác DFC.*

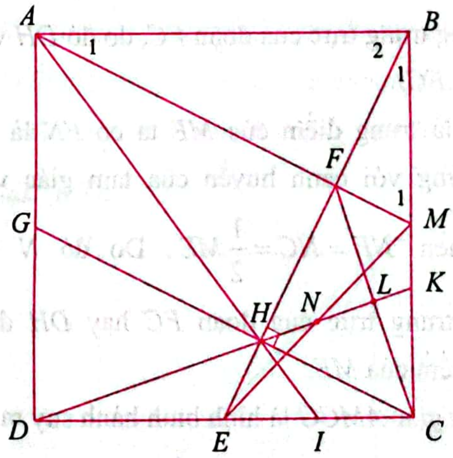
5) *DH vuông góc với FC và DH đi qua trung điểm của ME.*

6) a) $GD = \frac{1}{2}a$.

b) $KC = \frac{1}{3}a$.

c) $IC = \frac{1}{4}a$.

Chứng minh. (h.2)



Hình 2

1) $\begin{cases} MB = MC \\ FB = FH \end{cases} \Rightarrow MF \parallel HC$

$\Rightarrow MF \perp BF \Rightarrow \widehat{BMF} + \widehat{B_1} = 90^0$ (1).

Mặt khác, $\Delta BMA = \Delta ECB$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{MAB} = \widehat{B_1}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{BMF} + \widehat{MAB} = 90^0$ (3).

Ta lại có $\widehat{BMA} + \widehat{MAB} = 90^0$ (4).

Từ (3) và (4) có $\widehat{BMF} = \widehat{BMA}$ hay M, F, A thẳng hàng. Vậy F là điểm "đặc biệt" ứng với đoạn AM.

2) AM vuông góc với BH tại trung điểm của BH nên AM là trung trực của đoạn BH, do đó $AH = AB = a$. Chứng minh tương tự ta cũng có $DF = DA = a$.

3) $\widehat{MFE} = \widehat{MCE} = 90^0$, suy ra tứ giác $CEFM$ nội tiếp, do đó $\widehat{EFC} = \widehat{EMC} = 45^0$.

4) Tam giác CHF vuông cân tại H nên $HC = HF$.

Ta lại có: $\Delta EHC \sim \Delta ECB$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{HE}{HC} = \frac{CE}{CB} = \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \frac{HE}{HF} = \frac{1}{2}.$$

Kết hợp với EF là trung tuyến của tam giác DFC ta có H là trọng tâm của tam giác DFC.

5) Vì $DF = DC, HF = HC$ nên đường thẳng DH là đường trung trực của đoạn FC, do đó DH vuông góc với FC.

Gọi N là trung điểm của ME ta có FN là trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông MEF nên $NF = NC = \frac{1}{2}ME$. Do đó N thuộc đường trung trực của đoạn FC hay DH đi qua trung điểm của ME.

6) a) Tứ giác $AMCG$ là hình bình hành suy ra:

$$AG = CM = \frac{1}{2}a.$$

b) Gọi L là giao điểm của DK và FC ta có:

$$\Delta DLC \sim \Delta DCK$$

$$\Rightarrow \frac{CK}{CD} = \frac{LC}{LD} \text{ (5).}$$

Mặt khác, tam giác HLC vuông cân tại L, suy ra $LC = LH$ (6). Vì H là trọng tâm của tam giác DFC nên $LH = \frac{1}{3}LD$ (7).

Từ (5), (6), (7) suy ra:

$$\frac{CK}{CD} = \frac{1}{3} \Rightarrow CK = \frac{1}{3}CD = \frac{1}{3}a.$$

c) $\Delta ABH \sim \Delta IEH$

$\Rightarrow \frac{EI}{AB} = \frac{HE}{HB} = \frac{1}{4} \Rightarrow EI = \frac{1}{4}AB = \frac{1}{4}a.$

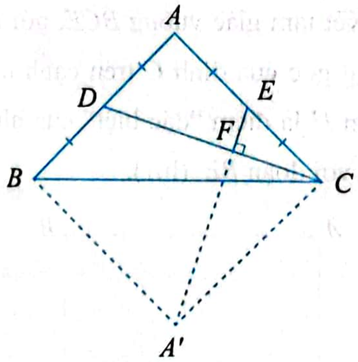
Mà $EC = \frac{1}{2}a$ suy ra $IC = \frac{1}{4}a.$

III. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài toán 1. *Cho tam giác ABC vuông cân tại A. D, E lần lượt là trung điểm của AB và AC, F là hình chiếu của E trên CD. Chứng minh BA = BF.*

Lời giải.

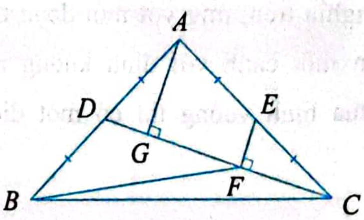
Cách 1. (h.3)



Hình 3

Lấy A' đối xứng với A qua BC ta có $ABA'C$ là hình vuông. Ta thấy F là điểm "đặc biệt" ứng với đoạn $A'E \Rightarrow BF = BA' = BA$ (theo tính chất 2).

Cách 2. (h.4)



Hình 4

Gọi G là hình chiếu vuông góc của A trên CD.

Ta có: $\Delta AGD = \Delta CFE \Rightarrow GA = FC = GF$

hay G thuộc trung trực đoạn AF.

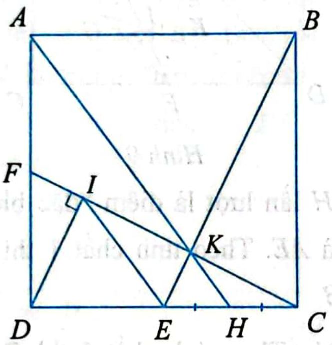
Lại có $GD = EF = \frac{1}{2}GA = \frac{1}{2}GF \Rightarrow GF = 2GD$

nên G là trọng tâm tam giác ABF. Tóm lại: G là trọng tâm tam giác ABF mà G thuộc trung trực đoạn AF nên tam giác ABF cân tại B hay $BA = BF$.

Bài toán 2. *Cho hình vuông ABCD. Gọi E, F, H lần lượt là trung điểm của CD, DA, EC. Gọi I là hình chiếu của D trên FC. Chứng minh IE song song với AH.*

Lời giải. (h.5)

Ta thấy I là điểm "đặc biệt" ứng với cạnh FC. Gọi K là trung điểm của IC.



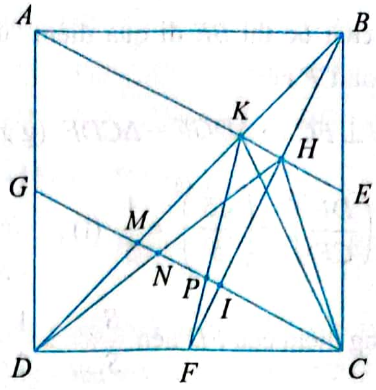
Hình 5

Theo tính chất 1 thì K là điểm đặc biệt ứng với cạnh BE. Ta lại có $HC = \frac{1}{2}CE = \frac{1}{4}CD$. Kết hợp với tính chất 6c ta có ba điểm A, K, H thẳng hàng. Tam giác CEI có KH là đường trung bình nên

$$KH \parallel IE \Rightarrow IE \parallel AH.$$

Bài toán 3. *Cho hình vuông ABCD, gọi E, F, G lần lượt là trung điểm của BC, CD, AD. Đoạn AE cắt BD, BF lần lượt tại K, H; đoạn CG cắt BD, HD, KF, BF lần lượt tại M, N, P, I. Chứng minh rằng $IN.PC = PM.IC$.*

Lời giải. (h.6)



Hình 6

Ta thấy I, H lần lượt là điểm "đặc biệt" ứng với đoạn BF và AE. Theo tính chất 4 thì I là trọng tâm của tam giác $HDC \Rightarrow \frac{IN}{IC} = \frac{1}{2}$. (1)

Ta có: $\begin{cases} IP \parallel HK \\ IH = 2IF \end{cases} \Rightarrow PK = 2PF \Rightarrow P$ là trọng tâm của tam giác KDC.

$\Rightarrow \frac{PM}{PC} = \frac{1}{2}$ (2).

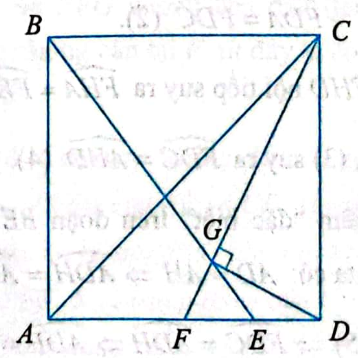
Từ (1), và (2) suy ra:

$$\frac{IN}{IC} = \frac{PM}{PC} \Rightarrow IN.PC = PM.IC.$$

Bài toán 4. (Trích đề thi Olympic Toán học trẻ Quốc tế tại Đài Loan năm 2012)

Cho hình vuông ABCD, F là trung điểm của AD và E là trung điểm của FD, các đường thẳng BE và CF cắt nhau tại G. Tính tỉ số diện tích của tam giác EFG với diện tích hình vuông ABCD.

Lời giải. (h.7).



Hình 7

Theo tính chất 6c thì BE đi qua điểm "đặc biệt" ứng với đoạn CF nên

$$DG \perp FC \Rightarrow \Delta DGF \sim \Delta CDF \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{DGF}}{S_{CDF}} = \left(\frac{DF}{CF}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{1}{5} \text{ (1)}.$$

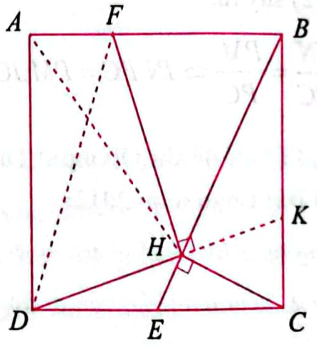
Vì E là trung điểm của FD nên $\frac{S_{EFG}}{S_{DGF}} = \frac{1}{2}$ (2).

Ta lại có $\frac{S_{CDF}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{4}$ (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra $\frac{S_{EFG}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{40}$.

Bài toán 5. *Cho hình vuông ABCD có độ dài cạnh là a. Gọi E là trung điểm của CD; H là hình chiếu của điểm C trên BE. Đường thẳng qua H vuông góc với HD cắt cạnh AB tại F. Tính độ dài đoạn AF theo a.*

Lời giải. (h.8).



Hình 8

Ta có: $90^0 - \widehat{FHA} = \widehat{AHD}$ (1),

$90^0 - \widehat{FDA} = \widehat{FDC}$ (2).

Tứ giác $AFHD$ nội tiếp suy ra $\widehat{FHA} = \widehat{FDA}$ (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{FDC} = \widehat{AHD}$ (4).

Vì H là điểm "đặc biệt" trên đoạn BE nên theo tính chất 2 ta có: $AD = AH \Rightarrow \widehat{ADH} = \widehat{AHD}$ (5).

Từ (4) và (5) $\Rightarrow \widehat{FDC} = \widehat{ADH} \Rightarrow \widehat{ADF} = \widehat{HDC}$.

Gọi K là giao điểm của tia DH và cạnh BC ta có:

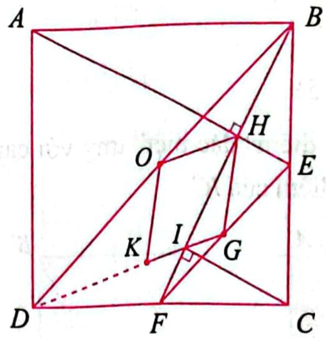
$$\Delta ADF = \Delta CDK \text{ (g.c.g)}$$

$$\Rightarrow AF = CK.$$

Theo tính chất 6b thì $CK = \frac{1}{3}a \Rightarrow AF = \frac{1}{3}a.$

Bài toán 6. *Cho hình vuông ABCD tâm O. Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm của BC, CD, EF. Gọi I là hình chiếu của điểm C lên đường thẳng BF; H là giao điểm của BF và AE. Lấy điểm K đối xứng với G qua I. Chứng minh OHGK là hình bình hành.*

Lời giải. (h.9).



Hình 9

Ta thấy I, H lần lượt là điểm "đặc biệt" ứng với đoạn BF và AE. Theo tính chất 1 thì H là trung điểm của IB

$\Rightarrow OH \parallel DI$. Theo tính chất 5 thì DI đi qua G. Do đó ta có $OH \parallel KG$ (1). Mặt khác:

$$BD \parallel FG \Rightarrow \frac{IG}{ID} = \frac{FG}{DB} = \frac{1}{4} \Rightarrow KG = \frac{1}{2}ID \text{ (2)}.$$

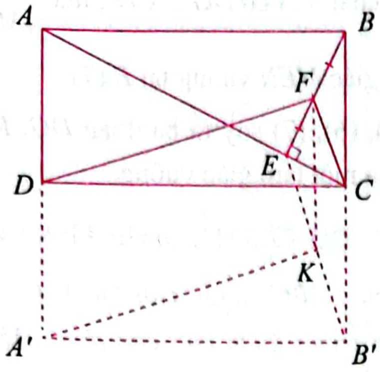
Lại có OH là đường trung bình của tam giác BDI nên $OH = \frac{1}{2}ID$ (3).

Từ (2) và (3) suy ra $OH = KG$ (4).

Từ (1) và (4) suy ra $OHGK$ là hình bình hành.

Bài toán 7. *Cho hình chữ nhật ABCD có AB = 2AD. Gọi E là hình chiếu của điểm B trên AC, F là trung điểm của BE. Chứng minh rằng FD vuông góc với FC.*

Lời giải. ***Cách 1.*** (h.10).



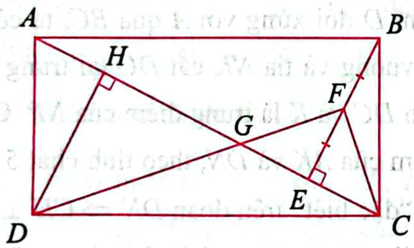
Hình 10

Vẽ hình vuông $ABB'A'$ ($A'B'$ khác phía với AB đối với DC). Gọi K là trung điểm của EB' ta có:

$$\begin{cases} FK \parallel BB' \\ FK = \dfrac{1}{2}BB' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} FK \parallel DA' \\ FK = DA' \end{cases}.$$

Do đó $DFKA'$ là hình bình hành $\Rightarrow DF \parallel A'K$. Vì E là điểm "đặc biệt" ứng với đoạn AC nên theo tính chất 1 thì $A'E = A'B'$. Tam giác $A'B'E$ cân tại A' có K là trung điểm cạnh đáy EB' do đó $A'K \perp EB'$ dẫn đến $DF \perp EB'$ mà $EB' \parallel FC \Rightarrow DF \perp FC$.

Cách 2. (h.11)



Hình 11

Gọi G là giao điểm của DF và AC; H là hình chiếu vuông góc của D trên AC thì ta có

$$AH = EC = \frac{1}{2}EB = EF.$$

Đặt $AD = x$, $AB = 2x$. Sử dụng định lý Pythagore ta tính được: $AC = \sqrt{5}x$, $EC = EF = AH = \dfrac{\sqrt{5}}{5}x$

$\Rightarrow \Delta CEF$ vuông cân tại E và $HE = \dfrac{3\sqrt{5}}{5}x$ (1);

$$HD + EF = \frac{3\sqrt{5}}{5}x \text{ (2).}$$

Từ $\Delta HGD \sim \Delta EGF$

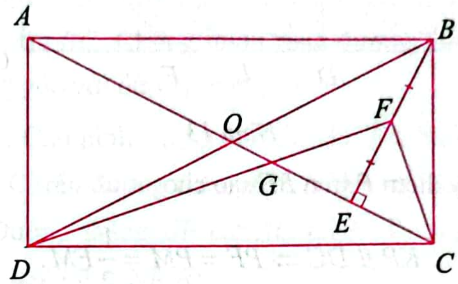
$$\Rightarrow \frac{HG}{HD} = \frac{EG}{EF} = \frac{HG+EG}{HD+EF} = \frac{HE}{HD+EF} \quad (3).$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra:

$$\frac{HG}{HD} = 1 \Rightarrow HG = HD \Rightarrow EG = EF$$

$\Rightarrow$ tam giác OEF vuông cân. Kết hợp với tam giác CEF vuông cân, suy ra tam giác CFG vuông cân tại F dẫn đến FD vuông góc với FC.

Cách 3. (h.12).



Hình 12

Ta có: $\Delta EAB \sim \Delta EBC \sim \Delta BAC$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{EC}{EB} = \frac{EB}{EA} = \frac{BC}{BA} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow AE = 2BE = 4CE \Rightarrow AC = 5EC.$$

Gọi O là tâm của hình chữ nhật $ABCD$ ta có:

$$EC = \frac{2}{5}OC \text{ hay } EC = \frac{2}{3}OE \quad (1).$$

Gọi G là giao điểm của AC và DF thì G là trọng tâm của tam giác BDE do đó $EG = \dfrac{2}{3}EO$ (2).

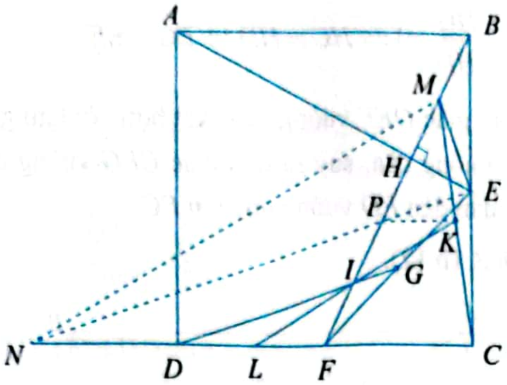
Từ (1) và (2) $\Rightarrow EG = EC = EF$ suy ra hai tam giác FEC và FEG vuông cân dẫn đến tam giác CFG cũng vuông cân tại F, từ đây ta có FD vuông góc với FC.

Bài toán 8. *Cho hình vuông ABCD, gọi E, F lần lượt là trung điểm của BC và CD. Hai đoạn AE và BF cắt nhau tại H, gọi M, G lần lượt là trung điểm của BH và EF, K là trung điểm của CM. Hai đoạn BF và DG cắt nhau tại I, KI cắt DC tại L. Chứng minh rằng:*

a) $LD = LF$;

b) Ba đoạn DG, KL, IG là ba cạnh của một tam giác vuông.

Lời giải. (h.13).



Hình 13

a) Lấy điểm P trên BF sao cho

$$KP \parallel DC \Rightarrow PF = PM = \frac{1}{2}FM.$$

Ta lại có: $IF = \frac{1}{4}FM$

$$\Rightarrow IP = IF = PH = HM = MB.$$

Tam giác PEF có IG là đường trung bình, do đó:

$$\begin{cases} IG \parallel PE & (1) \\ IG = \frac{1}{2}PE & (2) \end{cases}.$$

Do $KP \parallel FL$, $IP = IF \Rightarrow \Delta PKI = \Delta FLI$ (g.c.g)

$$\Rightarrow FL = PK = \frac{1}{2}FC \Rightarrow LD = LF.$$

b) Gọi N là giao điểm của EP và CD, ta có:

$$\begin{cases} EN \parallel DG \\ GE = GF \end{cases} \Rightarrow DN = DF \Rightarrow EN = 2DG \ (3);$$

$$\begin{cases} LD = LF \\ ND = FC \end{cases} \Rightarrow LN = LC.$$

Kết hợp với $KM = KC$, suy ra LK là đường trung bình của tam giác NMC do đó $MN = 2KL$ (4).

Ta có tam giác PEM cân tại E suy ra $EM = EP$ (5).

Từ (2) và (5) ta có: $EM = 2IG$ (6).

Theo tính chất 5 ta có $DG \perp CH$, mà $\begin{cases} NE \parallel DG \\ ME \parallel CH \end{cases}$

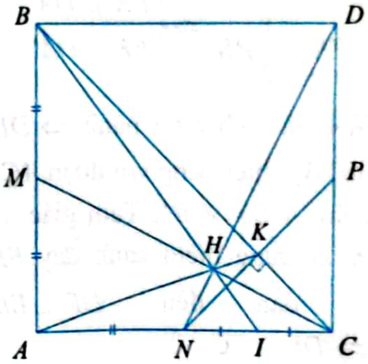
do đó tam giác MEN vuông tại E (7)

Từ (3), (4), (6), (7) suy ra ba đoạn DG, KL, IG là ba cạnh của một tam giác vuông.

Bài toán 9. (Bài T2/504 Tạp chí TH&TT)

Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm của các đoạn AB, AC và NC; K là hình chiếu vuông góc của N trên cạnh BC. Chứng minh ba đường thẳng AK, BI và CM đồng quy tại một điểm.

Lời giải. (h.14).



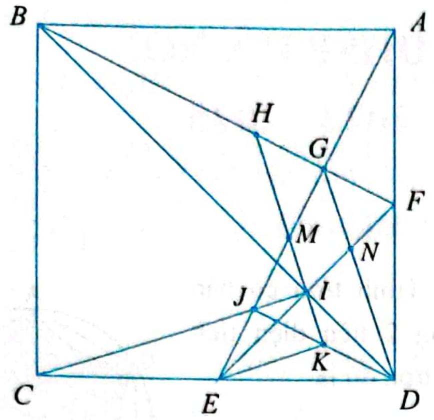
Hình 14

Lấy điểm D đối xứng với A qua BC, ta có $ABDC$ là hình vuông và tia NK cắt DC tại trung điểm P của cạnh DC và K là trung điểm của NP. Gọi H là giao điểm của AK và DN, theo tính chất 5 ta có H là điểm "đặc biệt" trên đoạn $DN \Rightarrow CH \perp DN$ do đó CM đi qua H. Theo tính chất 6a ta cũng có BI đi qua H. Vậy ba đường thẳng AK, BI và CM đồng quy tại điểm H.

Bài toán 10. (Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên tỉnh Phú Yên, năm học 2020 – 2021)

Cho hình vuông $ABCD$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của CD, AD và G là giao điểm của AE và BF. Gọi H là điểm đối xứng với F qua G, I là giao điểm của BD và EF. Đường thẳng qua D, song song với BF cắt HI tại K. Chứng minh rằng K là trực tâm của tam giác GDE.

Lời giải. (h.15).



Gọi J là giao điểm của DK và AE; M là giao điểm của HI và AE; N là giao điểm của DG và EF.

Cách 1. Vì $AE \perp BF$ và $\widehat{EGD} = 45^0$ (tính chất 3) nên GN là đường phân giác của tam giác EFG, do đó $\frac{NF}{NE} = \frac{GF}{GE} = \frac{1}{3}$, kết hợp với $IE = IF$ suy ra:

$$NF = \frac{1}{2}IF.$$

Tam giác FHI có GN là đường trung bình nên $GN \parallel HI \Rightarrow GD \parallel HK$ do đó $HGDK$ là hình bình hành $\Rightarrow DK = GH \Rightarrow DK = GF$ dẫn đến $GFDK$ là hình bình hành $\Rightarrow GK \parallel FD \Rightarrow GK \perp ED$. Vậy K là trực tâm của tam giác GDE.

Cách 2. Vì G là trung điểm của HF, I là trung điểm của EF nên M là trọng tâm của tam giác EHF do đó $GM = \frac{1}{3}GE$. Ta cũng có:

$$JE = \frac{1}{3}GE \Rightarrow GM = MJ$$
$$\Rightarrow \Delta HGM = \Delta KJM \text{ (g.c.g)}$$
$$\Rightarrow JK = GH = \frac{1}{2}HF = \frac{1}{2}DJ$$
$$\Rightarrow EK \parallel CJ \Rightarrow EK \parallel CI.$$

Theo tính chất 5 ta có $CI \perp GD$, do đó $EK \perp GD$. Vậy K là trực tâm của tam giác GDE.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh là a. E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CD. Gọi H là giao điểm của BF và AE. Đường thẳng qua F và song song với CH cắt BD tại M. Tính độ dài đoạn BM theo a.

Bài 2. (*Bài toán 25 chuyên mục **Nhiều cách giải cho một bài toán**. Tạp chí TH&TT*)

Cho hình vuông $ABCD$ và điểm M trên cạnh CD sao cho $CM = 2DM$. Gọi E là giao điểm của đường thẳng AM và đường thẳng BD. N là trung điểm của BC. Chứng minh rằng đường thẳng AM vuông góc với đường thẳng NE.

Bài 3. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi I là hình chiếu điểm C trên đường thẳng BF; H là trung điểm của IF. Đường thẳng BF cắt AC tại N. Chứng minh rằng $NH.BF = NF.BI$.

Bài 4. (*Bài T2/418 Tạp chí TH&TT*)

Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Trên mặt phẳng bờ AB có chứa C vẽ tam giác ABD vuông cân tại B. Gọi E là trung điểm của đoạn thẳng BD. Vẽ CM vuông góc với AE tại M. Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng CM. K là giao điểm của đoạn BM và DN. Tính số đo góc BKD.

