TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

TẠP CHÍ Toán học & Văn học TRONG NHÀ TRƯỜNG

Số 567
Tháng 9 - 2024
ISSN: 2734-9284

VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 61 - XUẤT BẢN TỪ 1964 - DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT Biên tập: (024) 35121607; ĐT Phát hành: (024) 35142649;
ĐT-Fax Hành chính: (024) 35121606 - Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com - Website: viennghiencuusachgd.com

Nhà Toán học Áo **Otto Stolz**
(3/7/1842 – 23/11/1905)

Cảnh đẹp vùng Hall in Tirol (Áo)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

BẢNG GIÁ SÁCH GIÁO KHOA LỚP 10

ÁP DỤNG CHO NĂM HỌC 2024-2025

Chuẩn mực – Khoa học – Hiện đại

BỘ SÁCH KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

TT	Tên sách	Giá bìa (đồng/cuốn)	
1	Ngữ văn 10, tập một	22,000	25,000
2	Ngữ văn 10, tập hai	18,000	21,000
3	Toán 10, tập một	15,000	17,000
4	Toán 10, tập hai	14,000	16,000
5	Giáo dục thể chất 10 - Bóng đá	12,000	13,000
6	Giáo dục thể chất 10 - Bóng rổ	10,000	11,000
7	Giáo dục thể chất 10 - Bóng chuyền	12,000	12,000
8	Giáo dục thể chất 10 - Cầu lông	13,000	13,000
9	Hoạt động trải nghiệm, hướng nghiệp 10	11,000	14,000
10	Lịch sử 10	16,000	16,000
11	Địa lí 10	16,000	19,000
12	Giáo dục Kinh tế và Pháp luật 10	21,000	24,000
13	Vật lí 10	19,000	22,000
14	Hoá học 10	17,000	20,000
15	Sinh học 10	22,000	24,000
16	Công nghệ 10 - Công nghệ trồng trọt	21,000	23,000
17	Công nghệ 10 - Thiết kế và công nghệ	19,000	22,000
18	Tin học 10	22,000	25,000
19	Âm nhạc 10	16,000	18,000
20	Mĩ thuật 10 - Lí luận và lịch sử mĩ thuật	6,000	6,000
21	Mĩ thuật 10 - Hội hoạ	6,000	6,000
22	Mĩ thuật 10 - Đồ hoạ (tranh in)	6,000	6,000
23	Mĩ thuật 10 - Điêu khắc	6,000	6,000
24	Mĩ thuật 10 - Thiết kế công nghiệp	6,000	6,000
25	Mĩ thuật 10 - Thiết kế đồ hoạ	6,000	6,000
26	Mĩ thuật 10 - Thiết kế thời trang	6,000	6,000
27	Mĩ thuật 10 - Thiết kế mĩ thuật sân khấu, điện ảnh	6,000	6,000
28	Mĩ thuật 10 - Thiết kế mĩ thuật đa phương tiện	7,000	7,000
29	Mĩ thuật 10 - Kiến trúc	6,000	6,000
30	Giáo dục Quốc phòng và An ninh 10	13,000	13,000
31	Chuyên đề học tập Ngữ văn 10	14,000	15,000
32	Chuyên đề học tập Toán 10	9,000	10,000
33	Chuyên đề học tập Lịch sử 10	9,000	10,000
34	Chuyên đề học tập Địa lí 10	6,000	7,000
35	Chuyên đề học tập Giáo dục Kinh tế và Pháp luật 10	10,000	11,000
36	Chuyên đề học tập Vật lí 10	11,000	13,000
37	Chuyên đề học tập Hoá học 10	11,000	12,000
38	Chuyên đề học tập Sinh học 10	11,000	12,000
39	Chuyên đề học tập Công nghệ 10 - Công nghệ trồng trọt	11,000	13,000
40	Chuyên đề học tập Công nghệ 10 - Thiết kế và công nghệ	10,000	11,000
41	Chuyên đề học tập Tin học 10 - Khoa học máy tính	13,000	13,000
42	Chuyên đề học tập Tin học 10 - Tin học ứng dụng	14,000	14,000
43	Chuyên đề học tập Mĩ thuật 10	11,000	12,000
44	Chuyên đề học tập Âm nhạc 10	9,000	11,000

BỘ SÁCH CHÂN TRỜI SÁNG TẠO

TT	Tên sách	Giá bìa (đồng/cuốn)	
1	Ngữ văn 10, tập một	22,000	24,000
2	Ngữ văn 10, tập hai	17,000	20,000
3	Toán 10, tập một	19,000	21,000
4	Toán 10, tập hai	14,000	17,000
5	Hoạt động trải nghiệm, hướng nghiệp 10 (bản 1)	13,000	16,000
6	Hoạt động trải nghiệm, hướng nghiệp 10 (bản 2)	11,000	15,000
7	Lịch sử 10	17,000	17,000
8	Địa lí 10	22,000	26,000
9	Giáo dục Kinh tế và Pháp luật 10	24,000	27,000
10	Vật lí 10	21,000	24,000
11	Hoá học 10	18,000	21,000
12	Sinh học 10	22,000	26,000
13	Âm nhạc 10	25,000	26,000
14	Chuyên đề học tập Ngữ văn 10	15,000	16,000
15	Chuyên đề học tập Toán 10	10,000	11,000
16	Chuyên đề học tập Lịch sử 10	9,000	12,000
17	Chuyên đề học tập Địa lí 10	6,000	8,000
18	Chuyên đề học tập Giáo dục Kinh tế và Pháp luật 10	11,000	13,000
19	Chuyên đề học tập Vật lí 10	13,000	15,000
20	Chuyên đề học tập Hoá học 10	11,000	13,000
21	Chuyên đề học tập Sinh học 10	14,000	17,000
22	Chuyên đề học tập Âm nhạc 10	8,000	12,000
23	Giáo dục Quốc phòng và An ninh 10	13,000	13,000

SÁCH GIÁO KHOA TIẾNG ANH

Bộ sách hợp tác xuất bản với Pearson Education

TT	Tên sách	Giá bìa	
1	Tiếng Anh 10 - Global Success	65,000	75,000

Bộ sách hợp tác xuất bản với Oxford University Press

TT	Tên sách	Giá bìa
1	Tiếng Anh 10 - Friends Global	99,000

LƯU Ý

Phục vụ năm học 2024-2025, NXBGDVN áp dụng mức giá bìa theo bảng giá này thống nhất trong toàn quốc.

DÀNH CHO TRUNG HỌC CƠ SỞ

MỘT ĐẲNG THỨC CẦN NHỚ

NGÔ VĂN THÁI
(*Thái Bình*)

Toán THCS có một đẳng thức khá đẹp đã được một số tỉnh khai thác ra đề tuyển sinh vào lớp 10, đó là đẳng thức sau:

"*Cho* $a, b, c, k, p \in \mathbb{R}$. *Khi đó:*

$$ka^2 + pab + kb^2 = \frac{2k+p}{4}(a+b)^2 + \frac{2k-p}{4}(a-b)^2\text{"}.$$

Chú ý:

- *Nếu* $2k > p \Rightarrow ka^2 + pab + kb^2 \geq \frac{2k+p}{4}(a+b)^2$.

  Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

- *Nếu* $2k < p \Rightarrow ka^2 + pab + kb^2 \leq \frac{2k+p}{4}(a+b)^2$.

  Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

Các bạn học sinh nắm vững đẳng thức trên cùng chú ý thì sẽ giải quyết nhanh gọn một lớp bài toán dưới đây:

Thí dụ 1 (Thi tuyển sinh vào lớp 10 năm học 2022-2023 của tỉnh Thái Bình).

Cho các số dương a, b, c thay đổi và thỏa mãn $a + b + c = 2022$. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$M = \sqrt{2a^2 + ab + 2b^2} + \sqrt{2b^2 + bc + 2c^2} + \sqrt{2c^2 + ca + 2a^2}.$$

Lời giải. Áp dụng đẳng thức trên và chú ý ta được:

$$\sqrt{2a^2 + ab + 2b^2} = \sqrt{\frac{5}{4}(a+b)^2 + \frac{3}{4}(a-b)^2} \geq \frac{\sqrt{5}}{2}(a+b).$$

Tương tự: $\sqrt{2b^2 + bc + 2c^2} \geq \frac{\sqrt{5}}{2}(b+c)$;

$$\sqrt{2c^2 + ca + 2a^2} \geq \frac{\sqrt{5}}{2}(c+a).$$

Suy ra:

$$M \geq \frac{\sqrt{5}}{2}\left[(a+b)+(b+c)+(c+a)\right] = \sqrt{5}(a+b+c) = 2022\sqrt{5}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 674$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là $2022\sqrt{5}$ khi $a = b = c = 674$.

Thí dụ 2 (Thi tuyển sinh vào lớp 10 năm học 2022-2023 của tỉnh Bắc Ninh).

Cho các số thực a, b, c sao cho phương trình $ax^2 + bx + c + 2022 = 0$ *nhận* $x = 1$ *là nghiệm. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = \sqrt{3a^2 - 2ab + 3b^2} + \sqrt{5b^2 - 6bc + 5c^2} + \sqrt{6c^2 - 8ca + 6a^2}.$$

Lời giải. Dễ thấy phương trình $ax^2 + bx + c + 2022 = 0$ khi $x = 1$ thì có dạng:

$$a + b + c = -2022.$$

Áp dụng đẳng thức trên và chú ý ta được:

$$\sqrt{3a^2 - 2ab + 3b^2} = \sqrt{(a+b)^2 + 2(a-b)^2} \geq |a+b|.$$

Tương tự:

$$\sqrt{5b^2 - 6bc + 5c^2} \geq |b+c|;$$

$$\sqrt{6c^2 - 8ca + 6a^2} \geq |c+a|.$$

Suy ra:

$$P \geq |a+b| + |b+c| + |c+a| \geq |a+b+b+c+c+a| = 2|a+b+c| = 2|-2022| = 4044.$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = -674$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 4044 khi $a = b = c = -674$.

Thí dụ 3 (Thi thử vào lớp 10, THPT chuyên Hạ Long, Quảng Ninh, năm 2019).

Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $x+y+z=\sqrt{2}$. *Chứng minh*

$$\sqrt{2019x^2+2xy+2019y^2}+\sqrt{2019y^2+2yz+2019z^2}+\sqrt{2019z^2+2zx+2019x^2}\ge 2\sqrt{2020}.$$

Lời giải. Áp dụng đẳng thức trên và chú ý ta được:

$$\sqrt{2019x^2+2xy+2019y^2}=\sqrt{\frac{4040}{4}(x+y)^2+\frac{4036}{4}(x-y)^2}\ge\sqrt{1010}(x+y).$$

Tương tự:

$$\sqrt{2019y^2+2yz+2019z^2}\ge\sqrt{1010}(y+z);$$

$$\sqrt{2019z^2+2zx+2019x^2}\ge\sqrt{1010}(z+x).$$

Suy ra:

$$VT\ge\sqrt{1010}(x+y+y+z+z+x)=2\sqrt{1010}.\sqrt{2}=2\sqrt{2020}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Bài toán được chứng minh.

Thí dụ 4. *Cho ba số thực dương a, b, c và* $k\ge 1$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{\sqrt{a^2-ab+b^2}}{a+b+kc}+\frac{\sqrt{b^2-bc+c^2}}{b+c+ka}+\frac{\sqrt{c^2-ca+a^2}}{c+a+kb}\ge\frac{3}{2+k}.$$

Lời giải. Theo chú ý ta được:

$$\sqrt{a^2-ab+b^2}\ge\sqrt{\frac{(a+b)^2}{4}}=\frac{a+b}{2}.$$

Tương tự: $\sqrt{b^2-bc+c^2}\ge\frac{b+c}{2}$;

$$\sqrt{c^2-ca+a^2}\ge\frac{c+a}{2}.$$

Suy ra:

$$VT\ge\frac{a+b}{2(a+b+kc)}+\frac{b+c}{2(b+c+ka)}+\frac{c+a}{2(c+a+kb)},$$

Xét tính đúng đắn của bất đẳng thức sau:

$$\frac{a+b}{2(a+b+kc)}+\frac{b+c}{2(b+c+ka)}+\frac{c+a}{2(c+a+kb)}\ge\frac{3}{2+k}.$$

$$\Leftrightarrow\frac{a+b}{2(a+b+kc)}-\frac{1}{2+k}+\frac{b+c}{2(b+c+ka)}-\frac{1}{2+k}+\frac{c+a}{2(c+a+kb)}-\frac{1}{2+k}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{a+b-2c}{a+b+kc}+\frac{b+c-2a}{b+c+ka}+\frac{c+a-2b}{c+a+kb}\ge 0\quad(1).$$

Vì bất đẳng thức đề ra và (1) đều là bất đẳng thức đối xứng, không mất tính tổng quát ta giả sử $a\ge b\ge c$. Khi đó:

$$\begin{cases}a+b-2c\ge 0\ge b+c-2a\\ 0<(a+b+kc)\le(c+a+kb)\le(b+c+ka)\end{cases}.$$

Suy ra: $\dfrac{a+b-2c}{a+b+kc}\ge\dfrac{a+b-2c}{c+a+kb}$ (2);

$$\frac{b+c-2a}{b+c+ka}\ge\frac{b+c-2a}{c+a+kb}\quad(3);$$

$$\frac{c+a-2b}{c+a+kb}=\frac{c+a-2b}{c+a+kb}\quad(4).$$

Cộng vế với vế của (2), (3), (4) ta có:

$$VT(1)\ge\frac{a+b-2c}{c+a+kb}+\frac{b+c-2a}{c+a+kb}+\frac{c+a-2b}{c+a+kb}=0.$$

Vậy

$$\frac{\sqrt{a^2-ab+b^2}}{a+b+kc}+\frac{\sqrt{b^2-bc+c^2}}{b+c+ka}+\frac{\sqrt{c^2-ca+a^2}}{c+a+kb}\ge\frac{3}{2+k}.$$

Dấu đẳng thức của bài toán xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài toán được chứng minh.

Thí dụ 5. *Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn* $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}\ge\frac{3}{2}$.

Chứng minh rằng

$$\frac{b}{\sqrt{3a^2-4ab+3b^2}}+\frac{c}{\sqrt{3b^2-4bc+3c^2}}+\frac{a}{\sqrt{3c^2-4ca+3a^2}}\le\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Lời giải. Dễ thấy

$$3a^2-4ab+3b^2=\frac{1}{2}(a+b)^2+\frac{5}{2}(a-b)^2\ge\frac{1}{2}(a+b)^2.$$

Suy ra: $\dfrac{b}{\sqrt{3a^2-4ab+3b^2}} \le \dfrac{\sqrt{2}b}{a+b}$.

Tương tự:

$$\frac{c}{\sqrt{3b^2-4bc+3c^2}} \le \frac{\sqrt{2}c}{b+c};$$

$$\frac{a}{\sqrt{3c^2-4ca+3a^2}} \le \frac{\sqrt{2}a}{c+a}.$$

Cộng vế với vế của ba bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{b}{\sqrt{3a^2-4ab+3b^2}}+\frac{c}{\sqrt{3b^2-4bc+3c^2}}+\frac{a}{\sqrt{3c^2-4ca+3a^2}} \le \sqrt{2}\left(\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}\right).$$

Nhưng

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}+\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}=3$$

và giả thiết cho $\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{b+c}+\dfrac{c}{c+a} \ge \dfrac{3}{2}$,

suy ra: $\dfrac{b}{a+b}+\dfrac{c}{b+c}+\dfrac{a}{c+a} \le \dfrac{3}{2}$.

Do đó: $$\frac{b}{\sqrt{3a^2-4ab+3b^2}}+\frac{c}{\sqrt{3b^2-4bc+3c^2}}+\frac{a}{\sqrt{3c^2-4ca+3a^2}} \le \sqrt{2}\frac{3}{2}=\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Dấu đẳng thức của bài toán xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài toán được chứng minh.

Thí dụ 6. *Cho a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{\frac{ab}{\sqrt{(b^2+bc+c^2)(c^2-ca+a^2)}}}+\sqrt{\frac{bc}{\sqrt{(c^2+ca+a^2)(a^2-ab+b^2)}}}+\sqrt{\frac{ca}{\sqrt{(a^2+ab+b^2)(b^2-bc+c^2)}}} \le \sqrt[4]{27}.$$

Lời giải. Nhận thấy:

$$b^2+bc+c^2=\frac{3}{4}(b+c)^2+\frac{1}{4}(b-c)^2 \ge \frac{3}{4}(b+c)^2;$$

$$c^2-ca+a^2=\frac{1}{4}(c+a)^2+\frac{3}{4}(c-a)^2 \ge \frac{1}{4}(c+a)^2.$$

Suy ra: $$\sqrt{\frac{ab}{\sqrt{(b^2+bc+c^2)(c^2-ca+a^2)}}} \le \frac{2}{\sqrt[4]{3}}\sqrt{\frac{ab}{(b+c)(c+a)}} \le \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\left(\frac{b}{b+c}+\frac{a}{c+a}\right) \quad (1).$$

Tương tự:

$$\sqrt{\frac{bc}{\sqrt{(c^2+ca+a^2)(a^2-ab+b^2)}}} \le \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\left(\frac{c}{c+a}+\frac{b}{a+b}\right) \quad (2);$$

$$\sqrt{\frac{ca}{\sqrt{(a^2+ab+b^2)(b^2-bc+c^2)}}} \le \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{c}{b+c}\right) \quad (3).$$

Cộng vế với vế của (1), (2), (3) rồi rút gọn ta được:

$$\sqrt{\frac{ab}{\sqrt{(b^2+bc+c^2)(c^2-ca+a^2)}}}+\sqrt{\frac{bc}{\sqrt{(c^2+ca+a^2)(a^2-ab+b^2)}}}+\sqrt{\frac{ca}{\sqrt{(a^2+ab+b^2)(b^2-bc+c^2)}}} \le \sqrt[4]{27}.$$

Dấu đẳng thức của bài toán xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài toán được chứng minh.

Thí dụ 7. *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2}{a^2+3ab+2b^2}+\frac{b^2}{b^2+3bc+2c^2}+\frac{c^2}{c^2+3ca+2a^2} \ge \frac{1}{2}.$$

Lời giải. Gọi vế trái của bài toán là M, ta có:

$$M=\frac{a^2}{(2a^2+3ab+2b^2)-a^2}+\frac{b^2}{(2b^2+3bc+2c^2)-b^2}+\frac{c^2}{(2c^2+3ca+2a^2)-c^2}$$

$$=\frac{a^2}{(2a^2+3ab+2b^2)-a^2}+1+\frac{b^2}{(2b^2+3bc+2c^2)-b^2}$$
$$+1+\frac{c^2}{(2c^2+3ca+2a^2)-c^2}+1-3$$
$$=\frac{(2a^2+3ab+2b^2)}{(2a^2+3ab+2b^2)-a^2}+\frac{(2b^2+3bc+2c^2)}{(2b^2+3bc+2c^2)-b^2}$$
$$+\frac{(2c^2+3ca+2a^2)}{(2c^2+3ca+2a^2)-c^2}-3$$
$$=\frac{1}{1-\frac{a^2}{2a^2+3ab+2b^2}}+\frac{1}{1-\frac{b^2}{2b^2+3bc+2c^2}}$$
$$+\frac{1}{1-\frac{c^2}{2c^2+3ca+2a^2}}-3.$$

Theo bất đẳng thức Schwarz ta có:

$$M\geq\frac{9}{3-\left(\frac{a^2}{2a^2+3ab+2b^2}+\frac{b^2}{2b^2+3bc+2c^2}+\frac{c^2}{2c^2+3ca+2a^2}\right)}-3.$$

Bây giờ ta đi đánh giá biểu thức:

$$P=\frac{a^2}{2a^2+3ab+2b^2}+\frac{b^2}{2b^2+3bc+2c^2}+\frac{c^2}{2c^2+3ca+2a^2}.$$

Thật vậy ta dễ dàng chứng minh được

$$\frac{7a^2}{2a^2+3ab+2b^2}\geq\frac{3a^2}{a^2+ab+b^2}.$$

Đánh giá tương tự với hai biểu thức còn lại, rồi cộng vế theo vế ba bất đẳng thức đó lại sẽ được:

$$\frac{7}{3}P\geq\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^2}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^2}{c^2+ca+a^2}.$$

Tiếp theo ta đánh giá biểu thức

$$A=\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^2}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^2}{c^2+ca+a^2}.$$

Thật vậy theo bất đẳng thức Schwarz thì

$$\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{c^2}{c(a+b+c)}\geq\frac{(a+c)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca};$$
$$\frac{b^2}{b^2+bc+c^2}+\frac{a^2}{a(a+b+c)}\geq\frac{(b+a)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca};$$
$$\frac{c^2}{c^2+ca+a^2}+\frac{b^2}{b(a+b+c)}\geq\frac{(c+b)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}.$$

Cộng vế với vế của ba bất đẳng thức trên rồi rút gọn sẽ được: $A+1\geq 2\Leftrightarrow A\geq 1$.

Vậy

$$\frac{7}{3}P\geq\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^2}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^2}{c^2+ca+a^2}\geq 1$$
$$\Rightarrow P\geq\frac{3}{7}.$$

Do đó:

$$M\geq\frac{9}{\left(\frac{a^2}{2a^2+3ab+2b^2}+\frac{b^2}{2b^2+3bc+2c^2}+\frac{c^2}{2c^2+3ca+2a^2}\right)}-3$$
$$\geq\frac{9}{3-\frac{3}{7}}-3$$
$$=\frac{1}{2}.$$

Dấu đẳng thức của bài toán xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$. Bài toán được chứng minh.

Thí dụ 8. *Cho a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh rằng:* $\frac{a^3}{4a^2b+4ab^2+b^3}+\frac{b^3}{4b^2c+4bc^2+c^3}$
$$+\frac{c^3}{4c^2a+4ca^2+a^3}\geq\frac{1}{3}.$$

Lời giải. Đặt vế trái của bài ra là M ta có:

$$M=\frac{a^3}{4a^2b+4ab^2+b^3}+1+\frac{b^3}{4b^2c+4bc^2+c^3}+1$$
$$+\frac{c^3}{4c^2a+4ca^2+a^3}+1-3$$
$$=\frac{a^3+4a^2b+4ab^2+b^3}{a^3+4a^2b+4ab^2+b^3-a^3}$$
$$+\frac{b^3 4b^2c+4bc^2+c^3}{b^3+4b^2c+4bc^2+c^3-b^3}$$
$$+\frac{c^3+4c^2a+4ca^2+a^3}{c^3+4c^2a+4ca^2+a^3-c^3}-3$$
$$=\frac{1}{1-\frac{a^3}{a^3+4a^2b+4ab^2+b^3}}$$
$$+\frac{1}{1-\frac{b^3}{b^3+4b^2c+4bc^2+c^3}}$$
$$+\frac{1}{1-\frac{c^3}{c^3+4c^2a+4ca^2+a^3}}-3$$

$$=\frac{1}{1-\frac{a^3}{(a+b)(a^2+3ab+b^2)}}+\frac{1}{1-\frac{b^3}{(b+c)(b^2+3bc+c^2)}}+\frac{1}{1-\frac{c^3}{(c+a)(c^2+3ca+a^2)}}-3.$$

Theo bất đẳng thức Schwarz ta có:

$$M\ge 9:\left\{3-\left[\frac{a^3}{(a+b)(a^2+3ab+b^2)}+\frac{b^3}{(b+c)(b^2+3bc+c^2)}+\frac{c^3}{(c+a)(c^2+3ca+a^2)}\right]\right\}-3.$$

Bây giờ ta đi đánh giá biểu thức

$$A=\frac{a^3}{(a+b)(a^2+3ab+b^2)}+\frac{b^3}{(b+c)(b^2+3bc+c^2)}+\frac{c^3}{(c+a)(c^2+3ca+a^2)}.$$

Thật vậy ta thấy:

$$a^2+3ab+b^2=\frac{5}{4}(a+b)^2-\frac{1}{4}(a-b)^2\le\frac{5}{4}(a+b)^2$$

Suy ra: $\dfrac{a^3}{(a+b)(a^2+3ab+b^2)}\ge\dfrac{4}{5}\left(\dfrac{a}{a+b}\right)^3$ (1).

Tương tự: $\dfrac{b^3}{(b+c)(b^2+3bc+c^2)}\ge\dfrac{4}{5}\left(\dfrac{b}{b+c}\right)^3$ (2);

$\dfrac{c^3}{(c+a)(c^2+3ca+a^2)}\ge\dfrac{4}{5}\left(\dfrac{c}{c+a}\right)^3$ (3).

Cộng vế với vế của (1), (2), (3) ta có:

$$A\ge\frac{4}{5}\left[\left(\frac{a}{a+b}\right)^3+\left(\frac{b}{b+c}\right)^3+\left(\frac{c}{c+a}\right)^3\right].$$

Tiếp theo ta đánh giá biểu thức:

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^3+\left(\frac{b}{b+c}\right)^3+\left(\frac{c}{c+a}\right)^3.$$

Áp dụng bất đẳng thức trung bình lũy thừa ta có:

$$\left[\frac{1}{3}\sum_{cyc}\left(\frac{a}{a+b}\right)^3\right]^{\frac{1}{3}}\ge\left[\frac{1}{3}\sum_{cyc}\left(\frac{a}{a+b}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Đến đây ta lại tiếp tục đánh giá biểu thức:

$$\sum_{cyc}\left(\frac{a}{a+b}\right)^2.$$

Theo bất đẳng thức Bunyakovsky ta có:

$$\left[\sum_{cyc}\left(\frac{a}{a+b}\right)^2\right]\left[\sum_{cyc}(a+b)^2(a+c)^2\right]\ge\left[\sum_{cyc}a(a+c)\right]^2=\frac{1}{4}\left[\sum_{cyc}(a+b)^2\right]^2.$$

Nhưng $\left[\sum_{cyc}(a+b)^2\right]^2\ge 3\left[\sum_{cyc}(a+b)^2(a+c)^2\right]$ đúng theo bất đẳng thức quen thuộc sau $(x+y+z)^2\ge 3(xy+yz+zx)$. Suy ra:

$$\sum_{cyc}\left(\frac{a}{a+b}\right)^2\ge\frac{3}{4}.$$

Dẫn đến:

$$\left[\frac{1}{3}\sum_{cyc}\left(\frac{a}{a+b}\right)^3\right]^{\frac{1}{3}}\ge\left[\frac{1}{3}\sum_{cyc}\left(\frac{a}{a+b}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\ge\left(\frac{1}{3}.\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}.$$

Vậy $\left(\dfrac{a}{a+b}\right)^3+\left(\dfrac{b}{b+c}\right)^3+\left(\dfrac{c}{c+a}\right)^3\ge\dfrac{3}{8}.$

Do đó:

$$A\ge\frac{4}{5}\left[\left(\frac{a}{a+b}\right)^3+\left(\frac{b}{b+c}\right)^3+\left(\frac{c}{c+a}\right)^3\right]\ge\frac{4}{5}.\frac{3}{8}=\frac{3}{10}.$$

Kết quả:

$$M\ge\frac{9}{3-A}-3\ge\frac{9}{3-\frac{3}{10}}-3=\frac{1}{3}.$$

Dấu đẳng thức của bài toán xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài toán được chứng minh.

