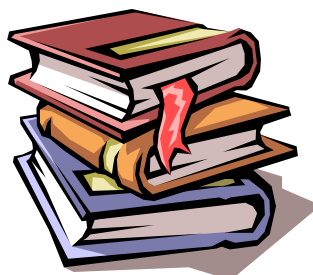


Tailieumontoan.com



Điện thoại (Zalo) 039.373.2038



CÁC CHUYÊN ĐỀ
LUYỆN THI VÀO LỚP 10 MÔN TOÁN

(Liệu hệ tài liệu word môn toán SĐT (zalo) : 039.373.2038)



Tài liệu sưu tầm, ngày 27 tháng 5 năm 2022

CHUYÊN ĐỀ TOÁN THI VÀO 10

CHỦ ĐỀ 1: RÚT GỌN BIỂU THỨC _ BÀI TOÁN PHỤ

A. LÝ THUYẾT

1. CÁC CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI CĂN THỨC

1. $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A \text{ nếu } A \geq 0 \\ -A \text{ nếu } A < 0 \end{cases}$
2. $\sqrt{AB} = \sqrt{A}\sqrt{B}$ (Với $A \geq 0; B \geq 0$)
3. $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$ (Với $A \geq 0; B > 0$)
4. $\sqrt{A^2B} = |A|\sqrt{B}$ (Với $B \geq 0$)
5. $A\sqrt{B} = \sqrt{A^2B}$ (Với $A \geq 0; B \geq 0$)
6. $A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2B}$ (Với $A < 0; B \geq 0$)
7. $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{1}{|B|}\sqrt{AB}$ (Với $A \geq 0; B > 0$)
8. $\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}$ (Với $B > 0$)
9. $\frac{C}{\sqrt{A} \pm B} = \frac{C(\sqrt{A} \pm B)}{A - B^2}$ (Với $A \geq 0; A \neq B^2$)
10. $\frac{C}{\sqrt{A} \pm \sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A} \pm \sqrt{B})}{A - B}$ (Với $A \geq 0; B \geq 0; A \neq B$)
11. $(\sqrt[3]{A})^3 = \sqrt[3]{A^3} = A$

2. XÁC ĐỊNH NHANH ĐIỀU KIỆN CỦA BIỂU THỨC

BIỂU THỨC - ĐKXĐ:		VÍ DỤ
1. $\sqrt{A}$	ĐKXĐ: $A \geq 0$	Ví dụ: $\sqrt{x-2018}$ ĐKXĐ: $x \geq 2018$

2.	$\frac{A}{B}$	ĐKXĐ: $B \neq 0$	Ví dụ: $\frac{x+2}{x-3}$	ĐKXĐ: $x \neq 3$
3.	$\frac{A}{\sqrt{B}}$	ĐKXĐ: $B > 0$	Ví dụ: $\frac{x+2}{\sqrt{x-3}}$	ĐKXĐ: $x > 3$
4.	$\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$	ĐKXĐ: $A \geq 0; B > 0$	Ví dụ: $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}}$	ĐKXĐ: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3$
5.	$\sqrt{\frac{A}{B}}$	ĐKXĐ: $\begin{cases} A \leq 0 \\ B < 0 \\ A \geq 0 \\ B > 0 \end{cases}$	Ví dụ: $\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$	ĐKXĐ: $\begin{cases} x+1 \leq 0 \\ x+2 < 0 \\ x+1 \geq 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x \geq 1 \end{cases}$
Cho $a > 0$ ta có:				
6.	$x^2 > a \Leftrightarrow \begin{cases} x > \sqrt{a} \\ x < -\sqrt{a} \end{cases}$	Ví dụ: $x^2 > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > \sqrt{a} \\ x < -\sqrt{a} \end{cases}$		
Cho $a > 0$ ta có:				
7.	$x^2 < a \Leftrightarrow -\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$	Ví dụ: $x^2 < 4 \Leftrightarrow -2 < x < 2$		

Chú ý 1: Giải phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối

- Dạng tổng quát 1: $|A(x)| = k \Leftrightarrow A(x) = \pm k$ ($k \geq 0$) với k là hằng số
- Dạng tổng quát 2: $|A(x)| = |B(x)| \Leftrightarrow A(x) = \pm B(x)$
- Dạng tổng quát 3: $|A(x)| = B(x)$
 - Trường hợp 1 Nếu $A(x) \geq 0$ thì phương trình trở thành $A(x) = B(x)$
 - Trường hợp 2 Nếu $A(x) < 0$ thì phương trình trở thành $A(x) = -B(x)$