Bài 5. (*Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội*)

Cho hình vuông $ABCD$. Đường tròn (O) nội tiếp hình vuông $ABCD$ tiếp xúc với các cạnh AB, AD lần lượt tại các điểm E, F. Gọi giao điểm của CE và BF là G.

1) Chứng minh rằng năm điểm A, F, O, G, E cùng nằm trên một đường tròn.

2) Gọi giao điểm FB và đường tròn (O) là M $(M \neq F)$. Chứng minh rằng M là trung điểm của đoạn BG.

3) Chứng minh rằng trực tâm của tam giác GAF nằm trên đường tròn (O).

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10, TRƯỜNG THPT CHUYÊN ĐHSP HÀ NỘI MÔN TOÁN, NĂM HỌC 2024 - 2025

Bài 1. a) *Cho* $A=\sqrt{11-6\sqrt{2}}+\sqrt{11+6\sqrt{2}}$.

Tìm giá trị của A^3.

b) *Cho* b, c *là hai số thực thỏa mãn* $24b+c=-523$. *Biết phương trình* $x^2+bx+c=0$ *có hai nghiệm là hai số nguyên dương. Tìm hai nghiệm đó.*

Lời giải. a) Ta có:

$$A=\sqrt{(3-\sqrt{2})^2}+\sqrt{(3+\sqrt{2})^2}=6$$

$$\Rightarrow A^3=6^3=216.$$

b) Gọi hai nghiệm của phương trình $x^2+bx+c=0$ (1) là p, q. Theo định lí Viète ta có: $p+q=-b$ và $pq=c$.

Từ đó: $24b+c=-523 \Leftrightarrow -24(p+q)+pq=-523$

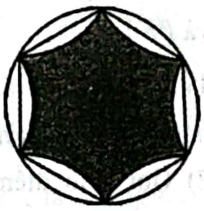
$$\Leftrightarrow (p-24)(q-24)=53=1.53=(-1)(-53) \quad (*).$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $p\le q$ $\Rightarrow q-24\ge p-24$ (**).

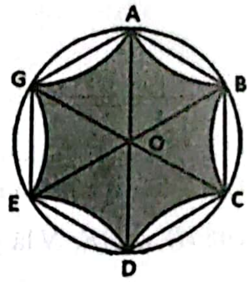
Từ (*) và (**) suy ra: $\left[\begin{array}{l} p-24=1,\ q-24=53 \\ p-24=-53,\ q-24=-1 \end{array}\right.$.

Từ đó tính được $p=25$, $q=77$.

Bài 2. *Bạn Hạnh làm một ngôi sao 6 cánh có dạng hình phẳng tô đậm như hình bên theo cách sau: Trên tờ giấy, bạn vẽ đường tròn bán kính 2cm, ngoại tiếp một lục giác đều. Sau đó, mỗi cung nhỏ căng dây cung là một cạnh của lục giác đều được lấy đối xứng qua cạnh đó. Hình phẳng tô đậm giới hạn bởi 6 cung tròn vừa được vẽ tạo thành ngôi sao bạn định làm. Em hãy giúp bạn Hạnh tìm diện tích ngôi sao 6 cánh đó (lấy giá trị của* π *là 3,14 và giá trị của* $\sqrt{3}$ *là 1,73).*



Lời giải. Hình tròn có bán kính bằng 2 nên diện tích của hình tròn đó là



$$S_1=\pi R^2=4\pi \text{ (đvdt)}.$$

Tam giác đều OAB cạnh bằng 2 nên

$$S_{OAB}=\frac{1}{2}.2.\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}.$$

Từ đó diện tích lục giác đều $ABCDEG$ là:

$$S_{ABCDEG}=6.S_{OAB}=6\sqrt{3}.$$

Diện tích phần màu trắng là:

$$S_2=2(S_1-S_{ABCDEG})\approx 4,36.$$

Vậy diện tích hình ngôi sao 6 cánh là

$$S=S_1-S_2\approx 8,2 \text{ (cm}^2).$$

Bài 3. *Cho tam giác ABC cân tại A. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho DB = 2DC. Đường thẳng qua D song song với AC cắt cạnh AB tại E. Đường thẳng qua E song song với BC cắt cạnh AC tại F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt AD tại M (M khác A).*

a) *Chứng minh tứ giác BDME và tứ giác CDMF là hai tứ giác nội tiếp.*

b) *Chứng minh MB = 2MA.*

c) *Chứng minh* $\widehat{BMD}=2\widehat{CMD}$.

Lời giải. a) Tứ giác $AEMF$ nội tiếp nên $\widehat{AME}=\widehat{AFE}$. Do $EF \parallel BC$ nên $\widehat{AFE}=\widehat{ACB}$.

Mà tam giác ABC cân tại A nên $\widehat{ACB}=\widehat{ABC}$, suy ra $\widehat{AME}=\widehat{ABC}$. Do đó tứ giác $BDME$ nội tiếp.

Tương tự, tứ giác $CDMF$ nội tiếp.

b) ***Cách 1.*** Ta có:

$$\widehat{EMA} = \widehat{EFA} = \widehat{ACB} = \widehat{EDB} = \widehat{EMB}.$$

Từ đó ME là phân giác của góc $\widehat{AMB}$. Suy ra:

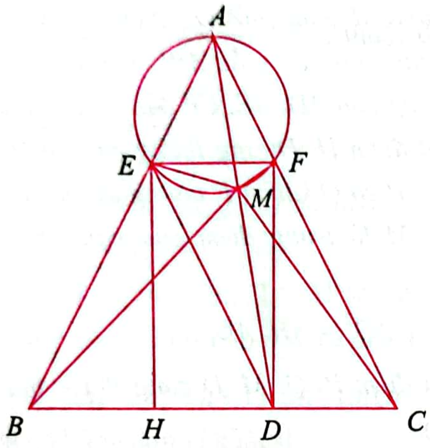
Vậy $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{EA}{EB} = \dfrac{DC}{DB} = \dfrac{1}{2}$. Do đó $MA = 2MB$.

Cách 2. Ta có:

$$\widehat{FAM} = \widehat{MDE} = \widehat{MBE};\ \widehat{BEM} = \widehat{AFM}.$$

Từ đó $\Delta BEM \sim \Delta AFM$ (g.g). Do đó:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{AF}{BE} = \frac{AE}{BE} = \frac{DC}{DB} = \frac{1}{2}.$$



c) Gọi H là trung điểm của BD. Do tam giác EBD cân tại E nên $EH \perp BC$. Hơn nữa, $EF \parallel DH$ và $EF = DH$ nên $EFDH$ là hình chữ nhật. Từ đó, theo câu a) ta có:

$$\widehat{DMC} = \widehat{DFC} = \widehat{HED} = \frac{1}{2}\widehat{BED} = \frac{1}{2}\widehat{BMD}.$$

Vậy $\widehat{BMD} = 2\widehat{CMD}$.

Bài 4. *Tìm số thực x sao cho các số* $x + \sqrt{2024}$ *và* $\dfrac{185}{x} - \sqrt{2024}$ *đều là các số nguyên.*

Lời giải. Đặt $a = x + \sqrt{2024}$, $b = \dfrac{185}{x} - \sqrt{2024}$.

Thế $x = a - \sqrt{2024}$ vào b, ta có:

$$b = \frac{185}{a - \sqrt{2024}} - \sqrt{2024},$$

hay $\quad (a - b)\sqrt{2024} = 2209 - ab.$

Do $\sqrt{2024}$ là số vô tỷ và a, b là các số hữu tỷ, suy ra $a - b = 0$ và $ab = 2209$.

Từ đó suy ra $a = b = 47$ hoặc $a = b = -47$.

Do đó $x = 47 - \sqrt{2024}$ hoặc $x = -47 - \sqrt{2024}$.

Bài 5. *Cho 45 số* $a_1, a_2, \ldots, a_{45}$, *mỗi số chỉ nhận một trong ba giá trị 0; 2; 3. Biết rằng*

$$(a_1 - 2)^2 + (a_2 - 2)^2 + \ldots + (a_{45} - 2)^2 = 65$$

và $\quad (a_1 - 3)^3 + (a_2 - 3)^3 + \ldots + (a_{45} - 3)^3 = -280.$

Hỏi trong 45 số nói trên có bao nhiêu số bằng 0?

Lời giải. Giả sử trong 45 số $a_1, a_2, \ldots, a_{45}$ có m số bằng 0, n số bằng 2 và p số bằng 3.

Từ giả thiết, ta có:

$$\begin{aligned}&(a_1 - 2)^2 + (a_2 - 2)^2 + \ldots + (a_{45} - 2)^2\\ &\quad = (0-2)^2 m + (2-2)^2 n + (3-2)^2 p\\ &\quad = 4m + p;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(a_1 - 3)^3 + (a_2 - 3)^3 + \ldots + (a_{45} - 3)^3\\ &\quad = (0-3)^3 m + (2-3)^3 n + \ldots + (3-3)^3 p\\ &\quad = -27m - n.\end{aligned}$$

Vậy $m + n + p = 45$, $4m + p = 65$, $27m + n = 280$.

Từ đó, tính được $m = 10$. Vậy trong 45 số đã cho có 10 số bằng 0.

VÒNG 2

Bài 1. a) *Cho hai số thực a, b thỏa mãn các điều kiện sau:* $|a| < 2024, |b| < 2024$ *và*

$$\sqrt{a + 2024} + \sqrt{2025 - a} - \sqrt{2024 - a} = \sqrt{b + 2024} + \sqrt{2025 - b} - \sqrt{2024 - b}.$$

Tính giá trị của biểu thức

$$M = a^{2024} + a^{2025} - b^{2024} - b^{2025}.$$

b) *Tồn tại hay không các số hữu tỉ dương a, b sao cho* $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{\sqrt{2024}}$ *?*

Lời giải. a) Điều kiện ở đề bài tương đương với

$$(\sqrt{a+2024}-\sqrt{b+2024})+(\sqrt{2025-a}-\sqrt{2025-b})$$
$$+(\sqrt{2024-b}-\sqrt{2024-a})=0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)\left[\frac{1}{\sqrt{a+2024}+\sqrt{b+2024}}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\sqrt{2025-a}+\sqrt{2025-b}}+\frac{1}{\sqrt{2024-b}+\sqrt{2024-a}}\right]=0.$$

Suy ra $a=b$, do đó $M=0$.

b) Giả sử tồn tại các số hữu tỉ dương a, b sao cho $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{\sqrt{2024}}$. Ta có:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{\sqrt{2024}}$$
$$\Leftrightarrow a+b+2\sqrt{ab}=\sqrt{2024}$$
$$\Leftrightarrow a+b=\sqrt{2024}-2\sqrt{ab}\quad (*).$$

Cách 1. Bình phương hai vế của (*), biến đổi ta được: $\sqrt{2024}=\dfrac{2024+(a+b)^2-4ab}{2(a+b)}$ (1).

Dễ thấy VT(1) là số vô tỷ, trong khi VP(1) là số hữu tỉ, vô lý.

Cách 2. Sử dụng bổ đề (bạn đọc tự chứng minh): *Nếu x, y là hai số hữu tỉ phân biệt không âm sao cho* $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ *là số hữu tỉ thì* $\sqrt{x}$ *và* $\sqrt{y}$ *đều là các số hữu tỉ.*

Từ (*) ta thấy $\sqrt{2024}-2\sqrt{ab}\neq 0$, áp dụng bổ đề suy ra $\sqrt{2024}$ là số hữu tỷ, vô lý.

Vậy không tồn tại a, b hữu tỉ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 2. *Giả sử ta có quy tắc * mà với mỗi cặp số nguyên dương (a ; b), ta luôn xác định được chỉ một số nguyên dương tương ứng kí hiệu là a * b, sao cho ba điều kiện sau được thỏa mãn:*

i) *a*a = a với mọi số nguyên dương a;*

ii) *a*b = b*a với mọi số nguyên dương a và b;*

iii) *a*b = (a − b)*b với mọi số nguyên dương a và b mà a > b.*

a) *Tính giá trị của 16*2024.*

b) *Hãy chỉ ra một quy tắc * thỏa mãn ba điều kiện trên.*

Lời giải. Ta có: $16*2024=2024*16$

$$=(2024-16)*16=(2024-2.16)*16=\ldots$$
$$=(2024-126.16)*16=8*16=16*8=8*8=8.$$

b) Quy tắc $a*b=$ ƯCLN(a, b) thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nhận xét. *Có thể chứng minh ngược lại, quy tắc * thỏa mãn yêu cầu bài toán khi và chỉ khi*

$$a*b=\text{ƯCLN}(a, b).$$

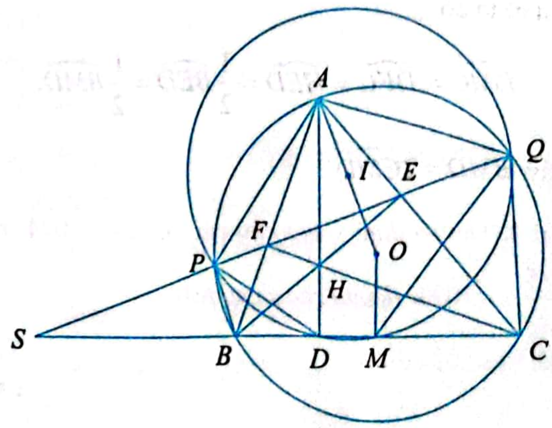
Bài 3. *Cho đường tròn (O; R) và dây cung BC cố định không đi qua tâm O. Điểm A di động trên (O; R) sao cho tam giác ABC nhọn và AB ≠ AC. Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H. Đường thẳng EF cắt (O; R) tại hai điểm P và Q (điểm F nằm giữa hai điểm P và E). Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh*

a) $AP^2=AQ^2=AH.AD$.

b) *Bốn điểm P, Q, M, D cùng thuộc một đường tròn (ω).*

c) *Tâm I của đường tròn (ω) chạy trên một đường tròn cố định.*

Lời giải.



a) Tứ giác $BCEF$ nội tiếp nên $\widehat{AFQ}=\widehat{ACB}$.

Suy ra $\widehat{AFP}=180^\circ-\widehat{ACB}=\widehat{APB}$. Suy ra:

$$\Delta AFP\sim\Delta APB(\text{g.g}),\text{ dẫn đến } AP^2=AF.AB.$$

Lại có $\Delta AFH \sim \Delta ADB$, dẫn đến $AF.AB = AH.AD$.

Do đó $AP^2 = AH.AD$.

Tương tự, $AQ^2 = AP^2 = AH.AD$.

b) Gọi S là giao điểm của PQ và BC. Sử dụng phương tích, để ý rằng $EFDM$ nội tiếp đường tròn Euler của ΔABC, ta có:

$$SP.SQ = SB.SC = SE.SF = SD.SM.$$

Từ đó $SP.SQ = SD.SM$, suy ra bốn điểm P, D, M, Q cùng thuộc một đường tròn.

c) Vì I thuộc trung trực của PQ nên I thuộc OA.

Do I thuộc trung trực của MD nên I thuộc đường trung bình hình thang $ADMO$. Do đó I là trung điểm của OA. Suy ra $OI = \frac{R}{2}$. Vậy I thuộc đường tròn tâm O, bán kính $\frac{R}{2}$.

Bài 4. *Với $n \in \mathbb{N}^*$, ta đặt $f(n)$ là tổng các chữ số của số $3n^2 + n + 1$.*

(Ví dụ: với $n = 3$ thì $3n^2 + n + 1 = 31$ và $f(3) = 4$).

Tìm giá trị nhỏ nhất có thể của $f(n)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

Lời giải. Dễ thấy $3n^2 + n + 1 = 2n^2 + n(n+1) + 1$ là số lẻ nên có hàng đơn vị khác 0.

Mà $3n^2 + n + 1 > 1$ nên $f(n) \geq 2$.

Nếu $f(n) = 2$ thì $3n^2 + n + 1 = \overline{10\cdots01}$, trong đó chữ số đầu và chữ số cuối bằng 1, các chữ số còn lại (nếu có) phải bằng 0.

Do đó $3n^2 + n + 1 = 10^k + 1$, hay $n(3n+1) = 10^k$.

Vì $(n, 3n+1) = 1$ nên ta có các trường hợp sau.

TH1. $n = 1$, $3n + 1 = 10^k \Rightarrow 4 = 10^k$ (vô lý).

TH2. $n = 2^k$, $3n + 1 = 5^k \Rightarrow 3.\,2^k + 1 = 5^k$.

Nếu $k = 1$ thì $3.2 + 1 = 5$ (vô lý).

Nếu $k \geq 2$ thì

$$5^k > 4^k \geq 4.2^k = 3.2^k + 2^k > 3.2^k + 1 \text{ (vô lý).}$$

Vậy $f(n) \geq 3$. Mặt khác, $f(8) = 3$.

Do đó giá trị nhỏ nhất của $f(n)$ là 3.

Bài 5. *Cho bảng vuông kích thước 8×8 được chia thành 8 hàng, 8 cột, 64 ô vuông đơn vị có cùng kích thước. Ta lát kín bảng đó bằng các domino màu đen và domino màu trắng (mỗi domino như thế là hình gồm 2 ô vuông đơn vị có chung cạnh) thỏa mãn điều kiện sau:*

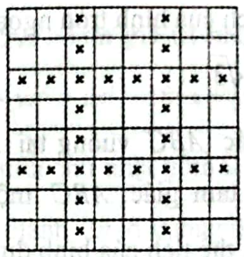
i) Mỗi domino phủ đúng 2 ô vuông đơn vị của bảng;

ii) Hai domino không cùng phủ một ô vuông đơn vị của bảng;

iii) Mọi hình vuông 4 ô vuông đơn vị của bảng đều có ít nhất một ô vuông đơn vị được phủ bởi một domino màu đen.

Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất sao cho tồn tại một cách lát bảng ban đầu thỏa mãn ba điều kiện trên mà trong cách lát đó ta sử dụng đúng k domino màu đen.

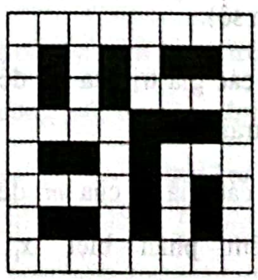
Lời giải. Ta đánh dấu x vào một số ô vuông đơn vị của bảng đã cho như hình vẽ



Phần còn lại gồm các ô vuông đơn vị không được đánh dấu là hợp của 9 hình vuông 2×2. Kí hiệu các hình vuông này là $H_1, H_2, \ldots, H_9$.

Xét một cách lát thỏa mãn yêu cầu, dễ thấy mỗi hình vuông H_i đều phải có 1 domino đen phủ ít nhất 1 ô vuông đơn vị của nó. Do đó tổng số domino đen không nhỏ hơn 9.

Ta chỉ ra một cách lát với 9 domino màu đen và 23 domino màu trắng thỏa mãn đề bài, từ đó suy ra giá trị nhỏ nhất của k là 9.



NGUYỄN THANH HỒNG
(GV THPT chuyên, ĐHSP Hà Nội)

Giới thiệu

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10, TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG, NAM ĐỊNH, NĂM HỌC 2024 - 2025

VÒNG 1

(*Thời gian làm bài: 120 phút, dành cho học sinh thi vào các lớp chuyên tự nhiên*)

Câu 1. (2,0 *điểm*)

1) Tìm điều kiện xác định của biểu thức

$$P=\sqrt{x+2024}+\frac{2025}{x^2-2x+1}.$$

2) Cho đường thẳng $y=2x+3$ cắt parabol $y=x^2$ tại hai điểm phân biệt. Tính tổng tung độ của hai điểm đó.

3) Tính diện tích của hình tròn ngoại tiếp tam giác đều cạnh bằng $\sqrt{3}$.

4) Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=6$, $AC=8$. Quay tam giác ABC một vòng quanh cạnh AC. Tính thể tích của hình được tạo thành.

Câu 2. (1,5 *điểm*) Xét biểu thức

$$A=\frac{\sqrt{x}+4}{x+5\sqrt{x}+4}-\frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}+\frac{3\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+1} \text{ với } x\geq 0.$$

1) Rút gọn biểu thức A.

2) Tìm giá trị lớn nhất của A.

Câu 3. (2,5 *điểm*)

1) Cho phương trình $x^2-2(m-1)x+2m-5=0$ (với m là tham số).

a) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm trái dấu.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ sao cho $(x_2^2-2mx_2+2m)(2x_1-5)=2024$.

2) Giải phương trình

$$x^2+5x-4-2(x+1)\sqrt{3x-1}=0.$$

Câu 4. (3,0 *điểm*)

Cho đường tròn (O) với đường kính BC. Trên tia đối của tia CB lấy điểm D, gọi DA là tiếp tuyến của đường tròn (O) với A là tiếp điểm. Kẻ đường thẳng qua A vuông góc với BC tại M và cắt đường tròn (O) tại E (E khác A). Gọi AH là đường cao của tam giác ABE, AH cắt BC tại F. Gọi I là trung điểm của đoạn AH, đường thẳng BI cắt đường tròn (O) tại K (K khác B), AK cắt BD tại N.

1) Chứng minh các điểm E,M,F,H cùng thuộc một đường tròn và $DB.DC=DM.DO$.

2) Chứng minh $AFEC$ là hình thoi và $\widehat{BAH}=\widehat{ADB}$.

3) Chứng minh $MK\perp AN$ và $MD=2MN$.

Câu 5. (1,0 *điểm*)

1) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\sqrt{4x^2+(y+2)(x-y)}+2\sqrt{xy}=4y\\ \sqrt{x-1}+\sqrt{5y-1}=3x^2-7x+6.\end{cases}$$

2) Xét ba số dương a, b, c thay đổi và thỏa mãn điều kiện $abc=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$S=\frac{a}{a^3+3}+\frac{b}{b^3+3}+\frac{c}{c^3+3}.$$

VÒNG 2

(Thời gian làm bài: 150 phút, dành cho học sinh thi vào chuyên Toán và chuyên Tin)

Câu 1. (2,0 *điểm*)

a) Cho $x, y > 1$ thỏa mãn $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{y+1} = \dfrac{5}{xy+4}$.

Tính giá trị của biểu thức $A = x^3 + y^3 + 9xy$.

b) Xét đa thức $P(x) = x^2 + ax + b$ với a, b là các hệ số nguyên. Chứng minh rằng nếu $P(1+\sqrt{2}) = 2024$ thì $P(1-\sqrt{2}) = 2024$.

Câu 2. (2,0 *điểm*)

a) Giải phương trình

$$x^2 = (2x-9)\left(\sqrt{x^2+2x-8} - 2\right).$$

b) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2(x-y) + (y-1)^2 = 0 \\ 4x^3 - 9x^2 + 7x + 3y^2 - 10y + 5 = 0. \end{cases}$$

Câu 3. (3,0 *điểm*)

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) và $AB < AC$. Ba đường cao của tam giác ABC là AD, BE, CF đồng quy tại điểm H. Gọi AQ là đường kính của đường tròn (O), đường thẳng HQ cắt cạnh BC tại điểm M. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt đường tròn (O) tại điểm N và cắt đường thẳng AM tại điểm K (N, K khác A), đường thẳng AN cắt đường thẳng BC tại điểm P. Chứng minh rằng:

a) HQ vuông góc với AN và $\widehat{FDH} = \widehat{HDE}$, $\widehat{FDK} = \widehat{NDE}$.

b) Ba điểm P, E, F thẳng hàng.

c) $PE.PF < PM^2$.

Câu 4. (1,5 điểm)

a) Chứng minh với mọi số nguyên dương n, số $n^5 - 6n + 33$ không là số chính phương.

b) Cho các số nguyên dương a, b thỏa mãn điều kiện $a+b+1$ là ước nguyên tố của $4(a^2+ab+b^2) - 3$. Chứng minh rằng $a+b-1$ là ước của $4(a^2+ab+b^2) - 3$.

Câu 5. (1,5 *điểm*)

a) Xét x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xy + yz + zx \le xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = xy^2 + yz^2 + zx^2 - 18(x+y+z)$.

b) Cho bảng hình chữ nhật gồm 2 dòng và n cột, được chia đều thành $2n$ ô vuông đơn vị. Ban đầu, trong mỗi ô vuông đơn vị người ta đặt đúng một viên bi có kích thước rất nhỏ. Ta gọi mỗi biến đổi (T) là việc thực hiện các thao tác sau: Chọn ra hai ô vuông đơn vị tùy ý có chứa bi, chuyển từ mỗi ô vuông đó đi một viên bi sang ô vuông đơn vị liền kề (hai ô vuông đơn vị gọi là liền kề nếu chúng có chung cạnh). Tìm tất cả các số nguyên dương n để sau hữu hạn lần chỉ thực hiện biến đổi (T), ta có thể đưa hết tất cả các viên bi có trên bảng lúc đầu về nằm trong cùng một ô vuông đơn vị của bảng.