Thí dụ 9. *Cho a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{\sqrt{3a^2-4ab+3b^2}}+\frac{b}{\sqrt{3b^2-4bc+3c^2}}+\frac{c}{\sqrt{3c^2-4ca+3a^2}}<2\sqrt{2}.$$

Lời giải. Dễ thấy:

$$3a^2-4ab+3b^2=\frac{1}{2}(a+b)^2+\frac{5}{2}(a-b)^2\geq\frac{1}{2}(a+b)^2.$$

Suy ra: $\dfrac{a}{\sqrt{3a^2-4ab+3b^2}}\leq\dfrac{\sqrt{2}a}{a+b}.$

Tương tự: $\dfrac{b}{\sqrt{3b^2-4bc+3c^2}}\leq\dfrac{\sqrt{2}b}{b+c};$

$$\frac{c}{\sqrt{3c^2-4ca+3a^2}}\leq\frac{\sqrt{2}c}{c+a}.$$

Cộng vế với vế của ba bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{a}{\sqrt{3a^2-4ab+3b^2}}+\frac{b}{\sqrt{3b^2-4bc+3c^2}}+\frac{c}{\sqrt{3c^2-4ca+3a^2}}\leq\sqrt{2}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}\right).$$

Mặt khác:

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}+\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}=3 \text{ (1)}.$$

Mà $\dfrac{b}{a+b}+\dfrac{c}{b+c}+\dfrac{a}{c+a}$

$$>\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{b+c+a}+\frac{a}{c+a+b}=1 \qquad (2)$$

nên từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}<2.$$

Vậy

$$\frac{a}{\sqrt{3a^2-4ab+3b^2}}+\frac{b}{\sqrt{3b^2-4bc+3c^2}}+\frac{c}{\sqrt{3c^2-4ca+3a^2}}<2\sqrt{2}.$$

Bài toán được chứng minh.

Thí dụ 10. *Cho a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2}{2a^2+7ab+2b^2}+\frac{b^2}{2b^2+7bc+2c^2}+\frac{c^2}{2c^2+7ca+2a^2}\geq\frac{3}{11}.$$

Lời giải. Đặt vế trái của bài toán đề ra là M. Ta dễ dàng chứng minh được:

$$\frac{11a^2}{2a^2+7ab+2b^2}\geq\frac{3a^2}{a^2+ab+b^2} \quad (1).$$

Tương tự: $\dfrac{11b^2}{2b^2+7bc+2c^2}\geq\dfrac{3b^2}{b^2+bc+c^2}$ (2);

$$\frac{11c^2}{2c^2+7ca+2a^2}\geq\frac{3c^2}{c^2+ca+a^2} \quad (3).$$

Cộng vế với vế của (1), (2), (3) sẽ được:

$$\frac{11}{3}M\geq\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^2}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^2}{c^2+ca+a^2}.$$

Đến đây bài toán được chứng minh nếu chứng minh được:

$$A=\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^2}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^2}{c^2+ca+a^2}\geq 1.$$

Thật vậy theo bất đẳng thức Schwarz ta có:

$$\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{c^2}{c(a+b+c)}\geq\frac{(a+c)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca};$$

$$\frac{b^2}{b^2+bc+c^2}+\frac{a^2}{a(a+b+c)}\geq\frac{(b+a)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca};$$

$$\frac{c^2}{c^2+ca+a^2}+\frac{b^2}{b(a+b+c)}\geq\frac{(c+b)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}.$$

Cộng vế với vế của ba bất đẳng thức trên rồi rút gọn ta được: $A+1\geq 2\Leftrightarrow A\geq 1$.

Vậy $\dfrac{11}{3}M\geq 1\Leftrightarrow M\geq\dfrac{3}{11}.$

Dấu đẳng thức của bài toán xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài toán được chứng minh.

Thí dụ 11 (Tạp chí TH&TT bài số 6 tháng 11/2023).

Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^5}{b^2\sqrt{\left(a^2+3ab+b^2\right)^3}}+\frac{b^5}{c^2\sqrt{\left(b^2+3bc+c^2\right)^3}}+\frac{c^5}{a^2\sqrt{\left(c^2+3ca+a^2\right)^3}}\ge\frac{3}{5\sqrt{5}}.$$

Lời giải. Đặt vế trái của bài toán đề ra là M.

Vì

$$a^2+3ab+b^2=\frac{5}{4}(a+b)^2-\frac{1}{4}(a-b)^2\le\frac{5}{4}(a+b)^2$$

suy ra: $\dfrac{a^5}{b^2\sqrt{\left(a^2+3ab+b^2\right)^3}}\ge\dfrac{8a^5}{5\sqrt{5}b^2(a+b)^3}.$

Theo bất đẳng thức Cauchy thì:

$$2.\frac{(2a)^5}{(a+b)^3}+3(a+b)^2\ge5\sqrt[5]{\frac{(2a)^{10}}{(a+b)^6}(a+b)^6}=5.4a^2.$$

Do đó:

$$\frac{a^5}{(a+b)^3}\ge\frac{20a^2-3(a+b)^2}{64}\ge\frac{20a^2-6a^2-6b^2}{64}.$$

Dẫn đến: $\dfrac{a^5}{(a+b)^3}\ge\dfrac{7a^2-3b^2}{32}.$

Vậy $\dfrac{8a^5}{5\sqrt{5}b^2(a+b)^3}\ge\dfrac{7a^2}{4.5\sqrt{5}b^2}-\dfrac{3}{4.5\sqrt{5}}.$

Tương tự: $\dfrac{8b^5}{5\sqrt{5}c^2(b+c)^3}\ge\dfrac{7b^2}{4.5\sqrt{5}c^2}-\dfrac{3}{4.5\sqrt{5}};$

$$\frac{8c^5}{5\sqrt{5}a^2(c+a)^3}\ge\frac{7c^2}{4,5\sqrt{5}a^2}-\frac{3}{4.5\sqrt{5}}.$$

Cộng vế với vế của ba bất đẳng thức trên ta được:

$$M\ge\frac{7}{4.5\sqrt{5}}\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)-\frac{9}{4.5\sqrt{5}}\ge\frac{7.3}{4.5\sqrt{5}}-\frac{9}{4.5\sqrt{5}}=\frac{3}{5\sqrt{5}}.$$

Dấu đẳng thức của bài toán xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài toán được chứng minh.

Thí dụ 12. *Cho a, b, c là ba số thực dương và $0<2k<t$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^5}{b^2\sqrt{\left(ka^2+tab+kb^2\right)^3}}+\frac{b^5}{c^2\sqrt{\left(kb^2+tbc+kc^2\right)^3}}+\frac{c^5}{a^2\sqrt{\left(kc^2+tca+ka^2\right)^3}}\ge\frac{3}{(2k+t)\sqrt{2k+t}}.$$

Lời giải. Do $0<2k<t$ và từ

$$ka^2+tab+kb^2=\frac{2k+t}{4}(a+b)^2-\frac{t-2k}{4}(a-b)^2\le\frac{2k+t}{4}(a+b)^2$$

suy ra:

$$\frac{a^5}{b^2\sqrt{\left(ka^2+tab+kb^2\right)^3}}\ge\frac{8a^5}{(2k+t)\sqrt{2k+t}.b^2(a+b)^3}\ (1).$$

Tương tự:

$$\frac{b^5}{c^2\sqrt{\left(kb^2+tbc+kc^2\right)^3}}\ge\frac{8b^5}{(2k+t)\sqrt{2k+t}.c^2(b+c)^3}\ (2);$$

$$\frac{c^5}{a^2\sqrt{\left(kc^2+tca+ka^2\right)^3}}\ge\frac{8c^5}{(2k+t)\sqrt{2k+t}.a^2(c+a)^3}\ (3).$$

Cộng vế với vế của (1), (2), (3) và đặt vế trái của bài toán đề ra là A ta được:

$$A\ge\frac{8}{(2k+t)\sqrt{2k+t}}\left[\frac{a^5}{b^2(a+b)^3}+\frac{b^5}{c^2(b+c)^3}+\frac{c^5}{a^5(c+a)^3}\right].$$

Tiếp theo ta đi đánh giá biểu thức:

$$B=\frac{a^5}{b^2(a+b)^3}+\frac{b^5}{c^2(b+c)^3}+\frac{c^5}{a^2(c+a)^3}.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy thì:

$$2.\frac{(2a)^5}{(a+b)^3}+3(a+b)^2\ge5\sqrt[5]{\frac{(2a)^{10}}{(a+b)^6}(a+b)^6}=20a^2.$$

Do đó: $\dfrac{a^5}{(a+b)^3}\ge\dfrac{20a^2-3(a+b)^2}{64}$

$$\geq \frac{20a^2 - 6a^2 - 6b^2}{64}$$

hay $\quad \dfrac{a^5}{(a+b)^3} \geq \dfrac{7a^2 - 3b^2}{32}.$

Suy ra:

$$\frac{a^5}{b^2(a+b)^3} \geq \frac{7a^2}{32b^2} - \frac{3}{32} \quad (4).$$

Tương tự:

$$\frac{b^5}{c^2(b+c)^3} \geq \frac{7b^2}{32c^2} - \frac{3}{32} \quad (5);$$

$$\frac{c^5}{a^2(c+a)^3} \geq \frac{7c^2}{32a^2} - \frac{3}{32} \quad (6).$$

Cộng vế với vế của (4), (5), (6) rồi áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta thu được:

$$B \geq \frac{7}{32}\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}\right) - \frac{9}{32}$$
$$\geq \frac{7.3}{32} - \frac{9}{32}$$
$$= \frac{3}{8}.$$

Vậy $A \geq \dfrac{8}{(2k+t)\sqrt{2k+t}} \cdot \dfrac{3}{8} = \dfrac{3}{(2k+t)\sqrt{2k+t}}.$

Dấu đẳng thức của bài toán xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.
Bài toán được chứng minh.
Dưới đây là một số bài toán dành cho bạn đọc tự giải

BÀI TẬP

1. Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^4 + b^4 + c^4 = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{\sqrt{3a^2 + 2ab + 3b^2}} + \frac{bc}{\sqrt{3b^2 + 2bc + 3c^2}} + \frac{ca}{\sqrt{3c^2 + 2ca + 3a^2}} \leq \frac{3}{8}.$$

2. Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^4 + b^4 + c^4 = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{\sqrt{a^2 - ab + b^2}} + \frac{bc}{\sqrt{b^2 - bc + c^2}} + \frac{ca}{\sqrt{c^2 - ca + a^2}} \leq 3.$$

3. Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^4 + b^4 + c^4 = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{\sqrt{2a^2 - 3ab + 2b^2}} + \frac{bc}{\sqrt{2b^2 - 3bc + 2c^2}} + \frac{ca}{\sqrt{2c^2 - 3ca + 2a^2}} \leq 3.$$

4. Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3 = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{\sqrt{2a^2 + 3ab + 2b^2}} + \frac{bc}{\sqrt{2b^2 + 3bc + 2c^2}} + \frac{ca}{\sqrt{2c^2 + 3ca + 2a^2}} \leq \frac{3}{\sqrt{7}}.$$

5. Cho a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{2a^2 + 5ab + 2b^2} + \frac{b^2}{2b^2 + 5bc + 2c^2} + \frac{c^2}{2c^2 + 5ca + 2a^2} \geq \frac{1}{3}.$$

6. Cho a, b, c, k, t là các số thực dương tùy ý thỏa mãn $t \geq k$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{ka^2 + tab + kb^2} + \frac{b^2}{kb^2 + tbc + kc^2} + \frac{c^2}{kc^2 + tca + ka^2} \geq \frac{3}{2k+t}.$$

7. Cho a, b, c, t, k, r là các số thực dương tùy ý thỏa mãn $t \geq k \geq r$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{ra^2 + tab + kb^2} + \frac{b^2}{rb^2 + tbc + kc^2} + \frac{c^2}{rc^2 + tca + ka^2} \geq \frac{3}{r+t+k}.$$

8. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^5}{b^2\sqrt{(a^2 + 5ab + b^2)^3}} + \frac{b^5}{c^2\sqrt{(b^2 + 5bc + c^2)^3}} + \frac{c^5}{a^2\sqrt{(c^2 + 5ca + a^2)^3}} \geq \frac{3}{7\sqrt{7}}.$$

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10, TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG, NAM ĐỊNH MÔN TOÁN, NĂM HỌC 2024 - 2025

VÒNG 1

Câu 1. 1) *Tìm điều kiện xác định của biểu thức*

$$P=\sqrt{x+2024}+\frac{2025}{x^2-2x+1}.$$

2) *Cho đường thẳng* $y=2x+3$ *cắt parabol* $y=x^2$ *tại hai điểm phân biệt. Tính tổng tung độ của hai điểm đó.*

3) *Tính diện tích của hình tròn ngoại tiếp tam giác đều cạnh bằng* $\sqrt{3}$.

4) *Cho tam giác ABC vuông tại A có* $AB=6$, $AC=8$. *Quay tam giác ABC một vòng quanh cạnh AC. Tính thể tích của hình được tạo thành.*

Lời giải. 1) Điều kiện xác định: $\begin{cases}x+2024\ge 0\\ x^2-2x+1\ne 0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -2024\\ (x-1)^2\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -2024\\ x\ne 1\end{cases}.$$

2) PT hoành độ giao điểm của đường thẳng và parabol là:

$$x^2=2x+3\Leftrightarrow x^2-2x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=3\end{array}\right..$$

Với $x=-1\Rightarrow y=1$. Với $x=3\Rightarrow y=9$.

Vậy tổng tung độ hai giao điểm là: $1+9=10$.

3) Bán kính của đường tròn là $R=1$.

Diện tích của hình tròn bằng $\pi R^2=\pi$ (đvdt).

4) Hình được tạo thành là hình nón có bán kính đáy là $r=AB=6$, độ dài đường cao $h=AC=8$.

Thể tích của hình nón là $V=\frac{1}{3}\pi r^2h=96\pi$ (đvtt).

Câu 2. *Xét biểu thức*

$$A=\frac{\sqrt{x}+4}{x+5\sqrt{x}+4}-\frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}+\frac{3\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+1}\text{ với } x\ge 0.$$

1) *Rút gọn biểu thức A.*

2) *Tìm giá trị lớn nhất của A.*

Lời giải.

1) Ta có $\frac{\sqrt{x}+4}{x+5\sqrt{x}+4}=\frac{\sqrt{x}+4}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+4\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}+1}$

nên $A=\frac{1}{\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}+\frac{3\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+1}$

$$=\frac{x-\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}{x\sqrt{x}+1}+\frac{3\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+1}$$

$$=\frac{x-\sqrt{x}+1-x-\sqrt{x}+3\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+1}$$

$$=\frac{\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)}=\frac{1}{x-\sqrt{x}+1}.$$

2) $A=\frac{1}{x-\sqrt{x}+1}$. Ta có:

$$x-\sqrt{x}+1=\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\ge\frac{3}{4}\text{ với mọi } x\ge 0.$$

Do đó $0<A\le\frac{4}{3}$ với mọi $x\ge 0$.

Ta có: $A=\frac{4}{3}\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$. Vậy giá trị lớn nhất của A là $\frac{4}{3}$ khi $x=\frac{1}{4}$.

Câu 3. 1) *Cho phương trình* $x^2-2(m-1)x+2m-5=0$ (*với m là tham số*).

a) *Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm trái dấu.*

b) *Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt* $x_1;x_2$ *sao cho* $\left(x_2^2-2mx_2+2m\right)\left(2x_1-5\right)=2024$.

2) *Giải phương trình* $x^2+5x-4-2(x+1)\sqrt{3x-1}=0$.

Lời giải.

1) a) Phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi: $2m-5<0\Leftrightarrow m<\frac{5}{2}$.

b) Ta có:

$$\Delta'=(m-1)^2-2m+5=m^2-4m+6$$
$$=(m-2)^2+2>0,\ \forall m$$

$\Rightarrow$ phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m. Vì $x = x_2$ là nghiệm của phương trình đã cho nên ta có: $x_2^2 - 2(m-1)x_2 + 2m - 5 = 0$

$$\Leftrightarrow x_2^2 - 2mx_2 + 2m = 5 - 2x_2.$$

Khi đó:

$$\left(x_2^2 - 2mx_2 + 2m\right)\left(2x_1 - 5\right) = 2024$$
$$\Leftrightarrow \left(5 - 2x_2\right)\left(2x_1 - 5\right) = 2024$$
$$\Leftrightarrow 10\left(x_1 + x_2\right) - 4x_1x_2 = 2049.$$

Thay $x_1 + x_2 = 2(m-1)$, $x_1.x_2 = 2m - 5$ vào điều kiện trên ta được:

$$20(m-1) - 4(2m-5) = 2049 \Leftrightarrow m = \frac{683}{4}.$$

2) ĐK: $x \ge \frac{1}{3}$.

Đặt $\begin{cases} a = x+1 \\ b = \sqrt{3x-1} \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 = x^2 + 5x$. PT đã cho trở thành: $a^2 + b^2 - 2ab = 4$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-b=2 \\ a-b=-2 \end{array}\right..$$

- Với $a - b = 2$, ta có:

$$x + 1 - \sqrt{3x-1} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{3x-1} = x - 1$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \ge 0 \\ 3x-1 = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x^2 - 5x + 2 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{5+\sqrt{17}}{2} \text{ (thoả mãn ĐK).}$$

- Với $a - b = -2$, ta có: $x + 1 - \sqrt{3x-1} = -2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x-1} = x + 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -3 \\ x^2 + 3x + 10 = 0 \end{cases}$$

(vô nghiệm).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất

$$x = \frac{5+\sqrt{17}}{2}.$$

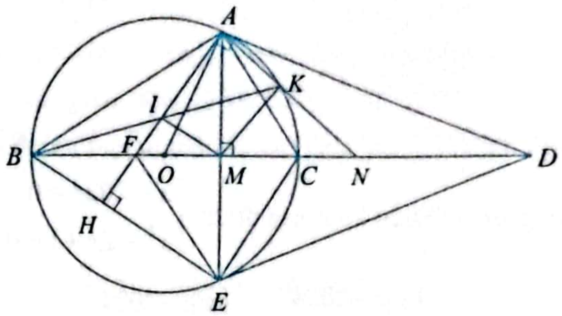
Câu 4. *Cho đường tròn (O) với đường kính BC. Trên tia đối của tia CB lấy điểm D, gọi DA là tiếp tuyến của đường tròn (O) với A là tiếp điểm. Kẻ đường thẳng qua A vuông góc với BC tại M và cắt đường tròn (O) tại E (E khác A). Gọi AH là đường cao của tam giác ABE, AH cắt BC tại F. Gọi I là trung điểm của đoạn AH, đường thẳng BI cắt đường tròn (O) tại K (K khác B), AK cắt BD tại N.*

1) Chứng minh các điểm E, M, F, H cùng thuộc một đường tròn và $DB.DC = DM.DO$.

2) Chứng minh $AFEC$ là hình thoi và $\widehat{BAH} = \widehat{ADB}$.

3) Chứng minh $MK \perp AN$ và $MD = 2MN$.

Lời giải.



1) • Ta có AE vuông góc với BC tại M nên $\widehat{FME} = 90^0$ suy ra M thuộc đường tròn đường kính EF (1).

$\widehat{EHF} = 90^0$ suy ra H thuộc đường tròn đường kính EF (2).

Từ (1), (2) suy ra 4 điểm E, M, F, H cùng thuộc một đường tròn.

• AM là đường cao của tam giác vuông ADO nên ta có: $AD^2 = DM.DO$ (3).

Xét ΔDAC và ΔDBA có: $\begin{cases} \widehat{DAC} = \widehat{DBA} \\ \widehat{D} \text{ chung} \end{cases}$

$$\Rightarrow \Delta DAC \sim \Delta DBA \text{ (g.g)}$$
$$\Rightarrow \frac{DC}{DA} = \frac{DA}{DB} \Rightarrow DA^2 = DB.DC \text{ (4).}$$

Từ (3) và (4) ta có: $DB.DC = DM.DO$.

2) • $OC \perp AE \Rightarrow M$ là trung điểm của AE. Ta có F là trực tâm tam giác ABE nên $EF \perp AB \Rightarrow EF \,//\, AC$ (vì cùng vuông góc với AB) $\Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{MEF} \Rightarrow \Delta AMC = \Delta EMF$ (g.c.g) $\Rightarrow MC = MF$ nên tứ giác $AFEC$ là hình thoi.

• Ta có: $\widehat{ABH}=\widehat{DAM}$ (cùng bằng $\frac{1}{2}$ sđ $\widehat{AE}$).

Mà $\begin{cases}\widehat{ABH}+\widehat{BAH}=90^0\\ \widehat{DAM}+\widehat{ADB}=90^0\end{cases}$, do đó $\widehat{BAH}=\widehat{ADB}$.

3) • $\widehat{KAM}=\widehat{KBE}$ (cùng chắn cung $\widehat{KE}$)

$\widehat{KBE}=\widehat{KIM}$ (vì $IM // BE$)

$\Rightarrow \widehat{KAM}=\widehat{KIM}$ $\Rightarrow$ tứ giác $AKMI$ nội tiếp

$\Rightarrow MK\perp AN$ (vì $\widehat{MIA}=90^0$).

• Xét ΔBHI và ΔAMN có: $\widehat{BHI}=\widehat{AMN}=90^0$,

$\widehat{IBH}=\widehat{NAM}$ (cùng chắn cung $\widehat{KE}$)

$\Rightarrow \Delta BHI\sim\Delta AMN$ (g.g). Do đó $\frac{HB}{MA}=\frac{HI}{MN}$ (5).

Xét ΔBHA và ΔAMD có:

$\widehat{BHA}=\widehat{AMD}=90^0$, $\widehat{ABH}=\widehat{DAM}$

$\Rightarrow \Delta BHA\sim\Delta AMD$. Do đó: $\frac{HB}{MA}=\frac{HA}{MD}$ (6).

Từ (5) và (6) ta được: $\frac{HI}{MN}=\frac{HA}{MD}$, mà $HA=2HI$ nên $MD=2MN$.

Câu 5. 1) *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases}\sqrt{4x^2+(y+2)(x-y)}+2\sqrt{xy}=4y\\ \sqrt{x-1}+\sqrt{5y-1}=3x^2-7x+6\end{cases}.$$

2) *Xét ba số dương a, b, c thay đổi và thỏa mãn điều kiện $abc=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức* $S=\frac{a}{a^3+3}+\frac{b}{b^3+3}+\frac{c}{c^3+3}$.

Lời giải. 1) Xét hệ phương trình:

$$\begin{cases}\sqrt{4x^2+(y+2)(x-y)}+2\sqrt{xy}=4y & (1)\\ \sqrt{x-1}+\sqrt{5y-1}=3x^2-7x+6 & (2)\end{cases}.$$

ĐK: $\begin{cases}x\ge 1,\ y\ge\frac{1}{5}\\ 4x^2+(y+2)(x-y)\ge 0\end{cases}$ (*).

$(1)\Leftrightarrow\left[\sqrt{4x^2+(y+2)(x-y)}-2y\right]+\left(2\sqrt{xy}-2y\right)=0$

$\Leftrightarrow(x-y)\left[\frac{4(x+y)+(y+2)}{\sqrt{4x^2+(y+2)(x-y)}+2y}+\frac{2y}{\sqrt{xy}+y}\right]=0$

$\Leftrightarrow x=y$.

Khi $x=y$ thì PT(2) trở thành:

$\sqrt{x-1}+\sqrt{5x-1}=3x^2-7x+6$ (3)

$\Leftrightarrow\sqrt{x-1}-(x-1)+\sqrt{5x-1}-(x+1)=3x^2-9x+6$

$\Leftrightarrow\sqrt{x-1}\left(1-\sqrt{x-1}\right)+\sqrt{5x-1}-(x+1)=3x^2-9x+6$

$\Leftrightarrow\sqrt{x-1}.\frac{2-x}{1+\sqrt{x-1}}+\frac{(5x-1)-(x+1)^2}{\sqrt{5x-1}+x+1}=3x^2-9x+6$

$\Leftrightarrow\sqrt{x-1}.\frac{2-x}{1+\sqrt{x-1}}+\frac{(2-x)(x-1)}{\sqrt{5x-1}+x+1}=-3(2-x)(x-1)$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2-x=0\\ \sqrt{x-1}=0\\ \frac{1}{1+\sqrt{x-1}}+\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{5x-1}+x+1}+3\sqrt{x-1}=0\ \text{(vônghiệm)}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=1\end{array}\right.$ (thỏa mãn).

Với $x=2\Rightarrow y=2$. Với $x=1\Rightarrow y=1$.

Vậy nghiệm $(x; y)$ của hệ là: $(1;1),(2;2)$.

2) $S=\frac{a}{a^3+1+1+1}+\frac{b}{b^3+1+1+1}+\frac{c}{c^3+1+1+1}$

$\le\frac{a}{3a+1}+\frac{b}{3b+1}+\frac{c}{3c+1}$

Ta đi chứng minh:

$$\frac{a}{3a+1}+\frac{b}{3b+1}+\frac{c}{3c+1}\le\frac{3}{4}.$$

Đặt $a=\frac{x}{y}$, $b=\frac{y}{z}$, $c=\frac{z}{x}$ với $x,y,z>0$.

Ta cần chứng minh:

$\frac{x}{3x+y}+\frac{y}{3y+z}+\frac{z}{3z+x}\le\frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow\frac{3x}{3x+y}+\frac{3y}{3y+z}+\frac{3z}{3z+x}\le\frac{9}{4}$

$\Leftrightarrow 1-\frac{3x}{3x+y}+1-\frac{3y}{3y+z}+1-\frac{3z}{3z+x}\ge 3-\frac{9}{4}$

$\Leftrightarrow\frac{y}{3x+y}+\frac{z}{3y+z}+\frac{x}{3z+x}\ge\frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow\frac{y^2}{3xy+y^2}+\frac{z^2}{3yz+z^2}+\frac{x^2}{3zx+x^2}\ge\frac{3}{4}$.

$$\text{VT} \ge \frac{(x+y+z)^2}{3xy+3yz+3zx+x^2+y^2+z^2} \ge \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 \ge xy+yz+zx \text{ (luôn đúng).}$$

Do đó $S \le \frac{3}{4}$ và với $a=b=c=1$ thì $S=\frac{3}{4}$.

Vậy $\max S = \frac{3}{4}$.

VÒNG 2

Câu 1. a) *Cho* $x,\ y>1$ *thỏa mãn*

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}=\frac{5}{xy+4}.$$

Tính giá trị của biểu thức $A=x^3+y^3+9xy$.

b) *Xét đa thức* $P(x)=x^2+ax+b$ *với* $a,\ b$ *là các hệ số nguyên. Chứng minh rằng nếu* $P(1+\sqrt{2})=2024$ *thì* $P(1-\sqrt{2})=2024$.