Chú ý 2: Giải bất phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối

- Dạng tổng quát 1: $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow -g(x) < f(x) < g(x)$
1. Đặc biệt với hằng số $k > 0$ thì $|f(x)| < k \Leftrightarrow -k < f(x) < k$
- Dạng tổng quát 2: $|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) < -g(x) \end{cases}$
2. Đặc biệt với hằng số $k > 0$ thì $|f(x)| > k \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > k \\ f(x) < -k \end{cases}$
3. Dạng tổng quát 3:
- Trường hợp 1 $|f(x)| > |g(x)| \Leftrightarrow |f(x)|^2 > |g(x)|^2$
 - Trường hợp 2 $|f(x)| < |g(x)| \Leftrightarrow |f(x)|^2 < |g(x)|^2$

Chú ý 3: Bất đẳng thức Cô – Si cho hai số a, b không âm ta có:

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b$

Ví dụ: cho $x \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x + \frac{1}{x}$

Hướng dẫn

Vì $x \geq 1 > 0$. Áp dụng bất đẳng thức Cô – Si ta có $A = x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = 1$

Vậy $A_{\min} = 2 \Leftrightarrow x = 1$

Ví dụ: cho $x \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B = x + \frac{1}{x}$

Hướng dẫn

Cách giải sai: Vì $x \geq 2 > 0$. Áp dụng bất đẳng thức Cô – Si ta có $B = x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = 1$ (không thỏa mãn vì $x \geq 2$)

Vậy $B_{\min} = 2 \Leftrightarrow x = 1$

Gợi ý cách giải đúng:

Dự đoán $B_{\min}$ đạt được tại mức $x = 2$ ta có $B = nx + \frac{1}{x} + x - nx$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} nx = \frac{1}{x} \\ x = 2 \end{cases}$

Do đó ta có $B = \frac{3x}{4} + \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{x}\right)$ Áp dụng bất đẳng thức Cô – Si ta có

$$\frac{4}{x} + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{4} \cdot \frac{1}{x}} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \frac{x}{4} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = 2$ (vì $x \geq 2$)

Vậy $B_{\min} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = 2$

Ví dụ: cho $x \geq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C = x + \frac{1}{x}$

Hướng dẫn

Tương tự: Vì $x \geq 3 > 0$. Áp dụng bất đẳng thức Cô – Si ta có $C = x + \frac{1}{x} = \frac{8x}{9} + \left(\frac{x}{9} + \frac{1}{x}\right) \geq \frac{10}{3}$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = 3$

Ví dụ: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $D = \frac{x+12}{\sqrt{x+2}}$ với $x \geq 0$

Hướng dẫn

Gợi ý: Áp dụng bất đẳng thức Cô – Si ta có $D = \sqrt{x+2} + \frac{16}{\sqrt{x+2}} - 4 \geq 4$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = 4$

3. CÁC BƯỚC RÚT GỌN MỘT BIỂU THỨC

- Bước 1: Tìm điều kiện xác định
- Bước 2: Tìm mẫu thức chung, quy đồng mẫu thức, rút gọn tử, phân tích tử thành nhân tử
- Bước 3: Chia cả tử và mẫu cho nhân tử chung của tử và mẫu
- Bước 4: Khi nào phân thức tối giản thì ta hoàn thành việc rút gọn

Ví dụ: Rút gọn biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-1} \right) \cdot \left(\frac{x+1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}+1 \right)$

Hướng dẫn

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned}
 A &= \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-1} \right) \cdot \left(\frac{x+1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}+1 \right) \\
 A &= \left[\frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+1)^2} - \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right] \cdot \frac{x+1+\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}} \\
 A &= \left[\frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)^2(\sqrt{x}-1)} - \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)^2} \right] \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \\
 A &= \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)^2(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \\
 A &= \frac{2}{x-1}
 \end{aligned}$$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI**Các bài toán rút gọn, tính giá trị của biểu thức chứa số****Ví dụ 1:** Rút gọn biểu thức.