TRẦN XUÂN ĐÁNG
(5/7/136 Phan Đình Phùng, TP Nam Định, tỉnh Nam Định)

Giới thiệu

DIỄN ĐÀN DẠY HỌC TOÁN

THEO CHƯƠNG TRÌNH VÀ SGK MỚI

TỪ MỘT BÀI TOÁN TRONG SÁCH BÀI TẬP TOÁN 10

NGUYỄN CÔNG CHUẨN

(GV THPT chuyên, Đại học Vinh, Nghệ An)

Trong chương trình giáo dục phổ thông 2018 môn toán lớp 10, kiến thức hình học được xây dựng theo mạch kiến thức: hình học tổng hợp, hình học vectơ và hình học tọa độ. Do đó trong dạy học giải bài tập toán giáo viên cần quan tâm bồi dưỡng cho học sinh năng lực nhìn nhận bài toán theo nhiều góc độ khác nhau, tạo cơ hội cho học sinh củng cố các phương pháp khác nhau để giải toán, góp phần bồi dưỡng cho học sinh năng lực tư duy biện chứng, nhìn nhận vấn đề trong mối quan hệ tương hỗ lẫn nhau, xác lập mối liên hệ giữa các chương mục khác nhau theo mạch kiến thức: tổng hợp, vectơ, tọa độ. Thấy được nét đẹp của toán học thông qua các biến hóa của các diễn đạt hình học. Đồng thời quan tâm khai thác kết quả bài toán ta sẽ thu được nhiều kết quả thú vị. Chúng ta bắt đầu bằng bài toán sau đây:

Bài toán 1. (BT4.15, SBT Toán 10, tập 1, tr54, Bộ sách Kết nối tri thức với cuộc sống)

Cho tam giác ABC có trực tâm H, trọng tâm G và tâm đường tròn ngoại tiếp O.

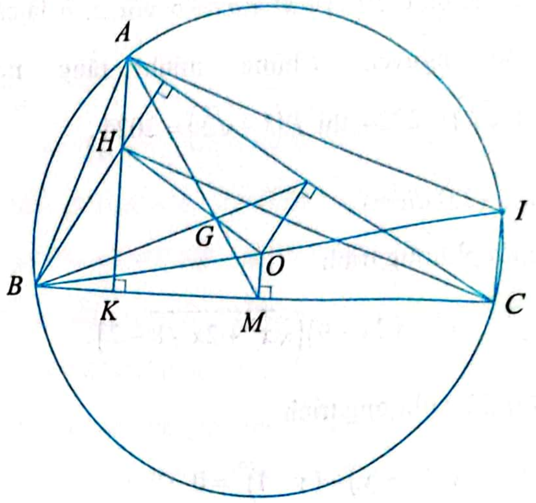
a) Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$.

b) Chứng minh rằng $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$.

c) Chứng minh rằng ba điểm G, H, O *cùng thuộc một đường thẳng (đường thẳng Euler).*

Lời giải. Đây là bài toán khá quen thuộc trong chương trình môn toán lớp 10. Đọc đề bài toán ta có thể nhận ra ngay ý tưởng của các tác giả là sử dụng phương pháp vectơ để giải. Hai ý đầu là gợi ý để giải ý cuối. Tuy nhiên ta có thể giải bài toán này theo mạch kiến thức phương pháp tổng hợp, phương pháp vectơ và phương pháp tọa độ.

Cách 1. Dùng phương pháp tổng hợp



Để chứng minh ba điểm G, H, O thẳng hàng ta quy về chứng minh $\widehat{OGM} = \widehat{HGA}$ (M là trung điểm của BC).

Theo giả thiết ta có $\dfrac{GM}{GA} = \dfrac{1}{2}$ và $\widehat{OMG} = \widehat{HAG}$ (so le trong). Bài toán quy về chứng minh

$$\Delta GAH \sim \Delta GMO \text{ hay } OM = \frac{1}{2}AH.$$

Gọi I là điểm đối xứng với B qua O. Từ tính chất đường trung bình, ta có $OM = \dfrac{1}{2}CI$.

Tứ giác $AHCI$ là hình bình hành nên $AH = CI = 2OM$. Từ đó ta suy ra điều phải chứng minh.

Cách 2. Dùng phương pháp vectơ

a) Theo trên ta thấy ngay $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$.

b) Ta có:

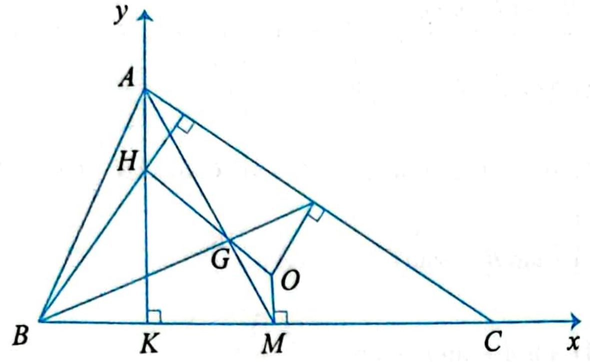
$$\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

c) Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}.$$

Kết hợp với kết quả trên ta suy ra $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$. Từ đó ba điểm G,H,O cùng thuộc một đường thẳng.

Cách 3. Dùng phương pháp tọa độ



Gọi K là chân đường cao hạ từ đỉnh A của ΔABC. Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho

$$K\equiv O(0;0),\ B(b;0),\ C(c;0),\ A(0;a).$$

Theo giả thiết G là trọng tâm tam giác ABC nên $G\left(\frac{b+c}{3};\frac{a}{3}\right)$. Do $H\in AK$ nên $H(0;x)$. Tìm x từ điều kiện:

$$\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow ax+bc=0\Leftrightarrow x=-\frac{bc}{a}.$$

Suy ra $H\left(0;-\frac{bc}{a}\right)$. Vì M là trung điểm của BC nên $M\left(\frac{b+c}{2};0\right)$. Theo giả thiết $OM\perp BC$ nên $O\left(\frac{b+c}{2};y\right)$. Tìm y từ điều kiện:

$$OB=OA\Leftrightarrow\left(\frac{b-c}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{b+c}{2}\right)^2+(y-a)^2$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{a^2+bc}{2a}\Rightarrow O\left(\frac{b+c}{2};\frac{a^2+bc}{2a}\right).$$

a) Ta có:

$$\overrightarrow{AH}=\left(0;-\frac{a^2+bc}{a}\right),\overrightarrow{OM}=\left(0;-\frac{a^2+bc}{2a}\right),$$

suy ra $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{OM}$.

b) Ta có: $\overrightarrow{OH}=\left(-\frac{b+c}{2};-\frac{a^2+3bc}{2a}\right)$;

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\left(-\frac{b+c}{2};\frac{bc-a^2}{2a}\right)$$
$$+\left(\frac{b-c}{2};-\frac{a^2+bc}{2a}\right)+\left(\frac{c-b}{2};-\frac{a^2+bc}{2a}\right)$$
$$=\left(-\frac{b+c}{2};-\frac{a^2+3bc}{2a}\right).$$

Suy ra $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$.

c) Ta có:

$$\overrightarrow{GO}=\left(\frac{b+c}{6};\frac{a^2+bc}{6a}\right);\overrightarrow{GH}=\left(\frac{-b-c}{3};\frac{-a^2-bc}{3a}\right)$$

$\Rightarrow\overrightarrow{GH}=-2\overrightarrow{GO}\Rightarrow G,H,O$ cùng thuộc một đường thẳng.

Khai thác kết quả bài toán này ta thu được rất nhiều kết quả thú vị, chẳng hạn:

Áp dụng tính chất $OH^2=\overrightarrow{OH}^2$ và $2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=OA^2+OB^2-AB^2$ ta có:

$$OH^2=\overrightarrow{OH}^2=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)^2$$
$$=OA^2+OB^2+OC^2+2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA}$$
$$=OA^2+OB^2+OC^2+OA^2+OB^2-AB^2+OB^2+OC^2-BC^2+OC^2+OA^2-CA^2$$
$$=9R^2-\left(AB^2+BC^2+CA^2\right).$$

Đặt $a=BC,b=CA,c=AB$ ta thu được bài toán:

Bài toán 2. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$; H là trực tâm tam giác ABC. Chứng minh rằng: $OH^2=9R^2-\left(a^2+b^2+c^2\right)$.*

Từ kết quả $OG=\frac{1}{3}OH$, $HG=\frac{2}{3}OH$ ta có ngay bài toán sau:

Bài toán 3. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$ có trực tâm H, trọng tâm G. Chứng minh rằng:* a) $OG^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2)$;

b) $HG^2 = 4R^2 - \frac{4}{9}(a^2+b^2+c^2)$.

Để ý rằng $OH^2 \geq 0$. Dấu bằng xảy ra khi $H \equiv O$ hay tam giác ABC đều nên ta có bài toán:

Bài toán 4. *Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta luôn có $a^2+b^2+c^2 \leq 9R^2$.*

Lại có $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$, ta đi đến bài toán:

Bài toán 5. *Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta luôn có $ab+bc+ca \leq 9R^2$.*

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có:

$$(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2) \leq 27R^2$$

$$\Rightarrow a+b+c \leq 3\sqrt{3}R.$$

Ta đi đến bài toán:

Bài toán 6. *Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta luôn có $a+b+c \leq 3\sqrt{3}R$.*

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \leq \left(\frac{3\sqrt{3}R}{3}\right)^3 = 3\sqrt{3}R^3.$$

Ta đi đến bài toán sau:

Bài toán 7. *Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta luôn có $abc \leq 3\sqrt{3}R^3$.*

Sử dụng các kết quả vừa thu được và áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

Bài toán 8. *Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta luôn có:*

a) $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{R^2}$;

b) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{\sqrt{3}}{R}$;

c) $\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c} \geq \frac{2\sqrt{3}}{R}$, *với* $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Từ các kết quả trên kết hợp với định lí sin ta có ngay bài toán sau:

Bài toán 9. *Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta luôn có:*

1) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4}$;

2) $\sin A \sin B + \sin B \sin C + \sin C \sin A \leq \frac{9}{4}$;

3) $a\sin B + b\sin C + c\sin A \leq \frac{9R}{2}$;

4) $\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$;

5) $\sin A \sin B \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$;

6) $\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}+\frac{1}{\sin^2 B} \geq 4$;

7) $\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin B} \geq 2\sqrt{3}$.

Liên hệ với định lí côsin ta có ngay bài toán sau:

Bài toán 10. *Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta luôn có:*

1) $bc\cos A + ca\cos B + ab\cos C \leq \frac{9R^2}{2}$;

2) $\cot A + \cot B + \cot C \leq \frac{9R^2}{4S}$;

Áp dụng công thức tính độ dài đường trung tuyến, ta có $m_a^2+m_b^2+m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$ và áp dụng các bất đẳng thức Cauchy, Bunyakovsky ta giải được bài toán

Bài toán 11. *Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta luôn có:*

1) $m_a^2+m_b^2+m_c^2 \leq \frac{27}{4}R^2$;

2) $m_a+m_b+m_c \leq \frac{9}{2}R$;

3) $m_a \sin A + m_b \sin B + m_c \sin C \le \frac{9\sqrt{3}R}{4}$;

4) $m_a m_b m_c \le \frac{27R^3}{8}$;

5) $\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c} \ge \frac{2}{R}$

Liên hệ với công thức tính diện tích tam giác ta có $S = pr = \frac{abc}{4R}$ (r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC) và

$$h_a + h_b + h_c = 2S\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = 2\frac{abc}{4R}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$
$$= \frac{ab+bc+ca}{2R}$$

ta thu được bài toán

Bài toán 12. *Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta luôn có:*

a) $S \le \frac{3\sqrt{3}}{2}Rr$;

b) $S \le \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$;

c) $h_a + h_b + h_c \le \frac{9R}{2}$.

Áp dụng công thức

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = pr = (p-a)r_a$$
$$= (p-b)r_b = (p-c)r_c$$

với r_a, r_b, r_c lần lượt là bán kính đường tròn bàng tiếp các góc A, B, C và kết quả thu được ở trên ta giải được bài toán sau:

Bài toán 13. *Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta luôn có:* $r_a + r_b + r_c \le \frac{9R^2}{4r}$.

Lời giải. Ta có:

$$4r.r_a = 4\frac{S}{p}.\frac{S}{p-a} = 4\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p(p-a)}$$
$$= (a+c-b)(a+b-c).$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta thu được:

$$4r.r_a \le \left(\frac{a+c-b+a+b-c}{2}\right)^2 = a^2.$$

Lập luận tương tự ta có $4r.r_b \le b^2, 4r.r_c \le c^2$.

Suy ra: $4r.r_a + 4r.r_b + 4r.r_c \le a^2 + b^2 + c^2 \le 9R^2$

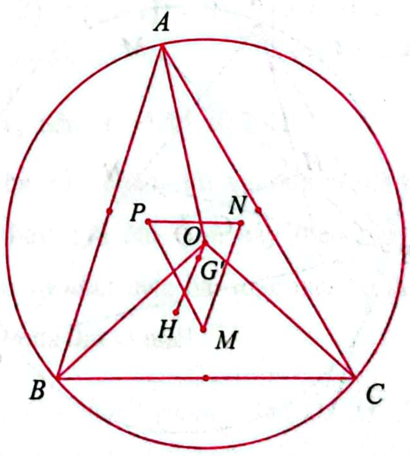
hay $r_a + r_b + r_c \le \frac{9R^2}{4r}$.

Dấu bằng xảy ra khi tam giác ABC đều.

Tiếp tục khai thác ta sẽ thu được nhiều kiết quả thú vị nữa, bạn đọc làm tiếp nhé. Sử dụng kết quả ***bài toán 1*** ta có thể giải được rất nhiều bài toán hay và khó. Đặc biệt là các bài toán trong hệ tọa độ Oxy, nếu giả thiết bài toán có liên quan đến trọng tâm G, trực tâm H và tâm đường tròn ngoại tiếp O của tam giác ABC. Khi biết tọa độ của hai trong ba điểm trên và sử dụng kết quả $\overrightarrow{IH} = 3\overrightarrow{IG}$ ta sẽ tìm được tọa độ điểm còn lại và đây chính là chìa khóa giúp ta giải được bài toán.

Bài toán 14. *Cho tam giác ABC không cân, nội tiếp đường tròn tâm O và có trực tâm H. Gọi M, N, P lần lượt là trọng tâm các tam giác OBC, OCA, OAB và G' là trọng tâm của tam giác MNP. Chứng minh ba điểm O, H, G' thẳng hàng.*

Lời giải.



Do M, N, P lần lượt là trọng tâm các tam giác OBC, OCA, OAB nên ta có:

$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$, $\overrightarrow{ON}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}\right)$,

$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$.

Suy ra: $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$.

Lại có: $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}=3\overrightarrow{OG'}$,

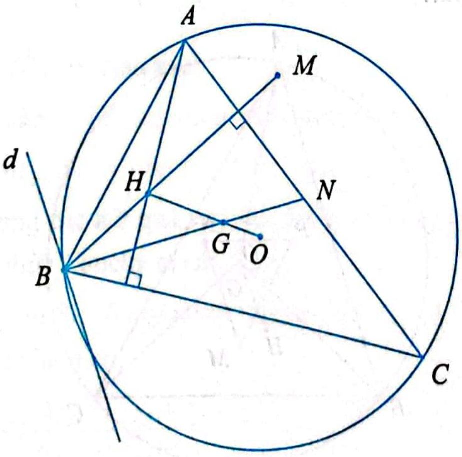
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$.

Do đó $\overrightarrow{OG'}=\frac{2}{9}\overrightarrow{OH}$. Đến đây ta thu được điều phải chứng minh.

Chú ý: Gọi G là trọng tâm tam giác ABC ta có thể yêu cầu chứng minh ba điểm O,G,G' thẳng hàng.

Bài toán 15. *Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm lần lượt là $I(4;0), G\left(\frac{11}{3};\frac{1}{3}\right)$. Tìm tọa độ các đỉnh A,B,C của tam giác ABC, biết rằng đỉnh B nằm trên đường thẳng $d: 2x+y-1=0$ và điểm $M(4;2)$ nằm trên đường cao kẻ từ đỉnh B của tam giác ABC.*

Lời giải.



Gọi H là trực tâm tam giác ABC, ta có:

$$\overrightarrow{IH}=3\overrightarrow{IG}\Rightarrow H(3;1).$$

Phương trình đường cao BH đi qua $H(3;1), M(4;2)$ nên có dạng:

$$\frac{x-3}{4-3}=\frac{y-1}{2-1}\Leftrightarrow x-y-2=0.$$

Tọa độ đỉnh B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}x-y-2=0\\2x+y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}\Rightarrow B(1;-1).$$

Gọi N là trung điểm của AC. Ta có:

$$\overrightarrow{BN}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BG}\Rightarrow N(5;1).$$

Ta có $\vec{n}_{AC}=\vec{u}_{BH}=(1;1)$. Phương trình AC: $1(x-5)+1(y-1)=0\Leftrightarrow x+y-6=0$.

Do điểm A thuộc đường thẳng AC nên $A(t;6-t)$, kết hợp với $I(4;0)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC nên

$$IA^2=IB^2\Leftrightarrow(t-4)^2+(6-t)^2=10\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\\t=7\end{array}\right..$$

- Với $t=3$ ta có $A(3;3), C(7;-1)$.

- Với $t=7$ ta có $A(7;-1), C(3;3)$.

Vậy $A(3;3), B(1;-1), C(7;-1)$

hoặc $A(7;-1), B(1;-1), C(3;3)$.

Bài toán 16. *Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có phương trình đường thẳng chứa các đường cao kẻ từ các đỉnh A,B,C lần lượt có phương trình là $x-2y=0, x-2=0, x+y-3=0$. Tìm tọa độ các đỉnh A,B,C biết rằng bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC bằng $\sqrt{10}$ và đỉnh A có hoành độ âm.*

Lời giải. Gọi H,G,I lần lượt là trực tâm, trọng tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Từ giả thiết ta có ngay $H(2,1)$.

Vì đỉnh B thuộc đường thẳng $x-2=0$ nên $B(2;m)$.

Cạnh AB đi qua $B(2;m)$ và vuông góc với đường cao kẻ từ C nên có phương trình:

$$1(x-2)-1(y-m)=0 \Leftrightarrow x-y-2+m=0.$$

Tọa độ đỉnh A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x-y-2+m=0 \\ x-2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4-2m \\ y=2-m \end{cases}$$

$\Rightarrow A(4-2m;2-m)$. Vì đỉnh A có hoành độ âm nên $4-2m<0 \Leftrightarrow m>2$.

Cạnh AC đi qua $A(4-2m;2-m)$ và vuông góc với đường cao kẻ từ đỉnh B nên có phương trình:

$$y-2+m=0.$$

Tọa độ đỉnh C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x+y-3=0 \\ y-2+m=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+m \\ y=2-m \end{cases} \Rightarrow C(1+m;2-m).$$

Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là

$$G\left(\frac{7-m}{3};\frac{4-m}{3}\right).$$

Ta có $\overrightarrow{GI}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{GH} \Rightarrow I\left(\frac{5-m}{2};\frac{3-m}{2}\right)$. Vì bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC bằng $\sqrt{10}$ nên

$$IB=\sqrt{10} \Leftrightarrow \left(\frac{m-1}{2}\right)^2+\left(\frac{3m-3}{2}\right)^2=10 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=-1 \end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện ta được $m=3$. Suy ra tọa độ ba đỉnh của tam giác là:

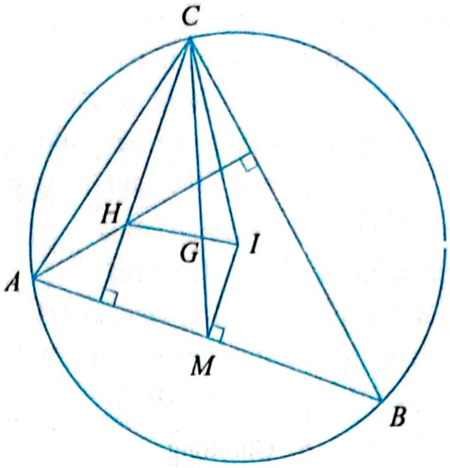
$$A(-2;-1), B(2;3), C(4;-1).$$

Bài toán 17. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trực tâm $H(3;2)$ và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $I(2;1)$. Phương trình đường thẳng chứa cạnh AB: $x-y+1=0$. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết đỉnh B có hoành độ lớn hơn hoành độ của đỉnh A.*

Lời giải.

Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Ta có:

$$\overrightarrow{IG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IH} \Rightarrow G\left(\frac{7}{3};\frac{4}{3}\right).$$



Đường trung trực của đoạn thẳng AB đi qua điểm $I(2;1)$ và vuông góc với AB nên có phương trình:

$$1(x-2)+1(y-1)=0 \Leftrightarrow x+y-3=0.$$

Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x+y-3=0 \\ x-y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow M(1;2).$$

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{MG} \Rightarrow C(5;0)$. Ta có $IC=\sqrt{10}$.

Phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $(x-2)^2+(y-1)^2=10$.

Tọa độ các đỉnh A và B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} (x-2)^2+(y-1)^2=10 \\ x-y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, y=0 \\ x=3, y=4 \end{array}\right..$$

Do $x_A<x_B$ nên $A(-1;0), B(3;4)$.

Kết thúc bài viết chúng tôi xin đưa ra bài tập sau. Các bạn hãy giải bài toán này theo nhiều cách khác nhau và khai thác bài toán này để thu được những kết quả thú vị nhé!

Bài toán. *Cho hình vuông $ABCD$, M là trung điểm của BC, N là điểm nằm giữa A và C. Đặt $x=\frac{AN}{AC}$. Tìm x thỏa mãn $AM \perp BN$.*

CÁC LỚP THCS

Bài T1/566 (Lớp 6). Cho tổng

$$S = 3a^2 + 3a - 2027,$$

trong đó a là số nguyên. Tìm a để S là lập phương của một số nguyên.

HUỲNH THANH TÂM

(Bưu điện thị xã An Nhơn, Bình Định)

Bài T2/566 (Lớp 7). Cho tam giác nhọn ABC. D là điểm nằm trong tam giác ABC. Đường thẳng qua D song song với AB cắt cạnh AC ở M. Trên tia đối của tia MD lấy điểm E sao cho $ME = MD$. Chứng minh rằng $AE < AD$.

NGUYỄN ĐỨC TẤN

(TP. Hồ Chí Minh)

Bài T3/566. Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ sao cho

$$(|x-y|+|x+y|)^5 = x^5 + |y|^5 + 30.$$

NGUYỄN HÀM THÀNH

(GV THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, Nghệ An)

Bài T4/566. Cho tam giác ABC có các trung tuyến BN và CP vuông góc với nhau. Chứng minh $3BC < AB + AC \le \sqrt{10}BC$.

PHAN QUANG LINH

(GV CLB CMATH Hà Nội)

Bài T5/566. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 2025$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^3}{a^2+b^2+ab} + \frac{b^3}{b^2+c^2+bc} + \frac{c^3}{c^2+a^2+ca}.$$

TẠ VĂN ĐỨC

(GV THCS Yên Lạc, Vĩnh Phúc)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/566. Giải phương trình

$$x\sqrt[3]{\frac{9(x^3+1)(2x^3+1)}{2}} = x^2 + x\sqrt{x} + 1.$$

TRẦN XUÂN HÒA

(GV THPT Triệu Thái, Lập Thạch, Vĩnh Phúc)

Bài T7/566. Chứng minh rằng đa thức

$$x^{9999} + x^{8888} + x^{7777} + x^{6666} + x^{5555}$$

chia hết cho đa thức $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

TRƯƠNG VĂN HÒA

(GV THPT Thọ Xuân 4, Thanh Hóa)

Bài T8/566. Cho tam giác ABC nhọn. Qua các đỉnh A, B, C lần lượt kẻ các đường thẳng a, b, c sao cho $a \perp AB$, $b \perp BC$, $c \perp CA$. Biết rằng $D = a \cap b$, $E = b \cap c$, $F = c \cap a$. Chứng minh

$$S_{DEF} \ge 3S_{ABC}$$

trong đó S_{XYZ} là kí hiệu diện tích tam giác XYZ.

LA ĐẠI CƯƠNG

(GV THPT Cam Lộ, Quảng Trị)

Bài T9/566. Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $3(4x^2 + 8xy + 3y^2 - 3x + 3)$ và $5(2x^2 + 4xy + 7y^2 - 7x + 7)$ đều là các số chính phương.