Lời giải.

a) Ta có: $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}=\frac{5}{xy+4}$

$$\Rightarrow (xy+4)(x+y+2)=5(x+1)(y+1)$$

$$\Leftrightarrow xy(x+y)+3=3xy+x+y$$

$$\Leftrightarrow (x+y-3)(xy-1)=0 \ (1).$$

+ Với $x,\ y>1$ thì $xy-1>0$, do đó:

$$(1) \Leftrightarrow x+y=3.$$

Vậy $A=x^3+y^3+9xy$

$$=(x+y)^3-3xy(x+y)+9xy=3^3-3xy.3+9xy=27.$$

b) Ta có: $P(1+\sqrt{2})=2024$

$$\Leftrightarrow (1+\sqrt{2})^2+a(1+\sqrt{2})+b=2024$$

$$\Leftrightarrow (a+2)\sqrt{2}=2021-a-b.$$

+ Do $a+2$, $2021-a-b$ là các số nguyên trong khi $\sqrt{2}$ là số vô tỉ nên phải xảy ra:

$$\begin{cases} a+2=0 \\ 2021-a-b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=2023 \end{cases}.$$

Vậy $P(1-\sqrt{2})=(1-\sqrt{2})^2-2(1-\sqrt{2})+2023$

$$=3-2\sqrt{2}-2+2\sqrt{2}+2023=2024,$$

ta có điều phải chứng minh.

Câu 2. a) *Giải phương trình*

$$x^2=(2x-9)\left(\sqrt{x^2+2x-8}-2\right).$$

b) *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} x^2(x-y)+(y-1)^2=0 \\ 4x^3-9x^2+7x+3y^2-10y+5=0 \end{cases}.$$

Lời giải.

a) Điều kiện xác định: $x^2+2x-8 \ge 0$.

Phương trình được viết lại là:

$$x^2+2x-8-(2x-9)\sqrt{x^2+2x-8}+(2x-10)=0.$$

Đặt $t=\sqrt{x^2+2x-8}$ thì được:

$$t^2-(2x-9)t+2x-10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=2x-10 \end{array}\right..$$

+ Với $t=1$ thì $\sqrt{x^2+2x-8}=1$

$$\Leftrightarrow x^2+2x-9=0 \Leftrightarrow x=-1\pm\sqrt{10}.$$

+ Với $t=2x-10$ thì $\sqrt{x^2+2x-8}=2x-10$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-10 \ge 0 \\ x^2+2x-8=(2x-10)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 5 \\ x^2-14x+36=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=7+\sqrt{13}.$$

Vậy phương trình cho có tập nghiệm là:

$$S=\left\{7+\sqrt{13};-1+\sqrt{10};-1-\sqrt{10}\right\}.$$

b) Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2(x-y)+(y-1)^2=0 & (1) \\ 4x^3-9x^2+7x+3y^2-10y+5=0 & (2) \end{cases}.$$

+ Ta có: $(1) \Leftrightarrow y^2-(x^2+2)y+x^3+1=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x+1 \\ y=x^2-x+1 \end{array}\right..$$

+ Nếu $y=x^2-x+1$, thay vào (2) thu được:

$$4x^3-9x^2+7x+3(x^2-x+1)^2-10(x^2-x+1)+5=0$$

$$\Leftrightarrow 3x^4-2x^3-10x^2+11x-2=0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x-1)(3x^2-5x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow x \in \left\{-2;1;\frac{5+\sqrt{13}}{6};\frac{5-\sqrt{13}}{6}\right\}.$$

Tìm được các nghiệm $(x; y)$: $(-2; 7)$; $(1; 1)$;

$$\left(\frac{5+\sqrt{13}}{6};\frac{11+\sqrt{13}}{9}\right);\left(\frac{5-\sqrt{13}}{6};\frac{11-\sqrt{13}}{9}\right).$$

+ Nếu $y = x+1$, thay vào (2) thu được:

$$4x^3-9x^2+7x+3(x+1)^2-10(x+1)+5=0$$

$$\Leftrightarrow 4x^3-6x^2+3x-2=0 \Leftrightarrow (2x-1)^3=3 \Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt[3]{3}}{2}.$$

Tìm được nghiệm $(x; y)=\left(\frac{1+\sqrt[3]{3}}{2};\frac{3+\sqrt[3]{3}}{2}\right)$.

Vậy hệ cho có đúng 5 nghiệm (x; y) là:

$$(-2; 7);\quad (1; 1);\quad \left(\frac{5+\sqrt{13}}{6};\frac{11+\sqrt{13}}{9}\right);$$

$$\left(\frac{5-\sqrt{13}}{6};\frac{11-\sqrt{13}}{9}\right);\left(\frac{1+\sqrt[3]{3}}{2};\frac{3+\sqrt[3]{3}}{2}\right).$$

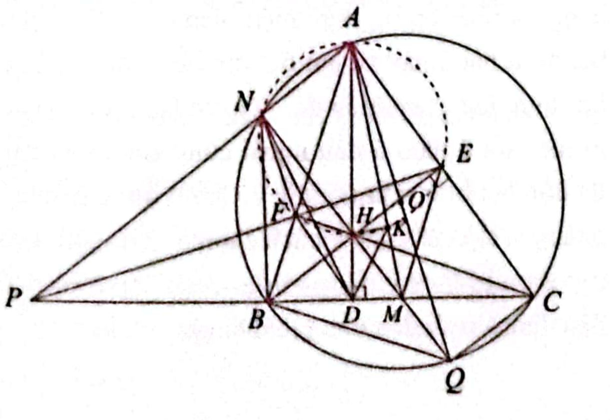
Câu 3. *Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) và $AB < AC$. Ba đường cao của tam giác ABC là AD, BE, CF đồng quy tại điểm H. Gọi AQ là đường kính của đường tròn (O), đường thẳng HQ cắt cạnh BC tại điểm M. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt đường tròn (O) tại điểm N và cắt đường thẳng AM tại điểm K (N, K khác A), đường thẳng AN cắt đường thẳng BC tại điểm P. Chứng minh rằng:*

a) HQ vuông góc với AN và $\widehat{FDH}=\widehat{HDE}$, $\widehat{FDK}=\widehat{NDE}$.

b) Ba điểm P, E, F thẳng hàng.

c) $PE.PF < PM^2$.

Lời giải. a) • Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF là đường tròn đường kính AH, suy ra $HN \perp NA$.



Mặt khác N thuộc đường tròn đường kính AQ nên $QN \perp NA$, suy ra N, H, Q thẳng hàng và có $HQ \perp AN$.

• Ta có $\widehat{ADC}=\widehat{AFC}=90^0$ nên tứ giác $ACDF$ nội tiếp, do đó $\widehat{FDB}=\widehat{BAC}$.

Tương tự có $\widehat{EDC}=\widehat{BAC}$. Suy ra:

$$\widehat{FDH}=90^0-\widehat{FDB}=90^0-\widehat{BAC}$$
$$=90^0-\widehat{EDC}=\widehat{EDH} \quad (1).$$

Ta có $\widehat{ANM}=\widehat{ADM}=90^0$ nên tứ giác $ANDM$ nội tiếp, suy ra $\widehat{NDH}=\widehat{HMK}$.

Ta cũng có $\widehat{HDM}=\widehat{HKA}=90^0$ nên tứ giác $HDMK$ nội tiếp, suy ra $\widehat{HMK}=\widehat{HDK}$.

Vậy $\widehat{NDH}=\widehat{HDK}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\widehat{FDK}=\widehat{FDH}+\widehat{HDK}=\widehat{HDE}+\widehat{NDH}=\widehat{NDE}.$$

b) Tứ giác $ANFE$ nội tiếp nên suy ra $\widehat{ANF}=\widehat{FEC}$. Ta có $\widehat{BFC}=\widehat{BEC}=90^0$ nên tứ giác $BFEC$ nội tiếp, suy ra $\widehat{FEC}=\widehat{FBP}$. Vậy có $\widehat{ANF}=\widehat{FBP}$, suy ra tứ giác $NPBF$ nội tiếp.

Do đó $\widehat{PFB}=\widehat{PNB}=\widehat{BCA}=\widehat{EFA}$. Vậy $\widehat{PFB}=\widehat{EFA}$, mà B,F,A thẳng hàng nên P,F,E cũng thẳng hàng.

c) Chứng minh được $BHCQ$ là hình bình hành nên M là trung điểm của BC.

Tam giác EMC cân tại M nên $\widehat{MEC}=\widehat{BCA}$.

Từ đó có:

$$\widehat{PEM}=180^0-\widehat{MEC}-\widehat{FEA}=180^0-\widehat{BCA}-\widehat{ABC}$$
$$=\widehat{BAC}=\widehat{FDP}.$$

Suy ra:

$$\Delta PFD \sim \Delta PME \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{PF}{PM}=\frac{PD}{PE} \Leftrightarrow PE.PF=PD.PM.$$

Do $AB < AC$ nên

$$BD < DC \Rightarrow BD < \frac{BD+DC}{2}=BM$$

$$\Rightarrow PD < PM. \text{ Vậy } PE.PF=PD.PM < PM^2.$$

Câu 4. a) *Chứng minh với mọi số nguyên dương n, số $n^5 - 6n + 33$ không là số chính phương.*

b) *Cho các số nguyên dương a, b thỏa mãn điều kiện $a+b+1$ là ước nguyên tố của $4(a^2+ab+b^2)-3$. Chứng minh rằng $a+b-1$ là ước của $4(a^2+ab+b^2)-3$.*

Lời giải. a) Ta có:

$$n^5 - 6n + 33 = (n^5 - n) - 5n + 33.$$

Theo định lí Fermat bé ta có:

$$n^5 \equiv n \pmod 5 \text{ nên } (n^5 - n) \equiv 0 \pmod 5.$$

Do $5n \equiv 0 \pmod 5$, $33 \equiv 3 \pmod 5$ nên suy ra:

$$n^5 - 6n + 33 \equiv 3 \pmod 5 \quad (*).$$

Một số chính phương khi chia cho 5 chỉ có thể cho số dư thuộc $\{0;1;4\}$. Vậy từ (*) suy ra $n^5 - 6n + 33$ không thể là số chính phương.

b) Theo giả thiết có: $0 \equiv 4a^2 + 4ab + 4b^2 - 3$

$\equiv 4a^2 + 4a(-a-1) + 4(-a-1)^2 - 3 \pmod{a+b+1}$

hay $(2a+1)^2 \equiv 0 \pmod{a+b+1}$.

Từ $a+b+1$ là số nguyên tố suy ra $(2a+1) \vdots (a+b+1)$.

Ta có: $0 < 2a+1 < 2(a+b+1)$ nên xảy ra

$$a+b+1 = 2a+1 \Leftrightarrow a = b.$$

Khi đó có:

$$\begin{cases} a+b-1 = 2a-1 \\ 4(a^2+ab+b^2)-3 = 12a^2-3 = 3(2a+1)(2a-1) \end{cases}$$

suy ra: $(4(a^2+ab+b^2)-3) \vdots (a+b-1)$.

Câu 5. a) *Xét x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xy + yz + zx \le xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = xy^2 + yz^2 + zx^2 - 18(x+y+z)$.*

b) *Cho bảng hình chữ nhật gồm 2 dòng và n cột, được chia đều thành 2n ô vuông đơn vị. Ban đầu, trong mỗi ô vuông đơn vị người ta đặt đúng một viên bi có kích thước rất nhỏ. Ta gọi mỗi biến đổi (T) là việc thực hiện các thao tác sau: Chọn ra hai ô vuông đơn vị tùy ý có chứa bi, chuyển từ mỗi ô vuông đó đi một viên bi sang ô vuông đơn vị liền kề (hai ô vuông đơn vị gọi là liền kề nếu chúng có chung cạnh). Tìm tất cả các số nguyên dương **n** để sau hữu hạn lần chỉ thực hiện biến đổi (T), ta có thể đưa hết tất cả các viên bi có trên bảng lúc đầu về nằm trong cùng một ô vuông đơn vị của bảng.*

Lời giải. a) Từ giả thiết có $1 \ge \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$. Dùng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có:

$$xy^2 + yz^2 + zx^2 \ge \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)(xy^2 + yz^2 + zx^2)$$

$$\ge (y+z+x)^2.$$

Suy ra: $Q \ge (x+y+z)^2 - 18(x+y+z)$

$= (x+y+z-9)^2 - 81 \ge -81.$

Khi $x = y = z = 3$ thì các giả thiết được thỏa mãn và $Q = -81$. Vậy $\min Q = -81$.

b) Xét n là số lẻ:

Ta tô màu các ô vuông đơn vị theo kiểu xen kẽ như bàn cờ vua bởi hai màu đen, trắng. Gọi B, W lần lượt là số bi nằm ở ô đơn vị màu đen, số bi nằm ở ô đơn vị màu trắng.

- Lúc đầu: $B = n$ và $W = n$. Như vậy B, W là các số lẻ.

- Chỉ ra được bất biến: Sau mỗi lần thực biến đổi (T) thì tính chẵn lẻ của B, W là không thay đổi.

- Suy ra lúc nào cũng có bi nằm ở ô đen và lúc nào cũng có bi nằm ở ô trắng (vì B, W luôn là số lẻ), vậy không thể dồn hết tất cả các viên bi về một ô vuông đơn vị.

+ Xét n là số chẵn: Ta chỉ ra cách dồn được bi theo yêu cầu.

Đầu tiên ta chọn hai ô vuông phân biệt mà mỗi ô vuông tương ứng đều nằm ở cuối cùng của mỗi dòng và phải có bi, thực hiện biến đổi (T) để dồn hết bi từ hai ô này về hai ô đứng liền trước chúng. Lại thực hiện tiếp biến đổi (T) với hai ô đơn vị có bi mà mỗi ô nằm ở đầu ngoài cùng của mỗi dòng để dồn hết bi của hai ô này về hai ô đứng liền sau chúng. Tiếp tục với hai cách chọn ô như vậy (chọn cặp ô có bi ở cuối dòng rồi lại chọn cặp ô có bi ở đầu dòng) ta đi đến trạng thái bi chỉ còn nằm ở

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10, THPT CHUYÊN TP. HỒ CHÍ MINH

(Thời gian làm bài: 150 phút, dành cho học sinh thi vào các lớp chuyên Toán)

Bài 1 (*1,5 điểm*) Cho tập nghiệm của phương trình

$$\left(x^2+ax+b\right)\left(x^2+cx+d\right)\left(x^2+ex+f\right)=0$$

là $\{1;2;3;4;5;6\}$. Tính giá trị của biểu thức

$$T=a^2+c^2+e^2-2(b+d+f).$$

Bài 2 (*2,0 điểm*). Giải các phương trình sau:

a) $\left(\sqrt{x+5}\right)^3=6x+5.$

b) $\sqrt[3]{3x+6}+\sqrt{23-x}=7.$

Bài 3 (*1,5 điểm*)

Cho tam giác nhọn ABC có các đường cao BE, CF cắt nhau tại H và M là trung điểm của BC. Đường thẳng qua A và vuông góc với EF cắt đường trung trực của BC tại O.

a) Chứng minh $AH=2OM$.

b) Chứng minh O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài 4 (*1,5 điểm*)

Với các số thực dương a, b thỏa mãn $a^2+b^2\le 2$.

a) Chứng minh $a+b\le 2$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{a^2+b^2}+\frac{2024}{a+b+2}.$$

Bài 5 (*2,0 điểm*)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB<AC$) nội tiếp đường tròn (O). Gọi E là điểm bất kì trên cung nhỏ BC của (O) ($BE<BA$). Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm K, L sao cho $BK=BE$, $CL=CE$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và KL.

a) Chứng minh $\widehat{BNC}=90^0$.

b) Gọi F là điểm thuộc (O) sao cho EF song song với BC. Chứng minh MN song song với AF.

Bài 6 (*1,5 điểm*)

a) Cho một hình vuông cạnh 8cm có chứa bên trong 2024 điểm phân biệt. Chứng minh rằng có thể vẽ được một đường tròn bán kính 1,5 cm có chứa bên trong ít nhất 127 điểm trên.

b) Cặp số nguyên dương $(a;b)$ được gọi là cặp số "may mắn" của số n nếu $a+b=n$ và tồn tại số nguyên tố p thỏa mãn đẳng thức $\frac{4}{a}+\frac{4}{b}=\frac{1}{p}$. Tìm tất cả các cặp số "may mắn" của số 2025.

NGUYỄN ĐỨC TẤN (*TP. Hồ Chí Minh*)
VÕ MỘNG TRÌNH (*Bình Định*)
Giới thiệu

---

bảng con 2×2 ở chính giữa của bảng ban đầu như hình 1 (các chữ cái ghi trong ngoặc là để chỉ tên của ô, các số chỉ số lượng bi đang có ở ô tương ứng đó).

- Tiếp theo chọn cặp ô B, C và thực hiện $\frac{n}{2}$ lần biến đổi (T) (bi từ ô B đưa sang ô A, bi từ ô C đưa sang ô D) thì thu được trạng như hình 2.

- Tiếp tục, ta liên tục chọn cặp ô A, D cho đến khi hết bi và chuyển bi ở hai ô này sang ô C thì sau cùng đưa được $2n$ viên bi về hết ô C.

Vậy tập hợp tất cả các số n cần tìm là tập các số nguyên dương chẵn.

$\frac{n}{2}$ (A)	$\frac{n}{2}$ (B)
$\frac{n}{2}$ (C)	$\frac{n}{2}$ (D)

Hình 1

n (A)	0 (B)
0 (C)	n (D)

Hình 2

TRẦN XUÂN ĐÁNG
(5/7/136 Phan Đình Phùng, TP. Nam Định, Nam Định)
Giới thiệu

DIỄN ĐÀN DẠY HỌC TOÁN

THEO CHƯƠNG TRÌNH VÀ SGK MỚI

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM CHỨA GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI CÓ THAM SỐ

NGUYỄN THANH HẢI
(GV THPT Triệu Sơn 4, Thanh Hóa)

Chương trình giáo dục THPT 2018, những bài toán có tính **vận dụng vào thực tiễn** luôn được quan tâm hàng đầu, bài toán giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số là một trong những bài toán có tính ứng dụng thực tiễn cao. Ở bài viết này chúng tôi xin giới thiệu tới bạn đọc bài toán tìm min, max của hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối, có tham số. Hy vọng qua bài viết, chúng ta có thể ít nhiều trang bị thêm cho mình những kiến thức cần thiết để phát triển thêm các dạng toán min, max mới hoặc giải các bài toán tương tự, cũng như xử lí được một số bài toán thực tiễn.

Trước tiên chúng ta nhắc lại khái niệm về giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số.

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên tập D.

*- Số M được gọi là **giá trị lớn nhất** của hàm số $y=f(x)$ trên tập D nếu $f(x)\le M$ với mọi $x\in D$ và tồn tại $x_0\in D$ sao cho $f(x_0)=M$.*

Kí hiệu: $M=\max\limits_{x\in D} f(x)$ hoặc $M=\max\limits_{D} f(x)$.

*- Số m được gọi là **giá trị nhỏ nhất** của hàm số $y=f(x)$ trên tập D nếu $f(x)\ge m$ với mọi $x\in D$ và tồn tại $x_0\in D$ sao cho $f(x_0)=m$.*

Kí hiệu: $m=\min\limits_{x\in D} f(x)$ hoặc $m=\min\limits_{D} f(x)$.

Phần dưới đây là một số thí dụ minh họa.

Thí dụ 1. *Cho hàm số*

$$f(x)=\left|x^2+(m+3)x+3m+7\right|-x$$

với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để $\min f(x)=10$.

Lời giải. Viết lại: $f(x)=\left|(x+3)(x+m)+7\right|-x$.

Nhận thấy $f(-3)=10$. Mặt khác theo đề bài $\min f(x)=10$, suy ra $x=-3$ là điểm tới hạn của hàm số $f(x)$.

- TH1: $x=-3$ là nghiệm của $(x+3)(x+m)+7=0$, không có giá trị m nào thoả mãn.
- TH2: $x=-3$ là nghiệm của $f'(x)=0$. Ta có:

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x) \text{ khi } x^2+(m+3)x+3m\ge 0\\ f_2(x) \text{ khi } x^2+(m+3)x+3m<0\end{cases}$$

với $f_1(x)=x^2+(m+2)x+3m+7$;

$f_2(x)=-x^2-(m+4)x-3m-7$.

Nếu $x=-3$ là nghiệm của $f_1'(x)=0\Rightarrow m=4$.

Với $m=4\Rightarrow f(x)=\left|x^2+7x+19\right|-x$

$\Rightarrow f(x)=x^2+6x+19=(x+3)^2+10\ge 10$.

Nếu $x=-3$ là nghiệm của $f_2'(x)=0\Rightarrow m=2$.

Với $m=2\Rightarrow f(x)=\left|x^2+5x+13\right|-x$

$\Rightarrow f(x)=x^2+4x+13=(x+2)^2+9\ge 9$ (không thoả mãn).

Kết luận: $m=4$.

Thí dụ 2. *Cho hàm số $f(x)=\left|x^2-2x+m\right|-3x$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để $\min f(x)=-9$.*

Lời giải. Yêu cầu bài toán tương đương với tìm m để $\begin{cases} f(x)\ge -9, \forall x\in\mathbb{R}\\ \exists x_0, f(x_0)=-9\end{cases}$.

Suy ra: $\left|x^2-2x+m\right|-3x\ge -9, \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \left|x^2-2x+m\right|\ge 3x-9, \forall x\in\mathbb{R}$.

- TH1: Nếu $x^2-2x+m\ge 0, \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 1-m\le 0 \Leftrightarrow m\ge 1$ (*).

Khi đó: $\left|x^2-2x+m\right|\ge 3x-9, \forall x\in\mathbb{R}$

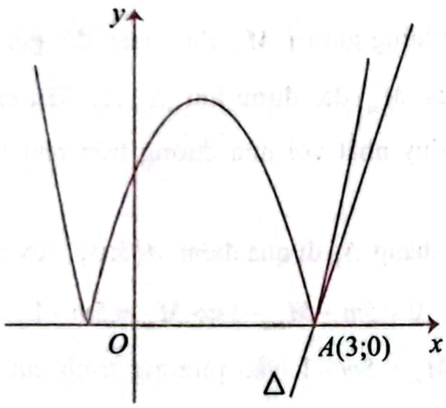
$\Leftrightarrow x^2-5x+m+9\ge 0, \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 25-4m-36\le 0 \Leftrightarrow m\ge -\dfrac{11}{4}$.

Để tồn tại x_0 sao cho $f(x_0)=\min f(x)$ nên $m=-\dfrac{11}{4}$, tuy nhiên giá trị này bị loại do (*).

• TH2: Nếu $m<1$, khi đó $x^2-2x+m=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

Vẽ đồ thị hàm số $y=\left|x^2-2x+m\right|$ và đường thẳng $\Delta: y=3x-9$ ta nhận thấy: $\min f(x)=-9$ khi chỉ khi đồ thị hàm số $y=\left|x^2-2x+m\right|$ đi qua điểm $A(3;0)$, từ đây tìm được $m=-3$.



Kết luận: $m=-3$.

Thí dụ 3. *Cho hàm số*

$$f(x)=\left|x^2-2023x-2024\right|+(m-5)x$$

với m là tham số. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất là bao nhiêu?

Lời giải. Dễ thấy $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty, \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ nên tồn tại $\min f(x)$, với mọi m.

Do phương trình $x^2-2023x-2024=0$ có hai nghiệm x_1, x_2 trái dấu, giả sử $x_1<0<x_2$. Xét các trường hợp :

TH1: $m-5>0$. Ta có:

$$\min f(x)\le f(x_1)=(m-5)x_1<0.$$

TH2: $m-5=0$.

Ta có: $f(x)=\left|x^2-2023x-2024\right|$ có $\min f(x)=0$ tại $x\in\{x_1;x_2\}$.

TH3: $m-5<0$.

Ta có: $\min f(x)\le f(x_2)=(m-5)x_2<0$.

Kết luận: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất là 0 ứng với $m=5$.

Thí dụ 4. *Cho hàm số*

$$f(x)=\left|x^2-2mx-4\right|-|x-m|-|x-m+2|$$

với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để $\min f(x)=-2$.

Lời giải. Nhận thấy $x^2-2mx-4=0$ luôn có 2 nghiệm phân biệt, gọi α là một nghiệm của phương trình đó.

Ta có:

$$\begin{aligned} f(\alpha)&=-|\alpha-m|-|\alpha-m+2| \\ &\le -|\alpha-m-(\alpha-m+2)|=-2 \quad (*). \end{aligned}$$

Do $\min f(x)=-2$, nên từ (*) suy ra $f(\alpha)=-2$.

Đẳng thức ở (*) xảy ra khi $\alpha\in[m-2;m]$, tức là phương trình $x^2-2mx-4=0$ có nghiệm thuộc $[m-2;m]$.

Ta có: $x^2-2mx-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m+\sqrt{m^2+4}>m \\ x=m-\sqrt{m^2+4} \end{array}\right.$.

Suy ra: $m-2\le m-\sqrt{m^2+4}\le m \Leftrightarrow m=0$.

Thử lại với $m=0 \Rightarrow f(x)=\left|x^2-4\right|-|x|-|x+2|$, có $f(2)=-6<-2=\min f(x)$ (vô lí).

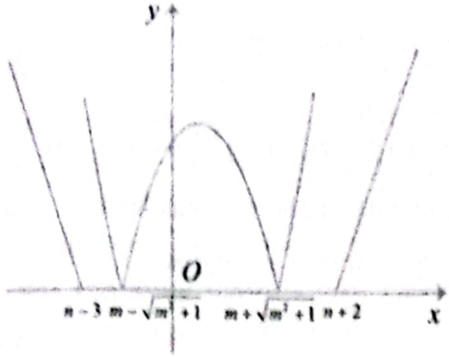
Kết luận: $m\in\varnothing$.

Thí dụ 5. *Cho hàm số*

$$f(x)=\left|x^2-2mx-1\right|-|x-n-2|-|x-n+3|$$

với m, n là tham số. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(m;n)$ để $\min f(x)=-5$.

Lời giải. Từ đề bài suy ra đồ thị hàm số $y=\left|x^2-2mx-1\right|$ luôn nằm phía trên đồ thị hàm số $y=|x-n-2|+|x-n+3|-5$ và hai đồ thị có điểm chung với nhau (hình vẽ).



Dẫn đến:

$$n-3\le m-\sqrt{m^2+1}<m+\sqrt{m^2+1}\le n+2$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}n\le 3+m-\sqrt{m^2+1}\\ n\ge -2+m+\sqrt{m^2+1}\end{cases}\quad(*).$$

Suy ra: $3+m-\sqrt{m^2+1}\ge -2+m+\sqrt{m^2+1}$

$\Leftrightarrow m\in\{0;\pm1;\pm2\}$ (do $m\in\mathbb{Z}$).

Với $m=0$ từ $(*)$ suy ra $n\in\{-1;0;1;2\}$.

Với $m=1$ từ $(*)$ suy ra $n\in\{1;2\}$.

Với $m=-1$ từ $(*)$ suy ra $n\in\{-1;0\}$.

Với $m=\pm2$ từ $(*)$ suy ra $n\in\varnothing$.

Kết luận: Có 8 bộ $(m;n)$ nguyên thỏa mãn bài toán.