a) $A = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$

b) $B = \sqrt{4 - \sqrt{12}}$

c) $C = \sqrt{19 - 8\sqrt{3}}$

d) $D = \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$

Hướng dẫn

a) $A = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} = |\sqrt{5} - 1| = \sqrt{5} - 1$

b) $B = \sqrt{4 - \sqrt{12}} = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} = |\sqrt{3} - 1|$

c) $C = \sqrt{19 - 8\sqrt{3}} = \sqrt{(4 - \sqrt{3})^2} = |4 - \sqrt{3}| = 4 - \sqrt{3}$

d) $D = \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} = \sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2} = |\sqrt{3} - \sqrt{2}| = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

Ví dụ 2: Rút gọn biểu thức.

a) $A = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$

b) $B = \sqrt{8 - 2\sqrt{15}}$

c) $C = \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$

d) $D = \sqrt{7 + \sqrt{13}} - \sqrt{7 - \sqrt{13}}$

Hướng dẫn

a) $A = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} = \sqrt{3} + 1$

b) $B = \sqrt{8 - 2\sqrt{15}} = \sqrt{(\sqrt{15} - 1)^2} = \sqrt{15} - 1$

c) $C = \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} = \sqrt{5} - 2$

$$D = \sqrt{7 + \sqrt{13}} - \sqrt{7 - \sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{14 + 2\sqrt{13}} - \sqrt{14 - 2\sqrt{13}} \right)$$

$$\text{d) } = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{(\sqrt{13} + 1)^2} - \sqrt{(\sqrt{13} - 1)^2} \right] = \sqrt{2}$$

Ví dụ 3: Rút gọn biểu thức.

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1} + \frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \\ \text{b) } B &= \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}} \\ \text{c) } C &= \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} \\ \text{d) } D &= \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} \end{aligned}$$

Hướng dẫn

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1} + \frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = 2 \\ \text{b) } B &= \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}} = \frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{3} + \frac{4(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4} + (\sqrt{6}-\sqrt{5}) \\ &= \sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{5} = 2\sqrt{6} \\ \text{c) } C &= \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} \\ &= (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{4}-\sqrt{3}) + \dots + (\sqrt{100}-\sqrt{99}) = 9 \\ \text{d) } D &= \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} = \frac{5\sqrt{2}+7-5\sqrt{2}+7}{\sqrt[3]{(5\sqrt{2}+7)^2} + \sqrt[3]{(5\sqrt{2}+7)(5\sqrt{2}-7)} + \sqrt[3]{(5\sqrt{2}-7)^2}} = 2 \end{aligned}$$

Ví dụ 4: Rút gọn biểu thức.

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \sqrt{3-2\sqrt{2}} - \sqrt{6-4\sqrt{2}} & \text{b) } B &= \sqrt{9+4\sqrt{5}} - \sqrt{9-4\sqrt{5}} \\ \text{c) } C &= (\sqrt{14}+\sqrt{6})\sqrt{5-\sqrt{21}} & \text{d) } D &= \frac{3+3\sqrt{5}-\sqrt{2}-\sqrt{10}}{6+2\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Hướng dẫn

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \sqrt{3-2\sqrt{2}} - \sqrt{6-4\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1-2+\sqrt{2} = 2\sqrt{2}-3 \\ \text{b) } B &= \sqrt{9+4\sqrt{5}} - \sqrt{9-4\sqrt{5}} = \sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{5}+\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \\ \text{c) } C &= (\sqrt{14}+\sqrt{6})\sqrt{5-\sqrt{21}} = (\sqrt{7}+\sqrt{3})\sqrt{10-2\sqrt{21}} = (\sqrt{7}+\sqrt{3})\cdot(\sqrt{7}-\sqrt{3}) = 4 \end{aligned}$$

$$d) D = \frac{3+3\sqrt{5}-\sqrt{2}-\sqrt{10}}{6+2\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{5}+1)(3-\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+1)^2} = \frac{(3-\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)}{4}$$

Ví dụ 5: Rút gọn biểu thức.