HOÀNG LÊ NHẬT TÙNG

(Trường THPT Khoa học Giáo dục, ĐHQG Hà Nội)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/566. Cho (a_n) là dãy số xác định bởi

$$a_1 = 1 \text{ và } a_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{n^2+2n}a_n + n^3 + 1, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Tìm số hạng tổng quát a_n của dãy và tính $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n^4}$.

NGUYỄN VIỆT HÙNG

(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T11/566. Tìm hàm $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x + yf(x)) + f(xy) = f(x) + f(2022y)$$

với mọi số thực x, y.

ĐỖ LÊ HẢI THỤY

(GV THPT chuyên Bảo Lộc, Lâm Đồng)

Bài T12/566. Cho tam giác ABC, O, I theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác. K, L theo thứ tự là giao điểm của IB, IC và AC, AB. X là giao điểm của đường thẳng qua K vuông góc với OB và đường thẳng qua L vuông góc với OC. Y, Z theo thứ tự là điểm đối xứng của X qua CL, BK. Chứng minh OI đi qua trực tâm của tam giác XYZ.

NGUYỄN MINH HÀ (*Hà Nội*)

Bài L1/566. Một vệ tinh địa tĩnh ở độ cao 36600 km so với đài phát hình trên mặt đất nằm trên đường thẳng nối vệ tinh và tâm Trái Đất. Coi Trái Đất là một hình cầu có bán kính R = 6400 km. Vệ tinh nhận sóng truyền hình từ đài phát rồi phát lại tức thời tín hiệu đó về Trái Đất. Biết sóng mang hình có bước sóng không đổi khi lan truyền ở $\lambda = 0{,}5$ m ; tốc độ truyền sóng $c = 3.10^8$ m/s. Tính khoảng thời gian lớn nhất mà sóng truyền hình đi từ đài phát đến Trái Đất.

VIỆT CƯỜNG (*Hà nội*)

Bài L2/566. Hiệu suất truyền tải điện năng một công suất P từ máy phát điện đến nơi tiêu thụ là 35%. Dùng máy biến áp lí tưởng có tỉ số giữa cuộn thứ cấp và cuộn sơ cấp là $\frac{N_2}{N_1} = 5$ để tăng điện áp truyền tải. Hiệu suất truyền tải sau khi sử dụng máy biến áp là bao nhiêu?

THANH LÂM (*Hà nội*)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/566 (For 6th grade). Given

$$S = 3a^2 + 3a - 2027,$$

where a is an integer. Find a so that S is a cube of an integer.

Problem T2/566 (For 7th grade). Given an acute triangle ABC and D is a point inside the triangle. The line through D which is parallel to AB intersects the side AC at M. On the opposite ray of the ray MD, choose the point E such that $ME = MD$. Prove that $AE < AD$.

Problem T3/566. Find all pairs of integers $(x; y)$ such that $(|x-y| + |x+y|)^5 = x^5 + |y|^5 + 30$.

Problem T4/566. Given a triangle ABC and suppose that its medians BN and CP are perpendicular to each other. Show that

$$3BC < AB + AC \le \sqrt{10}BC.$$

Problem T5/566. Given positive real numbers a, b, c satisfying $a + b + c = 2025$. Find the minimum value of the expression

$$P = \frac{a^3}{a^2+b^2+ab} + \frac{b^3}{b^2+c^2+bc} + \frac{c^3}{c^2+a^2+ca}.$$

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/566. Solve the equation

$$x\sqrt[3]{\frac{9(x^3+1)(2x^3+1)}{2}} = x^2 + x\sqrt{x} + 1.$$

Problem T7/566. Prove that the polynomial

$$x^{9999} + x^{8888} + x^{7777} + x^{6666} + x^{5555}$$

is divisible by the polynomial

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

Problem T8/566. Given an acute triangle ABC. Through the vertices A, B, C respectively, draw straight the lines a, b, c so that $a \perp AB$, $b \perp BC$, $c \perp CA$. Suppose that $D = a \cap b$, $E = b \cap c$, $F = c \cap a$. Prove that $S_{DEF} \ge 3S_{ABC}$, where S_{XYZ} is the notation for the area of triangle XYZ.

(*Xem tiếp trang 41*)

Bài T1/562. *Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn $(x+y)^4+y\le 64x$.*

Lời giải. Do $x\ge 1$ và $y\ge 1$ nên $64x<64(x+y)$. Từ đó và giả thiết $(x+y)^4+y\le 64x$ suy ra:

$$(x+y)^4<(x+y)^4+y\le 64x<64(x+y),$$

nên $(x+y)^4<64(x+y)$.

Do đó $(x+y)^3<64$ hay là $(x+y)^3<4^3$, dẫn đến $x+y<4$, tức là $2\le x+y\le 3$.

Nếu $x+y=2$ thì $x=y=1$ và có $2^4+1<64$, thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Nếu $x+y=3$ thì hoặc $x=2$, $y=1$, hoặc $x=1$, $y=2$.

Với $x=2$, $y=1$ thì $3^4+1<128$, thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Với $x=1$, $y=2$ thì $3^4+1>64$, không thỏa mãn.

Vậy có hai cặp số nguyên dương $(x\,;y)$ thỏa mãn yêu cầu đề bài là (1; 1) và (2; 1).

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải đúng. **Thái Bình**: *Lưu Diệp Chi*, 6A5, THCS Kỳ Bá, TP. Thái Bình; **Nghệ An**: *Phạm Nguyễn Nguyệt Linh*, *Nguyễn Sỹ Bảo Long*, *Nguyễn Đắc Sang*, *Nguyễn Thái Dũng*, 6B, *Nguyễn Thị Kim Ngân*, 6D, *Nguyễn Bình*, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Cộng hòa Áo**: *Lê Bạch Hải Đăng*, 1B, Trường Quốc tế song ngữ cấp 2, 3 Gibs, TP. Graz.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/562. *Tìm tất cả các số tự nhiên M có 3 chữ số mà M^n có 3 chữ số tận cùng là M với mọi số nguyên dương n.*

Lời giải.

Nhận xét: Với a và b là hai số nguyên khác nhau thì a^n-b^n chia hết cho $a-b$ với mọi số n nguyên dương.

Giả sử M là số có ba chữ số thỏa mãn đề bài. Do M^n có ba chữ số tận cùng là M nên $A_n=M^n-M$ chia hết cho 1000 với mọi số nguyên dương n (*).

+ Với $n=1$ thì $A_1=0$ (hiển nhiên thỏa mãn (*)).

+ Với $n=2$ thì $A_2=M^2-M=M(M-1)$.

Để $A_2 \vdots 1000$ thì $M(M-1)\vdots 1000$.

Lại có $(M, M-1)=1$ và $1000=2^3.5^3$ nên chỉ xảy ra hai trường hợp sau:

a) $M \vdots 125$ và $(M-1)\vdots 8$. Vì M là số có ba chữ số và $M \vdots 125$ nên

$$M\in\{125, 250, 375, 500, 625, 750, 875\}.$$

Trong các số này chỉ có $M=625$ thỏa mãn điều kiện $(M-1)\vdots 8$.

b) $M \vdots 8$ và $(M-1)\vdots 125$.

Vì M là số có ba chữ số và $(M-1)\vdots 125$ nên

$$M\in\{126, 251, 376, 501, 626, 751, 876\}.$$

Trong các số này chỉ có $M=376$ thỏa mãn điều kiện $M\vdots 8$.

Ta sẽ chứng minh với mọi số nguyên dương n lớn hơn 2, hai số 625 và 376 vẫn thỏa mãn đề bài.

Thật vậy:

+ Với $n\ge 2$ và $M=625$, ta có:

$$A_n=625^n-625=625(625^{n-1}-1).$$

Do $625=125.5$ và $(625^{n-1}-1)$ chia hết cho $625-1=624=8.78$ nên

$$625\vdots 125,\ (625^{n-1}-1)\vdots 8.$$

Vì vậy $A_n\vdots 125.8$ hay $A_n\vdots 1000$ (thỏa mãn (*)).

+ Với $n\ge 2$ và $M=376$, ta có:

$$A_n=376^n-376=376(376^{n-1}-1).$$

Do $376=8.47$ và $(376^{n-1}-1)$ chia hết cho $376-1=375=125.3$ nên

$$376\vdots 8,\ (376^{n-1}-1)\vdots 125.$$

Vì vậy $A_n\vdots 125.8$ hay $A_n\vdots 1000$ (thỏa mãn (*)).

Từ các trường hợp trên, ta thấy rằng có hai số tự nhiên 376 và 625 thỏa mãn điều kiện đề bài

Nhận xét. Đây là bài toán vận dụng kiến thức về số học và tính chia hết để giải. Các bạn gửi bài không nhiều, tuyên dương hai bạn sau có lời giải lập luận chặt chẽ và ngắn gọn: *Nguyễn Trung Hiếu*, 7A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông, **Phú Thọ**;

Lê Bạch Hải Đăng, 1B, Trường Quốc tế song ngữ Cấp 2, 3, Gibs. TP. Graz, **Cộng hòa Áo**.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T3/562. *Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn* $(x^2+1)(2y^3+1)=2y^2(x^3+x+1)$.

Lời giải. Nếu $y=0$ phương trình trở thành $x^2+1=0$, không thỏa mãn.

Với $y\neq 0$, phương trình tương đương với:

$$\frac{x^3+x+1}{x^2+1}=\frac{2y^3+1}{2y^2}\Leftrightarrow x+\frac{1}{x^2+1}=y+\frac{1}{2y^2}$$

$$\Leftrightarrow x-y=\frac{1}{2y^2}-\frac{1}{x^2+1}.$$

Vì *x, y* là các số nguyên và

$$0<\frac{1}{x^2+1}\le 1;\quad 0<\frac{1}{2y^2}\le\frac{1}{2}$$

nên $0\le\left|\frac{1}{2y^2}-\frac{1}{x^2+1}\right|<1$. Do đó hai vế của đẳng thức $\frac{1}{2y^2}-\frac{1}{x^2+1}=x-y$ là số nguyên khi và chi khi

$$x-y=\frac{1}{2y^2}-\frac{1}{x^2+1}=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\2y^2=x^2+1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=y=\pm 1.$$

Vậy phương trình có tập hợp nghiệm là

$$(x;y)\in\{(-1;-1),(1;1)\}.$$

Nhận xét. Có thể giải bài toán bằng cách:

Với $x,y\in\mathbb{Z};\ y\neq 0$, từ

$$2y^2(x^3+x+1)=(x^2+1)(2y^3+1)\,\vdots\,x^2+1$$

và $(x^3+x+1,x^2+1)=1$ nên $2y^2\,\vdots\,x^2+1$.

Tương tự, từ giả thiết ta có $(x^2+1)(2y^3+1)\,\vdots\,2y^2$ và $(2y^2,2y^3+1)=1$ nên $x^2+1\,\vdots\,2y^2$.

Do đó $\begin{cases}x^2+1=2y^2\\2y^3+1=x^3+x+1\end{cases}$.

Ta dễ dàng tìm được $x=y=\pm 1$.

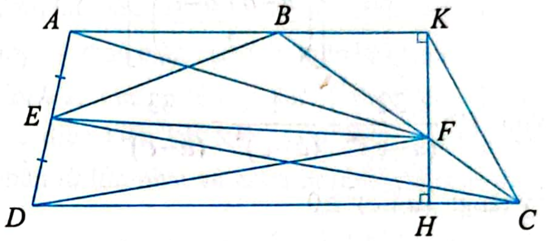
Các bạn sau đây có bài giải tốt:

Hưng Yên: *Lê Tuấn Hiệp*, 8C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; **Phú Thọ:** *Trần Ngọc Tú*, 8A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông; **Thái Bình:** *Lưu Diệp Chi*, 6A5, THCS Kỳ Bá, TP. Thái Bình; **Nghệ An:** *Nguyễn Bình*, 7B, *Nguyễn Tất Hoàng Anh*, *Hoàng Văn Nhân*, 8C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Cộng hòa Áo:** *Lê Bạch Hải Đăng*, 1B, Trường Quốc tế song ngữ cấp 2, 3 Gibs, TP Graz.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T4/562. *Qua trung điểm của một cạnh bên của một hình thang, hãy dựng đường thẳng chia hình thang thành hai phần có diện tích bằng nhau.*

Lời giải.



Xét hình thang *ABCD* với hai đáy *AB* < *CD*. Gọi *E* là trung điểm cạnh bên *AD*.

Dễ thấy $S_{ABE}<\frac{1}{2}S_{ABCD}$; $S_{CDE}<\frac{1}{2}S_{ABCD}$, nên đường thẳng qua *E* chia đôi diện tích hình thang *ABCD* cắt cạnh *BC* tại điểm *F*.

Gọi *H*, *K* lần lượt là hình chiếu vuông góc của *F* trên hai đường thẳng *CD* và *AB*.

Dễ thấy $S_{FEA}=S_{FED}$, suy ra $S_{ABF}=S_{CDF}$.

Do đó:

$$\frac{1}{2}AB.FK=\frac{1}{2}CD.FH \text{ hay } \frac{FK}{FH}=\frac{CD}{AB}.$$

Lại có, theo hệ quả định lí Thales $\frac{FK}{FH}=\frac{FB}{FC}$.

Suy ra $\frac{FB}{FC}=\frac{CD}{AB}$. Vậy điểm *F* là điểm chia đoạn *BC* theo tỉ số $k=\frac{CD}{AB}$.

Nhận xét. Chỉ có bạn *Hoàng Văn Nhân*, 8C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An** cho lời giải đúng.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/562. *Cho các số thực a, b, c đôi một khác nhau và thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P=\frac{1}{(a-b)^4}+\frac{1}{(b-c)^4}+\frac{1}{(c-a)^4}.$$

Lời giải. Nhận thấy vai trò của *a*, *b*, *c* là bình đẳng. Không mất tính tổng quát giả sử $a>b>c$, khi đó: $a-b>0$, $b-c>0$.

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\frac{1}{(a-b)^4}+\frac{1}{(b-c)^4}\ge\frac{2}{(a-b)^2.(b-c)^2}$$

$$\ge\frac{2}{\left[\left(\frac{a-b+b-c}{2}\right)^2\right]^2}=\frac{32}{(a-c)^4}.$$

Do đó: $P\ge\frac{32}{(a-c)^4}+\frac{1}{(a-c)^4}=\frac{33}{(a-c)^4}$.

Để ý rằng: $(a+c)^2\ge 0$

$\Leftrightarrow(a-c)^2\le 2(a^2+c^2)\le 2(a^2+b^2+c^2)=4$

$\Rightarrow(a-c)^4\le 16\Rightarrow P\ge\frac{33}{(a-c)^4}\ge\frac{33}{16}$.

Đẳng thức xảy ra khi:

$$\begin{cases}a-b=b-c\\ a-c=2\\ a^2+b^2+c^2=2\end{cases}\Rightarrow a=1,b=0,c=-1.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của *P* là $\frac{33}{16}$ đạt được khi $(a;b;c)=(1;0;-1)$ và các hoán vị.

Nhận xét. Số bài giải gửi về Toà soạn khá ít. Các bạn sau có lời giải tốt:

Hưng Yên: *Lê Tuấn Hiệp*, 8C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; **Thái Bình**: *Lưu Diệp Chi*, 6A5, THCS Kỳ Bá, TP. Thái Bình; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Đức Thắng*, 9A, THCS Quỳnh Trang, TX. Hoàng Mai; **TP. Hồ Chí Minh**: *Nguyễn Chánh Thiện*, 9/12, THCS Lê Quý Đôn, Quận 3.

HỒ HẢI

Bài T6/562. *Cho a, b, c là các số không âm thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=2$. Chứng minh rằng*

$$a^3(1+bc)+b^3(1+ca)+c^3(1+ab)\le 2\sqrt{2}\quad(1).$$

Lời giải. Cách 1. Ta có:

$(1)\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+2abc\le 2\sqrt{2}\quad(2).$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$a^2b^2+a^2c^2\ge 2a^2bc;$$
$$a^2b^2+b^2c^2\ge 2b^2ac.$$

Do đó: $2a^2b^2+c^2(a^2+b^2)\ge 2abc(a+b)$ (3).

Áp dụng BĐT Bunyakovsky ta có:

$$\begin{aligned}P&=(a^3+b^3+c^3+2abc)^2\\&=[a(a^2+bc)+b(b^2+ac)+c.c^2]^2\\&\le(a^2+b^2+c^2)[(a^2+bc)^2+(b^2+ac)^2+c^4]\\&=(a^2+b^2+c^2)[(a^2+b^2+c^2)^2+2a^2bc+2b^2ac\\&\qquad-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2]\\&\le(a^2+b^2+c^2)[(a^2+b^2+c^2)^2+2abc(a+b)\\&\qquad-c^2(a^2+b^2)-2a^2b^2]\\&\overset{\text{do (3)}}{\le}(a^2+b^2+c^2)^3=8.\end{aligned}$$

Do đó BĐT(2) đúng, vậy BĐT(1) được chứng minh. Dấu "=" xảy ra khi $(a;b;c)=(\sqrt{2};0;0)$ và các hoán vị.

Cách 2. Do *a*, *b*, *c* không âm nên

$$\begin{aligned}&(1)\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+2abc\le 2\sqrt{2}\\&\Leftrightarrow(a^3+b^3+c^3+2abc)^2\le 8=(a^2+b^2+c^2)^3\\&\Leftrightarrow(a^3+b^3+c^3)^2+4abc(a^3+b^3+c^3)+4(abc)^2\\&\qquad\le a^6+b^6+c^6+3(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)\\&\Leftrightarrow 2(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)+4abc(a^3+b^3+c^3)+4(abc)^2\\&\qquad\le 3(a^4b^2+a^2b^4+b^4c^2+b^2c^4+c^4a^2+c^2a^4)+6(abc)^2\\&\Leftrightarrow 2(abc)^2+(a^2b-ab^2)^2+(b^2c-bc^2)^2+(c^2a-ca^2)^2\\&\qquad+2(a^2b-a^2c)^2+2(b^2c-b^2a)^2+2(c^2a-c^2b)^2\ge 0\\&\Leftrightarrow 2(abc)^2+a^2b^2(a-b)^2+b^2c^2(b-c)^2+c^2a^2(c-a)^2\\&\qquad+2a^4(b-c)^2+2b^4(c-a)^2+2c^4(a-b)^2\ge 0\end{aligned}$$

(luôn đúng).

Vậy BĐT(1) được chứng minh. Dấu "=" xảy ra khi $(a;b;c)=(\sqrt{2};0;0)$ và các hoán vị.

Nhận xét. Các bạn tham gia đều có lời giải đúng với cách giải tương tự như hai cách trên. Danh sách các bạn giải đúng là: **Vĩnh Phúc:** *Trần Hà Trang*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Thái Bình:** *Lưu Diệp Chi*, 6A5, THCS Kỳ Bá, TP. Thái Bình; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Chánh Thiện*, 9/12, THCS Lê Quý

Đôn, quận 3; **Nghệ An:** *Ngô Văn Trường*, 10A1, THPT Hoàng Mai, TX. Hoàng Mai, *Trần Quang Nhật*, 10A1, THPT chuyên Đại học Vinh, *Nguyễn Văn Đức Thắng*, 9A, THCS Quỳnh Trang, TX. Hoàng Mai; **Hưng Yên:** *Lê Tuấn Hiệp*, 8C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; **Quảng Bình:** *Nguyễn Hồng Phúc, Nguyễn Lê Nhật Minh, Hoàng Kim Lộc*, 11 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Phú Yên:** *Huỳnh Trần Gia Huy*, 10 Toán 1, THPT chuyên Lương Văn Chánh.

TRẦN HỮU NAM

Bài T7/562. *Tồn tại hay không tập hợp hữu hạn $A \subset \mathbb{R}^+$ có không ít hơn 2 phần tử thỏa mãn: Với mọi $a, b \in A, a \neq b$ thì $\sqrt{a} - \frac{2}{3}b \in A$?*

Lời giải. Cách 1. Giả sử tồn tại tập A thoả mãn đồng thời các điều kiện bài toán. Giả sử $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ với $a_i \in \mathbb{R}^+, i = 1, 2, \ldots, n$, $a_i < a_j$ với $i < j$. Nếu $n \geq 3$ thì theo giả thiết, ta có: $\sqrt{a_n} - \frac{2}{3}a_{n-1} < \sqrt{a_n} - \frac{2}{3}a_{n-2} < \cdots < \sqrt{a_n} - \frac{2}{3}a_1$.

Nếu $\sqrt{a_n} - \frac{2}{3}a_1 < a_n$ thì các phần tử

$$\sqrt{a_n} - \frac{2}{3}a_{n-1} < \sqrt{a_n} - \frac{2}{3}a_{n-2} < \cdots < \sqrt{a_n} - \frac{2}{3}a_1$$

chính là các phần tử $a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1}$. Khi đó, ta có: $\begin{cases} \sqrt{a_n} - \frac{2}{3}a_1 = a_{n-1} \\ \sqrt{a_n} - \frac{2}{3}a_{n-1} = a_1 \end{cases}$.

Từ hệ trên, dễ dàng suy ra $a_1 = a_{n-1}$, mâu thuẫn. Vậy, ta phải có $\sqrt{a_n} - \frac{2}{3}a_1 = a_n$. Hoàn toàn tương tự thì $\sqrt{a_1} - \frac{2}{3}a_n = a_1$. Như vậy, ta có

$$\begin{cases} \sqrt{a_n} - \frac{2}{3}a_1 = a_n \\ \sqrt{a_1} - \frac{2}{3}a_n = a_1 \end{cases}.$$

Giải hệ trên với hai ẩn a_1, a_n ta tìm được $a_1 = a_n = \frac{9}{25}$, vô lí.

Vậy $|A| = 2$, ta viết $A = \{a, b\}, a, b \in \mathbb{R}^+$. Theo điều kiện bài toán thì $\sqrt{a} - \frac{2}{3}b \in A, \sqrt{b} - \frac{2}{3}a \in A$ và dễ thấy $\sqrt{a} - \frac{2}{3}b \neq \sqrt{b} - \frac{2}{3}a$ nên ta có hai khả năng:

+) $\sqrt{a} - \frac{2}{3}b = a, \sqrt{b} - \frac{2}{3}a = b$. Giải hệ này với hai ẩn a, b ta tìm được $a = b = \frac{9}{25}$, vô lí.

+) $\sqrt{a} - \frac{2}{3}b = b, \sqrt{b} - \frac{2}{3}a = a$. Giải hệ này với hai ẩn a, b ta tìm được $a = b = \frac{9}{25}$, vô lí.

Tóm lại điều giả sử là sai, tức là không tồn tại tập hợp A thoả mãn các điều kiện bài toán.

Cách 2. Giả sử tồn tại tập A thoả mãn đồng thời các điều kiện bài toán. Gọi m, M tương ứng là phần tử lớn nhất và phần tử nhỏ nhất của tập hợp A. Theo đề, ta có: $\begin{cases} \sqrt{M} - \frac{2}{3}m \in A \\ \sqrt{m} - \frac{2}{3}M \in A \end{cases}$.

Suy ra $M \geq \sqrt{M} - \frac{2}{3}m \in A$ và $\sqrt{m} - \frac{2}{3}M \geq m$.

Cộng hai bất đẳng thức này ta được

$$\frac{1}{3}(M - m) \geq \sqrt{M} - \sqrt{m}.$$

Từ đó suy ra: $\sqrt{M} + \sqrt{m} \geq 3$ (*).

Lại từ bất đẳng thức $\sqrt{m} - \frac{2}{3}M \geq m$ ta suy ra:

$\sqrt{m} \geq \frac{2}{3}M + m \geq \frac{5}{3}m$, kéo theo $m \leq \frac{9}{25}$. Suy ra $\frac{2}{3}M < \sqrt{m} < \frac{3}{5}$. Từ đó thì $M < \frac{9}{10}$. Nhưng khi đó: $\sqrt{M} + \sqrt{m} < \sqrt{\frac{9}{10}} + \sqrt{\frac{9}{25}} < 2$, mâu thuẫn với (*). Như vậy, không tồn tại tập hợp A thoả mãn điều kiện bài toán.

Nhận xét. Bạn *Nguyễn Hồng Phúc*, 11 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình** đã có lời giải đúng. Còn một bạn khác có lời giải đúng nhưng không ghi tên và địa chỉ.

NGUYỄN TIẾN LÂM

Bài T8/562. *Chứng minh rằng trong mọi tam giác nhọn ABC ta luôn có*

$$h_a^2\left(\frac{1}{m_b^2}+\frac{1}{m_c^2}\right)+h_b^2\left(\frac{1}{m_c^2}+\frac{1}{m_a^2}\right)+h_c^2\left(\frac{1}{m_a^2}+\frac{1}{m_b^2}\right)\ge 6$$

trong đó $h_a, h_b, h_c; m_a, m_b, m_c$ lần lượt là độ dài các đường cao và trung tuyến vẽ từ A, B, C của tam giác ABC.