Thí dụ 6. *Cho hàm số*

$$f(x)=\left|\sqrt{-x^2+6x-5}-mx+1\right|$$

với m là tham số. Gọi $M_m=\max f(x)$ ứng với tham số m, tìm giá trị nhỏ nhất của M_m đó.

Lời giải. Nhận thấy $f(x)$ là hàm số liên tục, có tập xác định $D=[1;5]$ nên luôn tồn tại giá trị lớn nhất với mọi m.

Do $M_m=\max f(x)$ suy ra: $-M_m\le f(x)\le M_m$

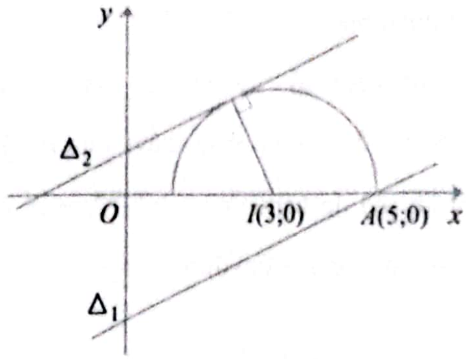
$$\Leftrightarrow -M_m\le\sqrt{-x^2+6x-5}-mx+1\le M_m$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{-x^2+6x-5}\le mx+M_m-1\\ \sqrt{-x^2+6x-5}\ge mx-M_m-1\end{cases}\quad(*).$$

Đặt $y=\sqrt{-x^2+6x-5}$, suy ra:

$$y^2=-x^2+6x-5\Leftrightarrow(x-3)^2+y^2=4\ (C).$$

$M_m=\max f(x)$ khi chỉ khi nửa đường tròn (phần đường tròn không dưới trục hoành) nằm trọn ở phần giữa hai đường thẳng $\Delta_1: y=mx-M_m-1$ và $\Delta_2: y=mx+M_m-1$; đồng thời có điểm chung với ít nhất một trong hai đường thẳng đó (hình vẽ).



Trong những giá trị M_m thỏa mãn đó, giá trị nhỏ nhất của M_m đạt được khi Δ_1,Δ_2 đều có điểm chung duy nhất với nửa đường tròn như hình vẽ trên.

Đường thẳng Δ_1 đi qua điểm $A(5;0)$, suy ra:

$$0=5m-M_m-1\Leftrightarrow M_m=5m-1.$$

Thay $M_m=5m-1$ vào phương trình của Δ_2 ta được $\Delta_2: y=mx+5m-2$.

Do Δ_2 tiếp xúc với nửa đường tròn nên

$$d(I,\Delta_2)=R\Leftrightarrow\frac{|8m-2|}{\sqrt{m^2+1}}=2$$

$$\Leftrightarrow|4m-1|=\sqrt{m^2+1}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\ m=\dfrac{8}{15}\end{array}\right..$$

Với $m=0\Rightarrow M_m=-1$ vô lí, vì

$$f(x)=\left|\sqrt{-x^2+6x-5}-mx+1\right|\ge0\Rightarrow M_m\ge0.$$

Với $m=\dfrac{8}{15}\Rightarrow M_m=\dfrac{5}{3}$ (thỏa mãn).

Kết luận: $\min M_m=\dfrac{5}{3}$ ứng với $m=\dfrac{8}{15}$.

Thí dụ 7. *Cho hàm số* $f(x)=\left|\dfrac{mx-2\sqrt{x+9}}{x+6}\right|$ *với m là tham số. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để* $0<\min\limits_{[-1;1]} f(x)<1$ *?*

Lời giải. Nhận thấy $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;1]$ nên luôn có giá trị nhỏ nhất trên $[-1;1]$.

Xét hàm $h(x)=\dfrac{mx-2\sqrt{x+9}}{x+6}$ trên đoạn $[-1;1]$.

Do $h(0)=-1<0$ nên để $0<\min\limits_{[-1;1]} f(x)$ thì: $h(x)<0, \forall x\in[-1;1] \Leftrightarrow h(x)=0$ vô nghiệm trên $[-1;1]$. Suy ra $mx=2\sqrt{x+9}$ vô nghiệm trên $[-1;1]$ (*).

Với $x=0$, ta thấy không là nghiệm của phương trình (*). Xét $x\in[-1;1]\setminus\{0\}$. Từ (*) suy ra:

Hàm số $m=t(x)=\dfrac{2\sqrt{x+9}}{x}$ có:

$$t'(x)=\frac{-x-18}{x^2.\sqrt{x+9}}<0, \forall x\in[-1;1].$$

Ta có bảng biến thiên:

x	-1	0	1
$t'(x)$	$-$	‖	$-$
$t(x)$	$-4\sqrt{2}$ ↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘ $2\sqrt{10}$

Suy ra $-4\sqrt{2}<m<2\sqrt{10}$.

Do $m\in\mathbb{Z} \Rightarrow m\in A=\{-5;-4;-3;...;6\}$.

Như vậy với $\begin{cases} h(0)=-1 \\ m\in A=\{-5;-4;-3;....;6\}\end{cases}$

$\Rightarrow 0<\min\limits_{[-1;1]} f(x)\le 1$.

Bây giờ ta sẽ xét xem với những giá trị của $m\in A=\{-5;-4;-3;....;6\}$ thì $\min\limits_{[-1;1]} f(x)<1$ hay không. Ta có:

$$h'(x)=\frac{\left(m-\dfrac{1}{\sqrt{x+9}}\right)(x+6)-mx+2\sqrt{x+9}}{(x+6)^2}$$

Xét $h'(0)=0 \Rightarrow m=-\dfrac{2}{3}\notin A$, nên với các giá trị của $m\in A=\{-5;-4;-3;...;6\}$ thì $h(x)$ không đạt cực trị tại $x=0$, kết hợp $h(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;1]$ suy ra $\min\limits_{[-1;1]} f(x)<1$.

Kết luận: Có 12 giá trị nguyên của tham số m là:

$$m\in\{-5;-4;-3;...;6\}.$$

Thí dụ 8. *Cho hàm số* $f(x)=\left|x^3-2x^2+3\right|+mx$, *với m là tham số. Giá trị nhỏ nhất của hàm số* $f(x)$ *đạt giá trị lớn nhất là bao nhiêu?*

Lời giải. Dễ thấy hàm số $f(x)$ đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Suy ra hàm số $f(x)$ luôn tồn tại giá trị nhỏ nhất với mọi m.

Gọi $S=\min f(x) \Rightarrow \begin{cases} S\le f(-1)=-m \\ S\le f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{3m}{2}+\dfrac{15}{8}\end{cases}$

Suy ra: $\dfrac{3}{2}S+S\le\dfrac{3}{2}f(-1)+f\left(\dfrac{3}{2}\right)$

$$=-\frac{3}{2}m+\frac{3m}{2}+\frac{15}{8}=\frac{15}{8}\Rightarrow S\le\frac{3}{4}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi

$$-m=\frac{3}{2}m+\frac{15}{8}\Leftrightarrow m=-\frac{3}{4}.$$

Thử lại với $m=-\dfrac{3}{4}\Rightarrow f(x)=\left|x^3-2x^2+3\right|-\dfrac{3}{4}x$, khảo sát hàm số này ta tìm được $\min f(x)=\dfrac{3}{4}$.

Kết luận: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ có giá trị lớn nhất là $\dfrac{3}{4}$.

Nhận xét.

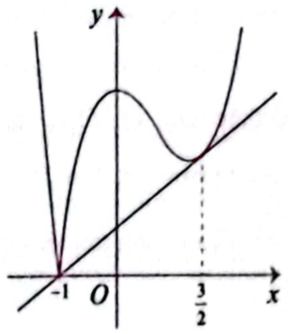
- *Đến đây chúng ta sẽ có suy nghĩ tại sao lại chọn* $f(-1)$ *và đặc biệt sao lại là* $f\left(\dfrac{3}{2}\right)$ *?*

Lý giải điều này như sau:

$$f(x)=\left|x^3-2x^2+3\right|+mx\ge S$$
$$\Leftrightarrow\left|x^3-2x^2+3\right|\ge -mx+S.$$

Dẫn đến tương quan giữa đồ thị hàm số $y=\left|x^3-2x^2+3\right|$ (C) và đường thẳng $d: y=-mx+S$.

Dựa vào đồ thị ta có phán đoán đường thẳng d đi qua điểm $A(-1;0)$ (giao điểm duy nhất của đồ thị (C) với trục hoành) và tiếp xúc với đồ thị (C), từ đó tìm được hoành độ tiếp điểm $x=\frac{3}{2}$.



• *Ngoài cách dự đoán qua đồ thị, việc tìm được $x=\frac{3}{2}$ cũng có thể làm theo cách khác như sau:*

Gọi $S=\min f(x)$, cần tìm $\max S$ do đó cần đánh giá theo chiều $S \le S_0$ nào đó.

Dẫn đến chọn số $t>0$ bất kỳ, ta có:

$$\begin{cases} S \le f(-1) = -m \\ S \le f(t) = \left|t^3-2t^2+3\right| + mt \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} tS \le -mt \\ S \le \left|t^3-2t^2+3\right| + mt \end{cases}.$$

Suy ra: $tS + S \le \left|t^3-2t^2+3\right|$

$$\Leftrightarrow (t+1)S \le \left|t^3-2t^2+3\right|,\ \forall t>0$$

$$\Leftrightarrow (t+1)S \le \left|(t+1)(t^2-3t+3)\right|$$

$$\Leftrightarrow (t+1)S \le (t+1)(t^2-3t+3)$$

$$\Leftrightarrow S \le t^2-3t+3,\ \forall t>0.$$

Suy ra: $S \le \min\limits_{(0;+\infty)}(t^2-3t+3) = \frac{3}{4}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $t=\frac{3}{2}$.

Thí dụ 9. *Cho hàm số $f(x)=\left|8x^4+mx^2+n\right|$, với m, n là các tham số. Biết $\max\limits_{[-1;1]} f(x)=1$, tìm m và n.*

Lời giải. Đặt $t=x^2$, với $x\in[-1;1] \Rightarrow t\in[0;1]$ và $f(t)=\left|8t^2+mt+n\right|$.

Theo đề bài suy ra: $\max\limits_{[0;1]} f(t)=1$ nên

$$\begin{cases} f(0)\le 1 \\ f(1)\le 1 \\ f\left(\frac{1}{2}\right)\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |n|\le 1 \\ |8+m+n|\le 1 \\ \left|2+\frac{1}{2}m+n\right|\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |n|\le 1 \\ |8+m+n|\le 1 \\ |4+m+2n|\le 2 \end{cases}.$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên, suy ra:

$$|n|+|8+m+n|+|4+m+2n|\le 4.$$

Mặt khác: $|n|+|8+m+n|+|4+m+2n|$

$$\ge |n+8+m+n-4-m-2n| = 4.$$

Suy ra: $|n|+|8+m+n|+|4+m+2n|=4$.

Đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} |4+m+2n| = 2|n| = 2|8+m+n| = 2 \\ n(8+m+n)\ge 0 \\ (8+m+2n)(4+m+2n)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-8 \\ n=1 \end{cases}.$$

Thử lại khi $m=-8, n=1$ thì $f(t)=\left|8t^2-8t+1\right|$ thỏa mãn $\max\limits_{[0;1]} f(t)=1$.

Kết luận: $m=-8, n=1$.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho hàm số $f(x)=\left|x^3-3x+m\right|$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;3]$ bằng 16.

Bài 2. Cho a là một hằng số thực, tìm tất cả các các giá trị của tham số m để $\max\limits_{[-1;1]}\left|x^2+mx+a\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

(Xem tiếp trang 23)

CÁC LỚP THCS

Bài T1/567 (Lớp 6). Tìm các chữ số a, b, c, d (không nhất thiết khác nhau) sao cho $\overline{ab}$ và $\overline{abcd}$ là các số nguyên tố. Ngoài ra c là chữ số khác 0 và $b^2 = b + 9c + d$.

NGUYỄN TẤN NGỌC

(GV THCS P. Bình Định, An Nhơn, Bình Định)

Bài T2/567 (Lớp 7). Cho hình vuông $ABCD$, trên cạnh CD lấy điểm M tùy ý không trùng với C và D. Trên cạnh BC lấy điểm N sao cho $CN = DM$. Chứng minh $AM > \frac{AN}{2}$.

CAO NGỌC TOẢN

(GV THPT Tam Giang, Phong Điền, Thừa Thiên Huế)

Bài T3/567. Tìm các số nguyên dương a, b thỏa mãn $(a+b+1)(a^2+b^2+1)(a^3+b^3+1)$ là lũy thừa với số mũ nguyên dương của một số nguyên tố.

PHAN QUANG ĐẠT

(Số 23, ngõ 29, phố Nhị Quý, Thái Nguyên)

Bài T4/567. Cho tam giác nhọn ABC và H là điểm thuộc miền trong tam giác. Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên các cạnh AB, BC, CA. Dựng đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF. Đường tròn này cắt cạnh BC tại điểm thứ hai M. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC; N là giao điểm của PQ và MF. Chứng minh tam giác NDF là tam giác cân.

TRẦN THỊ NHƯ THẢO

(Bình Định)

Bài T5/567. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2y+y^2z+z^2x=\dfrac{4}{27}. \\ x,y,z\ge 0 \end{cases}$$

LÊ NGỌC HOA

(131 đường Nguyễn Công Trứ, Liên Bảo, Vĩnh Yên, Vĩnh Phúc)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/567. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=3abc$. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{a^3+b^3+a^2c+b^2c}+\frac{bc}{b^3+c^3+b^2a+c^2a}+\frac{ca}{c^3+a^3+c^2b+a^2b}\le\frac{3}{4}.$$

VÕ VĂN NHÂN

(GV THPT Núi Thành, Quảng Nam)

Bài T7/567. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 4x^2+9y^2+\dfrac{48xy}{2x+3y}=16 \\ \sqrt{x^2+16}+\dfrac{5}{2}\sqrt{2x+3y}=2x+\sqrt{x^2+7} \end{cases}.$$

PHẠM TRUNG KIÊN

(GV THCS Hồ Tùng Mậu, Ân Thi, Hưng Yên)

Bài T8/567. Cho tam giác ABC, đường cao AH. Các điểm M, N thuộc đoạn BC. Đường thẳng qua A vuông góc với AM cắt đường thẳng qua N vuông góc với AC tại E; đường thẳng qua A vuông góc với AN cắt đường thẳng qua M vuông góc với AB tại F. Chứng minh AH, BE, CF đồng quy.

LÊ VIẾT ÂN *(TP. Hồ Chí Minh)*

Bài T9/567. Có 9 giáo viên ngồi chung một bàn tham gia chấm kì thi chọn học sinh giỏi ở tỉnh A. Chứng tỏ rằng luôn có 4 giáo viên quen biết nhau hoặc có 3 giáo viên không quen biết nhau.

NGUYỄN VĂN CẢNH

(GV THCS Long Hậu, huyện Cần Giuộc, Long An)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/567. Cho phương trình

$$3x^6+3x^5-14x^4-18x^3+3x^2+7x+1=0 \quad (1).$$

a) Chứng minh rằng phương trình (1) có đúng 6 nghiệm thực $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ đôi một phân biệt và các nghiệm này là các số vô tỷ.

b) Tính giá trị của biểu thức

$$T=\prod_{k=1}^{6}\frac{8x_k^4+18x_k^3-6x_k^2-10x_k+5}{3x_k^2+3x_k-6}.$$

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)

Bài T11/567. Cho $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ là một hàm liên tục tuần hoàn có chu kỳ 2π sao cho với mọi số thực x, y thỏa mãn: $f(x+y)f(x-y)=f^2(x)-f^2(y)$.

Chứng minh rằng với mọi số thực x thì $\left|f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|\geq f(x)$.

NGUYỄN ĐỨC TƯỞNG

(Pleiku, Gia Lai)

Bài T12/567. Cho tam giác ABC, O là tâm đường tròn ngoại tiếp. A_0, B_0, C_0 theo thứ tự là trung điểm của BC, CA, AB. (O_a) là đường tròn đi qua B_0, C_0 và tiếp xúc trong với (O) tại A_1 khác A. (O_b) là đường tròn đi qua C_0, A_0 và tiếp xúc trong với (O) tại B_1 khác B. (O_c) là đường tròn đi qua A_0, B_0 và tiếp xúc trong với (O) tại C_1 khác C. Chứng minh rằng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại một điểm thuộc đường thẳng Euler của tam giác ABC.

DƯƠNG THỊ XUÂN AN

(GV THPT chuyên Bến Tre)

Bài L1/567. Một trạm phát điện, có hiệu điện thế 500 V truyền đi một công suất $\mathscr{P}$ = 500 kW trên một đường dây có điện trở tổng cộng là R = 4 Ω tới tải tiêu thụ.

1. Tính công suất hao phí trên đường dây, độ giảm thế, hiệu suất của sự truyền tải điện năng và hiệu điện thế tại nơi tiêu thụ.

2. Nếu trước khi đưa lên đường dây tải điện, người ta nối hai cực của máy phát điện với một máy biến thế lí tưởng có tỉ số vòng dây của cuộn sơ cấp trên cuộn thứ cấp là 0,1 để tăng áp. Hãy tính lại công suất hao phí trên đường dây, độ giảm thế, hiệu suất của sự truyền tải điện năng và hiệu điện thế tại nơi tiêu thụ.

THANH LÂM *(Hà Nội)*

Bài L2/567. Cho một mạng tinh thể sắt hình lập phương. Cho rằng trong mỗi hình lập phương nguyên tố có một nguyên tử sắt. Hãy tìm hằng số mạng tinh thể, tức là khoảng cách gần nhất giữa các nguyên tử sắt. Biết sắt có nguyên tử lượng bằng 56, khối lượng riêng ρ = 7,9 g/cm³.

VIỆT CƯỜNG *(Hà Nội)*

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/567 (For 6th grade). Find the digits a, b, c, d (not necessarily different) such that $\overline{ab}$ and $\overline{abcd}$ are prime numbers, c is a non-zero digit and $b^2=b+9c+d$.

Problem T2/567 (For 7th grade). Given a square $ABCD$, on the side CD take an arbitrary point M that does not overlap with C and D. On the side BC, take the point N such that $CN=DM$. Prove that $AM>\frac{AN}{2}$.

Problem T3/567 Find positive integers a and b so that $(a+b+1)(a^2+b^2+1)(a^3+b^3+1)$ is a power with a positive integer exponent of a prime number.

Problem T4/567 Let ABC be an acute triangle and H be a point lying inside the triangle. Let D, E, F be the perpendicular projections of H on sides AB, BC, CA respectively. The circumcircle of the triangle DEF intersects the side BC at the second point M. Call P and Q the midpoints of AB and BC respectively; N is the intersection between PQ and MF. Prove that the triangle NDF is isosceles.

Problem T5/567 Solve the system of equations

$$\begin{cases} x,y,z\geq 0;\ x+y+z=1 \\ x^2y+y^2z+z^2x=\dfrac{4}{27} \end{cases}.$$

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/567 . Let a, b, c be positive real numbers that satisfy $ab+bc+ca=3abc$. Prove that

$$\frac{ab}{a^3+b^3+a^2c+b^2c}+\frac{bc}{b^3+c^3+b^2a+c^2a}+\frac{ca}{c^3+a^3+c^2b+a^2b}\leq\frac{3}{4}.$$

Problem T7/567 . Solve the system of equations

$$\begin{cases} 4x^2+9y^2+\dfrac{48xy}{2x+3y}=16 \\ \sqrt{x^2+16}+\dfrac{5}{2}\sqrt{2x+3y}=2x+\sqrt{x^2+7} \end{cases}.$$

Problem T8/567. Given triangle ABC with the altitude AH. Points M and N belong to the side BC. The line through A perpendicular to AM intersects the line through N perpendicular to AC at E; the line through A perpendicular to AN intersects the line through M perpendicular to AB at F. Prove that AH, BE, CF are concurrent.

Problem T9/567. There are 9 teachers sitting at the same table grading the exam to select excellent students in province A. Prove that there are always 4 teachers who know each other or there are 3 teachers who do not know each other.

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/567. Given the equation

$$3x^6+3x^5-14x^4-18x^3+3x^2+7x+1=0 \quad (1).$$

a) Prove that equation (1) has exactly 6 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ distinct real roots and these roots are irrational numbers.

b) Calculate the value of the expression

$$T=\prod_{i=1}^{6}\frac{8x_i^4+18x_i^3-6x_i^2-10x_i+5}{3x_i^2+3x_i-6}.$$

Problem T11/567. Let $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ be a continuous periodic function with the period 2π such that for all real numbers x, y:

$$f(x+y)f(x-y)=f^2(x)-f^2(y).$$

Prove that for any real number x, $\left|f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|\geq f(x)$.

Problem T12/567. Given a triangle ABC, and O is its circumcenter. A_0, B_0, C_0 are the midpoints of BC, CA, AB, respectively. (O_a) is a circle that passes through B_0, C_0 and is internaly tangent to (O) at A_1 other than A. (O_b) is a circle that passes through C_0, A_0 and is is internaly tangent to (O) at B_1 other than B. (O_c) is a circle that passes through A_0, B_0 and is internaly tangent to (O) at C_1 other than C. Prove that AA_1, BB_1, CC_1 are concurrent at a point on the Euler line of triangle ABC.

NGUYEN PHU HOANG LAN
(University of Education, VNU, Hanoi)

****

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT . . . *(Tiếp theo trang 20)*

Bài 3. Cho hàm số

$$f(x)=\left|x^2-2mx-1\right|-\left|x-m-2\right|-\left|x-m+3\right|$$

với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị của m để $\min f(x)=-5$.

Bài 4. Cho hàm số

$$f(x)=\left|8x^3+12x^2-3m-2\right|+2mx+m$$

với m là tham số. Tìm m để $\min f(x)=-2$.

Bài 5. Cho hàm số $f(x)=\left|x^3-3x^2+m\right|$, với m là tham số. Hỏi $\max\limits_{[1;2]} f(x)$ có giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu?

Bài 6. Cho hàm số $f(x)=\left|x^2-4x+m-3\right|-4x$, với m là tham số . Tìm m để $\min f(x)=-5$.

Bài 7. Cho hàm số $f(x)=\left|-x^2+3x+2\right|+mx$, với m là tham số. Tìm m để $\min\limits_{[-1;2]} f(x)=-1$.

Bài 8. Cho hàm số $f(x)=\left|\dfrac{x^4+ax+a}{x+1}\right|$, với a là tham số. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[1;2]$. Tìm tất cả các giá trị nguyên của a để $M\geq 2m$.

Bài 9. Cho hàm số $f(x)=\left|2x^3-9x^2+12x+m\right|$, với m là tham số. Có bao nhiêu số nguyên $m\in[-20;20]$ để với mọi bộ ba số thực $a, b, c\in[1;3]$ thì $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ là độ dài ba cạnh của một tam giác?

Bài 10. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\left|x^2+ax+b\right|$ trên đoạn $[-1;3]$. Khi M đạt giá trị nhỏ nhất, tìm a và b.

Bài 11. Cho hai hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$ và $g(x)=cx^2+bx+a$ với a, b, c là tham số. Chứng minh rằng: Nếu $|f(x)|\leq 1, \forall x\in[-1;1]$ thì

$$|g(x)|\leq 2, \forall x\in[-1;1].$$

Bài T1/563. *Cho*

$$A = n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n + 1$$

với n là số tự nhiên. Tìm số dư khi chia A cho 4.

Lời giải. *Nhận xét*: Trong hai số nguyên liên tiếp thì có một số chẵn, do đó tích hai số nguyên liên tiếp chia hết cho 2. Theo nhận xét trên ta có $2n^2 + 2n = 2n(n+1)$ chia hết cho 4.

Theo nhận xét trên ta có:

$$n^4 + 2n^3 + n^2 = n^2(n^2 + 2n + 1) = n^2(n+1)^2 = [n(n+1)]^2$$

chia hết cho 4.

Từ hai kết quả trên thì

$$A = n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n + 1 = (n^4 + 2n^3 + n^2) + (2n^2 + 2n) + 1$$

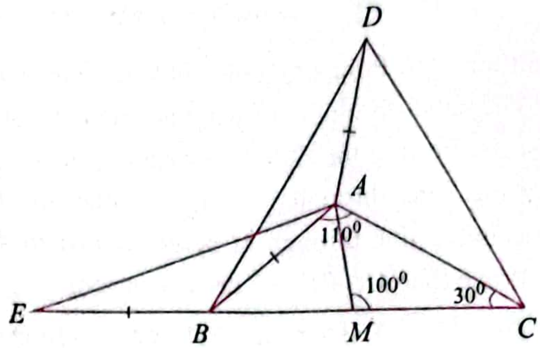
chia cho 4 dư 1.

Nhận xét. Có thể giải bài trên bằng cách xét n là số chẵn và n là số lẻ. Các bạn sau có lời giải đúng. **Thái Bình**: *Lưu Diệp Chi*, 6A5, THCS Kỳ Bá, TP. Thái Bình; **Nghệ An**: *Nguyễn Thế Bảo*, *Đào Thanh Long*, *Đặng Bá Hoàng Minh*, 6B, THCS Lý Nhật Quang, *Ngô Trần Ngọc Bảo*, 6E, THCS Tràng Sơn, Đô Lương; **Quảng Ngãi**: *Nguyễn Thị Thùy Dương*, 6A, *Nguyễn Trung Hiếu*, *Trần Văn Phụng*, 6C, THCS Nguyễn Kim Vang, xã Hành Đức, *Huỳnh Diễm Quỳnh*, 6B, THCS Phạm Văn Đồng, xã Hành Phước, Nghĩa Hành; **Cộng Hòa Áo**: *Lê Bạch Hải Đăng*, 1B, Trường quốc tế song ngữ cấp 2, 3 GIBS, TP. Graz.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/563. *Cho tam giác ABC có* $\hat{A} = 110^0, \hat{C} = 30^0$. *Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho* $\widehat{AMC} = 100^0$. *Chứng minh rằng* $CM = AB$.

Lời giải.



Dựng tam giác đều BCD sao cho các điểm A, D cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ BC. Xét ΔACB và ΔACD có: AC chung, $\widehat{ACB} = \widehat{ACD} = 30^0$; $CD = CB \Rightarrow \Delta ACD = \Delta ACB \Rightarrow AD = AB$.

Vậy ΔABD cân tại A. Ta có:

$$\widehat{BAD} = 360^0 - \widehat{BAC} - \widehat{DAC} = 360^0 - 110^0 - 110^0 = 140^0.$$

Trên tia đối của tia BC lấy điểm E sao cho $BE = BA$. Khi đó:

$$\widehat{ABE} = \widehat{ACB} + \widehat{BAC} = 30^0 + 110^0 = 140^0 = \widehat{BAD}.$$

Từ đó $\Delta BAD = \Delta EBA$ (c.g.c), suy ra:

$$AE = BD = BC \ (1).$$

Lại có: $\widehat{AEB} = \dfrac{180^0 - \widehat{ABE}}{2} = \dfrac{180^0 - 140^0}{2} = 20^0$

$$\Rightarrow \widehat{EAM} = \widehat{AMC} - \widehat{AEB} = 100^0 - 20^0 = 80^0.$$

Mặt khác $\widehat{EMA} = 180^0 - \widehat{AMC} = 80^0 = \widehat{EAM}$ nên ΔEAM cân tại E, suy ra $EM = EA$ (2).