$$a) A = \sqrt{4-2\sqrt{3}} + \sqrt{4+2\sqrt{3}}$$

$$c) C = \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$$

$$b) B = \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}$$

$$d) D = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$$

Hướng dẫn

$$a) A = \sqrt{4-2\sqrt{3}} + \sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{3}-1 + \sqrt{3}+1 = 2\sqrt{3}$$

$$b) B = \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{29-12\sqrt{5}}} = \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}} = \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{5}+1} = 1$$

$$c) C = \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} = \frac{14}{\sqrt[3]{(5\sqrt{2}+7)^2} + \sqrt[3]{(5\sqrt{2}+7)(5\sqrt{2}-7)} + \sqrt[3]{(5\sqrt{2}-7)^2}} = 2$$

$$d) D = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt[3]{(2+\sqrt{5})^2} - \sqrt[3]{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})} + \sqrt[3]{(2-\sqrt{5})^2}} = 1$$

Ví dụ 6: Rút gọn biểu thức.

$$a) A = \sqrt{7-4\sqrt{3}} - \sqrt{7+4\sqrt{3}}$$

b)

$$B = \sqrt{5-\sqrt{13+4\sqrt{3}}} + \sqrt{3+\sqrt{13+4\sqrt{3}}}$$

$$c) C = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$$

$$d) D = \sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$$

Hướng dẫn

$$a) A = \sqrt{7-4\sqrt{3}} - \sqrt{7+4\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3} - 2-\sqrt{3} = -2\sqrt{3}$$

$$b) B = \sqrt{5-\sqrt{13+4\sqrt{3}}} + \sqrt{3+\sqrt{13+4\sqrt{3}}} = \sqrt{5-2\sqrt{3}-1} + \sqrt{3+2\sqrt{3}+1} \\ = \sqrt{5-2\sqrt{3}-1} + \sqrt{3+2\sqrt{3}+1} = 2\sqrt{3}$$

$$c) C = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} \\ = \frac{40}{\sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})^2} - \sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})(20-14\sqrt{2})} + \sqrt[3]{(20-14\sqrt{2})^2}} = 4$$

$$d) D = \sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}} = \frac{18}{\sqrt[3]{(9+4\sqrt{5})^2} - \sqrt[3]{(9+4\sqrt{5})(9-4\sqrt{5})} + \sqrt[3]{(9-4\sqrt{5})^2}} = 3$$

Ví dụ 7: Rút gọn biểu thức.

a) $A = \sqrt{11+6\sqrt{2}} + \sqrt{11-6\sqrt{2}}$	b) $B = \sqrt{41-12\sqrt{5}} - \sqrt{41+12\sqrt{5}}$
c) $C = \sqrt{3-2\sqrt{2}} - \sqrt{6-4\sqrt{2}}$	d) $D = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3-(29-12\sqrt{5})}}$

Hướng dẫn

$$a) A = \sqrt{11+6\sqrt{2}} + \sqrt{11-6\sqrt{2}} = 3 + \sqrt{2} + 3 - \sqrt{2} = 6$$

$$b) B = \sqrt{41-12\sqrt{5}} - \sqrt{41+12\sqrt{5}} = 6 - \sqrt{5} - 6 - \sqrt{5} = -2\sqrt{5}$$

$$c) C = \sqrt{3-2\sqrt{2}} - \sqrt{6-4\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1 - 2 + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - 3$$

$$d) D = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3-(29-12\sqrt{5})}} = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3-2\sqrt{5}+3}} = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{5}+1} = 1$$

Các bài toán rút gọn chứa ẩn và bài toán phụ

Dạng 1: TÍNH GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC AKHI $x = x_0$.

Phương pháp: Rút gọn giá trị của biến (nếu cần) sau đó thay vào biểu thức đã cho rồi thay vào biểu thức đã cho rồi tính kết quả.

Ví dụ: Cho biểu thức $A = 2x + |x-4|$

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tính giá trị của A khi $x = 3$.

Hướng dẫn

$$a) \text{ Ta có } A = 2x + |x-4| = \begin{cases} 2x + x - 4 & \text{khi } x \geq 4 \\ 2x - x + 4 & \text{khi } x < 4 \end{cases} = \begin{cases} 3x - 4 & \text{khi } x \geq 4 \\ x + 4 & \text{khi } x < 4 \end{cases}$$

b) Khi $x = 3$ ta có: $A = 3 + 4 = 7$.

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{2-5\sqrt{x}}{4-x}$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tính giá trị của A khi $x = \frac{2}{2-\sqrt{3}}$.