Lời giải. Để giải quyết bài toán này ta sử dụng hai bổ đề sau:

Bổ đề 1. *Với mọi tam giác ABC ta có:*

$$\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}.$$

Bổ đề 1 quen thuộc, bạn đọc tự chứng minh.

Bổ đề 2. *Trong tam giác nhọn ABC (BC = a, CA = b, AB = c) ta luôn có:*

$$m_a\le\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}.\cos\frac{A}{2};\ m_b\le\sqrt{\frac{c^2+a^2}{2}}.\cos\frac{B}{2};$$

$$m_c\le\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.\cos\frac{C}{2}.$$

Chứng minh. Từ định lý hàm số côsin và công thức đường trung tuyến trong tam giác ABC ta có:

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}=\sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}}\text{ nên}$$

$$\left(\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}.\cos\frac{A}{2}\right)^2-m_a^2$$

$$=\frac{(b^2+c^2)\left[(b+c)^2-a^2\right]}{8bc}-\frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$$

$$=\frac{(b^2+c^2-a^2)(b-c)^2}{8bc}\ge 0$$

(vì tam giác ABC là tam giác nhọn). Vậy $m_a\le\sqrt{\dfrac{b^2+c^2}{2}}.\cos\dfrac{A}{2}$. Hai bất đẳng thức còn lại được chứng minh hoàn toàn tương tự.

Trở lại bài T8/562, chú ý rằng

$h_a=\dfrac{bc}{2R}$; $a=4R\sin\dfrac{A}{2}.\cos\dfrac{A}{2}$, trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Từ bổ đề 2 ta thấy:

$$m_a\le\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}.\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}.\frac{a}{4R\sin\frac{A}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{h_b^2+h_c^2}{8}}.\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}.$$

Vậy $\dfrac{h_b^2+h_c^2}{m_a^2}\ge 8\sin^2\dfrac{A}{2}$, do đó:

$$h_a^2\left(\frac{1}{m_b^2}+\frac{1}{m_c^2}\right)+h_b^2\left(\frac{1}{m_c^2}+\frac{1}{m_a^2}\right)+h_c^2\left(\frac{1}{m_a^2}+\frac{1}{m_b^2}\right)$$

$$=\frac{h_b^2+h_c^2}{m_a^2}+\frac{h_c^2+h_a^2}{m_b^2}+\frac{h_a^2+h_b^2}{m_c^2}$$

$$\ge 8\left(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\right)$$

$$=4(3-\cos A-\cos B-\cos C)$$

$$\ge 4\left(3-\frac{3}{2}\right)=6\text{ (theo bổ đề 1).}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Nhận xét. Khen bạn *Nguyễn Văn Đức Thắng*, 9A, THCS Quỳnh Trang, TX. Hoàng Mai, **Nghệ An** đã có lời giải đúng.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/562. *Tìm m để phương trình sau đây có hai nghiệm thực phân biệt*

$$3^{x^2-2x+1}-\log_5(x^2-2x+6)^8+10-\sqrt{-x^2+2x+m}=0\ (1).$$

Lời giải. Ta có:

$$(1)\Leftrightarrow 3^{(x-1)^2}-8\log_5[(x-1)^2+5]$$

$$=-10+\sqrt{m+1-(x-1)^2}\ (2).$$

TH1: Nếu $m\le -1$ thì (2) vô nghiệm.

TH2: Xét $m>-1$. Xét hàm số $f(x)=3^{(x-1)^2}-8\log_5[(x-1)^2+5]$ trên $\mathbb{R}$ có:

$$f'(x)=2(x-1)\ln 3.3^{(x-1)^2}-8.\frac{2(x-1)}{[(x-1)^2+5]\ln 5}$$

$$=2(x-1)\left[\ln 3.3^{(x-1)^2}-\frac{8}{[(x-1)^2+5]\ln 5}\right]$$

$$=2(x-1).\frac{3^{(x-1)^2}[(x-1)^2+5].\ln 3.\ln 5-8}{[(x-1)^2+5]\ln 5}.$$

Ta có:

$$\frac{3^{(x-1)^2}[(x-1)^2+5].\ln 3.\ln 5-8}{[(x-1)^2+5]\ln 5} \geq \frac{5.\ln 3.\ln 5-8}{[(x-1)^2+5]\ln 5} > 0.$$

Do đó với dấu của $f'(x)$ là dấu của $2(x-1)$.

Xét hàm số $g(x)=-10+\sqrt{m+1-(x-1)^2}$ trên đoạn $\left[1-\sqrt{m+1};\ 1+\sqrt{m+1}\right]$.

Ta có: $g'(x)=\dfrac{1-x}{\sqrt{m+1-(x-1)^2}}$,

$\forall x \in (1-\sqrt{m+1};\ 1+\sqrt{m+1})$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$1-\sqrt{m+1}$		1		$1+\sqrt{m+1}$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$			-7			$\nearrow$	$+\infty$
$g(x)$			-10	$\nearrow$	$-10+\sqrt{m+1}$	$\searrow$	-10		

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình (2), do đó phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow -10+\sqrt{m+1}>-7 \Leftrightarrow \sqrt{m+1}>3 \Leftrightarrow m>8.$$

Nhận xét. Đây là bài toán tìm điều kiện của tham số để phương trình siêu việt (chứa cả biểu thức mũ, lôgarit và căn thức) có nghiệm nên lời giải cần biến đổi và đánh giá khéo léo, nếu không sẽ dài và phức tạp. Rất tiếc là Tòa soạn không nhận được lời giải nào cho bài này.

NHƯ HOÀNG

Bài T10/562. *Cho dãy số (a_n) được định nghĩa bởi*

$$a_1=9 \text{ và } a_{n+1}=\frac{(n+5)a_n+22}{n+3},\ n\in\mathbb{N}^*.$$

Tìm tất cả các số nguyên dương n

a) *Mà a_n là bình phương của một số nguyên.*

b) *Mà a_n chia hết cho 2023.*

Lời giải. (Dựa trên lời giải của bạn *Trần Hà Trang*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc**)

a) Ta có: $a_{n+1}(n+3)=(n+5)a_n+22$

$\Leftrightarrow a_{n+1}(n+3)+11(n+3)=(n+5)a_n+11(n+5)$

$\Leftrightarrow (a_{n+1}+11)(n+3)=(a_n+11)(n+5)$

$\Leftrightarrow \dfrac{a_{n+1}+11}{(n+5)(n+4)}=\dfrac{a_n+11}{(n+4)(n+3)}.$

Từ đó: $\dfrac{a_n+11}{(n+4)(n+3)}=\dfrac{a_1+11}{(1+4)(1+3)}=\dfrac{9+11}{20}=1$

$\Rightarrow a_n=(n+4)(n+3)-11=n^2+7n+1.$

Ta có $(n+1)^2<a_n<(n+4)^2$. Vậy để a_n là bình phương của một số nguyên ta phải có:

$a_n=(n+2)^2 \Rightarrow n=1$ hoặc $a_n=(n+3)^2 \Rightarrow n=8.$

Thử lại ta thấy $a_1=9$, $a_8=121$ thỏa mãn.

b) $7|2023|a_n \Rightarrow 7|a_n=n^2+7n+1 \Rightarrow 7|n^2+1$

$\Rightarrow n^2\equiv -1 \pmod 7 \Rightarrow n^6\equiv -1 \pmod 7.$

Theo định lý Fermat nhỏ $n^6\equiv 1 \pmod 7$. Từ đó $-1\equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow 2\equiv 0 \pmod 7$ là không xảy ra.

Vậy không tồn tại n để a_n chia hết cho 2023.

Nhận xét. Nhiều bạn tham gia giải bài toán này. Các bạn có lời giải tốt bao gồm: **Nghệ An:** *Phan Đại Hoàng*, 11, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Bình Phước:** *Trương Văn Thuận*, 11 Toán, THPT chuyên Bình Phước; **Đồng Tháp:** *Trần Hồng Vi*, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Gia Lai:** *Phan Trịnh Nguyên*, 11 Toán, chuyên Hùng Vương; **Phú Yên:** *Huỳnh Trần Gia Huy*, 10 Toán 1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Quảng Nam:** *Nguyễn Trí Hậu*, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/562. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:*

$$f(x+y)-f(x)f(y)=f(xy)-2xy-1 \quad (1)$$

với mọi $x,y\in\mathbb{R}$.

Lời giải. (Theo đa số các bạn). Giả sử $f(t)$ thỏa mãn (1). Thay $y=0$ vào (1) ta được:

$$f(x)-f(x)f(0)=f(0)-1, \forall x\in\mathbb{R}$$

Đ

$\Leftrightarrow (f(0)-1)(f(x)+1)=0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra $f(0)=1$ hoặc $f(x)\equiv -1$.

Ta thấy $f(x)\equiv -1$ không thỏa mãn điều kiện bài ra.

Xét trường hợp $f(0)=1$. Thay $x=1, y=-1$ vào (1), ta thu được:

$$1-f(1)f(-1)=f(-1)+2-1$$

$$\Leftrightarrow f(1)=-1 \text{ hoặc } f(-1)=0.$$

Nếu $f(1)=-1$ thì khi thay $y=1$ vào (1), ta được:

$$f(x+1)-f(x)f(1)=f(x)-2x-1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(x+1)=-2x-1 \text{ hay } f(x)=-2x+1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thử lại, ta thấy hàm này thỏa mãn các điều kiện bài ra.

Nếu $f(1)=a\neq -1$, $f(-1)=0$ thì khi thay $y=1$ vào (1), ta được:

$$f(x+1)-f(x)a=f(x)-2x-1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(x+1)=(a+1)f(x)-2x-1, \forall x \in \mathbb{R} \quad (2).$$

Tiếp tục thay x bởi $-x$ và $y=-1$ vào (1), ta được: $f(-x-1)=f(x)-2x-1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Kết hợp với (2) ta được:

$$f(x+1)=(a+1)[f(-x-1)+2x+1]-2x-1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(t)=(a+1)f(-t)+a(2t-1), \forall t \in \mathbb{R} \quad (3);$$

$$f(-t)=(a+1)f(t)+a(-2t-1), \forall t \in \mathbb{R} \quad (4).$$

Từ (3) và (4) suy ra:

$$(a^2+2a)f(t)=2a^2t+a^2+2a, \forall t \in \mathbb{R} \quad (5).$$

Trường hợp $a=-2$ thì không tồn tại hàm số $f(t)$ thỏa mãn (5).

Nếu $a\neq -2$ và $a\neq 0$ thì từ (5) ta thu được $f(t)$ là hàm số dạng đa thức bậc nhất $f(t)=At+B$ với $f(0)=1, f(-1)=0$ nên $f(t)=t+1$.

Thử lại, ta thấy hàm số này thỏa mãn.

Nếu $a=0$ thì từ (3) ta thu được $f(t)$ là hàm chẵn trên $\mathbb{R}$: $f(-t)=f(t), \forall t \in \mathbb{R}$.

Thay y bởi $-y$ trong (1), ta thu được

$$f(x-y)-f(x)f(y)=f(xy)+2xy-1, \forall x,y \in \mathbb{R}.$$

Kết hợp với (1) ta thu được:

$$f(x+y)-f(x-y)=-4xy, \forall x,y \in \mathbb{R}.$$

Cho $y=x$ ta được:

$$f(2x)-1=-4x^2, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(t)=-t^2+1, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Thử lại ta thấy hàm này thỏa mãn điều kiện bài ra.

Kết luận: Nghiệm của bài toán là các hàm số

$$f(t)=-2t+1, f(t)=t+1 \text{ và } f(t)=-t^2+1.$$

Nhận xét. Đây là dạng toán về phương trình hàm một biến với cặp biến tự do sinh bởi hằng đẳng thức đa thức đại số dạng cơ bản, tương đối phức tạp trong tính toán.

Đa số các bạn đều giải theo cách như đã trình bày ở trên. Nhiều lời giải chưa xét hết các trường hợp cần khảo sát nên thiếu nghiệm.

Các bạn sau đây có lời giải đúng:

Bình Định: *Trần Ngọc Tuyên*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Hà Nam:** *Cù Thanh Bình*, 11T, THPT chuyên Biên Hòa; **Hà Nội:** *Nguyễn Quang Minh*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Huệ; **Nghệ An:** *Phan Đại Hoàng*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Phú Yên:** *Nguyễn Tấn Nguyên Chương*, 11T1, *Huỳnh Trần Gia Huy*, 10T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Quảng Bình:** *Hoàng Kim Lộc*, 11T, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Quảng Nam:** *Nguyễn Trí Hiền*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T12/562. *Cho tam giác ABC có đường tròn ngoại tiếp (O) và đường tròn nội tiếp (I). D, E lần lượt là tiếp điểm của (I) với AB, AC; BI, CI theo thứ tự cắt lại (O) tại M, N; P, Q lần lượt đối xứng với B, C qua N, M; K, H lần lượt là trực tâm của các tam giác BPD, CQE. S là giao điểm của KQ và HP. Chứng minh rằng*

a) *Các đường tròn ngoại tiếp tam giác SQH, SPK cùng đi qua một điểm trên MN.*

b) *AS vuông góc với BC.*

Lời giải. Trong lời giải này kí hiệu (XYZ) chỉ đường tròn đi qua ba điểm X, Y, Z; kí hiệu $\overset{\frown}{UV}$ chỉ cung định hướng có điểm đầu là U và điểm cuối là V; kí hiệu $m\overset{\frown}{UV}$ chỉ số đo của cung định hướng $\overset{\frown}{UV}$.

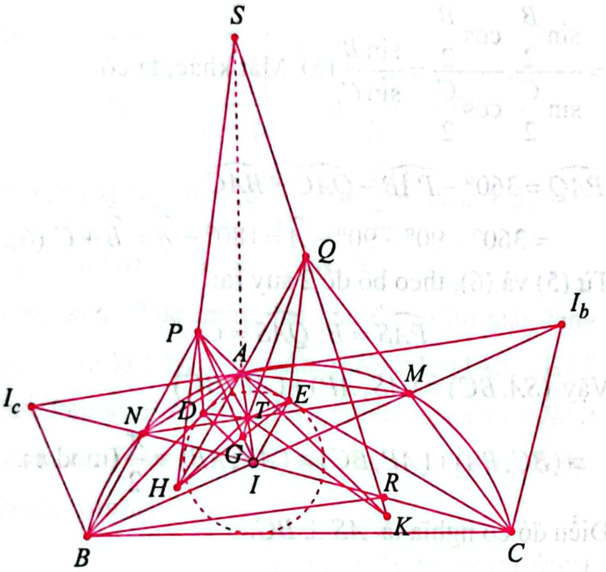
Ta cần có hai bổ đề.

Bổ đề 1. Cho tam giác ABC, (O) là đường tròn ngoại tiếp, I, Ia theo thứ tự là tâm đường tròn nội và tâm đường tròn bàng tiếp đối diện đỉnh A.
tiếp. M là giao điểm thứ hai của AI và (O). Khi đó
a) A, I, M, I_a thẳng hàng.
b) $MB = MC = MI = MI_a$.

Bổ đề 2. Cho các số $\alpha, \beta, \alpha', \beta' > 0$ và $\alpha + \beta = \alpha' + \beta' < \pi$; $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{\sin\alpha'}{\sin\beta'}$. Khi đó:

$$\alpha = \alpha'; \beta = \beta'.$$

Phép chứng minh các bổ đề trên rất đơn giản, không trình bày ở đây.



a) Gọi G là giao điểm của IP và HE; T là giao điểm của AI và MN.

Theo bổ đề 1, $MA = MI; NA = NI$.

Do đó T là trung điểm của AI (1).

Theo bổ đề 1, $NA = NI = NB = NP$.

Do đó A, I, P, B cùng thuộc một đường tròn và $IP \perp IB$. Từ đó, chú ý rằng $HE \perp CQ$; $TA = TI = TE$, suy ra:

$$(GI, GE) \equiv (IP, HE) \equiv (IB, CQ) \equiv (MB, MC) (\bmod \pi)$$
$$\equiv (AB, AC) \equiv 2(AI, AE) \equiv (TI, TE) (\bmod \pi).$$

Do đó G, I, E, T cùng thuộc một đường tròn (2).

Theo bổ đề 1, $MA = MI = MC = MQ$.

Do đó $AQ \perp AC$.

Kết hợp với $HQ \perp EC \equiv AC$, suy ra:

$$HA \equiv HQ \perp CA.$$

Kết hợp với $EI \perp CA$, suy ra $HA // EI$.

Kết hợp với (2), suy ra:

$$(HA, HG) \equiv (HA, HE) \equiv (EI, EH) \equiv (EI, EG)$$
$$\equiv (TI, TG) \equiv (TA, TG) (\bmod \pi).$$

Do đó H, A, G, T cùng thuộc một đường tròn (3).

Chú ý rằng

$$HA \equiv HQ \perp CE; HE \perp CQ; BA \perp PA; BM \perp PG,$$

ta có: $(HA, HG) \equiv (HQ, HE) \equiv (CE, CQ) \equiv (CA, CM)$

$$\equiv (BA, BM) \equiv (PA, PG) (\bmod \pi).$$

Do đó H, A, G, P cùng thuộc một đường tròn (4).

Từ (3) và (4) suy ra đường tròn (PAH) đi qua T.

Tương tự, đường tròn (QAK) đi qua T.

Vậy, T là điểm Miquel của tứ giác toàn phần xác định bởi các đường thẳng AP, AQ, SP, SQ.

Do đó các đường tròn (SQH), (SPK) cùng đi qua T (đpcm).

b) Gọi I_b, I_c theo thứ tự là tâm đường tròn bàng tiếp đối diện các đỉnh B, C của tam giác ABC; R là trung điểm của IC.

Theo phần a, các bộ bốn điểm điểm (P, H, T, A), (E, T, I, G) và (G, T, P, H) cùng thuộc một đường tròn.

Từ đó, chú ý rằng $AH // IE; IT = IE$, suy ra:

$$(PH, PT) \equiv (AH, AT) \equiv (IE, IT) \equiv (ET, EI) (\bmod \pi)$$
$$\equiv (GT, GI) \equiv (GT, GP) \equiv (HT, HP) (\bmod \pi).$$

Do đó các tam giác TPH, TIE đồng dạng cùng hướng.

Tương tự, các tam giác TQK, TID đồng dạng cùng hướng.

Vậy, chú ý rằng các tam giác TIE, TID đồng dạng ngược hướng, ta có các tam giác TPH, TQK đồng dạng ngược hướng. Do đó các tam giác TPH, TKQ đồng dạng cùng hướng.

Điều đó có nghĩa là các tam giác TPK, THQ đồng dạng cùng hướng.

Đ

Kết hợp với $\frac{TP}{TH}=\frac{TI}{TE}=1$ (theo phần a), suy ra $PK=QH$. Theo phần a, các điểm A, B, I, P cùng thuộc một đường tròn.

Do đó $(PA,PI)\equiv(BA,BI)\equiv(BI,BC)(\text{mod}\,\pi)$.

Theo bổ đề 1, A, C, I, I_b cùng thuộc một đường tròn.

Từ đó, chú ý rằng $IA\perp AI_b; IP\perp IB\equiv II_b$, suy ra $(IA,IP)\equiv(AI_b,II_b)\equiv(AC,IC)(\text{mod}\,\pi)$.

Vậy, các tam giác API, IBC đồng dạng cùng hướng.

Từ đó, chú ý rằng T, R theo thứ tự là trung điểm của IA, CI; bốn điểm A, P, H, T cùng thuộc một đường tròn và các tam giác TPH, TIE đồng dạng cùng hướng (theo phần a); $IT\perp AI_b; IE\perp AC$; M, N theo thứ tự là trung điểm của các cung $\overset{\frown}{AC},\overset{\frown}{AB}$, suy ra:

$$(HA,HP)\equiv(TA,TP)\equiv(RI,RB)\equiv(RN,RB)(\text{mod}\,\pi);$$
$$(PA,PH)\equiv(PA,PT)+(PT,PH)$$
$$\equiv(BI,BR)+(HP,HT)(\text{mod}\,\pi)$$
$$\equiv(BI,BR)+(EI,ET)\equiv(BI,BR)+(IT,IE)$$
$$\equiv(BI,BR)+(AI_b,AC)(\text{mod}\,\pi)$$
$$\equiv(BI,BR)+(BM,CN)$$
$$\equiv(BI,BR)+\frac{1}{2}m\overset{\frown}{BN}+\frac{1}{2}m\overset{\frown}{MC}(\text{mod}\,\pi)$$
$$\equiv(BI,BR)+(BM,CN)$$
$$\equiv(BI,BR)+\frac{1}{2}m\overset{\frown}{NA}+\frac{1}{2}m\overset{\frown}{AM}(\text{mod}\,\pi)$$
$$\equiv(BI,BR)+\frac{1}{2}m\overset{\frown}{NM}$$
$$\equiv(BM,BR)+(BN,BM)\equiv(BN,BR)(\text{mod}\,\pi).$$

Do đó các tam giác APH, NBR đồng dạng cùng hướng.

Vậy, theo bổ đề 1, ta có $\frac{AK}{AQ}=\frac{CI_b}{2MC}$.

Tương tự, $\frac{AH}{AP}=\frac{NR}{NP}=\frac{2NR}{2NP}=\frac{CI_c}{2NB}$.

Vậy, theo định lí sin, chú ý rằng các tam giác BI_bI_c, CI_cI_b theo thứ tự vuông tại B, C, theo bổ đề 1, ta có:

$$\frac{\sin\widehat{PAS}}{\sin\widehat{QAS}}=\frac{PS}{QS}\cdot\frac{QS\sin\widehat{PAS}}{PS\sin\widehat{QAS}}=\frac{PS}{QS}\cdot\frac{AS\sin\widehat{APS}}{AS\sin\widehat{AQS}}$$
$$=\frac{PS}{QS}\cdot\frac{\sin\widehat{KPS}}{\sin\widehat{HQS}}=\frac{PS}{PK}\cdot\frac{QH}{QS}\cdot\frac{\sin\widehat{KPS}}{\sin\widehat{HQS}}$$
$$=\frac{\sin\widehat{PKS}}{\sin\widehat{PSK}}\cdot\frac{\sin\widehat{QSH}}{\sin\widehat{QHS}}\cdot\frac{\sin\widehat{KPS}}{\sin\widehat{HQS}}=\frac{\sin\widehat{PKS}}{\sin\widehat{QHS}}\cdot\frac{\sin\widehat{KPS}}{\sin\widehat{HQS}}$$
$$=\frac{\sin\widehat{AKQ}}{\sin\widehat{AHP}}\cdot\frac{\sin\widehat{APH}}{\sin\widehat{AQK}}=\frac{\sin\widehat{AKQ}}{\sin\widehat{AQK}}\cdot\frac{\sin\widehat{APH}}{\sin\widehat{AHP}}$$
$$=\frac{AQ}{AK}\cdot\frac{AH}{AP}=\frac{2CI}{BI_b}\cdot\frac{CI_c}{2BI}=\frac{CI}{BI}\cdot\frac{CI_c}{BI_b}=\frac{CI}{BI}\cdot\frac{CI_c}{BI_b}$$
$$=\frac{CI}{BI}\cdot\frac{I_bI_c\cos\widehat{CI_cI_b}}{I_cI_b\cos\widehat{BI_bI_c}}=\frac{CI}{BI}\cdot\frac{\cos\widehat{II_cA}}{\cos\widehat{II_bA_c}}=\frac{CI}{BI}\cdot\frac{\cos\widehat{IBA}}{\cos\widehat{ICA_c}}$$
$$=\frac{\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}=\frac{\sin B}{\sin C}\ (5).$$ Mặt khác, ta có

$$\widehat{PAQ}=360^\circ-\widehat{PAB}-\widehat{QAC}-\widehat{BAC}$$
$$=360^\circ-90^\circ-90^\circ-\widehat{A}=180^\circ-\widehat{A}=\widehat{B}+\widehat{C}\ (6).$$

Từ (5) và (6), theo bổ đề 2 suy ra:

$$\widehat{PAS}=\widehat{B};\ \widehat{QAS}=\widehat{C}.$$

Vậy $(SA,BC)\equiv(AS,AP)+(AP,BC)$

$$\equiv(BC,BA)+(AP,BC)\equiv(AP,AB)\equiv\frac{\pi}{2}(\text{mod}\,\pi).$$

Điều đó có nghĩa là $AS\perp BC$.