Từ (1) và (2) ta thấy $BC = EM$. Do đó:

$CM = BE = AB$, ta được điều cần chứng minh

Nhận xét. Bạn *Huỳnh Diễm Quỳnh*, 6B, THCS Phạm Văn Đồng, xã Hành Phước, huyện Nghĩa Hành, **Quảng Ngãi** cũng đưa ra một cách giải tốt theo hướng: *Lấy điểm N đối xứng với điểm M qua AC. Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho AE = AM, sau đó chỉ ra hai tam giác cân EAB và AMN bằng nhau.* Xin hoan nghênh bạn.

HỒ HẢI

Bài T3/563. *Tìm các số nguyên dương a, b thỏa mãn* $a^4 - 21a^2b^2 + 4b^4$ *là ước của 25137.*

Lời giải. Ta có: $25137 = 3^3.7^2.19$.

Giả sử $a^4-21a^2b^2+4b^4$ là ước của 25137. Ta chứng minh rằng $a^4-21a^2b^2+4b^4$ không chia hết cho 3.

Thật vậy, nếu $a^4-21a^2b^2+4b^4 \vdots 3 \Rightarrow a^4+b^4 \vdots 3$.

Vì mỗi số a^4, b^4 chia cho 3 chỉ có các số dư 0, 1 nên:

$$a^4+b^4 \vdots 3 \Leftrightarrow a \vdots 3, b \vdots 3 \Rightarrow a^4-21a^2b^2+4b^4 \vdots 81.$$

Mà $25137=3^3.7^2.19$ không chia hết cho 81. Mâu thuẫn. Do đó $a^4-21a^2b^2+4b^4$ không chia hết cho 3.

Tương tự, ta chứng minh rằng $a^4-21a^2b^2+4b^4$ không chia hết cho 7.

Thật vậy, nếu $a^4-21a^2b^2+4b^4 \vdots 7 \Rightarrow a^4+4b^4 \vdots 7$.

Vì mỗi số a^4, b^4 chia cho 7 chỉ có các số dư 0, 1,2,4 nên:

$$a^4+4b^4 \vdots 7 \Leftrightarrow a \vdots 7, b \vdots 7 \Rightarrow a^4-21a^2b^2+4b^4 \vdots 7^4.$$

Mà $25137=3^3.7^2.19$ không chia hết cho 7^4. Mâu thuẫn. Do đó $a^4-21a^2b^2+4b^4$ không chia hết cho 7.

Như vậy $\left(a^4-21a^2b^2+4b^4, 3^3 7^2\right)=1$.

Lại có: $a^4-21a^2b^2+4b^4=\left(a^2+2b^2\right)^2-(5ab)^2$

$$=\left(a^2-5ab+2b^2\right)\left(a^2+5ab+2b^2\right)$$

nên nếu $a^4-21a^2b^2+4b^4$ là ước của 25137 thì mỗi số $a^2-5ab+2b^2$, $a^2+5ab+2b^2$ là ước của 19. Vì $a^2+5ab+2b^2 \geq 8$ nên phải có:

$$a^2+5ab+2b^2=19 \Rightarrow 2b^2 \leq 13 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=2 \end{array}\right..$$

Nếu $b=1 \Rightarrow a^2+5a=17$, không thỏa mãn với a là số nguyên dương.

Nếu $b=2 \Rightarrow a^2+10a=11 \Rightarrow a=1$. Thử lại, bài toán thỏa mãn.

Vậy các số phải tìm là $(a,b)=(1,2)$.

Nhận xét. 1) Điều then chốt của lời giải là chứng minh $\left(a^4-21a^2b^2+4b^4, 3^3 7^2\right)=1$ để suy ra mỗi số $a^2-5ab+2b^2$, $a^2+5ab+2b^2$ là ước của 19. Từ đó có $a^2+5ab+2b^2=19 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=2 \end{array}\right.$.

2) Nếu a, b là các số tự nhiên, $p \in \{3;7\}$ và $a^2+b^2 \vdots p$ thì $\begin{cases} a \vdots p \\ b \vdots p \end{cases}$.

Trường hợp $p=3$, các bạn tự kiểm tra.

Vì một số chính phương khi chia cho 7 chỉ có các số dư 0, 1, 2, 4. Từ các số này chỉ có duy nhất cặp số (0, 0) có tổng chia hết cho 7. Do đó:

$$a^2+b^2 \vdots 7 \Rightarrow \begin{cases} a^2 \vdots 7 \\ b^2 \vdots 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \vdots 7 \\ b \vdots 7 \end{cases}.$$

Sử dụng kết quả này, trong bài trên, nếu

$$a^4-21a^2b^2+4b^4 \vdots 7,$$

suy ra: $a^4+4b^4 \vdots 7 \Rightarrow \begin{cases} a^2 \vdots 7 \\ 2b^2 \vdots 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \vdots 7 \\ b \vdots 7 \end{cases}$.

3) Bạn *Hoàng Văn Nhân*, 8C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An** có lời giải tốt.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T4/563. *Cho BC là dây cố định (khác đường kính) của đường tròn (O) và một điểm A di động trên cung lớn $\overparen{BC}$. Đường phân giác của góc $\widehat{BAC}$ cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai D. Gọi M là trung điểm của AD. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM cắt AC tại E, kẻ đường kính AN của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM. Chứng minh rằng đường thẳng NE luôn đi qua một điểm cố định khi A thay đổi trên cung lớn $\overparen{BC}$.*

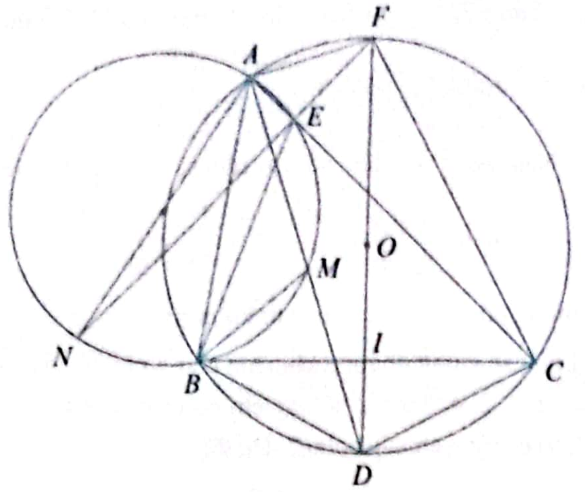
Lời giải. Kẻ đường kính DF của đường tròn (O).

Vì tứ giác $ABDC$ nội tiếp nên $\widehat{BCA}=\widehat{BDA}$. Vì tứ giác $ABME$ nội tiếp nên $\widehat{BEC}=\widehat{BMD}$.

Từ đó suy ra: $\Delta DMB \backsim \Delta CEA$ (g.g).

Ta có:

$$\frac{DM}{CE}=\frac{DB}{CB} \Rightarrow \frac{DA}{CE}=\frac{2DB}{CB}=\frac{DC}{IC} \ (1).$$



Mặt khác, theo hệ thức trong tam giác vuông, ta có: $CD.CF = CI.DF \Rightarrow \dfrac{CD}{CI} = \dfrac{DF}{CF}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $\dfrac{DA}{CE} = \dfrac{DF}{CF}$.

Mặt khác $\widehat{ADF} = \widehat{ACF}$.

Từ đó, $\Delta DAF \backsim \Delta CEF$ (c.g.c), nên $\widehat{CEF} = 90°$. Lại do AN là đường kính nên $NE \perp AC$. Vậy N, E, F thẳng hàng, nghĩa là NE đi qua điểm F cố định.

Nhận xét. Không có bạn nào có lời giải tốt cho bài toán này.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/563. *Cho các số dương $a_1, a_2, ..., a_n$ với $n \in \mathbb{N}, n > 3$. Chứng minh rằng*

$$\frac{4a_1^2 + (a_n - a_2)^2}{2a_1^2 + a_n^2 + a_2^2} + \frac{4a_2^2 + (a_1 - a_3)^2}{2a_2^2 + a_1^2 + a_3^2} + \dots + \frac{4a_n^2 + (a_{n-1} - a_1)^2}{2a_n^2 + a_{n-1}^2 + a_1^2} \geq n \quad (1).$$

***Lời giải. Nhận xét**: Với m và n là hai số dương, ta có:*

$$\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{n} \geq \frac{(x+y)^2}{m+n} \quad (2).$$

Thật vậy, BĐT(2) tương đương với

$$(nx - my)^2 \geq 0.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{x}{m} = \dfrac{y}{n}$.

Biến đổi và áp dụng BĐT (2) ta có:

$$\frac{4a_1^2 + (a_n - a_2)^2}{2a_1^2 + a_n^2 + a_2^2} = \frac{2(2a_1^2 + a_n^2 + a_2^2) - (a_n + a_2)^2}{2a_1^2 + a_n^2 + a_2^2}$$

$$= 2 - \frac{(a_n + a_2)^2}{2a_1^2 + a_n^2 + a_2^2}$$

$$\geq 2 - \left(\frac{a_n^2}{a_n^2 + a_1^2} + \frac{a_2^2}{a_1^2 + a_2^2}\right).$$

Lập luận tương tự, ta có:

$$\frac{4a_2^2 + (a_1 - a_3)^2}{2a_2^2 + a_1^2 + a_3^2} \geq 2 - \left(\frac{a_1^2}{a_1^2 + a_2^2} + \frac{a_3^2}{a_2^2 + a_3^2}\right);$$

...

$$\frac{4a_n^2 + (a_{n-1} - a_1)^2}{2a_n^2 + a_{n-1}^2 + a_1^2} \geq 2 - \left(\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}^2 + a_n^2} + \frac{a_1^2}{a_n^2 + a_1^2}\right).$$

Cộng từng vế n BĐT trên, ta thu được:

$$\text{VT}(1) \geq 2n - \left(\frac{a_1^2 + a_2^2}{a_1^2 + a_2^2} + \frac{a_2^2 + a_3^2}{a_2^2 + a_3^2} + \dots + \frac{a_n^2 + a_1^2}{a_n^2 + a_1^2}\right)$$

$$= 2n - n = n = \text{VP}(1).$$

Vậy BĐT(1) đã được chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Nhận xét. Đây là bài toán chứng minh bất đẳng thức có nhiều biến số. Các bạn gửi bài đều có lời giải đúng và tương tự như cách làm trên. Tuyên dương các bạn sau có lời giải lập luận chặt chẽ và ngắn gọn. **Thái Bình**: *Lưu Diệp Chi*, 6A5, THCS Kỳ Bá, TP. Thái Bình; **Hải Phòng**: *Đặng Đình Minh Trí*, 8CT, THCS Lạc Viên, Ngô Quyền; **TP. Hồ Chí Minh**: *Nguyễn Chánh Thiện*, 9/12, THCS Lê Quý Đôn, Quận 3; **Hưng Yên**: *Lê Tuấn Hiệp*, 9C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T6/563. *Cho n là số nguyên dương nhỏ hơn 11. Các số p_1, p_2, p_3, p là các số nguyên tố với $p_2 > 9$ và thỏa mãn các điều kiện sau:*

i) $p_1 + p_3^n$ là một số nguyên tố.

ii) $p_1 + p_2 = 3p$.

iii) $p_2 + p_3 = p_1^n(p_1 + p_3)$.

Hãy tính các giá trị của $L = p_1 p_2 p_3^n + p - n$.

Lời giải. Giả sử $p_1 > 3$, khi đó:

$$3p = p_1 + p_2 > 3 + 9 = 12 \Leftrightarrow p > 4.$$

Mặt khác $3p = p_1 + p_2$ nên $3p$ là số chẵn, điều này không xảy ra (do p là số nguyên tố lớn hơn 4 không thể là số chẵn).

Vậy $p_1 = 2$ và do đó: $p_2 + 2 = 3p$. Ta có:

$$3p \equiv 0 \pmod 3 \Leftrightarrow p_2 + 2 \equiv 0 \pmod 3,$$

kết hợp với iii) ta được:

$$2^n(2+p_3) - p_3 + 2 \equiv 0 \pmod 3$$

$$\Leftrightarrow 2^{n+1} + p_3(2^n - 1) + 2 \equiv 0 \pmod 3$$

$$\Leftrightarrow (-1)^{n+1} + \left[(-1)^n - 1\right]p_3 + 2 \equiv 0 \pmod 3 \ (*).$$

Nếu n là số chẵn thì $(*) \Leftrightarrow 1 \equiv 0 \pmod 3$, vô lý. Vậy n phải là số lẻ, lúc đó ta được:

$$(*) \Leftrightarrow p_3 \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow p_3 = 3.$$

Với n = 1, 3, 5, 7, 9 thì $p_1 + p_3^n = 2 + 3^n$ bằng: 5, 29, 245, 2189, 19685. Chỉ có số 5 và 29 là các số nguyên tố nên n chỉ có thể là 1 hoặc 3.

Mặt khác: $p_2 = p_1^n(p_1 + p_3) - p_3 = 5.2^n - 3 > 9$. Vậy ta chọn $n = 3$. Vậy $n = 3$, $p_1 = 2$, $p_2 = 37$, $p_3 = 3$, $p = 13$. Do đó:

$$L = p_1.p_2.p_3^n + p - n = 2.37.3^3 + 13 - 3 = 2008.$$

Nhận xét. Trừ một bạn giải sai, các bạn còn lại đều có lời giải đúng với cách giải tương tự như trên. Danh sách các bạn giải đúng là: **Thanh Hóa:** *Vũ Minh Quang*, 10T2, THPT chuyên Lam Sơn; **Hưng Yên:** *Chu Đức Bảo*, 10 Toán, THPT chuyên Hưng Yên; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Quang Anh*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Đồng Tháp:** *Trần Hồng Vy*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Nghệ An:** *Lê Tuấn Dương*, 9A1, THCS Quỳnh Thiện, TX. Hoàng Mai.

NHƯ HOÀNG

Bài T7/563. *Cho các số thực x, y, z thỏa mãn*

$$(x-5)^2 + (y-3)^2 = 1 \text{ và } -2 \le z \le 2.$$

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + z^2 - 2yz$.

Lời giải. Cách 1.

Ta có: $P = x^2 + (y-z)^2$. Do $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 1$, suy ra: $(y-3)^2 \le 1 \Leftrightarrow -1 \le y - 3 \le 1 \Leftrightarrow 2 \le y \le 4$

$$\Rightarrow 0 \le y - 2 \le y - z \le y + 2.$$

Do đó: $(y-2)^2 \le (y-z)^2 \le (y+2)^2$.

Vậy $x^2 + (y-2)^2 \le P \le x^2 + (y+2)^2$.

Đặt $a = x - 5$, $b = y - 3 \Rightarrow x = a + 5$, $y = b + 3$.

Ta có: $a^2 + b^2 = 1$

và $(a+5)^2 + (b+1)^2 \le P \le (a+5)^2 + (b+5)^2$.

• *Tìm giá trị lớn nhất*. Ta có:

$$P \le (a+5)^2 + (b+5)^2 = a^2 + b^2 + 10(a+b) + 50$$
$$\le 10\sqrt{2(a^2+b^2)} + 51$$
$$= 51 + 10\sqrt{2}.$$

$P = 51 + 10\sqrt{2}$ khi $a = b = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

hay $x = 5 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $y = 3 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $z = -2$.

Vậy $\max P = 51 + 10\sqrt{2}$.

• *Tìm giá trị nhỏ nhất*. Ta có:

$$P \ge (a+5)^2 + (b+1)^2 = a^2 + b^2 + 2(5a+b) + 26$$
$$\ge 27 - 2\sqrt{(25+1)(a^2+b^2)}$$
$$= 27 - 2\sqrt{26}.$$

$P = 27 - 2\sqrt{26}$ khi $a = -\dfrac{5}{\sqrt{26}}, b = -\dfrac{1}{\sqrt{26}}$

hay $x = 5 - \dfrac{5}{\sqrt{26}}$, $y = 3 - \dfrac{1}{\sqrt{26}}$, $z = 2$.

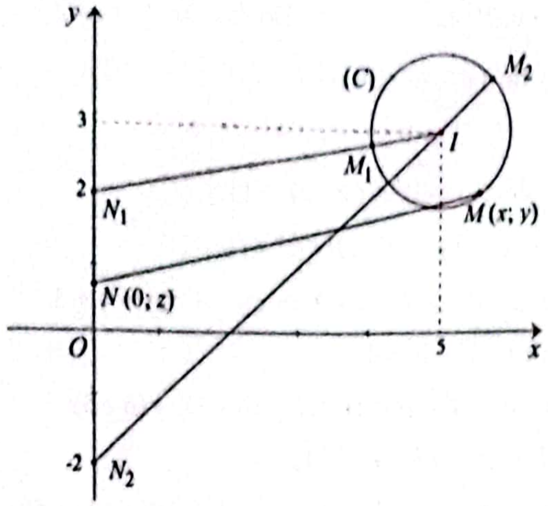
Vậy $\min P = 27 - 2\sqrt{26}$.

Cách 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi $M(x; y)$ thỏa mãn phương trình: $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 1$. Suy ra M thuộc đường tròn (C) tâm $I(5 ; 3)$ bán kính $R = 1$. Gọi $N(0; z)$ thỏa mãn $-2 \le z \le 2$ thì N di động trên Oy với tung độ $z \in [-2; 2]$. Khi đó:

$$P = x^2 + y^2 + z^2 - 2yz = x^2 + (y-z)^2 = MN^2.$$

Gọi $N_1(0 ; 2)$, $N_2(0; -2)$.

Ký hiệu $M_1 = (C) \cap IN_1$, $M_2 = (C) \cap IN_2$ như hình vẽ.



Suy ra:

• P nhỏ nhất $\Leftrightarrow MN$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow \begin{cases} N \equiv N_1 \\ M \equiv M_1 \end{cases}$.

Ta có: $M_1N_1 = IN_1 - R = \sqrt{(0-5)^2 + (2-3)^2} - 1$

$$= \sqrt{26} - 1.$$

Do đó: $\min P = M_1N_1^2 = (\sqrt{26} - 1)^2 = 27 - 2\sqrt{26}$.

• P lớn nhất $\Leftrightarrow MN$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow \begin{cases} N \equiv N_2 \\ M \equiv M_2 \end{cases}$.

Ta có: $M_2N_2 = IN_2 + R = \sqrt{(0-5)^2 + (-2-3)^2} + 1$

$$= 5\sqrt{2} + 1.$$

Do đó: $\max P = M_2N_2^2 = (5\sqrt{2} + 1)^2 = 51 + 10\sqrt{2}$.

Nhận xét. 1) Ngoài cách giải bằng đại số (cách 1) và hình học (cách 2) ở trên, bằng cách đặt:

$$x = 5 + \sin t,\ y = 5 + \cos t$$

ta cũng có thể tìm được GTLN, GTNN của P bằng cách đánh giá theo biến z và các hàm số lượng giác của t.

2) Các bạn tham gia giải bài này đều có lời giải đúng và giải bằng một trong những cách trên. Danh sách các bạn giải đúng là: **Điện Biên:** *Nguyễn Ngọc Diệp*, 10A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Đồng Tháp:** *Trần Hồng Vy*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Quang Anh*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Bình Định:** *Nguyễn Hữu Trí*, THPT số 2, Phù Cát; **Hà Nam:** *Cù Thanh Bình*, 10 Toán, THPT chuyên Biên Hòa; **Hưng Yên:** *Chu Đức Bảo*, 10 Toán, THPT chuyên Hưng Yên.

TRẦN HỮU NAM

Bài T8/563. *Cho tam giác ABC có AB = c, BC = a, CA = b. Gọi m_a, m_b, m_c lần lượt là độ dài các đường trung tuyến xuất phát từ các đỉnh A, B, C của tam giác đó. Chứng minh rằng:*

a) $\dfrac{a}{m_a} + \dfrac{b}{m_b} + \dfrac{c}{m_c} \geq 2\sqrt{3}$;

b) $\dfrac{m_a}{a} + \dfrac{m_b}{b} + \dfrac{m_c}{c} \geq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải. a) Với a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác thì

$$2b^2 + 2c^2 - a^2 \geq (b+c)^2 - a^2$$
$$= (b+c-a)(a+b+c) > 0.$$

Sử dụng công thức đường trung tuyến trong tam giác ABC và bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương $2b^2 + 2c^2 - a^2$ và $3a^2$ ta có:

$$\frac{a}{m_a} = \frac{a}{\dfrac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2}} = \frac{2a^2\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2(2b^2 + 2c^2 - a^2)}}$$
$$\geq \frac{2a^2\sqrt{3}}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Tương tự: $\dfrac{b}{m_b} \geq \dfrac{2b^2\sqrt{3}}{a^2 + b^2 + c^2}$; $\dfrac{c}{m_c} \geq \dfrac{2c^2\sqrt{3}}{a^2 + b^2 + c^2}$.

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{a}{m_a} + \frac{b}{m_b} + \frac{c}{m_c} \geq 2\sqrt{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$, hay tam giác ABC đều.

b) Ta có:

$$\frac{m_a}{a} = \frac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2a} = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{2a\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}$$
$$= \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{3a^2(2b^2 + 2c^2 - a^2)}}$$
$$\geq \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{\dfrac{1}{\sqrt{3}}.(2b^2 + 2c^2 + 2a^2)}$$
$$= \frac{\sqrt{3}(2b^2 + 2c^2 - a^2)}{2(a^2 + b^2 + c^2)}.$$

Tương tự:

$$\frac{m_b}{b} \ge \frac{\sqrt{3}(2c^2+2a^2-b^2)}{2(a^2+b^2+c^2)};$$

$$\frac{m_c}{c} \ge \frac{\sqrt{3}(2a^2+2b^2-c^2)}{2(a^2+b^2+c^2)}.$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta thu được:

$$\frac{m_a}{a}+\frac{m_b}{b}+\frac{m_c}{c} \ge \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$, hay tam giác ABC đều

Nhận xét. Hầu hết những bài giải gửi về Toà soạn đều sử dụng công thức đường trung tuyến và bất đẳng thức Cauchy để giải quyết bài toán này. Riêng câu a, bạn *Nguyễn Trọng Nhân*, 11T1, THPT chuyên Long An dùng *bất đẳng thức Ptolemy* với các tứ giác cũng cho lời giải ngắn gọn. Các bạn sau có lời giải tốt:

Hà Nội: *Nguyễn Quang Minh*, 11 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông; **Điện Biên**: *Nguyễn Ngọc Diệp*, 10A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Vĩnh Phúc**: *Nguyễn Quang Anh*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hưng Yên**: *Chu Đức Bảo*, 10 Toán, THPT chuyên Hưng Yên; **Hà Nam**: *Cù Thanh Bình*, 10 Toán, THPT chuyên Biên Hoà; **Thái Bình**: *Lưu Diệp Chi*, 6A5, THCS Kỳ Bá, TP. Thái Bình, *Nguyễn Trung Hiếu*, 10, THPT Tây Tiền Hải; **Thanh Hoá**: *Vũ Minh Quang*, 10T2, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An**: *Ngô Văn Trường*, 10A1, THPT Hoàng Mai, *Lê Tuấn Dương*, 9A1, THCS Quỳnh Thiện, TX. Hoàng Mai; **Bình Định**: *Trần Ngọc Tuyên*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Đồng Tháp**: *Trần Hồng Vy*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, TP. Cao Lãnh; **Long An**: *Nguyễn Trọng Nhân*, 11T1, THPT chuyên Long An; **TP. Hồ Chí Minh**: *Nguyễn Chánh Thiện*, 9/12, THCS Lê Quý Đôn, Quận 3.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/563. *Tìm m để hệ sau có nghiệm*

$$\begin{cases} m(x^2+\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1)=xy \\ m(\sqrt[3]{x^8}+x^2+\sqrt[3]{x^2}+1)=(2y+1-m)\sqrt[3]{x^4} \end{cases}$$

Lời giải. Xét các khả năng

• Nếu $m=0$ thì hệ trở thành: $\begin{cases} xy=0 \\ (2y+1)\sqrt[3]{x^4}=0 \end{cases}$.

Dễ thấy $(0,y)$ với $y\in\mathbb{R}$ tuỳ ý là nghiệm của hệ nói trên. Như vậy $m=0$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

• Xét $m\ne 0$, đặt $t=\sqrt[3]{x}$ thì hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases} m\left(t^6+t^4+t^2+1\right)=yt^3 \\ m\left(t^8+t^6+t^4+t^2+1\right)=(2y+1)t^4 \end{cases}.$$

Dễ thấy $t=0$ không thoả mãn hệ nói trên nên hệ trên tương đương với

$$\begin{cases} m\left(t^3+\dfrac{1}{t^3}+t+\dfrac{1}{t}\right)=y \\ m\left(t^4+\dfrac{1}{t^4}+t^2+\dfrac{1}{t^2}+1\right)=2y+1 \end{cases}.$$

Nếu đặt $u=t+\dfrac{1}{t}$ thì $|u|\ge 2$ và ta viết lại hệ nói trên thành:

$$\begin{cases} m\left(u^3-2u\right)=y \\ m\left(u^4-3u^2+1\right)=2y+1 \end{cases}.$$

Thay $y=m(u^3-2u)$ vào phương trình thứ hai của hệ nói trên, ta được:

$$m\left(u^4-3u^2+1\right)=2m(u^3-2u)+1$$

hay tương đương

$$u^4-2u^3-3u^2+4u+1=\frac{1}{m} \quad (*).$$

Hệ đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (*) có nghiệm u thoả mãn $|u|\ge 2$.

Xét hàm số $f(u)=u^4-2u^3-3u^2+4u+1$ với $|u|\ge 2$. Ta có: $f'(u)=4u^3-6u^2-6u+4$

$$=2(u+1)\left(2u^2-5u+2\right).$$

Suy ra $f'(u)$ có ba nghiệm phân biệt $-1; \dfrac{1}{2}; 2$.

Khảo sát hàm $f(u)$ trên miền $D=(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$ ta suy ra tập giá trị của

$f(u)$ trên miền D là $[-3;+\infty)$. Từ đó phương trình (*) có nghiệm u thoả mãn $|u| \geq 2$ khi và chỉ khi $\frac{1}{m} \geq -3$ và ta tìm được $m > 0$ hoặc $m \leq -\frac{1}{3}$. Kết hợp cả hai khả năng, các giá trị cần tìm của m là $m \geq 0$ và $m \leq -\frac{1}{3}$.

Nhận xét. Bài này thuộc dạng cơ bản, ý tưởng chính là cô lập tham số đưa về bài toán khảo sát hàm. Chỉ có một bạn gửi lời giải nhưng đáng tiếc là bị sai điều kiện khi đổi biến $u = t + \frac{1}{t}$ thì lại đặt điều kiện cho u là $u \geq 2$. Điều này chỉ đúng khi $t > 0$.