Hướng dẫn

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{2-5\sqrt{x}-2x}{4-x} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2) + 2\sqrt{x}(\sqrt{x}+2) + 2-5\sqrt{x}-2x}{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})} \\ &= \frac{x-4\sqrt{x}+4}{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})} = \frac{2-\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} \text{ với ĐKXĐ: } x \geq 0; x \neq 2. \end{aligned}$$

$$\text{b) Ta có: } x = \frac{2}{2-\sqrt{3}} = 2(2+\sqrt{3}) = (\sqrt{3}+1)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{3}+1$$

$$\text{Khi } x = \frac{2}{2-\sqrt{3}}. \text{ Ta có: } A = \frac{2-\sqrt{3}-1}{2+\sqrt{3}+1} = \frac{1-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \frac{3-2\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Ví dụ: Cho biểu thức } A = \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x-1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-2\sqrt{x}+1} \right) : \frac{4x}{(x-1)^2}$$

a) Rút gọn A.

b) Tính giá trị của A biết $|x-5|=4$.

Hướng dẫn

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x-1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-2\sqrt{x}+1} \right) : \frac{4x}{(x-1)^2} = \left(\frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1) - (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)^2} \right) \cdot \frac{(x-1)^2}{4x} \\ &= \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)^2} \cdot \frac{(x-1)^2}{4x} = \frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}} \text{ với ĐKXĐ: } x > 0; x \neq 1. \end{aligned}$$

$$\text{b) Khi } |x-5|=4 \Leftrightarrow x-5=4 \Leftrightarrow x=9 \Rightarrow \sqrt{x}=3. \text{ Ta có } A = \frac{3+1}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Ví dụ: Cho biểu thức } A = \left(\frac{2\sqrt{xy}}{x-y} - \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2\sqrt{x}-2\sqrt{y}} \right) \cdot \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

a) Rút gọn A.

b) Tính giá trị của A biết $\frac{x}{y} = \frac{4}{9}$.

Hướng dẫn

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \left(\frac{2\sqrt{xy}}{x-y} - \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2\sqrt{x}-2\sqrt{y}} \right) \cdot \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \left(\frac{4\sqrt{xy}-x-2\sqrt{xy}-y}{2(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} \right) \cdot \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \\ &= \left(\frac{-(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} \right) \cdot \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \end{aligned}$$

$$\text{b) Ta có } \frac{1}{A} = -\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = -1 - \sqrt{\frac{y}{x}}$$

$$\text{Khi } \frac{x}{y} = \frac{4}{9} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{3}{2}. \text{ Ta có } \frac{1}{A} = -1 - \frac{3}{2} = \frac{-5}{2} \Leftrightarrow A = \frac{-2}{5}$$

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \left(\frac{x^2-2x}{2x^2+8} + \frac{2x^2}{x^3-2x^2+4x-8} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$.

a) Rút gọn A.

b) Tính giá trị của A biết $x = \sqrt{4-2\sqrt{3}}$.

Hướng dẫn

$$\text{a) } A = \left(\frac{(x^2-2x)(x-2)+4x^2}{2(x^2+4)(x-2)} \right) \cdot \left(\frac{x^2-x-2}{x^2} \right) = \left(\frac{x^3+4x}{2(x^2+4)(x-2)} \right) \cdot \left(\frac{(x+1)(x-2)}{x^2} \right) = \frac{x+1}{2x}$$

với ĐKXĐ: $x \neq 0; x \neq 2$.

$$\text{b) Khi } x = \sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{3}-1. \text{ Ta có } A = \frac{\sqrt{3}-1+1}{2\sqrt{3}-2} = \frac{3+\sqrt{3}}{5}$$

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \frac{x-\sqrt{x}}{x-9} + \frac{1}{\sqrt{x}+3} - \frac{1}{\sqrt{x}-3}$.

a) Rút gọn A.

b) Tính giá trị của A biết $x = \sqrt{11-6\sqrt{2}}$.

c) Tính giá trị của A biết $x = \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1}$.

d) Tính giá trị của A biết $x = 2\left(\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}+1}} - \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}-1}}\right)$.