Nhận xét. 1) Lời giải phần b dựa vào ý tưởng của bạn *Nguyễn Trí Hậu*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Quảng Nam.**

2) Ngoài bạn *Hậu*, tham gia giải còn có bạn *Lê Bảo Khánh*, THPT chuyên Lương Thế Vinh, **Đồng Nai.**

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/562. *Trong thí nghiệm giao thoa ánh sáng với khe Y-âng, nguồn sáng S phát bức xạ đơn sắc λ, màn quan sát cách mặt phẳng hai khe một khoảng không đổi D, khoảng cách giữa hai khe $S_1S_2 = a$ có thể thay đổi (nhưng S_1, S_2 luôn cách đều S). Xét điểm M trên màn, lúc đầu là vân tối thứ 3. Nếu lần lượt giảm hoặc tăng khoảng cách S_1S_2 một lượng Δa thì tại M là vân sáng bậc* *n và bậc 3n. Nếu tăng khoảng cách S_1S_2 thêm $2\Delta a$ thì tại M là vân sáng hay vân tối, bậc hoặc thứ bao nhiêu?*

Lời giải. Lúc đầu tại *M* là vân tối thứ 3 :

$$x_M = \left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda D}{a} = 2{,}5\frac{\lambda D}{a} \quad (1)$$

Khi giảm S_1S_2 một lượng Δa:

$$x_M = n\frac{\lambda D}{a-\Delta a} \quad (2)$$

Khi tăng S_1S_2 một lượng Δa:

$$x_M = 3n\frac{\lambda D}{a+\Delta a} \quad (3)$$

Từ (2), (3) $\Rightarrow \Delta a = \dfrac{a}{2}$

Khi tăng S_1S_2 một lượng $2\Delta a$:

$$x_M = n'\frac{\lambda D}{a+2\Delta a} = n'\frac{\lambda D}{2a} \quad (4)$$

Từ (1), (4) suy ra: $2{,}5\dfrac{\lambda D}{a} = n'\dfrac{\lambda D}{2a} \Rightarrow n' = 5.$

Khi đó tại *M* là vân sáng bậc 5.

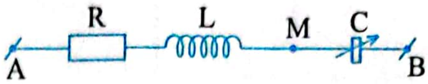
Nhận xét. Chúc mừng hai bạn đã có lời giải đúng cho đề ra kì này: *Phạm Xuân Khánh*, 11A2, THPT Tam Phước, Biên Hòa, **Đồng Nai**; *Nguyễn Lệ Nhật Minh*, 11 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình**.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

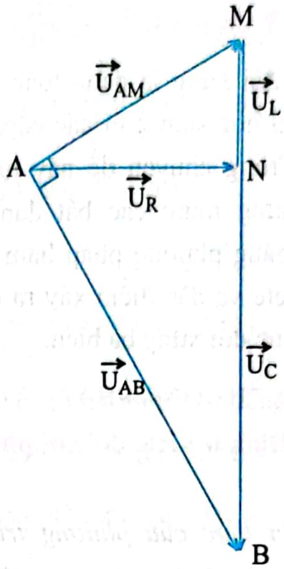
Bài L2/562. *Đoạn mạch điện AB gồm hai đoạn mạch AM và MB nối tiếp nhau. Trên đoạn AM chứa điện trở và cuộn dây thuần cảm, trên đoạn MB chỉ chứa tụ điện có điện dung thay đổi được. Đặt vào hai đầu A, B một điện áp xoay chiều* $u = U\sqrt{2}\cos\left(100\pi t + \dfrac{\pi}{3}\right)$ (V) *và điều chỉnh điện dung của tụ sao cho điện áp hiệu dụng trên đoạn mạch MB đạt cực đại. Biết rằng khi đó điện áp trên đoạn mạch MB có biểu thức là* $u_{MB} = 120\sqrt{2}\cos\left(100\pi t + \dfrac{\pi}{6}\right)$ (V) *và công suất tiêu thụ trên đoạn mạch AB là* $\mathscr{P} = 18\sqrt{3}$ (W). *Tính độ tự cảm của cuộn dây.*

Lời giải.

a)



b)



Sơ đồ mạch điện được mô tả như hình a).

$$U_{C\max} \Rightarrow \vec{U}_{AM} \perp \vec{U}_{AB}.$$

Ta có giản đồ vectơ như hình b).

Theo đề bài u_{MB} chậm pha hơn u_{AB} góc 30°

$$\Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{MAN} = 30^\circ.$$

$$U_{AM} = U_{MB}\sin\widehat{ABM} = 120\sin 30^0 = 60 \text{ V}.$$

$$U_R = U_{AM}\cos\widehat{MAN} = 60\cos 30^0 = 30\sqrt{3} \text{ V}.$$

$$R = \frac{U_R^2}{\mathscr{P}} = 50\sqrt{3}\ \Omega.$$

$$U_L = U_{AM}\sin\widehat{MAN} = 60\sin 30^0 = 30 \text{ V}.$$

$$\frac{Z_L}{R} = \frac{U_L}{U_R} = \frac{30}{30\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Suy ra: $Z_L = 50\ \Omega$ và $L = \dfrac{1}{2\pi}$ (H).

Nhận xét. Chúc mừng *Phạm Xuân Khánh*, 11A2, THPT Tam Phước, Biên Hòa, **Đồng Nai** đã có lời giải đúng cho đề ra kì này.

NGUYỄN XUÂN QUANG

MỘT HƯỚNG SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC ĐỐI XỨNG 3 BIẾN

NGUYỄN HÀ TRANG
(GV THPT Đô Lương 2, Nghệ An)

Bất đẳng thức đối xứng là dạng toán quen thuộc trong các kỳ thi học sinh giỏi các cấp, các kỳ thi Olympic, … Trong chuyên đề này tôi trình bày một hướng chứng minh các bất đẳng thức đối xứng ba biến bằng phương pháp hàm số kết hợp với định lý Viète và đặc điểm xảy ra dấu bằng ở các bất đẳng thức đối xứng ba biến.

A. CƠ SỞ CỦA PHƯƠNG PHÁP

1. Định lý 1. (Định lí Viète đối với phương trình bậc ba)

Gọi ba nghiệm thực của phương trình bậc ba $ax^3+bx^2+cx+d=0$ là x_1, x_2, x_3. Khi đó ta có hệ thức:
$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=\dfrac{c}{a}. \\ x_1x_2x_3=-\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

Điều ngược lại cũng đúng. Nghĩa là nếu có $p=a+b+c$, $q=ab+bc+ac$, $r=abc$ thì a,b,c là ba nghiệm của phương trình:
$$x^3-px^2+qx-r=0.$$

2. Định lý 2.

Mọi đa thức đối xứng bậc ba đều có thể biểu diễn qua các đa thức p, q, r.

Bây giờ, chúng ta sẽ tìm hiểu đặc điểm dấu bằng xảy ra ở các bất đẳng thức đối xứng ba biến qua bài toán sau:

3. Bài toán. *Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn $q=ab+bc+ac$ $(q\ge 0)$, $p=a+b+c$ $(p\ge\sqrt{3q})$. Khi đó giá trị lớn nhất hay giá trị nhỏ nhất của biểu thức $r=abc$ đạt được khi có một biến bằng 0 hoặc có hai biến bằng nhau.*

Chứng minh. Theo định lý Viète, với $p=a+b+c$, $q=ab+bc+ac$, $r=abc$ thì a,b,c là ba nghiệm của phương trình:
$$x^3-px^2+qx-r=0\ (1).$$

Xét hàm số $f(x)=x^3-px^2+qx-r$. Ta có:
$$f'(x)=3x^2-2px+q=0$$
$$\Leftrightarrow x_2=\frac{p-\sqrt{p^2-3q}}{3},\ x_1=\frac{p+\sqrt{p^2-3q}}{3}.$$

Dễ thấy rằng $0\le x_2\le x_1$.

Ta cần tìm điều kiện để phương trình (1) có ba nghiệm thực không âm.

Ta có các chú ý sau:

- ĐK cần và đủ để phương trình (1) có ba nghiệm thực là: $\begin{cases} f(x_2)\ge 0 \\ f(x_1)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r\le g(x_2) \\ r\ge g(x_1) \end{cases}$

với $g(x)=x^3-px^2+qx$

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(x_2)$	↘	$f(x_1)$	↗	$+\infty$

$y=0$

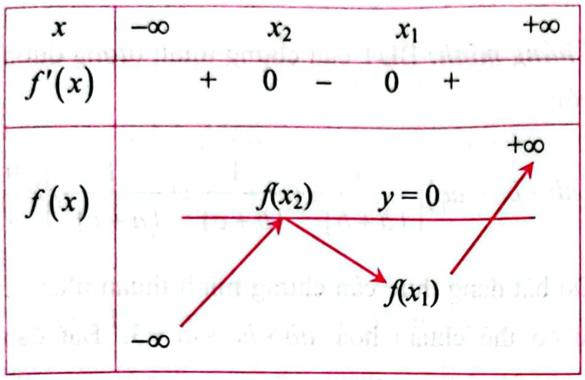
- ĐK cần và đủ để ba số a,b,c là các số thực không âm là: $\begin{cases} abc\ge 0 \\ a+b+c\ge 0 \\ ab+bc+ac\ge 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} r\ge 0 \\ p\ge 0. \\ q\ge 0 \end{cases}$

Từ hai chú ý trên ta suy ra: Điều kiện cần và đủ để ba nghiệm a,b,c của phương trình (1) là các nghiệm thực không âm là:

$$\max\{0;g(x_1)\}\le r\le g(x_2).$$

Từ đó ta rút ra kết luận:

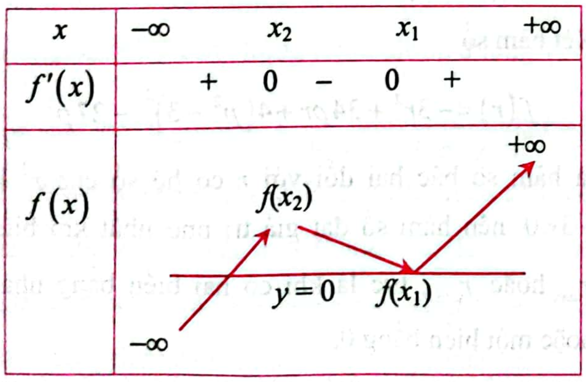
+ GTLN của biểu thức r là $g(x_2)$. Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow f(x_2)=0 \Leftrightarrow$ phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm bằng nhau tức là tồn tại hai trong ba số a,b,c bằng nhau.



+ GTNN của biểu thức r là $\max\{0;g(x_1)\}$.

- Nếu $r_{\min}=0$, dấu đẳng thức xảy ra khi tồn tại một trong ba số a,b,c bằng 0.

- Nếu $r_{\min}=g(x_1)$, dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow f(x_1)=0 \Leftrightarrow$ phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm bằng nhau tức là tồn tại hai trong ba số a,b,c bằng nhau.



Vậy bài toán đã được chứng minh.

Nhận xét. Nếu trong bài toán ta bỏ dữ kiện "a,b,c là các số thực không âm" bởi dữ kiện khác "a,b,c là các số thực" thì với cách chứng minh hoàn toàn tương tự, giá trị lớn nhất hay giá trị nhỏ nhất của biểu thức $r=abc$ đạt được khi có hai biến bằng nhau.

4. Bổ đề. *Nếu $f(x)$ là hàm lồi trên $[a;b]$ (là hàm khả vi cấp hai và $f''(x)\ge 0\ \forall x\in[a;b]$) thì*

$$\max_{x\in[a,b]} f(x)=\max\{f(a),f(b)\}$$

Nếu $f(x)$ là hàm lõm trên $[a;b]$ (là hàm khả vi cấp hai và $f''(x)\le 0\ \forall x\in[a;b]$) thì

$$\min_{x\in[a,b]} f(x)=\min\{f(a),f(b)\}.$$

Vậy ta có thể chứng minh bất đẳng thức đối xứng ba biến $f(a,b,c)\ge 0$ theo cách sau:

Bước 1: Biểu diễn đa thức đối xứng $f(a,b,c)$ về đa thức $g(p,q,r)$ đối với ba biến $p=a+b+c$, $q=ab+bc+ac$, $r=abc$.

Bước 2: Xem đa thức $g(p,q,r)$ như là hàm số đối với biến r, khi đó ta coi p và q như là các hằng số rồi chứng minh đó là hàm số lồi, lõm hoặc đơn điệu.

Bước 3: Áp dụng bổ đề và kết quả bài toán ở mục 3 ta suy ta hàm số đạt min hay đạt max khi biến r đạt GTLN hay GTNN, tức là có hai biến bằng nhau hoặc một biến bằng 0. (Còn trong trường hợp bài toán cho dữ kiện a,b,c là các số thực thì ta suy ra có hai biến bằng nhau). Sau đó, thay vào biểu thức ban đầu rồi chứng minh bất đẳng thức lúc này chỉ còn hai biến.

Chú ý. Dễ thấy rằng hàm số bậc nhất và hàm số bậc hai đều là những hàm số lồi hoặc lõm trên $\mathbb{R}$; hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất luôn đơn điệu trên từng khoảng xác định nên ta dễ dàng có ngay kết quả quen thuộc sau:

• Hàm số bậc nhất đạt min, max trên $[a;b]$ tại hai đầu mút.

• Hàm số bậc hai đạt min trên $[a;b]$ tại hai đầu mút nếu hệ số gắn với lũy thừa bậc hai mang dấu âm, đạt max trên $[a;b]$ tại hai đầu mút nếu hệ số gắn với lũy thừa bậc hai mang dấu dương.

• Hàm số phân thức bậc nhất trên bậc nhất đạt min, max trên $[a;b]$ tại hai đầu mút.

Phần sau đây là một số bài toán minh hoạ.

B. ÁP DỤNG VÀO CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Bài toán 1 (BĐT Schur). *Chứng minh rằng với mọi số thực không âm a,b,c ta luôn có:*

$$a^3+b^3+c^3+3abc\geq ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c).$$

Lời giải. Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại như sau:

$$p^3-3pq+6r\geq pq-3r\Leftrightarrow f(r)=9r+p^3-4pq\geq 0.$$

Hàm $f(r)$ là hàm bậc nhất có hệ số đối với biến r dương nên hàm đạt min khi r đạt GTNN, nghĩa là khi có hai biến bằng nhau hoặc một biến bằng 0.

TH1: Nếu có một biến bằng 0, giả sử $a=0$. Ta cần chứng minh:

$$b^3+c^3\geq bc(b+c)\Leftrightarrow(b+c)(b-c)^2\geq 0.$$

BĐT cuối luôn đúng với mọi số thực không âm b,c.

TH2: Nếu có hai biến bằng nhau, giả sử $b=c$. Ta cần chứng minh:

$$a^3+2b^3+3ab^2\geq 2ab(a+b)+2b^3\Leftrightarrow a(a-b)^2\geq 0$$

luôn đúng với mọi số thực không âm a,b.

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$ hoặc $a=0,b=c$ và các hoán vị.

Nhận xét. BĐT Schur trong bài toán 1 là trường riêng (khi $r=1$) của BĐT Schur dạng tổng quát hơn sau:

Với a, b, c là các số thực không âm, khi đó với mọi $r>0$ ta luôn có:

$$a^r(a-b)(a-c)+b^r(b-a)(b-c)+c^r(c-a)(c-b)\geq 0.$$

Bài toán 2 (IRAN 1996). *Chứng minh rằng với mọi số thực không âm a,b,c ta luôn có:*

$$\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(a+c)^2}\geq\frac{9}{4(ab+bc+ac)}.$$

Chứng minh: BĐT cần chứng minh tương đương với:

$$(ab+bc+ac)\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(a+c)^2}\right)\geq\frac{9}{4}.$$

Do bất đẳng thức cần chứng minh thuần nhất nên ta có thể chuẩn hoá $ab+bc+ac=3$. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\frac{1}{(p-a)^2}+\frac{1}{(p-b)^2}+\frac{1}{(p-c)^2}\geq\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4\sum_{cyc}(p-a)^2(p-b)^2\geq 3\prod_{cyc}(p-a)^2$$

$$\Leftrightarrow 4\sum_{cyc}(pa+bc)^2\geq 3(3p-r)^2$$

$$\Leftrightarrow 4(p^2-3)^2+34pr-27p^2-3r^2\geq 0.$$

Xét hàm số

$$f(r)=-3r^2+34pr+4(p^2-3)^2-27p^2$$

là hàm số bậc hai đối với r có hệ số của r^2 là $-3<0$ nên hàm số đạt giá trị nhỏ nhất khi biến r_{max} hoặc r_{min}, tức là khi có hai biến bằng nhau hoặc một biến bằng 0.

TH1: Nếu có một biến bằng 0, giả sử $a=0$. Ta cần chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{1}{b^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{c^2}\geq\frac{9}{4bc}\Leftrightarrow\frac{c}{b}+\frac{b}{c}+\frac{bc}{(b+c)^2}\geq\frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2+c^2}{bc}+\frac{bc}{(b+c)^2}\ge \frac{9}{4}.$$

Thật vậy, $\frac{b^2+c^2}{bc}+\frac{bc}{(b+c)^2}\ge \frac{(b+c)^2}{2bc}+\frac{bc}{(b+c)^2}.$

Khảo sát hàm số $g(t)=\frac{1}{2}t+\frac{1}{t}$ với $t=\frac{(b+c)^2}{bc}\ge 4$ ta thấy rằng $\min_{t\ge 4} g(t)=g(4)=\frac{9}{4}$.

TH2: Nếu có hai biến bằng nhau, giả sử $b=c$. Ta cần chứng minh:

$$\frac{2}{(a+b)^2}+\frac{1}{4b^2}\ge \frac{9}{4(2ab+b^2)}.$$

Thật vậy, biến đổi tương đương bất đẳng thức trên ta có: $ab(a-b)^2\ge 0$ luôn đúng với mọi số thực không âm a,b.

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$ hoặc $a=0, b=c$ và các hoán vị.

Bài toán 3 (Việt Nam MO 2024). *Tìm số thực dương k lớn nhất sao cho bất đẳng thức:*

$$\frac{1}{kab+c^2}+\frac{1}{kbc+a^2}+\frac{1}{kca+b^2}\ge \frac{k+3}{a^2+b^2+c^2}$$

đúng với mọi bộ ba số thực dương a,b,c thoả mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=2(ab+bc+ca)$.

Lời giải. BĐT cần chứng minh tương đương với:

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{kab+c^2}+\frac{1}{kbc+a^2}+\frac{1}{kca+b^2}\right)\ge k+3.$$

Do bất đẳng thức cần chứng minh thuần nhất nên ta có thể chuẩn hoá $a^2+b^2+c^2=2$. Khi đó, theo giả thiết ta suy ra $ab+bc+ca=1$ và $a+b+c=2$.

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại:

$$\frac{1}{kab+c^2}+\frac{1}{kbc+a^2}+\frac{1}{kca+b^2}\ge \frac{k+3}{2} \quad (*).$$

Cho $a=b=\frac{1}{3}, c=\frac{4}{3}$ thay vào BĐT (*) ta có $k\le 2$. Ta sẽ chứng minh $k=2$ là số dương lớn nhất để BĐT đề bài luôn đúng. Nghĩa là ta cần chứng minh:

$$\frac{1}{2ab+c^2}+\frac{1}{2bc+a^2}+\frac{1}{2ca+b^2}\ge \frac{5}{2}.$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\frac{\sum_{cyc}\left(2bc+a^2\right)\left(2ca+b^2\right)}{\left(2ab+c^2\right)\left(2bc+a^2\right)\left(2ca+b^2\right)}\ge \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\left[8r+\sum_{cyc}2ab\left(a^2+b^2\right)+\sum_{cyc}a^2b^2\right] \ge 5\left[9r^2+4r\sum_{cyc}a^3+2\sum_{cyc}a^3b^3\right]$$

$$\Leftrightarrow 27r^2-4r\le 0$$

(Sử dụng các hằng đẳng thức sau:

$\sum_{cyc}ab\left(a^2+b^2\right)=p^2q-2q^2-pr$;

$\sum_{cyc}a^2b^2=q^2-2pr$; $\sum_{cyc}a^3=p^3-3pq+3r$;

$\sum_{cyc}a^3b^3=1-6r+3r^2$).

Xét hàm số $f(r)=27r^2-4r$ là hàm số bậc hai đối với r có hệ số của r^2 là $27>0$ nên hàm số đạt giá trị lớn nhất khi biến $r_{\max}$ hoặc $r_{\min}$, tức là khi có hai biến bằng nhau. Không mất tính tổng quát, giả sử $b=c$. Ta cần chứng minh:

$$\frac{2}{2ab+b^2}+\frac{1}{2b^2+a^2}\ge \frac{5}{a^2+2b^2}$$

với điều kiện $a^2+2b^2=2\left(2ab+b^2\right)$.

Thật vậy: $\frac{2}{2ab+b^2}+\frac{1}{2b^2+a^2}\ge \frac{5}{a^2+2b^2}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2b^2+a^2}\ge \frac{5}{a^2+2b^2}-\frac{4}{a^2+2b^2}=\frac{1}{a^2+2b^2}$$

luôn đúng với mọi số thực dương a,b.

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Bài toán 4 (VMO 1996). *Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn $a+b+c+abc=4$.. Chứng minh rằng: $a+b+c\geq ab+bc+ac$.*

Lời giải. Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại như sau:

$$4-r\geq q \Leftrightarrow f(r)=r+q-4\leq 0.$$

Hàm $f(r)$ là hàm bậc nhất có hệ số đối với biến r dương nên hàm đạt *max* khi r đạt GTLN, nghĩa là khi có hai biến bằng nhau.

Không mất tính tổng quát, giả sử $b=c$. Khi đó ta cần chứng minh: $ab^2+2ab+b^2-4\leq 0$

$$\Leftrightarrow (b+2)(ab+b-2)\leq 0 \Leftrightarrow ab+b-2\leq 0 \quad (*)$$

với điều kiện $a+2b+ab^2=4$.

Từ điều kiện ta rút ra được $a=\dfrac{4-2b}{1+b^2}$ với lưu ý $b<2$ thay vào (*) ta có:

$$\frac{b^2-2b+5}{b^2+1}.b\leq 2 \Leftrightarrow (b-1)^2(b-2)\leq 0$$

đúng với điều kiện $0<b<2$.

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Bài toán 5 (IMO 1984). *Xét các số thực không âm x,y,z thoả mãn điều kiện $x+y+z=1$. Chứng minh rằng:*

$$0\leq xy+yz+xz-2xyz\leq \frac{7}{27}.$$

Lời giải. Xét hàm số

$$f(r)=-2xyz+xy+xz+yz=-2r+q$$

là hàm số bậc nhất đối với biến r nên hàm đạt min hay max khi r đạt GTLN hay GTNN, nghĩa là khi có hai biến bằng nhau hoặc một biến bằng 0.

TH1: Nếu có một biến bằng 0, giả sử $z=0$. Khi đó, ta cần chứng minh $0\leq xy\leq \dfrac{7}{27}$ (*) với điều kiện $x,y\geq 0$ và $x+y=1$.

Dễ thấy (*) đúng vì $0\leq xy\leq \dfrac{(x+y)^2}{4}=\dfrac{1}{4}<\dfrac{7}{27}$.

TH2: Nếu có hai biến bằng nhau, giả sử $y=z$.

Do $x\geq 0, y\geq 0,\ x+2y=1$ nên

$$0\leq x\leq 1,\ 0\leq 2y\leq 1 \Leftrightarrow 0\leq y\leq \frac{1}{2}<1.$$

Ta cần chứng minh $0\leq 2xy+y^2-2xy^2\leq \dfrac{7}{27}$ với điều kiện $x,y\geq 0$ và $x+2y=1$.

+) $2xy+y^2-2xy^2=2xy(1-y)+y^2\geq 0$ đúng với $1>y\geq 0,\ x\geq 0$.

+) Từ giả thiết ta suy ra $x=1-2y$, thay vào bất đẳng thức ta cần chứng minh ta có:

$$2(1-2y)y(1-y)+y^2\leq \frac{7}{27} \text{ với } 0\leq y\leq \frac{1}{2}.$$

$$\Leftrightarrow 4y^3-5y^2+2y-\frac{7}{27}\leq 0,\ y\in\left[0;\frac{1}{2}\right].$$

Khảo sát hàm số $g(y)=4y^3-5y^2+2y-\dfrac{7}{27}$ với $y\in\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$ ta thấy $\max\limits_{y\in\left[0;\frac{1}{2}\right]} g(y)=g\left(\dfrac{1}{3}\right)=0$.

Vậy BĐT đã được chứng minh. Dấu đẳng thức ở BĐT vế trái xảy ra khi hai biến bằng 0, biến còn lại bằng 1. Dấu đẳng thức ở BĐT vế phải xảy ra khi ba biến bằng nhau và bằng $\dfrac{1}{3}$.