NGUYỄN TIẾN LÂM

Bài T10/563. *Cho dãy số (u_n) được xác định bởi*

$$u_0 = 1,\ u_{n+1} = \frac{u_n}{n^2 u_n + u_n^2 + 1}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 u_n$.

Lời giải. (Dựa trên lời giải của bạn *Nguyễn Trọng Nhân*, 11T1, THPT chuyên Long An, Long An)

Ta cần đến định lý Stolz sau đây

Định lý Stolz. *Cho* (x_n) *và* (y_n) *là hai dãy số thực sao cho*

i) (y_n) *là dãy tăng và* $\lim y_n = +\infty$

ii) $\lim \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = L$

Khi đó $\lim \frac{x_n}{y_n} = L$.

Trở lại bài toán. Dễ thấy $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Đặt $x_n = n^3$, $y_n = \frac{1}{u_n}$. Ta có:

$$y_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = n^2 + u_n + \frac{1}{u_n} = n^2 + u_n + y_n$$

$$\Rightarrow y_{n+1} - y_n = n^2 + u_n > 0 \Rightarrow y_{n+1} > y_n.$$

$$y_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = n^2 + u_n + \frac{1}{u_n} > n^2 + 2$$

$$\Rightarrow \lim y_n = +\infty.$$

Vậy (y_n) là dãy tăng và $\lim y_n = +\infty$.

Ta có: $\lim y_n = +\infty \Rightarrow \lim u_n = \lim \frac{1}{y_n} = 0$.

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \frac{(n+1)^3 - n^3}{n^2 + u_n} = \frac{3n^2 + 3n + 1}{n^2 + u_n}$$

$$= \frac{3 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2} u_n}.$$

Suy ra: $\lim \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = 3$.

Theo định lý Stolz ta có:

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = 3 \Leftrightarrow \lim n^3 u_n = 3.$$

Nhận xét. 1) Có một số ít bạn đã giải bài toán này mà không cần sử dụng định lý Stolz. Tuy nhiên cách dài này khá dài.

2) Ngoài bạn *Nhân*, các bạn sau có lời giải tốt: **Quảng Nam:** *Nguyễn Trí Hiền*, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Quang Anh*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hưng Yên:** *Chu Đức Bảo*, 10 Toán, THPT chuyên Hưng Yên; **Thanh Hóa:** *Vũ Minh Quang*, 10T2, THPT chuyên Lam Sơn; **Đồng Tháp:** *Trần Hồng Vy*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/563. *Tìm tất cả các hàm số* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *thỏa mãn:*

$$f(x)f(y) - xy = \frac{2}{3} f(x+y) + \frac{4}{3}(x+y+2), \forall x, y \in \mathbb{R}\ (1).$$

Lời giải. (Theo đa số các bạn)

Giả sử hàm $f(t)$ thỏa mãn (1). Thay $x = 0$, $y = 0$ vào (1) ta thu được:

$$f^2(0) - \frac{2}{3} f(0) - \frac{8}{3} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(0) = 2 \\ f(0) = -\frac{4}{3} \end{array}\right..$$

• Xét trường hợp $f(0) = -\frac{4}{3}$. Thay $y = 0$ vào (1) ta thu được: $f(x) = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$.

Thử lại ta thấy hàm số này không thỏa mãn (1).

• Xét trường hợp $f(0)=2$. Trong (1) thay $y=-x$ ta thu được: $f(x)f(-x)=-x^2+4, \forall x\in\mathbb{R}$ (2).

Trong (2) cho $x=2$ ta thu được:

$$f(2)=0 \text{ hoặc } f(-2)=0.$$

Xét $f(2)=0$, trong (1) thay $y=2$ ta thu được:

$$-2x=\frac{2}{3}f(x+2)+\frac{4}{3}(x+4)\Leftrightarrow f(x+2)=-5x-8$$

$\Leftrightarrow f(t)=-5t+2, \forall t\in\mathbb{R}$. Thử lại ta thấy hàm số này không thỏa mãn (1). Vậy nên $f(-2)=0$. Khi đó trong (1) cho $y=-2$ ta thu được:

$$2x=\frac{2}{3}f(x-2)+\frac{4}{3}x\Leftrightarrow f(x-2)=x$$

$$\Leftrightarrow f(t)=t+2, \forall t\in\mathbb{R}.$$

Thử lại ta thấy hàm số này thỏa mãn điều kiện đầu bài.

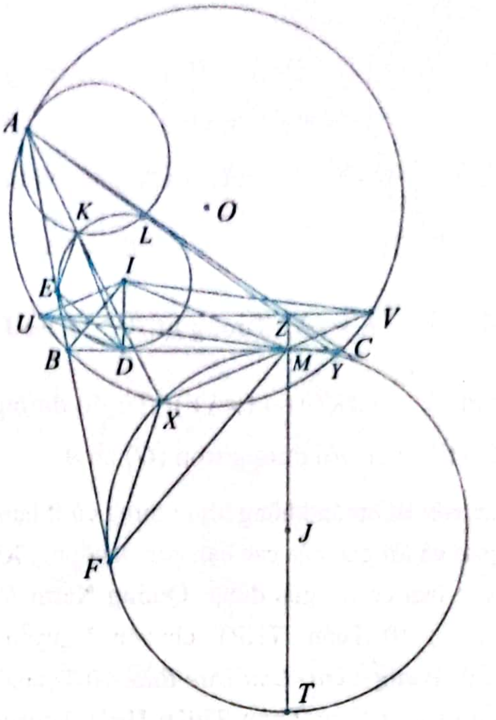
Kết luận: Tất cả các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện (1) là $f(x)=x+2, \forall x\in\mathbb{R}$.

Nhận xét. Đây là dạng toán về phương trình hàm trong lớp hàm một biến với cặp biến tự do dạng đơn giản. Đa số các bạn đều giải theo lược đồ đã trình bày ở trên. Các bạn sau đây có lời giải đúng: **Bình Định:** *Trần Ngọc Tuyên*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bình Phước:** *Đặng Hoàng Long*, *Hồ Phương Đức Đạt*, 11T10, THPT chuyên Bình Long; **Hà Nội:** *Nguyễn Quang Minh*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông; **Hưng Yên:** *Chu Đức Bảo*, 10T, THPT chuyên Hưng Yên; **Long An:** *Nguyễn Trọng Nhân*, 11T1, THPT chuyên Long An; **Phú Yên:** *Huỳnh Trần Gia Huy*, 10T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Quảng Nam:** *Nguyễn Trí Hiền*, 10CT, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Thanh Hóa:** *Vũ Minh Quang*, 10T2, THPT chuyên Lam Sơn; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Quang Anh*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T12/563. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), ngoại tiếp đường tròn (I). (I) tiếp xúc với BC tại D. Đường trung trực của đoạn ID cắt (O) tại U, V. Gọi K, L lần lượt là các điểm đối xứng với D qua IU, IV. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác AKL tiếp xúc với (O).*

Lời giải.



Đặt $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$ và p là nửa chu vi ΔABC. Gọi r là bán kính của (I), E là tiếp điểm của (I) và AB, (J) là đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC có bán kính r_a. Gọi F, M theo thứ tự là tiếp điểm của (J) và AB, BC. Gọi X, Y là giao điểm của (J) và (O). MT là đường kính của (J), MT cắt UV tại Z (hình vẽ).

Vì $MT\perp BC$ và $UV \parallel BC$ nên $MT\perp UV$. Ta có: $MZ\cdot MT=\frac{1}{2}DI\cdot 2MJ=r.r_a=\frac{S^2_{ABC}}{p(p-a)}$

$$=(p-b)(p-c)=MB\cdot MC.$$

Đặt $\overline{MZ}\cdot\overline{MT}=\overline{MB}\cdot\overline{MC}:=k$. Suy ra phép nghịch đảo I_M^k biến Z thành T, biến UV thành đường tròn (J), biến đường tròn (O) thành đường tròn (O). Do đó:

$$I_M^k: UV\cap(O)\mapsto(J)\cap(O).$$

Điều đó có nghĩa $I_M^k: V\mapsto X, U\mapsto Y$. Vậy M, X, V thẳng hàng và M, U, Y thẳng hàng.

Dễ thấy $DMVU$ là hình thang cân.

Ta có: $(IU,UV)\equiv(UV,UD)\equiv(MV,UV)\pmod{\pi}$.

Do đó: $IU \parallel MV\equiv MX$.

Chú ý rằng: $DE \perp IB, DK \perp IU, IB \parallel MF$, $IU \parallel MX$, ta có:

$$(EA, EK) \equiv (DE, DK) \equiv (IB, IU) \equiv (MF, MX) \equiv (FA, FX) (\bmod \pi).$$

Điều đó có nghĩa $EK \parallel FX$. Ta có phép vị tự

$$V_A^{\frac{r_J}{r}} : (I) \mapsto (J), E \mapsto F, EK \mapsto FX.$$

Do đó: $V_A^{\frac{r_J}{r}} : K \mapsto X$. Tương tự: $V_A^{\frac{r_J}{r}} : L \mapsto Y$.

Suy ra: $V_A^{\frac{r_J}{r}} : (AKL) \mapsto (AXY)$. Từ đó đường tròn (AKL) tiếp xúc với đường tròn (O) tại A.

Nhận xét. Bài toán không khó nhưng có ít bạn tham gia giải và lời giải của các bạn còn dài dòng. Xin nêu tên các bạn có lời giải đúng: **Quảng Nam:** *Nguyễn Tri Hậu*, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Hưng Yên:** *Chu Đức Bảo*, 10 Toán, THPT chuyên Hưng Yên; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Duy Phúc*, 10 Toán 1, THPT chuyên Quốc Học Huế; **Phú Yên:** *Nguyễn Tấn Nguyên Chương*, 11 Toán 1, THPT chuyên Lương Văn Chánh.

LƯU CÔNG ĐÔNG

Bài L1/563. *Trong thí nghiệm Y- âng về giao thoa ánh sáng, chiếu đồng thời vào hai khe hai bức xạ có bước sóng $\lambda_1 = 0{,}420$ μm và $\lambda_2 = 0{,}525$ μm. Trên màn quan sát, tại điểm M là vân sáng bậc 4 của bức xạ λ_1, tại điểm N là vân sáng bậc 11 của bức xạ λ_2. Biết M và N nằm cùng về một phía so với vân sáng trung tâm. Số vân sáng trên đoạn MN (kể cả ở M, N) là bao nhiêu?*

Lời giải. Ta có : $\dfrac{i_1}{i_2} = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} = \dfrac{4}{5}$.

$\Rightarrow 5i_1 = 4i_2$; $x_M = 4i_1 = 4.\dfrac{4}{5}i_2 = 3{,}2i_2$;

$$x_N = 11i_2 = 11.\frac{5}{4}i_1 = 13{,}75i_1.$$

Vị trí hai vân sáng trùng nhau:

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{i_1}{i_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{4}{5} \Rightarrow i_{\text{trùng}} = 5i_1 = 4i_2.$$

Số vân sáng bức xạ 1 trong MN:

$N_1 = 13 - 3 = 10$ (kể cả vân tại M).

Số vân sáng bức xạ 2 trong MN:

$N_2 = 11 - 3 = 8$ (kể cả vân tại N).

Số vân trùng trong MN:

$$OM \le k_{\text{trùng}} i_{\text{trùng}} \le ON$$

$$\Rightarrow 4i_1 \le k_{\text{trùng}} 5i_1 \le 13{,}75i_1 \Rightarrow 0{,}8 \le k_{\text{trùng}} \le 2{,}75$$

$\Rightarrow k_{\text{trùng}} = 1{,}2 \Rightarrow$ có 2 vị trí vân trùng.

Tổng số vân sáng trong MN là: $10 + 8 - 2 = 16$.

Nhận xét. Chúc mừng các em sau đây có lời giải đúng cho đề ra kì này: **Hưng Yên:** *Chu Đức Bảo*, 10 toán, THPT chuyên Hưng Yên; **Đồng Nai:** *Phạm Xuân Khánh*, 11A2, THPT Tam Phước, Biên Hòa; **Thừa Thiên Huế:** *Trương Minh Phúc*, 11 lý 2, THPT chuyên Quốc học Huế.

Còn một học sinh nữa có lời giải đúng nhưng em không ghi tên và địa chỉ để chúng tôi khen ngợi em.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/563. *Điện năng được truyền từ một máy tăng áp đặt tại A tới máy hạ áp đặt tại B bằng dây đồng có tiết diện tròn, đường kính 1 cm với tổng chiều dài 200 km. Cường độ dòng điện trên dây tải điện là 100 A. Biết các công suất hao phí trên đường dây tải điện bằng 5% công suất tiêu thụ ở B. Nếu bỏ qua mọi công suất hao phí trong các máy biến áp, coi hệ số công suất của các mạch sơ cấp và thứ cấp đều bằng 1, điện trở suất của đồng là $1{,}6.10^{-8}$ Ωm thì điện áp hiệu dụng ở cuộn thứ cấp của máy tăng áp ở A là bao nhiêu?*

Lời giải. Điện trở của đường dây là:

$$R = \rho\frac{l}{S} \approx 41\,\Omega.$$

Công suất hao phí: $\Delta P = I^2R = \dfrac{5}{100}P_B = \dfrac{5}{100}U_B.I$.

Mà $U_A = I.R + U_B$, suy ra: $I^2R = \dfrac{5}{100}I(U_A - I.R)$.

Thay số ta tìm được $U_A = 86100$ V.

Nhận xét. Các bạn có lời giải đúng:

Đồng Nai: *Phạm Xuân Khánh*, 11A, THPT Tam Phước, Biên Hòa; **Thừa Thiên Huế:** *Trương Minh Phúc*, 11 Lý 2, THPT chuyên Quốc Học Huế.

NGUYỄN XUÂN QUANG

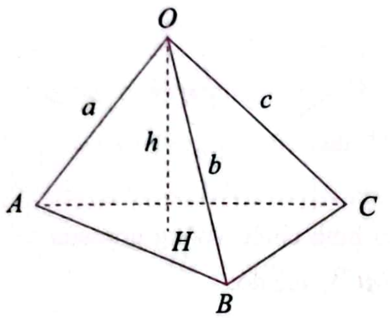
ỨNG DỤNG MỘT TÍNH CHẤT CỦA TỨ DIỆN VUÔNG TRONG VIỆC TÍNH KHOẢNG CÁCH GIỮA CÁC YẾU TỐ TRONG KHÔNG GIAN

PHẠM DUY KHÁNH - NGUYỄN THỊ THÙY LINH
(GV THPT Quỳ Châu, Nghệ An)

Tứ diện vuông là một khái niệm quen thuộc trong chương trình toán phổ thông, trong tứ diện vuông $OABC$ (tứ diện có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau) có một tính chất là

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$$

với h là khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) và $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$ (xem hình vẽ).



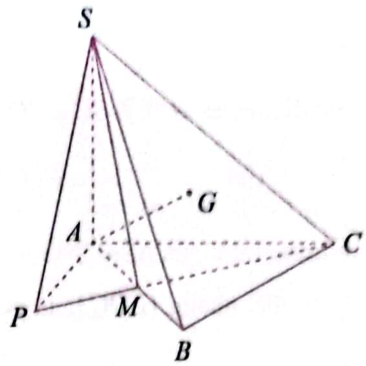
Tính chất trên đã được khai thác rất nhiều vào việc chứng minh cũng như sáng tạo các bài toán bất đẳng thức hình học nói riêng hay các vấn đề khác của bộ môn hình không gian nói chung. Trong bài viết này tác giả khai thác tính chất đó vào việc tính khoảng cách giữa các yếu tố trong không gian, điều đó thể hiện qua nội dung sau:

1. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT MẶT PHẲNG

1.1. Các bài toán về hình chóp

Thí dụ 1. *Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC); góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Gọi M là trung điểm cạnh AB. Tính khoảng cách từ B đến (SMC).*

Lời giải.



Ta có: $SA=AB.\tan 60°=a\sqrt{3}$. Dựng ΔACP vuông tại A $(P\in CM)\Rightarrow AP=AC.\tan 30°=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Gọi G là hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (SPC), ta có: AS, AP, AC đôi một vuông góc với nhau và

$$d\left(B;(SMC)\right)=d\left(A;(SMC)\right)=AG.$$

Trong tứ diện vuông $ASPC$ có:

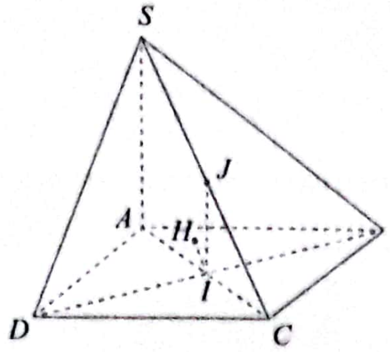
$$\frac{1}{AG^2}=\frac{1}{AS^2}+\frac{1}{AP^2}+\frac{1}{AC^2}=\frac{1}{\left(a\sqrt{3}\right)^2}+\frac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{13}{3a^2}$$

$$\Rightarrow AG=\sqrt{\frac{3}{13}}a=\frac{a\sqrt{39}}{13}.$$

Vậy $d\left(B;(SMC)\right)=AG=\dfrac{a\sqrt{39}}{13}$.

Thí dụ 2. *Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân, $BA=BC=a$ và $\widehat{BAC}=30°$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a$. Gọi D là điểm đối xứng với B qua AC. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD).*

Lời giải.



Gọi I là trung điểm của $AC \Rightarrow IC \perp ID$, từ I kẻ $IJ \parallel SA$ $(J \in SC) \Rightarrow \frac{IJ}{SA} = \frac{IC}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow IJ = \frac{SA}{2} = \frac{a}{2}$ (IJ là đường trung bình của ΔSAC). Gọi H là hình chiếu của I lên mặt phẳng (SDC), ta có:

$$ID = IB = AB.\sin 30° = \frac{a}{2},$$

$$IA = IC = AB.\cos 30^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Do I là trung điểm của BD suy ra:

$$d(B;(SDC)) = 2d(I;(SDC)) = 2IH.$$

Ta có $IJ; ID; IC$ đôi một vuông góc nên

$$\frac{1}{IH^2} = \frac{1}{IJ^2} + \frac{1}{ID^2} + \frac{1}{IC^2}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{28}{3a^2}$$

$$\Rightarrow IH = \frac{a\sqrt{21}}{14}.$$

Vậy $d(B;(SDC)) = 2IH = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Thí dụ 3. *Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $\widehat{ABC} = 60^0$, $BC = 2a$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BC, biết rằng SH vuông góc với mặt đáy (ABC) và SA tạo với đáy (ABC) một góc 60^0. Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) theo a.*

Lời giải. Ta có ΔABC vuông tại A nên

$$AB = BC.\cos 60^0 = 2a.\frac{1}{2} = a\text{ ; } AC = a\sqrt{3};$$

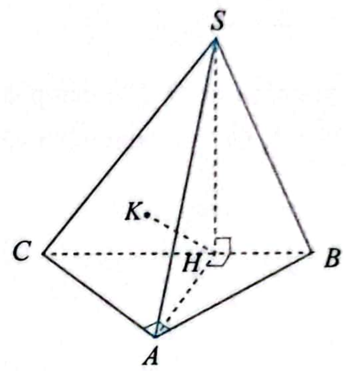
$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{4}{3a^2} \Leftrightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2};$$

$\left(\widehat{SA;(ABC)}\right) = \left(\widehat{SA;AH}\right) = \widehat{SAH} = 60^0$, do đó:

$$SH = AH.\tan 60^0 = \frac{3a}{2}.$$

Ta có: $AC^2 = HC.BC \Leftrightarrow \frac{HC}{BC} = \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{3}{4}$

$$\Leftrightarrow HC = \frac{3}{4}BC = \frac{3a}{2}.$$



Gọi K là hình chiếu vuông góc của H trên mặt phẳng (SAC), lúc đó:

$$d(B;(SAC)) = \frac{BC}{HC} \cdot d(H;(SAC)) = \frac{4}{3}HK.$$

Ta có $HA; HC; HS$ đôi một vuông góc, suy ra:

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HA^2} + \frac{1}{HC^2} + \frac{1}{HS^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{3a}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{3a}{2}\right)^2} = \frac{20}{9a^2}$$

$$\Leftrightarrow HK = \frac{3a\sqrt{5}}{10}.$$

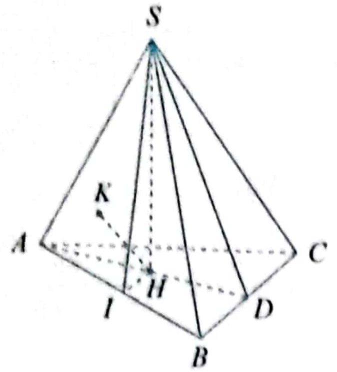
Suy ra: $d(B;(SAC)) = \frac{4}{3}HK = \frac{4}{3} \cdot \frac{3a\sqrt{5}}{10} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Vậy $d(B;(SAC)) = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Thí dụ 4. *Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$, D là trung điểm BC. Biết ΔSAD là tam giác đều và mặt phẳng (SAD)*

vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB).

Lời giải.



Gọi H là trung điểm của AD mà ΔSAD là tam giác đều nên $SH \perp AD$, lại có $(SAD) \perp (ABC)$ suy ra $SH \perp (ABC)$. Qua H kẻ đường thẳng song song với BD cắt AB tại I. Ta có $HI \perp AD$ và $HS; HA; HI$ đôi một vuông góc.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của H trên mặt phẳng (SAI) thì ta có $d(H;(SAB)) = HK$.

Ta có: $AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$;

$$HA = \frac{1}{2}AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}; HI = \frac{1}{2}BD = \frac{a}{2};$$

$$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{3a^2 - \frac{3a^2}{4}} = \frac{3a}{2}.$$

Lúc đó: $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{HS^2} + \dfrac{1}{HA^2} + \dfrac{1}{HI^2}$

$$= \frac{4}{9a^2} + \frac{4}{3a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{52}{9a^2}$$

$$\Leftrightarrow HK = \frac{3a\sqrt{52}}{52}.$$

Lại có: $d(C;(SAB)) = 2d(D;(SAB))$

$$= 4d(H;(SAB)) = 4HK = \frac{3a\sqrt{52}}{13}.$$

Vậy $d(C;(SAB)) = 4HK = \dfrac{3a\sqrt{52}}{13}$.

1.2. Các bài toán về lăng trụ và hình hộp

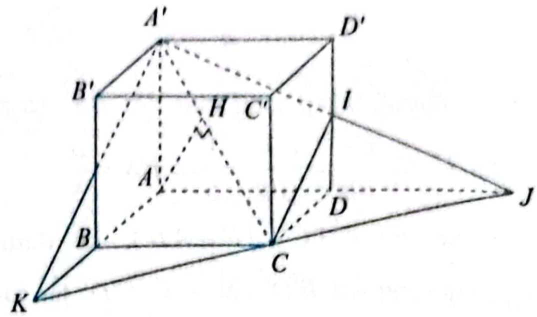
Thí dụ 1. *Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bên bằng $2a$, cạnh đáy bằng a. Gọi I là trung điểm của DD'. Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng $(A'IC)$.*

Lời giải.

Kéo dài $A'I$ và AD cắt nhau tại J, suy ra DI là đường trung bình tam giác $A'AJ$ và

$$AD = DJ = A'D' = BC = a;\ AJ = 2a.$$

Kéo dài CJ và AB cắt nhau tại K, suy ra BC là đường trung bình tam giác AKJ nên



$$KB = AB = CD = \frac{AK}{2} = a,\ AK = 2a.$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng $(A'KJ)$ ta có:

$$d(B;(A'CJ)) = \frac{1}{2}d(A;(A'CJ)) = \frac{1}{2}AH.$$

Mặt khác ta có $AA'; AJ; AK$ đôi một vuông góc nên $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AA'^2} + \dfrac{1}{AJ^2} + \dfrac{1}{AK^2}$

$$= \frac{1}{(2a)^2} + \frac{1}{(2a)^2} + \frac{1}{(2a)^2} = \frac{3}{4a^2} \Rightarrow AH = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy $d(B;(A'CJ)) = \dfrac{1}{2}AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

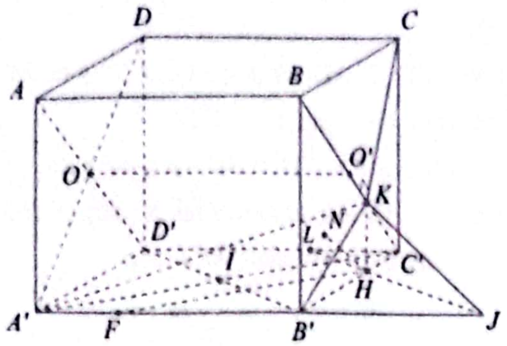
Thí dụ 2. *Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AD = 2a$, $AA' = a$. Gọi K là hình chiếu của C trên cạnh BC', gọi O là giao điểm của AD' và $A'D$. Tính khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng $(A'B'K)$.*

Lời giải. Ta có $BC' = a\sqrt{5}$, tam giác BCC' vuông có CK là đường cao nên

$$CC'^2 = C'B.C'K \Leftrightarrow \frac{C'K}{C'B} = \frac{C'C^2}{C'B^2} = \frac{a^2}{5a^2} = \frac{1}{5}.$$

Gọi O' là trung điểm của BC' ta có OO' song song với $A'B'$ và $O'K = BC' - BO' - KC'$

$$= BC' - \frac{BC'}{2} - \frac{BC'}{5} = \frac{3}{10}BC'.$$



Từ K kẻ đường thẳng song song với BB' và cắt $B'C'$ tại H $\Rightarrow \frac{HK}{BB'} = \frac{C'K}{C'B} = \frac{1}{5} \Rightarrow HK = \frac{a}{5}$.