Hướng dẫn

a) $A = \frac{x - \sqrt{x} + \sqrt{x} - 3 - \sqrt{x} - 3}{(x+3)(x-3)} = \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 3}$ với ĐKXĐ: $x \geq 0; x \neq 9$.

b) Khi $x = \sqrt{11-6\sqrt{2}} = \sqrt{(3-\sqrt{2})^2} \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3-\sqrt{2}$. Ta có: $A = \frac{5-\sqrt{2}}{6-\sqrt{2}} = \frac{28-\sqrt{2}}{34}$.

c) Khi $x = \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1$. Ta có: $A = \frac{3}{4}$.

d) Khi $x = 2\left(\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}+1}} - \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}-1}}\right) = 2\left(\sqrt{\sqrt{3}-1} - \sqrt{\sqrt{3}+1}\right) = \frac{2(\sqrt{3}-1-\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{\sqrt{3}-1}+\sqrt{\sqrt{3}+1})}$
 $= \frac{-4}{(\sqrt{\sqrt{3}-1}+\sqrt{\sqrt{3}+1})}$ (Loại)

Dạng 2: TÌM GIÁ TRỊ CỦA BIẾN KHI BIẾT GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC

Phương pháp:

- Nếu bài toán yêu cầu tìm x để $A = k$ thì ta biến đổi $A - k = 0$ tính kết quả, kết hợp với điều kiện để kết luận.

- Nếu bài toán yêu cầu tìm x để $A > k$ ($\geq, \leq, < k$). Ta đi đánh giá dựa vào điều kiện hoặc đi xét hiệu $A - k > 0$ với điều kiện của đề bài để tìm x.

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \frac{2-\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}$ với $x \geq 0, x \neq 4$. Tìm x để $A = -\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn

Để $A = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{x} - 4 = \sqrt{x} + 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 6 \Leftrightarrow x = 36$. (thỏa mãn điều kiện)

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+2} - \frac{2}{x+4\sqrt{x}+4} \right) : \left(\frac{2}{x-4} - \frac{1}{\sqrt{x}-2} \right)$.

a) Rút gọn A.

b) Tìm x để A = 0.

Hướng dẫn

$$a) A = \left(\frac{\sqrt{x}+2-2}{(\sqrt{x}+2)^2} \right) : \left(\frac{2-\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \right) = \left(\frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)^2} \right) : \left(-\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}} \right) = \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$$

với ĐKXĐ: $x > 0, x \neq 4$.

$$b) \text{ Để } A = 0 \Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4. \text{ (không thỏa mãn điều kiện)}$$

Ví dụ: Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \frac{x-2\sqrt{x}}{x-4}$ và $Q = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$ với $x \geq 0; x \neq 4$.

a) Rút gọn P.

b) Tìm x sao cho P = 2.

Hướng dẫn

$$a) P = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2) + \sqrt{x}(\sqrt{x}-2) - x + 2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}.$$

$$b) \text{ Để } P = 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow x = 16. \text{ (TMĐK)}$$

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \frac{1}{\sqrt{x}-3}$ với $x \geq 0, x \neq 9$. Tìm x để A > 1.

Hướng dẫn

$$\text{Để } A > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}-3} > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}-3} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}-3} < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}-4 > 0 \\ \sqrt{x}-3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 16 \\ x < 9 \end{cases} \Leftrightarrow 9 < x < 16 \text{ (TMĐK)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}-4 < 0 \\ \sqrt{x}-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 16 \\ x > 9 \end{cases}$$

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \frac{3\sqrt{x}-5}{2\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0$. Tìm x để $A < \frac{3}{2}$.

Hướng dẫn

Cách 1: Để $A < \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x}-5}{2\sqrt{x}+1} < \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{-13}{2(2\sqrt{x}+1)} < 0$ (luôn đúng)

Cách 2: Xét hiệu $A - \frac{3}{2} = \frac{-13}{2(2\sqrt{x}+1)} < 0$

Vậy $A < \frac{3}{2}$ với $x \geq 0$.

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+3} + \frac{3}{x\sqrt{x}-9\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} - \frac{3\sqrt{x}-3}{x+3\sqrt{x}} \right)$.

a) Rút gọn A.

b) Tìm x để $A > 1$.