Bài toán 6 (Moldova TST 2005). *Chứng minh rằng nếu a,b,c là các số thực dương và $a^4+b^4+c^4=3$ thì*

$$\frac{1}{4-ab}+\frac{1}{4-bc}+\frac{1}{4-ac}\leq 1.$$

Lời giải. Quy đồng mẫu số rồi khai triển ta viết BĐT dưới dạng: $48-8\sum\limits_{cyc}ab+abc\sum\limits_{cyc}a$

$$\le 64-16\sum_{cyc}ab+4abc\sum_{cyc}a-a^2b^2c^2$$

$\Leftrightarrow 16+3abc(a+b+c)\ge a^2b^2c^2+8(ab+bc+ac)$

$\Leftrightarrow f(r)=r^2-3rp+8q-16\le 0.$

Xét hàm số $f(r)$ là hàm bậc hai đối với biến r có hệ số r^2 dương nên hàm đạt GTLN khi biến $r_{\max}$ hoặc $r_{\min}$, tức là khi có hai biến bằng nhau.

Không mất tính tổng quát, giả sử $b=c$. Khi đó ta cần chứng minh: $\frac{2}{4-ab}+\frac{1}{4-b^2}\le 1$ với giả thiết a,b dương và $a^4+2b^4=3$. Chú ý rằng từ giả thiết $a^4+2b^4=3$ suy ra: $a^2<2$, $b^2<2$, do đó $4-ab>0$, $4-\frac{a^2+b^2}{2}>0$. Áp dụng các bất đẳng thức cơ bản $2ab\le a^2+b^2$ và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$ (với $x+y>0$), ta có: $\frac{2}{4-ab}\le\frac{2}{4-\frac{a^2+b^2}{2}}$

$$=\frac{4}{4-a^2+4-b^2}\le\frac{1}{4-a^2}+\frac{1}{4-b^2}.$$

Do đó: $\frac{2}{4-ab}+\frac{1}{4-b^2}\le\frac{1}{4-a^2}+\frac{2}{4-b^2}.$

Với phép đặt $a^2=x$, $b^2=y$ ta cần chứng minh:

$\frac{1}{4-x}+\frac{2}{4-y}\le 1$ (*) với $x,y>0$ và $x^2+2y^2=3$.

Biến đổi tương đương (*) ta đưa về chứng minh $xy-2x-3y+4\ge 0$ với điều kiện $x,y>0$ và $x^2+2y^2=3$.

Thay $x=\sqrt{3-2y^2}$ ta cần chứng minh:

$$\sqrt{3-2y^2}(y-2)+4-3y\ge 0.$$

Khảo sát hàm số

$$g(y)=\sqrt{3-2y^2}(y-2)+4-3y\ge 0$$

với $y\in\left(0;\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ suy ra: $\min\limits_{y\in\left(0;\sqrt{\frac{3}{2}}\right)} g(y)=g(1)=0.$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Bài toán 7. *Cho a,b,c là các số thực không âm có tổng bằng 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:* $\frac{a}{1+b^2+c^2}+\frac{b}{1+a^2+c^2}+\frac{c}{1+a^2+b^2}$.

Lời giải. Áp dụng BĐT Bunyakovsky ta có:

$$(a+b+c)^2\le\left(\frac{a}{1+b^2+c^2}+\frac{b}{1+a^2+c^2}+\frac{c}{1+a^2+b^2}\right)\times$$
$$\times\left[a(1+b^2+c^2)+b(1+a^2+c^2)+c(1+a^2+b^2)\right].$$

Ta cần tìm GTLN của biểu thức

$$P=a(1+b^2+c^2)+b(1+a^2+c^2)+c(1+a^2+b^2)$$
$$=ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c)+1.$$

Sử dụng đẳng thức

$$ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c)=-3r+pq$$

ta thấy P là hàm số bậc nhất có hệ số đối với biến r âm, nên P đạt max khi r đạt GTNN, nghĩa là khi có hai biến bằng nhau hoặc một biến bằng 0.

TH1: Nếu có một biến bằng 0, giả sử $a=0$. Khi đó ta cần tìm GTLN của $P=bc+1$ với điều kiện $b+c=1$.

Dễ thấy P đạt GTLN bằng $\frac{5}{4}$ khi $b=c=\frac{1}{2}$.

TH2: Nếu có hai biến bằng nhau, giả sử $b=c$. Khi đó ta cần tìm GTLN của $P=2a^2b+2ab^2+2b^3+1$ với điều kiện $a+2b=1$.

Thế $a=1-2b$ vào biểu thức P, ta khảo sát hàm số $f(b)=6b^3-6b^2+2b+1$ với $b\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$, ta có:

$$\max_{b\in\left[0;\frac{1}{2}\right]} f(b)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{4}.$$

Vậy GTNN của biểu thức cần tìm là $\frac{4}{5}$ đạt được khi có $a=0,b=c=\frac{1}{2}$ và các hoán vị.

Bài toán 8 (Vietnam TST 1996). *Xét các số thực a,b,c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:*

$$f(a,b,c)=(a+b)^4+(b+c)^4+(c+a)^4-\frac{4}{7}\left(a^4+b^4+c^4\right).$$

Lời giải. Sử dụng các đẳng thức:

$$x^4+y^4+z^4=p^4-4p^2q+2q^2+4pr;$$

$$xy\left(x^2+y^2\right)+yz(y^2+z^2)+xz(x^2+z^2)=p^2q-2q^2-pr;$$

$$x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2=q^2-2pr$$

ta viết lại biểu thức:

$$f(a,b,c)=\frac{10}{7}\left(a^4+b^4+c^4\right)+4\sum_{cyc}ab\left(a^2+b^2\right)+6\left(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2\right)$$

$$=\frac{10}{7}\left(p^4-4p^2q+2q^2+4pr\right)+4\left(p^2q-2q^2-pr\right)+6\left(q^2-2pr\right)$$

$$=\frac{-72}{7}pr+\frac{10}{7}p^4-\frac{12}{7}p^2q+\frac{6}{7}q^2.$$

Hàm $f(a,b,c)$ là hàm bậc nhất có hệ số đối với biến r âm nên hàm đạt min khi r đạt GTLN, nghĩa là khi có hai biến bằng nhau.

Không mất tính tổng quát, giả sử $b=c$. Khi đó ta cần tìm GTNN của biểu thức:

$$f(a,b)=2(a+b)^4+(2b)^4-\frac{4}{7}\left(a^4+2b^4\right)$$

với điều kiện $a,b\in\mathbb{R}$.

Dễ thấy biểu thức $f(a,b)$ là biểu thức thuần nhất đồng bậc 4 nên ta xét hai trường hợp:

TH1: $b=0$. Khi đó $f(a,b)=f(a,0)=\frac{10}{7}a^4\geq 0.$

TH2: $b\neq 0$. Khi đó

$$f(a,b)=b^4\left[2(t+1)^4+16-\frac{4}{7}\left(t^4+2\right)\right]=b^4.g(t)$$

với $t=\frac{a}{b}$. Khảo sát hàm số $g(t)$ với $t\in\mathbb{R}$ ta suy ra: $\min g(t)>0$. Do đó: $f(a,b)>0$.

Tóm lại: $f(a,b)\geq 0, \forall a,b\in\mathbb{R}$. Vậy GTNN của biểu thức bằng 0 đạt được khi có $a=b=c=0$.

Bài toán 9. *Cho các số thực dương a,b,c thoả mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a}{a^3+bc}+\frac{b}{b^3+ac}+\frac{c}{c^3+ab}\geq 3.$$

Nhận xét: Khi biểu diễn VT của BĐT dưới dạng p, q, r thì số bậc đối với biến r là bậc 3. Ta có thể giảm số bậc đối với biến r bằng cách sau:

BĐT cần chứng minh tương đương với:

$$\frac{1}{a^2+\frac{bc}{a}}+\frac{1}{b^2+\frac{ac}{b}}+\frac{1}{c^2+\frac{ab}{c}}\geq 3.$$

Đặt $\frac{bc}{a}=x, \frac{ac}{b}=y, \frac{ab}{c}=z.$ Khi đó, x,y,z là các số thực dương thoả mãn:

$$xy+yz+xz=a^2+b^2+c^2=1$$

và $xy=c^2$, $yz=a^2$, $xz=b^2$.

BĐT cần chứng minh được viết lại:

$$\frac{1}{yz+x}+\frac{1}{xz+y}+\frac{1}{xy+z}\geq 3$$

với x,y,z là các số thực dương thoả mãn $xy+yz+xz=1$.

Biến đổi tương đương BĐT cần chứng minh ta có:

$$xyz(x+y+z)+\sum_{cyc}xy(x+y)+\sum_{cyc}xy$$

$$\geq 3\left[x^2y^2z^2+xyz\left(x^2+y^2+z^2\right)+xyz+\sum_{cyc}x^2y^2\right].$$

Sử dụng các đẳng thức: $\sum xy(x+y)=pq-3r$; $x^2+y^2+z^2=p^2-2q$; $\sum x^2y^2=q^2-2pr$ ta có BĐT tương đương:

$$3r^2+r\left(3p^2-7p\right)+2-p\leq 0.$$

Xét hàm số $f(r)=3r^2+r\left(3p^2-7p\right)+2-p\leq 0$ là hàm số bậc hai đối với r có hệ số của r^2 là $3>0$ nên hàm số đạt giá trị lớn nhất khi biến r_{max} hoặc r_{min}, tức là khi có hai biến bằng nhau.

Không mất tính tổng quát, giả sử $b=c$ (tương đương với $y=z$), khi đó ta cần chứng minh:

$$\frac{1}{x+y^2}+\frac{2}{xy+y}\ge 3 \ (*) \text{ với } 2xy+y^2=1.$$

Biến đổi tương đương (*) ta đưa về chứng minh

$$3x^2y+2xy+3xy^3+3y^3-y-2x-2y^2\le 0 \quad (1)$$

với điều kiện $x,y>0$ và $2xy+y^2=1$.

Thay $x=\dfrac{1-y^2}{2y}$ vào (1) dẫn đến ta cần chứng minh: $-6y^5+15y^4-6y^3-6y^2+4y-1\le 0$.

Khảo sát hàm số

$$g(y)=-6y^5+15y^4-6y^3-6y^2+4y-1$$

với $y\in(0;1)$ ta suy ra: $\max\limits_{y\in(0;1)} g(y)<0$.

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh. Dấu đẳng thức không xảy ra.

Bài toán 10 (VMO 2015). *Xét các số thực không âm a,b,c. Chứng minh:*

$$3(a^2+b^2+c^2)\ge(a+b+c)(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac})$$
$$+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge(a+b+c)^2.$$

Lời giải. Để dễ dàng khai triển, đặt $\sqrt{a}=x$, $\sqrt{b}=y$, $\sqrt{c}=z$.

- Đầu tiên ta chứng minh BĐT ở vế trái trước.

Sử dụng hằng đẳng thức:

$$3(a^2+b^2+c^2)-\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]=(a+b+c)^2$$

ta viết lại BĐT ở vế trái sau khi sử dụng phép thế:

$$(x^2+y^2+z^2)^2\ge(x^2+y^2+z^2)(xy+yz+xz).$$

BĐT này dễ dàng chứng minh nhờ vào BĐT cơ bản $x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+xz$.

Vậy BĐT ở vế trái đã được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

- Bây giờ ta sẽ chứng minh BĐT ở vế phải. Sử dụng các hằng đẳng thức sau:

$$x^4+y^4+z^4=p^4-4p^2q+2q^2+4pr;$$
$$\sum_{cyc}xy(x^2+y^2)=p^2q-2q^2-pr;$$
$$\sum_{cyc}x^2y^2=q^2-2pr$$

BĐT ở vế phải được viết lại sau khi đã khai triển:

$$\sum_{cyc}x^4+xyz\sum_{cyc}x+\sum_{cyc}xy(x^2+y^2)\ge 4\sum_{cyc}x^2y^2 \ (*),$$

hay tương đương với:

$$p^4-4p^2q+2q^2+4pr+pr+p^2q-2q^2-pr-4q^2+8pr\ge 0$$

$$\Leftrightarrow f(r)=12pr+p^4-3p^2q-4q^2\ge 0.$$

Hàm $f(r)$ là hàm bậc nhất đối với biến r có hệ số đối với r dương nên hàm đạt min khi r đạt GTNN, nghĩa là khi có hai biến bằng nhau hoặc một biến bằng 0.

TH1: Nếu có một biến bằng 0, giả sử $a=0$.

Ta cần chứng minh:

$$(b+c)\sqrt{bc}+(b^2+c^2)\ge 4bc$$

Thật vậy:

$$(b+c)\sqrt{bc}+(b^2+c^2)\ge 2\sqrt{bc}.\sqrt{bc}+2bc\ge 4bc.$$

TH2: Nếu có hai biến bằng nhau, giả sử $b=c$.

Ta cần chứng minh:

$$(a+2b)(2\sqrt{ab}+b)+a^2-2b^2-8ab\ge 0 \ (1).$$

+) Nếu $b=0$ ta có: $a^2\ge 0$ luôn đúng với mọi số thực a.

+) Nếu $b \neq 0$, chia cả hai vế của (1) cho b^2 rồi đặt $t = \sqrt{\frac{a}{b}}$ ta có (1) tương đương với:

$$t^4 + 2t^3 - 7t^2 + 4t \geq 0 \Leftrightarrow t(t-1)^2(t+4) \geq 0$$

luôn đúng với mọi số thực không âm t.

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$ hoặc $a = 0, b = c$ và các hoán vị.

Nhận xét. Dùng BĐT Schur, ta có thể chứng minh (*) như sau: Do x, y, z không âm nên theo BĐT Schur ta có: $x^2(x-y)(x-z) + y^2(y-z)(y-x)$

$$+ z^2(z-x)(z-y) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^4 + y^4 + z^4 + xyz(x+y+z) \geq xy(x^2+y^2) + xy(x^2+y^2) + xy(x^2+y^2)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} x^4 + xyz\sum_{cyc} x \geq \sum_{cyc} xy(x^2+y^2).$$

Do đó (*) được chứng minh nếu ta chứng minh được: $2\sum_{cyc} xy(x^2+y^2) \geq 4\sum_{cyc} x^2y^2$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} xy(x^2+y^2) \geq 2\sum_{cyc} x^2y^2.$$

Theo BĐT Cauchy ta có: $x^2 + y^2 \geq 2xy$;

$$y^2 + z^2 \geq 2yz; \quad z^2 + x^2 \geq 2zx.$$

Do đó: $\sum_{cyc} xy(x^2+y^2) \geq \sum_{cyc} xy.2xy = 2\sum_{cyc} x^2y^2.$

Bài toán 11. *Chứng minh bất đẳng thức sau với mọi số dương a, b, c:*

$$\frac{ab+bc+ac}{a^2+b^2+c^2} - \frac{abc}{a^3+b^3+c^3} \leq \frac{2}{3}$$

Lời giải. Sử dụng hằng đẳng thức $a^3+b^3+c^3 = p^3 - 3pq + 3r$ ta viết lại BĐT cần chứng minh dưới dạng:

$$f(r) = \frac{q}{p^2-2q} - \frac{r}{3r+p^3-3pq} \leq \frac{2}{3}.$$

Xét hàm số $f(r)$ là hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất đối với biến r nên hàm đạt GTLN khi biến r_{max} hoặc r_{min}, tức là khi có hai biến bằng nhau. Không mất tính tổng quát, giả sử $b = c$. Khi đó ta cần chứng minh: $\frac{2ab+b^2}{a^2+2b^2} - \frac{ab^2}{a^3+2b^3} \leq \frac{2}{3}$

$$\Leftrightarrow (a-b)^4(a+b) \geq 0.$$

BĐT cuối luôn đúng với mọi số thực dương a, b.

Vậy BĐT đã được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Sau đây là một số bài toán luyện tập:

BÀI TẬP

Bài toán 1. Chứng minh bất đẳng thức sau với mọi số thực không âm a, b, c:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ac} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(a+c)} \geq 2.$$

Bài toán 2. (*Berkeley Math.Circle*) Chứng minh rằng với mọi số thực không âm a, b, c thoả mãn điều kiện $ab+bc+ac = 1$ ta có bất đẳng thức:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{5}{2}.$$

Bài toán 3. (*Marian Tetiva, Mircea Lascu, Gabriel Dospinescu*) Chứng minh rằng với mọi số thực không âm a, b, c thoả mãn điều kiện $ab+bc+ac = 1$ ta có bất đẳng thức:

$$a^2+b^2+c^2+2abc+3 \geq (1+a)(1+b)(1+c).$$

Bài toán 4. (*Đề thi tuyển sinh ĐH khối B năm 2010*) Xét các số thực không âm a, b, c thoả mãn điều kiện $a+b+c = 1$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$M = 3(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2) + 3(ab+bc+ac) + 2\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

Đ7

PROBLEMS . . . (Tiếp theo trang 21)

Problem T9/566. Find all pairs of integers $(x; y)$ so that $3\left(4x^2+8xy+3y^2-3x+3\right)$ and $5\left(2x^2+4xy+7y^2-7x+7\right)$ are both perfect square numbers.

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/566. Let (a_n) be the sequence of numbers defined by $a_1=1$ and

$$a_{n+1}=\frac{(n+1)^2}{n^2+2n}a_n+n^3+1, n=1,2,3,...$$

Find the general term a_n and calculate $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n^4}$.

Problem T11/566. Find the functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ satisfying

$$f\left(x+yf(x)\right)+f(xy)=f(x)+f(2022y)$$

for all real numbers x, y.

Problem T12/566 Given a triangle ABC, and O, I is the circumcenter and incenter of the triangle, respectively. The points K, L in order are the intersection points of IB and IC, AC and AB. Let X be the intersection of the line through K perpendicular to OB and the line through L perpendicular to OC. The points Y, Z are respectively the reflection points of X in CL, BK. Prove that OI passes through the orthocenter of triangle XYZ.

NGUYEN PHU HOANG LAN
(*University of Education, VNU, Hanoi*)

****

☞

Bài toán 5. (*USA MO 2001*) Xét các số thực không âm a,b,c thoả mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Chứng minh rằng:

$$abc+2\ge ab+bc+ac\ge abc.$$

Bài toán 6. (*Singapore MO 2002*) Chứng minh với mọi số dương a,b,c ta có:

$$3\left(a^3+b^3+c^3\right)^2\ge\left(a^2+b^2+c^2\right)^3.$$

Bài toán 7. Giả sử a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $ab+bc+ac=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S=a+b+c+kabc$ với k là một hằng số dương cho trước.

Bài toán 8. (*THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội*) Chứng minh với mọi số thực dương a,b,c có tổng bằng 3 ta luôn có bất đẳng thức sau:

$$\frac{a}{b^2(ca+1)}+\frac{b}{c^2(ab+1)}+\frac{c}{a^2(cb+1)}\ge\frac{9}{(1+abc)(ab+bc+ac)}.$$

Bài toán 9. Chứng minh với mọi số dương a,b,c thoả mãn $ab+bc+ac=1$ ta có:

$$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}-\frac{9}{4}abc\le\sqrt{2}.$$

Bài toán 10. Chứng minh bất đẳng thức sau với mọi số thực không âm a,b,c:

$$\sqrt{\frac{ab+bc+ac}{3}}\le\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(a+c)}{8}}.$$

Bài toán 11. (*VMO 2002*) Chứng minh bất đẳng thức sau với mọi số thực bất kỳ x,y,z:

$$6(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2\right)\le 27xyz+10\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}.$$

THÊM MỘT CÁCH GIẢI CHO BÀI T7/548

Sau khi đọc lời giải của bài toán T7/548 trên tạp chí TH&TT số 552 tháng 6/2023, tôi xin phép góp thêm một cách giải khác là dùng tính chất biến thiên và cực trị của hàm số bậc ba để bạn đọc gần xa tham khảo.

Bài T7/548. *Cho phương trình*

$$x^6 - x^4 - 2(m-1)x^3 + (m-1)^2 = 0 \qquad (1).$$

Tìm m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

Lời giải. Xét hàm số

$$y = f(x) = x^6 - x^4 - 2(m-1)x^3 + (m-1)^2$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x^2.g(x)$$

với $g(x) = 3x^3 - 2x - 3(m-1)$.

$$\Rightarrow g'(x) = 9x^2 - 2; g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{3}$$

Để phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt thì điều kiện cần là hàm số $f(x)$ phải có 3 cực trị hay phương trình $g(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 khác 0

$$\Leftrightarrow g\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right).g\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right) < 0 \text{ và } -3(m-1) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{27}\left(27 - 4\sqrt{2}\right) < m < \frac{1}{27}\left(27 + 4\sqrt{2}\right), m \neq 1 \text{ (2)}.$$

Ta có bảng biến thiên sau đây

x	$-\infty$	x_1	$-\frac{\sqrt{2}}{3}$	x_2	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	x_3	$+\infty$
$g'(x)$	+		0	−	0	+	
$g(x)$	↗	0		↘ 0		↗ 0	↗
			$g(x)=0$				

$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (nghiệm bội),

$x = x_1, x = x_2, x = x_3$ (ba nghiệm đơn).

- Ta có bảng biến thiên của hàm $y = f(x)$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	0	−	0	+	
$f(x)$		↘		↗		↘		↗	

Chia đa thức $f(x)$ cho $g(x)$ ta được đa thức dư $r(x) = -\frac{2}{9}x^2 - (m-1)x$. Do x_i (i = 1, 2, 3) là nghiệm của $g(x)$ nên $m - 1 = x_i^3 - \frac{2}{3}x_i$. Do đó:

$$f(x_i) = r(x_i) = -\frac{2}{3}x_i^2 - (x_i^3 - \frac{2}{3}x_i)x_i = \frac{x_i^2}{9}(4 - 9x_i^2).$$

Từ bảng biến thiên ta thấy điều kiện đủ để phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt là:

$$f(x_1) < 0,\ f(x_2) > 0 \text{ và } f(x_3) < 0.$$

- $f(x_2) > 0 \Leftrightarrow 4 - 9x_2^2 > 0$ (đúng do $-\frac{\sqrt{2}}{3} < x_2 < \frac{\sqrt{2}}{3}$).
- $f(x_1) < 0 \Leftrightarrow 4 - 9x_1^2 < 0 \Rightarrow x_1 < -\frac{2}{3}$

$$\Rightarrow g(x_1) < g\left(-\frac{2}{3}\right) \Rightarrow 0 < \frac{31}{9} - 3m \Rightarrow m < \frac{31}{27}$$

(do hàm $g(x)$ tăng trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$).

- $f(x_3) < 0 \Leftrightarrow 4 - 9x_3^2 < 0 \Rightarrow \frac{2}{3} < x_3 \Rightarrow g(x_3) > g\left(\frac{2}{3}\right)$

$$\Rightarrow \frac{23}{9} - 3m < 0 \Rightarrow m > \frac{23}{27}$$

(do hàm $g(x)$ tăng trên khoảng $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}; +\infty\right)$).

Kết hợp với (2) ta có điều kiện cần và đủ để phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt là:

$$\frac{23}{27} < m < \frac{31}{27} \text{ và } m \neq 1.$$

Nhận xét. Cách giải này còn cho ta thấy được hình dạng đồ thị của hàm số $f(x)$.

NGUYỄN VĂN CẢNH
(GV THCS Long Hậu, Cần Giuộc, Long An)

Đ

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 107

PROBLEM: *Choose a 4 - digit number randomly. Compute the probability the chosen number is of the form $\overline{abcd}$ where $a \le b \le c \le d$.*

Solution: The sample space has $9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9000$ elements. We have $1 \le a \le b \le c \le d \le 9$ is equivalent to

$$1 \le a < b+1 < c+2 < d+3 \le 12.$$

Therefore, the number of ways to choose a, b, c, d satisfying the requirements is equal to the number of ways to choose four numbers among $1, 2, \ldots, 12$ which is C_{12}^4.

Thus the probability is $\dfrac{C_{12}^4}{9000} = 0.055$.

TỪ VỰNG

randomly : *một cách ngẫu nhiên*
probability : *xác suất*
sample space : *không gian mẫu*

NGUYEN PHU HOANG LAN
(*University of Education, VNU, Hanoi*)

BÀI DỊCH SỐ 105

BÀI TOÁN. *Hàm số f được xác định bởi*

$$f = a.\sin(bx + c) + d,$$

với a, b, c và d là các hằng số. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy các điểm (2 ; 2) và (4 ; 4) tương ứng là điểm cực tiểu và điểm cực đại trên đồ thị hàm số f. Giá trị của a và d bằng bao nhiêu?

Lời giải. Hàm f có dạng là hàm số sin và hiệu hai tung độ giữa điểm cực đại và điểm cực tiểu là: $4 - 2 = 2$. Từ đó $a = 1$. Hàm số sin cơ bản có giá trị nhỏ nhất là -1 và hàm số f có giá trị nhỏ nhất là 2. Do đó $d = 3$.