Từ H kẻ $HF \parallel A'C'$ $(F \in A'B')$, kẻ đường thẳng song song với $B'D'$ cắt $A'B'$, $C'D'$ lần lượt tại J và L. Ta có:

$$d(O;(A'B'K)) = d(O';(A'B'K))$$

$$= \frac{KO'}{KC'}d(C';(A'B'K)) = \frac{\frac{3}{10}BC'}{\frac{1}{5}BC'}d(C';(A'B'K))$$

$$= \frac{3}{2}d(C';(A'B'K))$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{B'C'}{B'H}d(H;(A'B'K))$$

$$= \frac{15}{8}d(H;(A'B'K)).$$

Gọi N là hình chiếu vuông góc của H trên mặt phẳng $(A'B'K)$, suy ra: $d(O;(A'B'K)) = \frac{15}{8}HN.$

Do $HF \parallel A'C'$ suy ra:

$$\frac{HF}{A'C'} = \frac{B'H}{B'C'} = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow HF = \frac{4}{5}A'C' = \frac{4}{5}\cdot 2a\sqrt{2} = \frac{8a\sqrt{2}}{5}.$$

Ta có tứ giác $B'JLD'$ là hình bình hành $\Rightarrow B'D' = LJ$. Xét tam giác $B'C'D'$ có:

$$HL \parallel B'D' \Rightarrow \frac{HL}{B'D'} = \frac{HC'}{B'C'} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow HJ = \frac{4}{5}B'D' = \frac{4}{5}\cdot 2a\sqrt{2} = \frac{8a\sqrt{2}}{5}.$$

Do $HK; HF; HJ$ đôi một vuông góc nên ta có:

$$\frac{1}{HN^2} = \frac{1}{HK^2} + \frac{1}{HF^2} + \frac{1}{HJ^2}$$

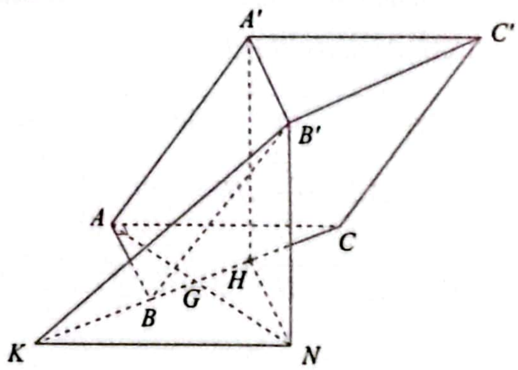
$$= \frac{1}{\left(\frac{a}{5}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{8a\sqrt{2}}{5}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{8a\sqrt{2}}{5}\right)^2} = \frac{1625}{64a^2}$$

$\Leftrightarrow HN = \frac{8a}{5\sqrt{65}}$. Vậy:

$$d(O;(A'B'K)) = \frac{15}{8}HN = \frac{15}{8}\cdot\frac{8a}{5\sqrt{65}} = \frac{3a\sqrt{65}}{65}.$$

Thí dụ 3. *Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $2a$, đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh BC. Tính theo a khoảng cách từ A tới mặt phẳng $(C'B'B)$.*

Lời giải.



Dựng hình bình hành $A'B'NH \Rightarrow B'N \perp (ABC)$.

Ta có: $HN = A'B' = AB = a$. Từ N kẻ đường thẳng song song với AC cắt BC tại K, $G = AN \cap BC$. Ta có:

$$NK \parallel AC;\ HN \parallel AB \Rightarrow NH \perp NK;$$

$$HN \parallel AB \Rightarrow \frac{AG}{GN} = \frac{AB}{HN} = 1 \Rightarrow AG = GN$$

$\Rightarrow ACNK$ là hình bình hành

$\Rightarrow NK = AC = a\sqrt{3};\ BC = 2a \Rightarrow AH = a$

$\Rightarrow A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = a\sqrt{3} \Rightarrow NB' = a\sqrt{3}.$

Gọi P là hình chiếu vuông góc của N trên mặt phẳng $(C'B'B)$ thì

$$d(A,(C'B'B)) = d(N,(C'B'B) = NP.$$

Ta có NB', NK, NH đôi một vuông góc nên

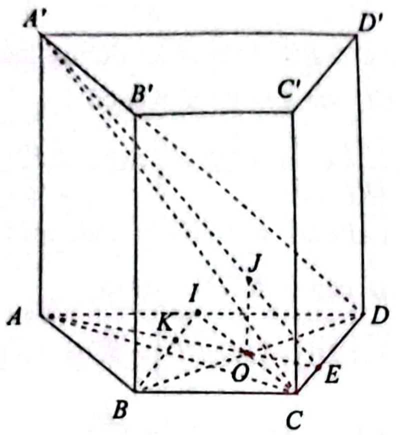
$$\frac{1}{NP^2}=\frac{1}{NB'^2}+\frac{1}{NK^2}+\frac{1}{NH^2}$$

$$=\frac{1}{\left(a\sqrt{3}\right)^2}+\frac{1}{\left(a\sqrt{3}\right)^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{5}{3a^2}\Rightarrow NP=\frac{a\sqrt{15}}{5}.$$

Vậy $d\left(A;(C'B'B)\right)=NP=\dfrac{a\sqrt{15}}{5}.$

Thí dụ 4. *Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thang cân, AD song song với BC, $AB=BC=CD=a, AD=2a.$ Góc giữa hai mặt phẳng $(A'CD)$ và $(ABCD)$ bằng 45°. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng $(A'CD)$.*

Lời giải.



Gọi I là trung điểm của AD. Dễ dàng chứng minh tứ giác $ABCI$ và tứ giác $BCDI$ là hình thoi ($AB=BC=CD=DI=IA$). Suy ra:

$$AC\perp BI,\ BD\perp IC.$$

Mặt khác ta có: $BI \parallel CD \Rightarrow AC\perp CD$. Ta có:

$$\left.\begin{array}{l}AC\perp CD\\ AA'\perp CD\end{array}\right\}\Rightarrow CD\perp(A'AC)$$

$$\Rightarrow CD\perp A'C.$$

Theo bài ra ta có:

$$\left(\widehat{(A'CD);(ABCD)}\right)=\left(\widehat{A'C;AC}\right)=\widehat{A'CA}=45^0.$$

Hình thoi $ABCI$ có $AB=a, BI=a\Rightarrow AC=a\sqrt{3}$

$$\Rightarrow AA'=AC.\tan 45^\circ=a\sqrt{3}.$$

Gọi O là tâm hình thoi $BCDI$, kéo dài AO cắt CD tại E.

Trong mặt phẳng $(A'AE)$, kẻ đường thẳng $OJ \parallel AA' (J\in A'E)$. Gọi $K=BI\cap AE$, ta có:

$$CD \parallel BI \Rightarrow \frac{OE}{OK}=\frac{OC}{OI}=1\Rightarrow OE=OK\ \ (1).$$

Lại có:

$$AB \parallel IC \Rightarrow \frac{OK}{AK}=\frac{IO}{AB}=\frac{1}{2}\Rightarrow AK=2OK\ \ (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{OE}{AE}=\frac{1}{4}=\frac{OJ}{AA'}\Rightarrow OJ=\frac{AA'}{4}=\frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Do $OJ \parallel AA' \Rightarrow OJ\perp(ABCD)$ nên ta có OJ, OC, OD đôi một vuông góc.

$$IC=a,\ BD=a\sqrt{3}\Rightarrow OC=\frac{IC}{2}=\frac{a}{2};\ OD=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên mặt phẳng $(A'ED)$ suy ra:

$$d\left(B;(A'ED)\right)=2d\left(O;(A'ED)\right)=2OH.$$

Ta có: $\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{OJ^2}+\dfrac{1}{OC^2}+\dfrac{1}{OD^2}$

$$=\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{32}{3a^2}$$

$$\Rightarrow OH=\sqrt{\frac{3}{32}}a=\frac{a\sqrt{6}}{8}.$$

Vậy $d\left(B;(A'ED)\right)=2OH=\dfrac{a\sqrt{6}}{4}.$

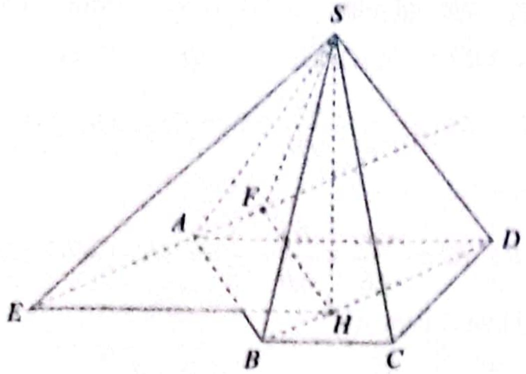
2. KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

2.1. Các bài toán về hình chóp

Thí dụ 1. *Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B. Biết $AB=SD=3a,\ AD=SB=4a,$ đường chéo AC vuông góc với mặt phẳng (SBD). Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SA.*

Lời giải. Ta có $AB=SD, AD=SB$; BD là cạnh chung $\Rightarrow \Delta ABD=\Delta SDB$ (c.c.c)

$$\Rightarrow \widehat{BSD}=\widehat{DAB}=90^\circ.$$



Kẻ $SH \perp BD$ mà $AC \perp (SBD) \Rightarrow AC \perp SH$ $\Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Qua A kẻ đường thẳng d song song với BD. Qua H kẻ đường thẳng song song với AD cắt d tại E, kẻ đường thẳng song song với AB và cắt d tại F. Suy ra $ABHF$ là hình bình hành và $FH = AB = 3a$. Tứ giác $ADHE$ là hình bình hành có $HE = AD = 4a$. Ta có:

$\begin{cases} HE \parallel AD \\ HF \parallel AB \Rightarrow HE \perp HF \Rightarrow HS, HE, HF \\ AD \perp AB \end{cases}$ là ba đường thẳng đôi một vuông góc.

Ta có: $BD \parallel EF \Rightarrow$ BD // (SAE)

$$\Rightarrow d(BD;SA) = d(BD;(SAE)) = d(H;(SAE)).$$

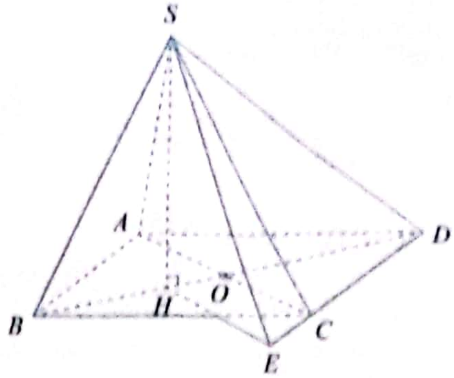
Gọi M là hình chiếu vuông góc của H trên $(SAE) \Rightarrow d(H;(SAE)) = HM$

$$\Rightarrow \frac{1}{HM^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HE^2} + \frac{1}{HF^2}$$
$$= \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{SD^2} + \frac{1}{HE^2} + \frac{1}{HF^2}$$
$$= 2\left(\frac{1}{HE^2} + \frac{1}{HF^2}\right) = 2\left(\frac{1}{9a^2} + \frac{1}{16a^2}\right)$$

$\Rightarrow HM = \frac{12a}{5\sqrt{2}} = \frac{6a\sqrt{2}}{5}$. Vậy: $d(BD;SA) = \frac{6a\sqrt{2}}{5}$.

Thí dụ 2. *Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 60^0$. Hình chiếu vuông góc cua đinh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trọng tâm của tam giác ABC. Biết góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 30^0, tính khoang cách giữa hai đường thẳng AB và SD.*

Lời giải.



Do $ABCD$ là hình thoi cạnh a và biết $\widehat{ABC} = 60^0$ nên ta dễ dàng có $BD = a\sqrt{3}$. Gọi H là trọng tâm ΔABC, suy ra:

$$SH \perp (ABCD); HD = \frac{2}{3}DB = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

Gọi $O = AC \cap BD$. Qua H kẻ đường thẳng song song với OC cắt CD tại E. Khi đó:

$$\frac{OC}{HE} = \frac{DO}{DH} = \frac{3}{4} \Rightarrow HE = \frac{4}{3}OC = \frac{4}{3}.\frac{a}{2} = \frac{2a}{3}.$$

Vì $SH \perp (ABCD)$ nên HD là hình chiếu vuông góc của SD trên $(ABCD)$, suy ra:

$$\left(\widehat{SD;(ABCD)}\right) = \left(\widehat{SD;HD}\right) = \widehat{SDH} = 30^\circ$$
$$\Rightarrow SH = HD.\tan 30^\circ = \frac{2a}{3}.$$

Gọi K là hình chiếu vuông góc của H trên (SDE), mà HS, HE, HD đôi một vuông góc nên

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HE^2} + \frac{1}{HD^2} = \frac{9}{4a^2} + \frac{9}{4a^2} + \frac{9}{12a^2}$$
$$\Rightarrow HK = \frac{2a\sqrt{21}}{21}.$$

Vì $AB \parallel CD \Rightarrow AB \parallel (SCD)$

$$\Rightarrow d(AB;SD) = d(AB;(SCD)) = d(B;(SCD)).$$

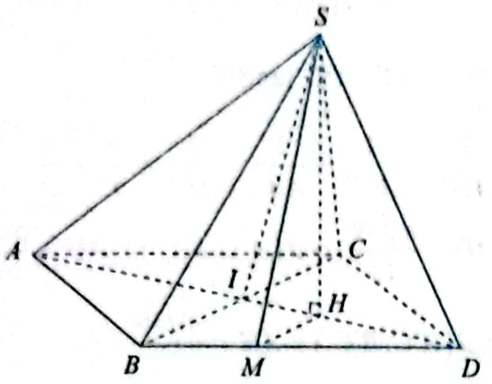
Lại có: $HD = \frac{2}{3}BD \Leftrightarrow BD = \frac{3}{2}HD$

$$\Rightarrow d(B;(SCD)) = \frac{3}{2}d(H;(SCD)) = \frac{3}{2}HK = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Vậy $d(AB;SD) = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Thí dụ 3. *Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và $\widehat{SBA}=\widehat{SCA}=90^\circ$. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 45°. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC.*

Lời giải.



Gọi I là trung điểm của $BC \Rightarrow AI \perp BC$.

$\Delta SBA = \Delta SCA$ (cạnh huyền và cạnh góc vuông)

$\Rightarrow SB = SC \Rightarrow \Delta SBC$ là tam giác cân

$\Rightarrow SI \perp BC$ mà $BC \perp AI \Rightarrow BC \perp (SAI)$.

Kẻ $SH \perp AI$, mà $SH \perp BC \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

Gọi D là điểm đối xứng của A qua I

$\Rightarrow ABDC$ là hình thoi $\Rightarrow AD = a\sqrt{3}$.

Đặt $SA = x \Rightarrow SB = SC = \sqrt{SA^2 - AB^2} = \sqrt{x^2 - a^2}$

$$\Rightarrow SI = \sqrt{SB^2 - BI^2} = \sqrt{x^2 - \frac{5a^2}{4}}$$

$$\Rightarrow SI^2 = AI^2 + AS^2 - 2AI.AS.\cos 45^\circ$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{5a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} + x^2 - \frac{a\sqrt{6}}{2}.x$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow SA = \frac{2a\sqrt{6}}{3}$$

$$\Rightarrow AH = SA.\cos 45^0 = \frac{2a\sqrt{3}}{3} = SH$$

$$\Rightarrow HD = AD - AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow HD = \frac{2}{3}ID; AD = 3HD$$

Qua H kẻ đường thẳng song song với BI cắt BD tại M $\Rightarrow HM = \frac{2}{3}BI = \frac{a}{3}$.

Mà $HD \perp BC \Rightarrow HM \perp HD \Rightarrow HS, HM, HD$ đôi một vuông góc với nhau.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của H trên $(SMD) \Rightarrow K$ là trọng tâm của ΔSMD

$\Rightarrow d(H;(SBD)) = HK$

$$\Rightarrow \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HM^2} + \frac{1}{HD^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{9}{a^2} + \frac{3}{a^2} + \frac{3}{4a^2}$$

$$= \frac{51}{4a^2} \Rightarrow HK = \frac{2a\sqrt{51}}{51}.$$

Vì $AC \parallel BD \Rightarrow AC \parallel (SBD)$

$$\Rightarrow d(AC;SB) = d(AC;(SDB)) = d(A;(SDB)).$$

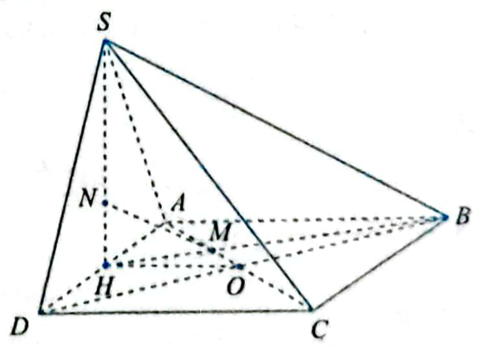
Mặt khác $AD = 3HD$

$$\Rightarrow d(A;(SBD)) = 3d(H;(SBD)) = 3HK = \frac{2a\sqrt{51}}{17}.$$

Vậy $d(AC;SB) = \frac{2a\sqrt{51}}{17}$.

Thí dụ 4. *Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = 2a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng đáy là trung điểm H của AD, góc giữa SB và mặt phẳng đáy $(ABCD)$ là 45°. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC theo a.*

Lời giải.



Gọi O là tâm của hình chữ nhật $ABCD$. Vì $SH \perp (ABCD)$ nên HB là hình chiếu vuông góc của SB trên mặt phẳng đáy, do đó

$$\left(\widehat{SB;(ABCD)}\right) = \left(\widehat{SB;HB}\right) = \widehat{SBH} = 45^0.$$

Suy ra $SH = BH = \sqrt{AB^2 + AH^2} = a\sqrt{2}$. Gọi M là giao điểm của HB và AC.

Vì $AH \parallel BC \Rightarrow \frac{MH}{MB} = \frac{AH}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{MH}{HB} = \frac{1}{3}$.

Qua M kẻ đường thẳng song song với SB và cắt SH tại N suy ra $SB // (NAC)$.

Ta có: $MN // SB \Rightarrow \frac{HN}{HS} = \frac{HM}{HB} = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow HN = \frac{1}{3}HS = \frac{a\sqrt{2}}{3};$$

$$d(SB;AC) = d(SB;(NAC)) = d(B;(NCA))$$
$$= 2d(H;(NAC)).$$

Dễ dàng thấy $HO \perp AD$, do đó $HS;HA;HO$ đôi một vuông góc, hay tứ diện $HASO$ là tứ diện vuông. Gọi K là hình chiếu vuông góc của H trên mặt phẳng (NAC), ta có:

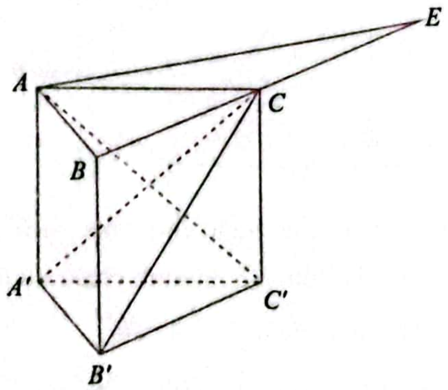
$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HA^2} + \frac{1}{HO^2}$$
$$= \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{11}{2a^2} \Leftrightarrow HK = \frac{a\sqrt{22}}{11}.$$

Vậy $d(SB;AC) = 2d(H;(NAC)) = \frac{2a\sqrt{22}}{11}$.

2.2. Các bài toán về lăng trụ và hình hộp

Thí dụ 1. *Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa đường thẳng $B'C$ và mặt phẳng đáy (ABC) bằng 30^0. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $B'C'$ và $A'C$.*

Lời giải.



Vì $B'C' // BC \Rightarrow B'C' // (A'BC)$

$$\Rightarrow d(A'C;B'C') = d(B'C';(A'BC))$$
$$= d(C';(A'BC)) = d(A;(A'BC)).$$

Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt BC tại $E \Rightarrow AE = AB.\tan 60^\circ = a\sqrt{3} \Rightarrow AA'$, AB, AE là ba đường thẳng đôi một vuông góc.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên $(A'BE) \Rightarrow d(A;(A'BC)) = AH$. Vì $BB' \perp (ABC)$

$\Rightarrow BC$ là hình chiếu của $B'C$ trên (ABC)

$$\Rightarrow \left(\widehat{B'C;(ABC)}\right) = \left(\widehat{B'C;BC}\right) = \widehat{B'CB} = 30^\circ$$

$$\Rightarrow BB' = AA' = BC.\tan 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

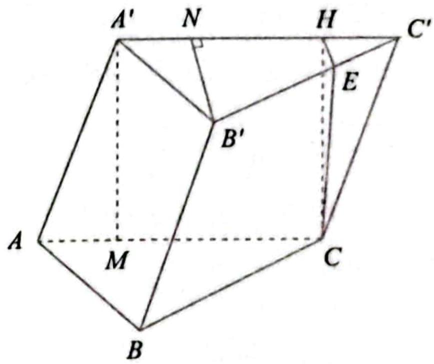
$$\Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{3}{a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{39}}{13} \Rightarrow d(A'C;B'C') = AH = \frac{a\sqrt{39}}{13}.$$

Vậy $d(A'C;B'C') = AH = \frac{a\sqrt{39}}{13}$.

Thí dụ 2. *Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$, đáy ABC là tam giác vuông tại $B, BC = a\sqrt{3}, AB = a$. Biết hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng đáy là điểm M thoả mãn $3\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC.*

Lời giải.



Qua C kẻ đường thẳng song song với $A'M$ và cắt $A'C'$ tại H, suy ra $CH \perp (A'B'C')$. Gọi N là hình chiếu vuông góc của B' trên $A'C'$. Ta có:

$$C'N.C'A' = C'B'^2 \Leftrightarrow \frac{C'N}{C'A'} = \frac{C'B'^2}{C'A'^2} = \frac{3}{4}.$$

Mà $\frac{C'H}{C'A'} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{C'H}{C'N} = \frac{4}{9} \Rightarrow HE = \frac{4}{9}NB'$.

Mặt khác: $B'N \perp A'C' \Rightarrow HE \perp A'C'$. Do đó HE, HC, HC' đôi một vuông góc hay tứ diện $HCEC'$ là tứ diện vuông.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của H trên mặt phẳng (CEC'), ta có:

$$\frac{1}{HK^2}=\frac{1}{HC^2}+\frac{1}{HE^2}+\frac{1}{HC'^2}\ (1)$$

$$HC'=\frac{1}{3}A'C'=\frac{2a}{3};$$

$$HC=\sqrt{CC'^2-HC'^2}=\frac{a\sqrt{14}}{3};$$

$$\frac{1}{NB'^2}=\frac{1}{A'B'^2}+\frac{1}{B'C'^2}=\frac{4}{3a^2}\Leftrightarrow NB'=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow HE=\frac{4}{9}NB'=\frac{2a\sqrt{3}}{9}.$$

Thay các đại lượng trên vào (1), ta có:

$$\frac{1}{HK^2}=\frac{27}{4a^2}+\frac{9}{14a^2}+\frac{9}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow HK=\frac{a\sqrt{14}}{3\sqrt{15}}.$$

Vì $AA' \parallel CC' \Rightarrow AA' \parallel (BCC'B')$ nên:

$$d(AA';BC)=d(AA';(BCC'B'))=d(A';(BCC'B')).$$

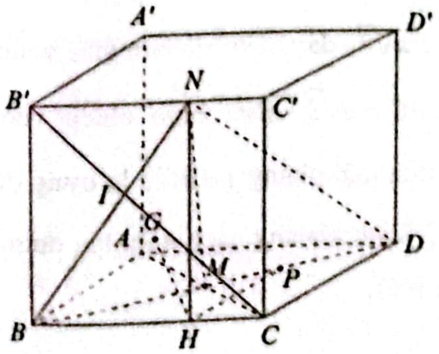
Mà $A'C'=3HC'$ nên:

$$d(A';(BCC'B'))=3d(H;(BCC'B'))=3HK$$
$$=\frac{a\sqrt{14}}{\sqrt{15}}=\frac{a\sqrt{210}}{15}.$$

Vậy $d(AA';BC)=\dfrac{a\sqrt{210}}{15}$.

Thí dụ 3. *Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $4a$. Gọi M là trung điểm của AC và N là điểm nằm trên cạnh $B'C'$ sao cho $C'N=\frac{1}{3}B'C'$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và $B'D'$.*

Lời giải.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của N trên BC $(H \in BC)$. Gọi G là hình chiếu vuông góc của H trên mặt phẳng (NBD); $I=B'C \cap BN$.

Từ H kẻ $HP \parallel CD$, ta có:

$$B'N \parallel BC \Rightarrow \frac{B'I}{IC}=\frac{B'N}{BC}=\frac{2}{3};$$

$$d(B'D';MN)=d(B'D';(NBD))$$
$$=d(B';(NBD))=\frac{B'I}{IC}d(C;(NBD))$$
$$=\frac{2}{3}d(C;(NBD))=\frac{2}{3}\frac{BC}{BH}d(H;(NBD))$$
$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}d(H;(NBD))=d(H;(NBD))=HG;$$

$$\frac{HP}{CD}=\frac{BH}{BC}=\frac{2}{3}\Rightarrow HP=\frac{2}{3}CD=\frac{8a}{3}.$$

Do HN, HB, HP đôi một vuông góc nên

$$\frac{1}{HG^2}=\frac{1}{HN^2}+\frac{1}{HB^2}+\frac{1}{HP^2}$$
$$=\frac{1}{(4a)^2}+\frac{1}{\left(\frac{8a}{3}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{8a}{3}\right)^2}=\frac{11}{32a^2}$$

$$\Rightarrow HG=\frac{4a\sqrt{22}}{11}.$$

Vậy $d(B'D';MN)=HG=\dfrac{4a\sqrt{22}}{11}$.

Thí dụ 4. *Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi K là trung điểm của DD'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CK, $A'D$.*

Lời giải.

Kéo dài CK cắt $C'D'$ tại E, ta dễ dàng có D' là trung điểm của $C'E \Rightarrow C'E=2a$.

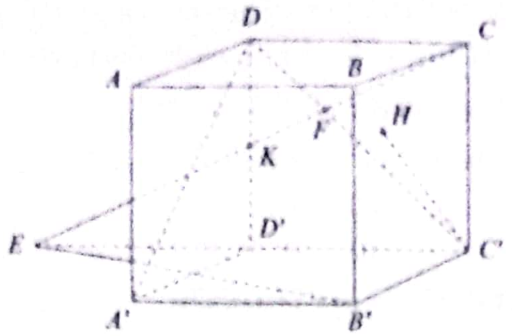
Vì $A'D \parallel B'C \Rightarrow A'D \parallel (CEB')$. Do đó:

$$d(A'D;CK)=d(A'D;(CEB'))=d(D;(CEB')).$$

Gọi F là giao điểm của DC' và CK.

$$\text{Vì } DK \parallel CC' \Rightarrow \frac{DF}{FC'}=\frac{DK}{CC'}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow DF=\frac{1}{2}FC'.$$



Suy ra $d\left(D;(CEB')\right)=\frac{1}{2}d\left(C';(CEB')\right)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của C' trên mặt phẳng (CEB'), ta có $d\left(C';(CEB')\right)=C'H$.

Do $C'C, C'E, C'B'$ đôi một vuông góc nên

$$\frac{1}{C'H^2}=\frac{1}{C'C^2}+\frac{1}{C'E^2}+\frac{1}{C'B'^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{9}{4a^2}$$

$\Leftrightarrow C'H=\frac{2a}{3}$.

Vậy $d(A'D;CK)=\frac{1}{2}C'H=\frac{a}{3}$.

BÀI TẬP ÁP DỤNG

1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, $AB=AD=2a$, $CD=a$, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 30^0. Gọi I là trung điểm của AD. Biết hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, tính theo a khoảng cách h từ I đến (SBC).

2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a. Biết hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{MD}$. Trên cạnh CD lấy các điểm I, N sao cho $\widehat{ABM}=\widehat{MBI}$ và MN vuông góc với BI. Biết góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60^0. Tính khoảng cách từ N đến mặt phẳng (SBC).

3. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của AD. Tính khoảng cách từ A_1 đến mặt phẳng (C_1D_1M).

4. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=a$, $AD=a\sqrt{2}$, $AA'=a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ điểm B' tới mặt phẳng (ACD').

5. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có mặt đáy $(ABCD)$ là một hình chữ nhật. Mặt bên (SAB) là tam giác cân tại S và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $AB=2a$, $BC=a$ và góc tạo bởi cạnh bên SC và mặt đáy $(ABCD)$ là $45°$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA, BD.

6. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $\overrightarrow{HA}=-2\overrightarrow{HB}$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính khoảng cách hai đường thẳng SA và BC theo a.

7. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm của BC. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng $B'C'$ và AA' biết góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(A'B'C')$ bằng 60^0.

8. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $a\sqrt{7}$, đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB=a, AC=a\sqrt{3}$. Biết hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và $B'C'$.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 108

PROBLEM. *Given two events A and B with $P(A)=0.45$; $P(B)=0.75$, and $P(A\cap\overline{B})=0.3$. Compute $P(A|B)$.*

Solution. It is clear that

$$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B}).$$

Hence $P(A\cap B)=P(A)-P(A\cap\overline{B})$

$$=0.45-0.3=0.15.$$

We have: $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{0.15}{0.75}=\dfrac{1}{5}$.

***Remark*:** This exercise is selected, adapted and translated from the sample HSA test paper 8-2024 (Vietnam National University Hanoi)

TỪ VỰNG

event : *biến cố*

NGUYEN PHU HOANG LAN
(*University of Education, VNU, Hanoi*)

BÀI DỊCH SỐ 106

BÀI TOÁN. *Hàm số f được xác định bởi $f=a.\sin(bx+c)+d$, với a, b, c và d là các hằng số. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, điểm (2; 2) biểu thị điểm cực tiểu và điểm (4; 4) là điểm cực đại kế tiếp nhau trên đồ thị của hàm số f. Giá trị của b bằng bao nhiêu?*

Lời giải. Hàm *f* có dạng là hàm số sin và hiệu hai hoành độ giữa hai điểm cực trị gần nhau nhất bằng 2. Do đó hàm số *f* có chu kỳ là 4.

Từ đó $\dfrac{2\pi}{b}=4$ và vì vậy $b=\dfrac{\pi}{2}$.

***Lưu ý*:** Bài toán này được sưu tầm từ một bài kiểm tra thực hành AP - precalculus.

***Nhận xét*.** Kỳ này bạn *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định** có bài dịch tốt. Xin hoan nghênh bạn.

HỒ HẢI (*Hà Nội*)

****

SAI LẦM ... (*Tiếp theo trang 47*)

Khi đó bán kính đường tròn (*C*) là:

$$r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{3^2-3}$$
$$=\sqrt{6}.$$

Gọi J là tâm mặt cầu cần tìm, khi đó:

$$JH=\sqrt{JA^2-r^2}=\sqrt{9^2-6}$$
$$=5\sqrt{3}.$$

Ta có:

$$IJ=HJ+IH=5\sqrt{3}+\sqrt{3}$$
$$=6\sqrt{3}.$$

$$J\in(IH)\Rightarrow J(m;-2+m;1+m)$$
$$\Rightarrow\overrightarrow{IJ}(m;m;m).$$

Do đó:

$$IJ^2=(6\sqrt{3})^2\Leftrightarrow 3m^2=108\Leftrightarrow m=\pm6$$
$$\Rightarrow J_1(6;4;7);\ J_2(-6;-8;-5).$$

Phương trình các mặt cầu cần tìm là:

$$(x-6)^2+(y-4)^2+(z-7)^2=81;$$
$$(x+6)^2+(y+8)^2+(z+5)^2=81.$$

Theo bạn lời giải trên sai ở đâu nhỉ?

NGUYỄN THANH GIANG
(*GV trường THPT chuyên Hưng Yên*)

NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN

BÀI TOÁN 87. *Cho các số thực x, y thỏa mãn $x^2+y^2-xy=4$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x^2+y^2$.*

Lời giải.

Cách 1. Nếu $y=0 \Rightarrow x^2=4$ thì $P=4$.

Ta xét trường hợp $y \neq 0$. Lúc này

$$\frac{P}{4}=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2-xy} \Leftrightarrow \frac{P}{4}=\frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1-\frac{x}{y}}.$$

Đặt $t=\frac{x}{y}$ ta được : $\frac{P}{4}=\frac{t^2+1}{t^2+1-t}$

$$\Leftrightarrow P\left(t^2+1-t\right)=4\left(t^2+1\right)$$

$$\Leftrightarrow (P-4)t^2-Pt+(P-4)=0 \text{ (1).}$$

- Nếu $P=4$ thì phương trình (1) có nghiệm $t=0$.
- Nếu $P \neq 4$ thì phương trình (1) là phương trình bậc hai ẩn t, phương trình này có nghiệm khi

$$\Delta=P^2-4(P-4)(P-4)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow P^2-4\left(P^2-8P+16\right)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3P^2-32P+64\leq 0 \Leftrightarrow \frac{8}{3}\leq P\leq 8.$$

Như vậy, phương trình (1) ẩn t có nghiệm khi và chỉ khi $\frac{8}{3}\leq P\leq 8$.

Kết luận: $\min P=\frac{8}{3}$, đạt được khi

$$\begin{cases} x^2+y^2-xy=4 \\ x^2+y^2=\frac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=-\frac{4}{3} \\ x^2+y^2=\frac{8}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy=-\frac{4}{3} \\ (x+y)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{2}{\sqrt{3}}, y=-\frac{2}{\sqrt{3}} \\ x=-\frac{2}{\sqrt{3}}, y=\frac{2}{\sqrt{3}} \end{array}\right..$$

$\max P=8$, đạt được khi $\begin{cases} x^2+y^2-xy=4 \\ x^2+y^2=8 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy=4 \\ x^2+y^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=4 \\ (x-y)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=2 \\ x=y=-2 \end{array}\right..$$

Cách 2. Đặt $t=x+y$ thì từ $x^2+y^2-xy=4$ ta có $xy=\frac{t^2-4}{3}$. Vì $(x+y)^2\geq 4xy$ nên

$$t^2\geq 4.\frac{t^2-4}{3} \Leftrightarrow t^2\leq 16.$$

Lúc này: $P=x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

$$=t^2-2.\frac{t^2-4}{3}=\frac{t^2+8}{3}.$$

Do $0\leq t^2\leq 16$ nên $\frac{8}{3}\leq P=\frac{t^2+8}{3}\leq 8$.

Tương tự như cách 1, ta cũng kết luận được:

$\min P=\frac{8}{3}$, đạt được khi

$$\begin{cases} x^2+y^2-xy=4 \\ x^2+y^2=\frac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{2}{\sqrt{3}}, y=-\frac{2}{\sqrt{3}} \\ x=-\frac{2}{\sqrt{3}}, y=\frac{2}{\sqrt{3}} \end{array}\right..$$

$\max P=8$, đạt được khi $\left[\begin{array}{l} x=y=2 \\ x=y=-2 \end{array}\right.$.

Cách 3. Ta chứng minh $x^2+y^2\leq 8$. Thật vậy

$$x^2+y^2\leq 8 \Leftrightarrow x^2+y^2\leq 2\left(x^2+y^2-xy\right)$$

(do $x^2+y^2-xy=4$)

$$\Leftrightarrow (x-y)^2\geq 0 \text{ (luôn đúng).}$$

Vậy $\max P=8$, đạt được khi $\begin{cases} x^2+y^2-xy=4 \\ x^2+y^2=8 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy=4 \\ x^2+y^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=4 \\ (x-y)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=2 \\ x=y=-2 \end{array}\right..$$

* Ta chứng minh $x^2+y^2\geq \frac{8}{3}$. Thật vậy

$$x^2+y^2\ge\frac{8}{3}\Leftrightarrow x^2+y^2\ge\frac{2}{3}\left(x^2+y^2-xy\right)$$

(do $x^2+y^2-xy=4$)

$\Leftrightarrow (x+y)^2\ge 0$ (luôn đúng).

Vậy $\min P=\frac{8}{3}$, đạt được khi $\begin{cases}x^2+y^2-xy=4\\ x^2+y^2=\frac{8}{3}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}xy=-\frac{4}{3}\\ x^2+y^2=\frac{8}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy=-\frac{4}{3}\\ (x+y)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{2}{\sqrt3},y=-\frac{2}{\sqrt3}\\ x=-\frac{2}{\sqrt3},y=\frac{2}{\sqrt3}\end{array}\right..$$

Cách 4. Ta sẽ tìm điều kiện của P để hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2=P\\ x^2+y^2-xy=4\end{cases}$ (I) có nghiệm.

Đặt $u=x+y, v=xy$ thì hệ (I) trở thành:

$$\begin{cases}u^2-2v=P\\ u^2-3v=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u^2=3P-8\\ v=P-4\end{cases}\quad\text{(II)}.$$

Hệ (I) có nghiệm $(x;y)$ khi và chỉ khi hệ (II) có nghiệm $(u;v)$ thỏa mãn $u^2\ge 4v$, tức là:

$$\begin{cases}3P-8\ge 4(P-4)\\ 3P-8\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\frac{8}{3}\le P\le 8.$$

Vậy $\max P=8$, đạt được khi $\begin{cases}x^2+y^2-xy=4\\ x^2+y^2=8\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}xy=4\\ x^2+y^2=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy=4\\ (x-y)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y=2\\ x=y=-2\end{array}\right..$$

Và $\min P=\frac{8}{3}$, đạt được khi $\begin{cases}x^2+y^2-xy=4\\ x^2+y^2=\frac{8}{3}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}xy=-\frac{4}{3}\\ x^2+y^2=\frac{8}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy=-\frac{4}{3}\\ (x+y)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{2}{\sqrt3},y=-\frac{2}{\sqrt3}\\ x=-\frac{2}{\sqrt3},y=\frac{2}{\sqrt3}\end{array}\right..$$

Cách 5. Vì $x^2+y^2-xy=4$ nên

$$P=x^2+y^2=xy+4\le\frac{x^2+y^2}{2}+4=\frac{1}{2}P+4,$$

suy ra $P\le 8$. Đẳng thức $P=8$ xảy ra khi

$$\begin{cases}x^2+y^2-xy=4\\ x^2+y^2=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy=4\\ x^2+y^2=8\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}xy=4\\ (x-y)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y=2\\ x=y=-2\end{array}\right..$$

Do đó $\max P=8$, đạt được khi $\left[\begin{array}{l}x=y=2\\ x=y=-2\end{array}\right..$

Mặt khác, ta có $P=4+xy\ge 4-\frac{x^2+y^2}{2}=4-\frac{1}{2}P$ hay $P\ge\frac{8}{3}$. Đẳng thức $P=\frac{8}{3}$ xảy ra khi

$$\begin{cases}x^2+y^2-xy=4\\ x^2+y^2=\frac{8}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy=-\frac{4}{3}\\ x^2+y^2=\frac{8}{3}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}xy=-\frac{4}{3}\\ (x+y)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{2}{\sqrt3},y=-\frac{2}{\sqrt3}\\ x=-\frac{2}{\sqrt3},y=\frac{2}{\sqrt3}\end{array}\right..$$

Vậy $\min P=\frac{8}{3}$, đạt được khi $\left[\begin{array}{l}x=\frac{2}{\sqrt3},y=-\frac{2}{\sqrt3}\\ x=-\frac{2}{\sqrt3},y=\frac{2}{\sqrt3}\end{array}\right..$

NGUYỄN VĂN XÁ
(*GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh*)

Nhận xét. Kỳ này các các bạn *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định**, *Huỳnh Trịnh Vĩnh Phúc*, 11A1, TH, THCS&THPT Lê Thánh Tông, Q. Tân Phú, **TP. Hồ Chí Minh**, cũng đóng góp một số cách giải tương tự như các cách giải trên. Xin hoan nghênh hai bạn.

LÊ MAI (Hà Nội).

Mời các bạn gửi lời giải BÀI TOÁN 89 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 31/10/2024.

BÀI TOÁN 89. *Cho tam giác ABC cân tại A với H là trung điểm cạnh BC. Hình chiếu vuông góc của H trên cạnh AC là D. Gọi E là trung điểm của HD. Chứng minh rằng AE vuông góc với BD.*

LA ĐẠI CƯƠNG
(*GV THPT Cam Lộ, Quảng Trị*)

BÀI TOÁN 95 (AMC, 2020). *Cho các số nguyên a, b, c đều lớn hơn 1 thỏa mãn*

$$\sqrt[a]{N\sqrt[b]{N\sqrt[c]{N}}}=\sqrt[36]{N^{25}}$$

với mỗi $N>1$. Giá trị của b là bao nhiêu?

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5 **E.** 6.

Lời giải. Viết lại vế trái của phương trình ban đầu:

$$\sqrt[a]{N\sqrt[b]{N\sqrt[c]{N}}}=\left(\left(N^{\frac{1}{c}}.N^{1}\right)^{\frac{1}{b}}.N^{1}\right)^{\frac{1}{a}}$$

$$=\left(\left(N^{\frac{1}{c}+1}\right)^{\frac{1}{b}}.N^{1}\right)^{\frac{1}{a}}=\left(N^{\frac{1+c+bc}{bc}}\right)^{\frac{1}{a}}$$

$$=N^{\frac{1+c+bc}{abc}}.$$

Suy ra: $N^{\frac{1+c+bc}{abc}}=N^{\frac{25}{36}}$. Do $N>1$ nên ta có:

$$\frac{1+c+bc}{abc}=\frac{25}{36}\Leftrightarrow\frac{1+c+bc}{bc}=a.\frac{25}{36}\quad(1).$$

Vì b, c là các số nguyên lớn hơn 1 nên

$$1+c+bc<2bc$$

$$\Leftrightarrow\frac{1+c+bc}{bc}<2.$$

Do đó từ (1) ta suy ra:

$$a.\frac{25}{36}<2\Leftrightarrow a<\frac{72}{25}\approx 2{,}8.$$

Vậy: $1<a<3\Rightarrow a=2$.

Với $a=2$ thì (1) trở thành:

$$18(bc+c+1)=25bc\Leftrightarrow 18(c+1)=7bc\quad(2).$$

Do $(c, c+1)=1$ và $(7, 18)=1$ nên từ (2) suy ra:

$$c|18(c+1)\Rightarrow c|18\qquad(3)$$

và

$$7|18(c+1)\Rightarrow 7|c+1\quad(4).$$

Từ (3) và (4) suy ra $c=6$.

Thay $a=2$, $c=6$ vào (1) ta được:

$$\frac{1+6+6b}{6b}=2.\frac{25}{36}$$

$$\Leftrightarrow 3(1+6+6b)=25b$$

$$\Leftrightarrow b=3.$$

Kết luận: $b=3$.

Nhận xét. Rất tiếc là Tòa soạn không nhận được lời giải nào cho bài toán này.

NHƯ HOÀNG

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 31.10.2024.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

BÀI TOÁN 97. *Cho hệ phương trình của các ẩn số $x_1, x_2, \dots, x_n$:*

$$\begin{cases}ax_1^2+bx_1+c=x_2\\ax_2^2+bx_2+c=x_3\\\dots\dots\dots\dots\\ax_{n-1}^2+bx_{n-1}+c=x_n\\ax_n^2+bx_n+c=x_1\end{cases},$$

trong đó a, b, c là những số thực và $a\neq 0$. Chứng minh rằng:

a) Hệ không có nghiệm thực nếu

$$(b-1)^2-4ac<0.$$

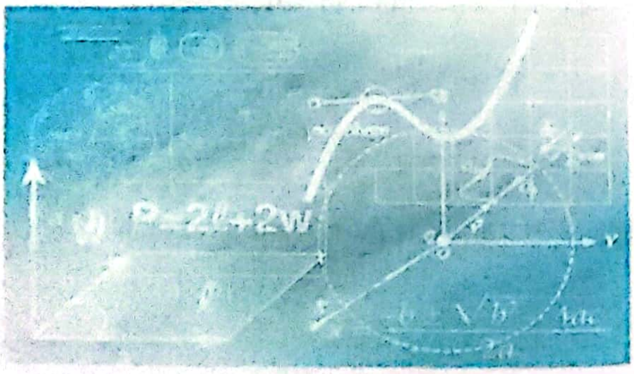
b) Hệ có nghiệm thực duy nhất nếu

$$(b-1)^2-4ac=0.$$

a) Hệ không có nghiệm thực nếu

$$(b-1)^2-4ac>0.$$

KHÁNH HỮU (*Hà Nội*)



GIẢI ĐÁP: BÀI TOÁN SỐ PHỨC

(*Đề đăng trên TH&TT số 563, tháng 5 năm 2024*)

Phân tích sai lầm. Lỗi sai của bạn *Hoa* là việc đánh giá $|z|$ chỉ cho chúng ta phạm vi nhỏ nhất và lớn nhất của $|z|$, chứ không thể chỉ rõ tập hợp của z. Do đó khẳng định luôn tập hợp của z là sai. Dưới đây là lời giải đúng.

Lời giải đúng. Biến đổi giả thiết

$$|z^2-3-4i|=2|z|$$
$$\Leftrightarrow |z^2-(3+4i)|=2|z|$$
$$\Leftrightarrow |z^2-(2+i)^2|=2|z|$$
$$\Leftrightarrow |z-2-i|\cdot|z+2+i|=2|z|.$$

Gọi $A(2,1)$, $B(-2,-1)$, $O(0,0)$ (chú ý O là trung điểm AB). Khi đó giả thiết trở thành $zA.zB=2|z|$, với ký hiệu zA, zB là khoảng cách từ z đến A, B.

Ta có: $zA.zB=2|z| \Leftrightarrow zA^2.zB^2=4|z|^2$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{zA}^2.\overrightarrow{zB}^2=4|z|^2 \Leftrightarrow \left[\overrightarrow{zA}.\overrightarrow{zB}\right]^2=4|z|^2$$
$$\Leftrightarrow \left[(\overrightarrow{zO}+\overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{zO}+\overrightarrow{OB})\right]^2=4|z|^2$$
$$\Leftrightarrow \left[(\overrightarrow{zO}+\overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{zO}-\overrightarrow{OA})\right]^2=4|z|^2$$
$$\Leftrightarrow \left[\overrightarrow{zO}^2-\overrightarrow{OA}^2\right]^2=4|z|^2$$
$$\Leftrightarrow \left(|z|^2-5\right)^2=4|z|^2$$
$$\Leftrightarrow |z|^4-14|z|^2+25=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|z|^2=7+2\sqrt{6}\\ |z|^2=7-\sqrt{6}\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|z|=\sqrt{6}+1\\ |z|=\sqrt{6}-1\end{array}\right..$$

Như vậy, tập hợp các số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán là 2 đường tròn:

(C_1) tâm $O(0,0)$, bán kính $R_1=\sqrt{6}+1$

và (C_2) tâm $O(0,0)$, bán kính $R_2=\sqrt{6}-1$.

Nhận xét. Rất tiếc là không có bạn nào phát hiện được sai lầm trong lời giải bài này.

KIHIVI

SAI Ở ĐÂU NHỈ ?

Bài toán. *Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho mặt phẳng (P): $x+y+z-2=0$ và mặt cầu (S): $x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=9$ cắt nhau theo đường tròn (C). Viết phương trình mặt cầu (S') có bán kính bằng 9 và đi qua đường tròn (C).*

Một học sinh giải như sau:

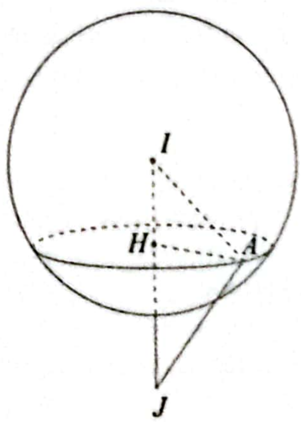
Mặt cầu (S) có tâm $I(0;-2;1)$, bán kính $R=3$. Gọi H là tâm đường tròn (C). Mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n}(1;1;1)$. Đường thẳng IH đi qua $I(0;-2;1)$ nhận $\vec{n}(1;1;1)$ làm VTCP có phương trình:

$$\frac{x}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{1}.$$

Do $(P)\cap(IH)=\{H\}\Rightarrow H(t;-2+t;1+t)\in(P)$

$$\Leftrightarrow t+t-2+t+1-2=0 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow H(1;-1;2).$$

Ta có: $d=d(I;(P))=\dfrac{|-2+1-2|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\sqrt{3}.$



(*Xem tiếp trang 43*)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964

Số 567 (9.2024)

Tòa soạn : 187B, Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội

ĐT Biên tập: 024.35121607,

ĐT Phát hành: 024.35142649, 024.35682701

Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TRONG SỐ NÀY

1 **Dành cho Trung học Cơ sở**
For Lower Secondary School
Ngô Văn Thái – Một đẳng thức cần nhớ.

9 Hướng dẫn giải đề thi tuyển sinh vào lớp 10, Trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định, năm học 2024 - 2025.

15 Đề thi tuyển sinh vào lớp 10, THPT chuyên TP. Hồ Chí Minh, năm học 2024 - 2025.

16 **Diễn đàn dạy học toán**
Nguyễn Thanh Hải – Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm có giá trị tuyệt đối chứa tham số.

21 **Đề ra kỳ này** *Problems in This Issue*
T1/567, ..., T12/567, L1/567, L2/567.

24 **Giải bài kì trước**
Solutions to Previous Problems
T1/563, ..., T12/563, L1/563, L2/563.

33 **Phương pháp giải toán**
Phạm Duy Khánh – Nguyễn Thị Thùy Linh – Ứng dụng một tính chất của tứ diện vuông để tính khoảng cách giữa các yếu tố trong không gian.

43 **Tiếng Anh qua các bài toán** – Bài số 108 – Bài dịch số 106.

44 **Nhiều cách giải cho một bài toán** – Giải bài toán 87 – Đề bài toán 89.

46 **Du lịch thế giới qua các bài toán hay** – Giải bài toán 95. Đề bài toán 97.

47 **Sai lầm ở đâu?**

Biên tập: LÊ MAI, NHƯ HOÀNG

Trị sự, phát hành: HOÀNG THỊ KIM PHƯỢNG, TRẦN THỊ MINH HIỀN

Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG

Thiết kế, chế bản: MINH HÒA

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Bộ đóng tập

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ HÀNG NĂM

Năm 2010
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 99.000 đồng

Năm 2012
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 152.000 đồng

Năm 2014
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 185.000 đồng

Năm 2015
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2016
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2017
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2018
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2019
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2020
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 210.000 đồng

Năm 2021
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 240.000 đồng

Năm 2022
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 260.000 đồng

Năm 2023
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 260.000 đồng

Mọi chi tiết xin liên hệ:
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
Địa chỉ: 187B Giảng Võ, Hà Nội
- Điện thoại: 024.35121606 - 024.35121607
- Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

THƯ NGỎ

Bạn đọc thân mến!

Trong 60 năm qua, Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ không ngừng phát triển và đã trở thành người bạn thân thiết của nhiều thế hệ học sinh, giáo viên và bạn đọc yêu toán trên cả nước. Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ đã nhận nhiều Giấy khen, Huân huy chương và những phần thưởng cao quý khác mà Đảng và Nhà nước trao tặng. Điều này có được là nhờ công sức của các nhà toán học, các nhà sư phạm, các ủy viên hội đồng biên tập, các công tác viên và bạn đọc yêu toán trên cả nước. Thay mặt Ban biên tập, chúng tôi xin cảm ơn bạn đọc gần xa, các nhà khoa học và các cộng tác viên về những đóng góp to lớn đó.

Để chào mừng 60 năm thành lập và phát triển Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, từ tháng 4.2024, Ban biên tập sẽ mở chuyên mục: ***Những hồi ức, những kỷ niệm về Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ***. Nội dung các bài trong chuyên mục này sẽ viết về những hồi ức, những kỷ niệm, gắn bó của bạn đọc với Toán học và Tuổi trẻ; những ảnh hưởng, đóng góp của Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ đối với phong trào học toán, giải toán,... trên toàn quốc.

Bài viết có thể viết trên giấy hoặc đánh máy vi tính (nên bằng chương trình soạn thảo văn bản word). Trên bài viết cần ghi rõ: Họ tên, địa chỉ, số điện thoại. Bài viết không quá 4 trang đánh máy.

Bài viết có thể gửi về Tòa soạn:

- Gửi file word theo địa chỉ email: *toanhoctuoitrevietnam@gmail.com*
- Gửi bài theo đường Bưu điện. Phong bì có dán tem, gửi về địa chỉ: *Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, 187B Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội.*
- Hoặc đến Toà soạn Tạp chí gửi trực tiếp.

Ban biên tập mong muốn nhận được các bài viết từ bạn đọc. Trân trọng cám ơn!

TH&TT

CUỘC THI VIẾT CHUYÊN ĐỀ TOÁN CHÀO MỪNG 60 NĂM TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Để chào mừng 60 năm thành lập và phát triển Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, Ban biên tập tổ chức cuộc thi viết chuyên đề Toán cho bậc THCS và THPT.

• **Đối tượng dự thi:** Giáo viên đã hoặc đang dạy ở bậc THCS, THPT, Giảng viên, Sinh viên ở các trường Đại học, Cao đẳng và bạn đọc yêu thích Toán.

• **Nội dung bài dự thi:** Là các chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi toán; các chuyên đề ôn tập, ôn thi cuối cấp; những tìm tòi, sáng tạo trong việc dạy học Toán (bậc THCS, THPT).

• **Thể lệ cuộc thi:** Mỗi người tham gia cuộc thi được gửi không quá 3 bài dự thi khác nhau. Các bài dự thi có thể là các sáng kiến kinh nghiệm đã đăng ký, hoặc đạt giải ở Trường, Phòng, Sở,... nhưng chưa từng được xuất bản thành sách, báo, tạp chí và cũng chưa tham gia cuộc thi nào khác.

Kết quả cuộc thi sẽ được công bố trên TH&TT tháng 11 năm 2024 (Số 569). Các bài hay có thể được chọn đăng trên Tạp chí hoặc in thành sách. Các tác giả được hưởng nhuận bút theo quy định của Tạp chí. Bài viết tham dự cuộc thi thuộc bản quyền của TH&TT.

• **Thời hạn gửi bài dự thi:** Trước ngày 15/10/2024.

• **Quy cách bài dự thi:** Bài dự thi được đánh máy vi tính, nên dùng chương trình soạn thảo văn bản word (có file). Trên mỗi bài dự thi ghi rõ: Họ và tên, địa chỉ Trường, xã (phường), huyện (quận), tỉnh (thành phố), số điện thoại. Bài dự thi không quá 15 trang đánh máy. Trên cùng của trang 1 mỗi bài dự thi ghi rõ:

Bài dự thi viết chuyên đề Toán chào mừng 60 năm TH&TT.

• **Cách gửi bài dự thi:** Bài dự thi gửi về Tòa soạn TH&TT bằng cách:

- Gửi file word theo địa chỉ email: *toanhoctuoitrevietnam@gmail.com*
- Gửi bài theo đường Bưu điện. Phong bì có dán tem, gửi về địa chỉ:

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ
187B Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội.

- Hoặc đến Toà soạn Tạp chí gửi trực tiếp.

• **Giải thưởng:** Những người đoạt giải sẽ được nhận Giấy chứng nhận và Tặng phẩm của Tạp chí.

TH&TT

Giấy phép XB số 534/GP-BTTTT cấp ngày 19.11.2020; Mã số: 8BT9M24
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 9 năm 2024
Giá: 18.000 đồng
Mười tám nghìn đồng