Hướng dẫn

a) $A = \left(\frac{x-3\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \right) : \left(\frac{x-3\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)} \right) = \frac{1}{\sqrt{x}-3}$ với $x > 0, x \neq 9$.

b) Để $A > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}-3} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} < 0 \Leftrightarrow 4 < x < 9$. (TMĐK)

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \left(\frac{x^2-2x}{2x^2+8} + \frac{2x^2}{x^3-2x^2+4x-8} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$.

a) Rút gọn A.

b) Giải bất phương trình $A > \frac{1}{3}$.

Hướng dẫn

$$a) A = \left(\frac{(x^2 - 2x)(x - 2) + 4x^2}{2(x^2 + 4)(x - 2)} \right) \cdot \left(\frac{x^2 - x - 2}{x^2} \right) = \left(\frac{x^3 + 4x}{2(x^2 + 4)(x - 2)} \right) \cdot \left(\frac{(x + 1)(x - 2)}{x^2} \right) = \frac{x + 1}{2x}$$

với ĐKXD: $x \neq 0, x \neq 2$.

$$b) \text{ Để } A > \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{x - 3}{6x} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < 0 \end{cases} \text{ (TMĐK)}$$

Ví dụ: Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} - \frac{x - 2\sqrt{x}}{x - 4}$ và $Q = \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 2}$ với $x \geq 0; x \neq 4$.

a) Rút gọn P.

b) Tìm $M = P : Q$. Tìm giá trị của x để $M^2 < \frac{1}{4}$.

Hướng dẫn

$$a) P = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 2) + \sqrt{x}(\sqrt{x} - 2) - x + 2\sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2}.$$

$$b) M = P : Q = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2}$$

$$\text{Để } M^2 < \frac{1}{4} \Leftrightarrow 0 < M < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} + 2}{2(\sqrt{x} - 2)} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow x < 4.$$

Kết hợp với ĐKXD: $0 \leq x < 4$.

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 2}$ và $B = \frac{x - \sqrt{x} + 2}{x - \sqrt{x} - 2}$ với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 4$.

a) Tính giá trị biểu thức A khi $x = \sqrt{27 + 10\sqrt{2}} - \sqrt{18 + 8\sqrt{2}} + 8$

b) Rút gọn biểu thức $P = \frac{B}{A}$.

c) Tìm giá trị nguyên của x để $P\sqrt{x} \geq -\frac{3}{2}$.

Hướng dẫn

a) Khi $x = 5 + \sqrt{2} - 4 - \sqrt{2} + 8 = 9 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3$. Ta có $A = 2$

$$b) P = \frac{B}{A} = \frac{x - \sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 2)} \cdot \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1} = \frac{x - \sqrt{x} + 2}{x - 1}$$

$$c) \text{Đề } P\sqrt{x} \geq -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{x\sqrt{x} - x + 2\sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} + \frac{3}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x\sqrt{x} - 2x + 4\sqrt{x} + 3x - 3}{2(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} \geq 0$$

Ví dụ: Cho biểu thức: $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x} + 3} + \frac{3}{x\sqrt{x} - 9\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3} - \frac{3\sqrt{x} - 3}{x + 3\sqrt{x}} \right)$

a) Rút gọn.

b) Tìm x để $A > 1$

Hướng dẫn: ĐK: $x > 0; x \neq 9$

$$A = \left(\frac{1}{\sqrt{x} + 3} + \frac{3}{x\sqrt{x} - 9\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3} - \frac{3\sqrt{x} - 3}{x + 3\sqrt{x}} \right)$$

$$A = \left(\frac{1}{\sqrt{x} + 3} + \frac{3}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3} - \frac{3\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 3)} \right)$$

$$A = \frac{x - 3\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)} : \frac{x - 3\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 3)}$$

$$A = \frac{x - 3\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 3)}{x - 3\sqrt{x} + 3}$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{x} - 3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}-3} > 1 \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} > 0$$

b) Với $x > 0; x \neq 9$ để $A > 1$ thì $\Leftrightarrow \frac{4-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-\sqrt{x} > 0 \\ \sqrt{x}-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 16 \\ x > 9 \end{cases} \Leftrightarrow 9 < x < 16$$

Với $x > 0; x \neq 9$ để $A > 1$ thì $9 < x < 16$

Ví dụ: Cho biểu thức: $A = \left(\frac{x^2-2x}{2x^2+8} + \frac{2x^2}{x^3-2x^2+4x-8} \right) : \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$

a) Rút gọn.