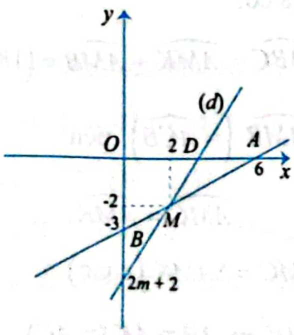
Lưu ý: Bài tập này được sưu tầm từ một bài kiểm tra AP - precalculus.

Nhận xét. Bạn *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định** có bài dịch tương đối tốt. Xin hoan nghênh bạn.

HỒ HẢI (*Hà Nội*)

***

SAI LẦM ... (*Tiếp theo trang 47*)



Hình 2

TH1: (d) cắt đoạn OB tại C (h.1). Khi đó:

$$S_{\Delta MBC} = \frac{1}{2} S_{\Delta OAB} \Leftrightarrow \frac{1}{2} d(M, Oy).BC = \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2.(2m + 2 + 3) = 9 \Leftrightarrow 4m + 10 = 9 \Leftrightarrow m = \frac{-1}{4}$$

TH2: (d) cắt đoạn OA tại D (h.2). Khi đó:

$$S_{\Delta MAD} = \frac{1}{2} S_{\Delta OAB} \Leftrightarrow \frac{1}{2} d(M, Ox).AD = \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2.(6 - \frac{2m+2}{m+2}) = 9 \Leftrightarrow 8m + 20 = 9m + 18 \Leftrightarrow m = 2.$$

Vậy $m = 2$; $m = \dfrac{-1}{4}$.

Theo bạn kết quả trên đã đúng chưa?

NGUYỄN THANH GIANG
(*GV THPT chuyên Hưng Yên*)

***

Đính chính: Trong danh sách các bạn được khen ở chuyên mục "*Sai lầm ở đâu*", trên TH&TT số 565, tháng 7.2024 đã viết: *Huỳnh Trịnh Vĩnh Phú*, xin được sửa là: *Huỳnh Trịnh Vĩnh Phúc*.

Thành thật xin lỗi em *Phúc* và bạn đọc.

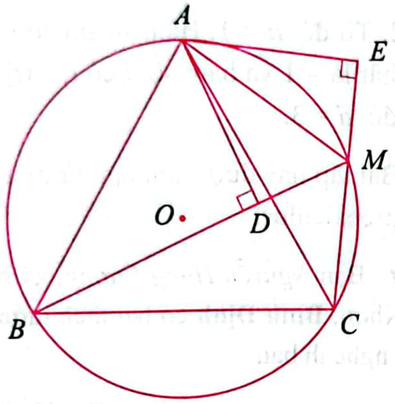
TH&TT

NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN

BÀI TOÁN 86. *Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O). M là điểm trên cung AC không chứa điểm B. D là hình chiếu vuông góc của A trên MB. Chứng minh rằng:*

$$MB - MC = 2MD.$$

Lời giải. ***Cách 1.***



Vẽ AE vuông góc với CM tại E. Ta có:

$\Delta DAB = \Delta EAC$ (cạnh huyền - góc nhọn)

$\Rightarrow BD = CE$ và $AD = AE$. Từ đó:

$\Delta DAM = \Delta EAM$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông)

$\Rightarrow MD = ME$. Do đó:

$$MB - MC = (MD + BD) - (CE - ME)$$
$$= (MD + BD) - (BD - MD) = 2MD.$$

Cách 2. Trên tia đối của tia MC lấy điểm F sao cho $MF = MD$. Ta có:

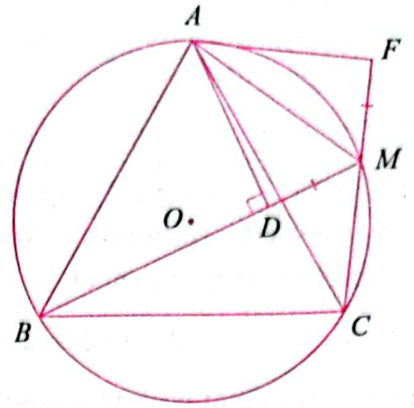
$$\widehat{AMD} = \widehat{ACB} = \widehat{ABC} = \widehat{AMF}$$

nên $\Delta DAM = \Delta FAM$ (g.c.g) $\Rightarrow AD = AF$,

kết hợp với $\widehat{ADM} = \widehat{AFM} = 90^0$, suy ra:

$\Delta DAB = \Delta FAC$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông)

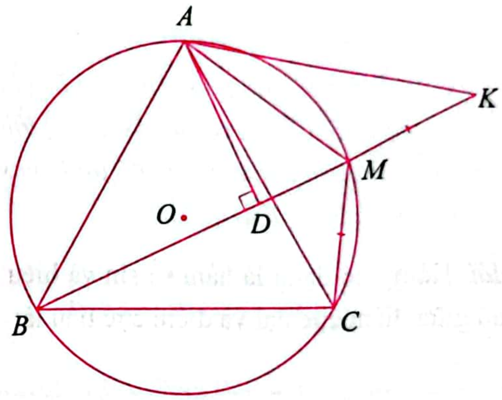
$\Rightarrow BD = CF.$



Do đó:

$$MB - MC = (MD + BD) - (CF - MF)$$
$$= (MD + BD) - (BD - MD) = 2MD.$$

Cách 3.



Trên tia đối của tia MB lấy điểm K sao cho $MK = MC$. Ta có:

$$\widehat{AMC} + \widehat{ABC} = \widehat{AMK} + \widehat{AMB} = \left(180^0\right)$$

và $\widehat{ABC} = \widehat{AMB}\ \left(= \widehat{ACB}\right)$ nên

$$\widehat{AMC} = \widehat{AMK}.$$

Từ đó: $\Delta AMC = \Delta AMK$ (c.g.c)

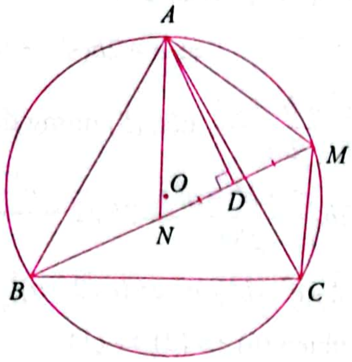
$\Rightarrow AC = AK \Rightarrow AB = AK\ (= AC)$

$\Rightarrow \Delta ABK$ cân tại $A \Rightarrow BD = KD.$

Do đó:

$$MB - MC = (MD + BD) - MK$$
$$= (MD + BD) - (KD - MD) = 2MD.$$

Cách 4.



Trên tia đối của tia DM lấy điểm N sao cho $DN = DM$. Khi đó ΔAMN cân tại $A \Rightarrow AN = AM$; $\widehat{AMN} = \widehat{ANM}$. Từ đó:

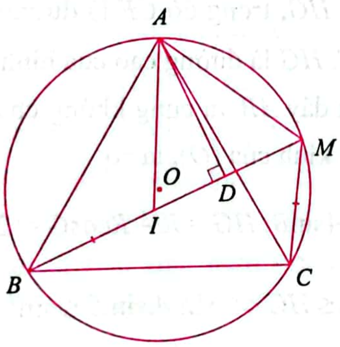
$$\widehat{AMN} = \widehat{ACB} = \widehat{ABC} \Rightarrow \widehat{ANB} = \widehat{AMC},$$

mà $\widehat{ABN} = \widehat{ACM}$ nên $\widehat{BAN} = \widehat{CAM}$, kết hợp với $AB = AC, AN = AM$, suy ra:

$$\Delta ABN = \Delta ACM \text{ (c.g.c)} \Rightarrow BN = CM.$$

Do đó: $MB - MC = MB - BN = MN = 2MD$.

Cách 5.



Trên tia BM lấy điểm I sao cho $BI = MC$. Khi đó:

$\Delta ABI = \Delta ACM$ (c.g.c) $\Rightarrow AI = AM$.

ΔAIM cân tại A nên $DI = DM$.

Do đó: $MB - MC = MB - BI = MI = 2MD$.

Cách 6. Gọi S, L lần lượt là trung điểm của MB, BC.

Vì ΔABC cân tại A nên AL vuông góc với BC.

Suy ra ba điểm A, O, L thẳng hàng.

SL là đường trung bình của ΔBCM nên:

$$\widehat{BSL} = \widehat{BMC} = \widehat{BAC} = 2\widehat{BAL} = 2\widehat{BDL}$$

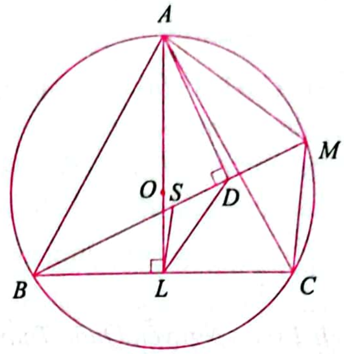
(do tứ giác $ABLD$ nội tiếp)

$\Rightarrow \widehat{BDL} = \widehat{SLD} \Rightarrow \Delta SDL$ cân tại S

$\Rightarrow DS = SL = \dfrac{MC}{2}$.

Do đó: $MB - MC = 2BS - 2SL$

$= 2MS - 2DS = 2MD$.



NGUYỄN ĐỨC TẤN

(*TP. Hồ Chí Minh*)

Nhận xét. Kỳ này, bạn *Đặng Hoàng Lương*, 11A1, THPT Yên Thành 2, **Nghệ An** đóng góp 1 cách giải tương tự như cách 5, bạn *Trương Mỹ Hạnh*, 8a4, THCS Quang Trung, Bảo Lộc, **Lâm Đồng** đóng góp 3 cách giải tương tự như cách 2, cách 4, cách 5. Các bạn *Nguyễn Thành Nhân*, THPT chuyên Lê Quý Đôn, *Nguyễn Hùng Cường*, Xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định**, *Lương Sỹ An*, 10, THPT Nguyễn Hữu Huân, *Nguyễn Thiện Khiêm*, 10A6, THCS - THPT Lê Thánh Tông, **TP. Hồ Chí Minh**, cũng đóng góp một cách giải tương tự như cách 1 và cách 2 trong lời giải trên. Bạn *Huỳnh Trịnh Vĩnh Phúc*, 11A1, THCS - THPT Lê Thánh Tông, **TP. Hồ Chí Minh** sử dụng định lí sin cũng đưa ra một cách giải cho khác bài toán này. Xin hoan nghênh các bạn.

LÊ MAI (*Hà Nội*).

Mời các bạn gửi lời giải BÀI TOÁN 88 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 30/9/2024.

BÀI TOÁN 88. *Giải phương trình*

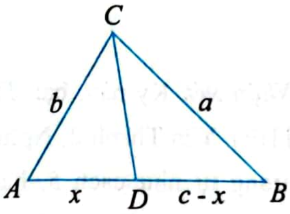
$$x^3 - 2\sqrt{x+2} - 4 = 0.$$

TRẦN VĂN HẠNH

(*GV ĐH Phạm Văn Đồng, Quảng Ngãi*)

BÀI TOÁN 94 (IMO, 1974). *Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để trên đoạn AB tồn tại một điểm D sao cho độ dài CD là trung bình nhân của các độ dài AD và BD là* $\sin A.\sin B \le \sin^2\frac{C}{2}$.

Lời giải. Cách 1 *(của Nguyễn Quốc Thắng).*



Trong hai góc A, B của ΔABC phải có ít nhất một góc nhọn, giả sử đó là góc A, tức là $\hat{A} < 90^0$. Đặt $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Lấy điểm D tùy ý trên cạnh AB và đặt $AD = x$, $DB = c - x$ (hình vẽ), khi đó $0 \le x \le c$. Điều kiện đầu bài tương đương với:

$$2R\sin A.2R\sin B \le \left(2R\sin\frac{C}{2}\right)^2 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow ab \le c^2.\frac{1}{4\cos^2\frac{C}{2}} \quad (\text{vì } \sin C = 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2})$$

$$\Leftrightarrow c^2 \ge 4ab\cos^2\frac{C}{2} = ab(2+2\cos C)$$

$$\Leftrightarrow 2c^2 \ge a^2+b^2-2ab\cos C+2ab+2ab\cos C$$

$$\Leftrightarrow 2c^2 \ge (a+b)^2 \quad (2).\ \text{Vậy } (1) \Leftrightarrow (2).$$

Nếu tồn tại điểm D có tính chất như đầu bài, suy ra tồn tại x sao cho

$$CD^2 = AD.DB = x(c-x) = x^2+b^2-2bx\cos A$$

hay $2x^2-(2b\cos A+c)x+b^2=0$ (3).

Ta phải có: $\Delta = (2b\cos A+c)^2-8b^2 \ge 0$ (4).

Rõ ràng nếu phương trình bậc hai (3) có nghiệm dương thì tồn tại $x > 0$ để $x(c-x) \ge 0$, suy ra $x \le c$. Vì A nhọn nên (4) $\Leftrightarrow 2b\cos A + c \ge 2\sqrt{2}b$

$$\Leftrightarrow c \ge 2b(\sqrt{2}-\cos A)\ (5).$$

Do $\cos A = \frac{c^2+b^2-a^2}{2bc}$ nên (5) tương đương với

$$c \ge 2b\sqrt{2}-2b.\frac{c^2+b^2-a^2}{2bc} = 2b\sqrt{2}-\frac{c^2+b^2-a^2}{c}$$

$$\Leftrightarrow c^2 \ge 2bc\sqrt{2}-c^2-b^2+a^2 \Leftrightarrow (c\sqrt{2}-b)^2 \ge a^2\ (6).$$

Từ đây hiển nhiên (6) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (1).

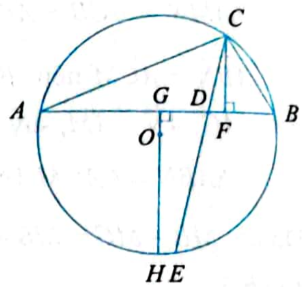
Vậy điều kiện cần và đủ để trên đoạn AB tồn tại điểm D sao cho $CD^2 = AD.DB$ là $\sin A\sin B \le \sin^2\frac{C}{2}$.

Cách 2. Vẽ đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi D là điểm bất kỳ trên đoạn AB, CD cắt đường tròn ở E. Ta có:

$CD.DE = AD.DB$.

Vậy CD là trung bình nhân của AD và DB

$\Leftrightarrow CD = DE$ (*).



tồn tại điểm E thỏa mãn (*) $\Leftrightarrow CF \le HG$, trong đó CF là đường cao hạ từ C của ΔABC, HG là đường cao của hình viên phân AHB tạo bởi dây AB và cung không chứa điểm C. Gọi R là bán kính của (O), ta có:

$$CF = 2R\sin A\sin B;\ HG = R - R\cos C = 2R\sin^2\frac{C}{2}.$$

Dễ thấy: $CF \le HG \Leftrightarrow \sin A.\sin B \le \sin^2\frac{C}{2}$.

Nhận xét. Rất tiếc là Tòa soạn không nhận được lời giải nào cho bài toán này.

NHƯ HOÀNG

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 30.9.2024.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

BÀI TOÁN 96. *Tìm các cặp số nguyên $(a;\ b)$ sao cho đa thức $ax^{17}+bx^{16}+1$ chia hết cho đa thức x^2-x-1.*

KHÁNH HỮU *(Hà Nội)*

GIẢI ĐÁP: BÀI TOÁN XÁC SUẤT

(*Đề đăng trên TH&TT số* 562, *tháng* 4 *năm* 2024)

Phân tích sai lầm.

Lời giải của bạn *Minh* sai ở chỗ không phải chọn 6 học sinh nam trong 14 học sinh nam hay 6 học sinh nữ trong 16 học sinh nữ mà các học sinh nam và nữ ở tổ 1 và tổ 2 là khác nhau, đồng thời cả hai bạn *Minh* và *Xuân* đều sai ở chỗ $n(\Omega)=C_{30}^{6}$. Ta lưu ý rằng không phải chọn ngẫu nhiên 6 học sinh trong 30 học sinh mà là chọn ngẫu nhiên 3 học sinh ở tổ 1 và 3 học sinh ở tổ 2.

Lời giải đúng. Tổ 1 có: 8 + 7 = 15 học sinh. Tổ 2 có: 6 + 9 = 15 học sinh. Do đó:

$$n(\Omega)=C_{15}^{3}.C_{15}^{3}.$$

Gọi A là biến cố cần tính xác suất.

Gọi A_1: "số học sinh chọn được toàn nam".

Gọi A_2: "số học sinh chọn được toàn nữ".

Do việc chọn 3 học sinh nam trong 8 học sinh nam tổ 1 và 3 học sinh nam trong 6 học sinh nam tổ 2 nên ta có: $n(A_1)=C_8^3.C_6^3$.

Do việc chọn 3 học sinh nữ trong 7 học sinh nữ tổ 1 và 3 học sinh nữ trong 9 học sinh nữ tổ 2 nên ta có: $n(A_2)=C_7^3.C_9^3$.

Do đó: $P(A)=\dfrac{n(A_1)+n(A_2)}{n(\Omega)}=\dfrac{C_8^3.C_6^3+C_7^3.C_9^3}{C_{15}^3.C_{15}^3}$

$$=\frac{1120+2940}{207025}=\frac{116}{5915}.$$

Nhận xét. Hoan nghênh bạn *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định** đã phát hiện được sai lầm và đưa ra lời giải đúng.

KIHIVI

KẾT QUẢ ĐÃ ĐÚNG CHƯA ?

Bài toán. *Trên mặt phẳng toạ độ Oxy cho hai điểm $A(6;0)$ và $B(0;-3)$ và đường thẳng (d) có phương trình $y=-(m+2)x+2m+2$ (m là tham số, $m\neq-2$; $m\neq\dfrac{-5}{2}$). Tìm các giá trị của m để (d) chia tam giác OAB (O là gốc toạ độ) thành hai phần có diện tích bằng nhau.*

Một học sinh giải như sau:

Phương trình đường thẳng AB có dạng $y=ax+b$. A, B thuộc đường thẳng (AB) nên ta có hệ phương trình: $\begin{cases}6a+b=0\\0.a+b=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\b=-3\end{cases}$.

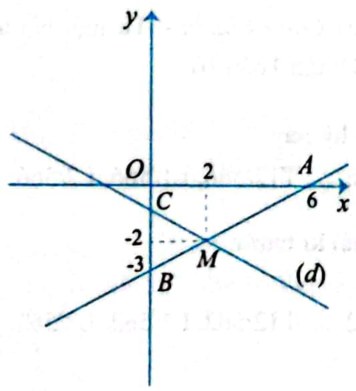
Phương trình đường thẳng AB là: $y=\dfrac{1}{2}x-3$.

Phương trình hoành độ giao điểm M của (d) và (AB) là nghiệm phương trình:

$$-(m+2)x+2m+2=\frac{1}{2}x-3\Leftrightarrow(2m+5)(x-2)=0$$

$\Leftrightarrow x=2$ (do $m\neq\dfrac{-5}{2}$) $\Rightarrow M(2;-2)$. Diện tích tam giác OAB bằng $\dfrac{1}{2}OA.OB=\dfrac{1}{2}.6.3=9$.

Đường thẳng (d) cắt Oy tại điểm C có tung độ $2m+2$, cắt Ox tại điểm D có hoành độ $\dfrac{2m+2}{m+2}$.



Hình 1

(*Xem tiếp trang* 43)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 566 (8.2024)
Tòa soạn : 187B, Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607,
ĐT Phát hành: 024.35142649, 024.35682701
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TRONG SỐ NÀY

Biên tập: LÊ MAI, NHƯ HOÀNG
Trị sự, phát hành: HOÀNG THỊ KIM PHƯỢNG, TRẦN THỊ MINH HIÊN
Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG
Thiết kế, chế bản: MINH HÒA

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Bộ đóng tập

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ HÀNG NĂM

Năm 2010
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 99.000 đồng

Năm 2012
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 152.000 đồng

Năm 2014
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 185.000 đồng

Năm 2015
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2016
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2017
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2018
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2019
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2020
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 210.000 đồng

Năm 2021
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 240.000 đồng

Năm 2022
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 260.000 đồng

Năm 2023
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 260.000 đồng

Mọi chi tiết xin liên hệ:
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
Địa chỉ: 187B Giảng Võ, Hà Nội
- Điện thoại: 024.35121606 - 024.35121607
- Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

THƯ NGỎ

Bạn đọc thân mến!

Trong 60 năm qua, Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ không ngừng phát triển và đã trở thành người bạn thân thiết của nhiều thế hệ học sinh, giáo viên và bạn đọc yêu toán trên cả nước. Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ đã nhận nhiều Giấy khen, Huân huy chương và những phần thưởng cao quý khác mà Đảng và Nhà nước trao tặng. Điều này có được là nhờ công sức của các nhà toán học, các nhà sư phạm, các ủy viên hội đồng biên tập, các công tác viên và bạn đọc yêu toán trên cả nước. Thay mặt Ban biên tập, chúng tôi xin cảm ơn bạn đọc gần xa, các nhà khoa học và các cộng tác viên về những đóng góp to lớn đó.

Để chào mừng 60 năm thành lập và phát triển Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, từ tháng 4.2024, Ban biên tập sẽ mở chuyên mục: ***Những hồi ức, những kỷ niệm về Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ***. Nội dung các bài trong chuyên mục này sẽ viết về những hồi ức, những kỷ niệm, gắn bó của bạn đọc với Toán học và Tuổi trẻ; những ảnh hưởng, đóng góp của Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ đối với phong trào học toán, giải toán,... trên toàn quốc.

Bài viết có thể viết trên giấy hoặc đánh máy vi tính (nên bằng chương trình soạn thảo văn bản word). Trên bài viết cần ghi rõ: Họ tên, địa chỉ, số điện thoại. Bài viết không quá 4 trang đánh máy.

Bài viết có thể gửi về Tòa soạn:

- Gửi file word theo địa chỉ email: *toanhoctuoitrevietnam@gmail.com*

- Gửi bài theo đường Bưu điện. Phong bì có dán tem, gửi về địa chỉ: *Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, 187B Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội.*

- Hoặc đến Toà soạn Tạp chí gửi trực tiếp.

Ban biên tập mong muốn nhận được các bài viết từ bạn đọc. Trân trọng cám ơn!

TH&TT

CUỘC THI VIẾT CHUYÊN ĐỀ TOÁN CHÀO MỪNG 60 NĂM TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Để chào mừng 60 năm thành lập và phát triển Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, Ban biên tập tổ chức cuộc thi viết chuyên đề Toán cho bậc THCS và THPT.

• **Đối tượng dự thi:** Giáo viên đã hoặc đang dạy ở bậc THCS, THPT, Giảng viên, Sinh viên ở các trường Đại học, Cao đẳng và bạn đọc yêu thích Toán.

• **Nội dung bài dự thi:** Là các chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi toán; các chuyên đề ôn tập, ôn thi cuối cấp; những tìm tòi, sáng tạo trong việc dạy học Toán (bậc THCS, THPT).

• **Thể lệ cuộc thi:** Mỗi người tham gia cuộc thi được gửi không quá 3 bài dự thi khác nhau. Các bài dự thi có thể là các sáng kiến kinh nghiệm đã đăng ký, hoặc đạt giải ở Trường, Phòng, Sở,... nhưng chưa từng được xuất bản thành sách, báo, tạp chí và cũng chưa tham gia cuộc thi nào khác.

Kết quả cuộc thi sẽ được công bố trên TH&TT tháng 11 năm 2024 (Số 569). Các bài hay có thể được chọn đăng trên Tạp chí hoặc in thành sách. Các tác giả được hưởng nhuận bút theo quy định của Tạp chí. Bài viết tham dự cuộc thi thuộc bản quyền của TH&TT.

• **Thời hạn gửi bài dự thi:** Trước ngày 15/10/2024.

• **Quy cách bài dự thi:** Bài dự thi được đánh máy vi tính, nên dùng chương trình soạn thảo văn bản word (có file). Trên mỗi bài dự thi ghi rõ: Họ và tên, địa chỉ Trường, xã (phường), huyện (quận), tỉnh (thành phố), số điện thoại. Bài dự thi không quá 15 trang đánh máy. Trên cùng của trang 1 mỗi bài dự thi ghi rõ:

Bài dự thi viết chuyên đề Toán
chào mừng 60 năm TH&TT.

• **Cách gửi bài dự thi:** Bài dự thi gửi về Tòa soạn TH&TT bằng cách:

- Gửi file word theo địa chỉ email:

toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

- Gửi bài theo đường Bưu điện. Phong bì có dán tem, gửi về địa chỉ:

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ
187B Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội.

- Hoặc đến Toà soạn Tạp chí gửi trực tiếp.

• **Giải thưởng:** Những người đoạt giải sẽ được nhận Giấy chứng nhận và Tặng phẩm của Tạp chí.

TH&TT

Giấy phép XB số 534/GP-BTTTT cấp ngày 19.11.2020; Mã số: 8BT8M24
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 8 năm 2024

Giá: 18.000 đồng
Mười tám nghìn đồng