b) Giải bất phương trình $A > \frac{1}{3}$

HDG:

ĐKXĐ: $x \neq 0; x \neq 2$

$$A = \left(\frac{x^2-2x}{2x^2+8} + \frac{2x^2}{x^3-2x^2+4x-8} \right) : \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$$

$$A = \left(\frac{x^2-2x}{2(x^2+4)} + \frac{2x^2}{(x^2+4)(x-2)} \right) \cdot \frac{x^2-x-2}{x^2}$$

$$A = \frac{x^3-2x^2-2x^2+4x+4x^2}{2(x^2+4)(x-2)} \cdot \frac{x^2-x-2}{x^2}$$

$$A = \frac{x(x^2+4)}{2(x^2+4)(x-2)} \cdot \frac{x^2-x-2}{x^2}$$

$$A = \frac{(x+1)(x-2)}{2x(x-2)} = \frac{x+1}{2x}$$

$$\frac{x+1}{2x} > \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{3x+3-2x}{6x} > 0 \Leftrightarrow \frac{x+3}{6x} > 0$$

$$\text{b) Với } x \neq 0; x \neq 2 \text{ để } A > \frac{1}{3} \text{ thì } \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -3 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x+3 < 0 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -3 \\ x < -3 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < -3 \end{cases}$$

Ví dụ: Cho biểu thức: $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \frac{x-2\sqrt{x}}{x-4}$ và $Q = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$ với $x \geq 0; x \neq 4$

a) Rút gọn P

b) Biết $M = P : Q$ Tìm giá trị của x để $M^2 < \frac{1}{4}$

HDG:

a) Với $x \geq 0; x \neq 4$ ta có:

$$P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \frac{x-2\sqrt{x}}{x-4} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$$

$$P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$$

$$\text{b) } M = P : Q = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} : \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$$

$$M^2 < \frac{1}{4} \Leftrightarrow (M - \frac{1}{2})(M + \frac{1}{2}) < 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{1}{2} \right) < 0$$

Đề Do $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \frac{1}{2} < 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{2(\sqrt{x}+2)} < 0 \Rightarrow \sqrt{x}-2 < 0$$

$$\Leftrightarrow x < 4$$

Với $x \geq 0; x \neq 4$ để $M^2 < \frac{1}{4}$ thì $0 \leq x < 4$

Ví dụ: Cho biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \frac{x-\sqrt{x}+2}{x-\sqrt{x}-2}$ với $x > 0; x \neq 1; x \neq 4$

a) Tính giá trị biểu thức A khi $x = \sqrt{27+10\sqrt{2}} - \sqrt{18+8\sqrt{2}} + 8$

b) Rút gọn biểu thức $P = \frac{B}{A}$

c) Tìm giá trị nguyên của x để $P\sqrt{x} \geq \frac{-3}{2}$

HDG:

a) Ta có: $x = \sqrt{27+10\sqrt{2}} - \sqrt{18+8\sqrt{2}} + 8 = \sqrt{(5+\sqrt{2})^2} - \sqrt{(3+\sqrt{2})^2} + 8$

$$x = 5 + \sqrt{2} - 3 - \sqrt{2} + 8 = 10 > 0$$

Thay $x = 10(TM)$ vào biểu thức A ta có:

$$A = \frac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}-2} = \frac{(\sqrt{10}-1)(\sqrt{10}+2)}{10-4} = \frac{9\sqrt{10}-2}{6}$$

b)
$$B = \frac{x-\sqrt{x}+2}{x-\sqrt{x}-2} = \frac{x-\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}$$

Có:
$$P = \frac{B}{A} = \frac{x-\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} : \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} = \frac{x-\sqrt{x}+2}{x-1}$$

DẠNG 3: SO SÁNH BIỂU THỨC A VỚI k HOẶC BIỂU THỨC B (k là hằng số)

Phương pháp: Nếu đề bài yêu cầu so sánh biểu thức A với hằng số A hay biểu thức khác là A thì ta đi xét hiệu A và xét dấu biểu thức này rồi kết luận.

Ví dụ: Cho biểu thức: $A = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{x+9\sqrt{x}}{x-9}$ và $B = \frac{x+5\sqrt{x}}{x-25}$ với $x \geq 0; x \neq 9; x \neq 25$

a) Rút gọn A

b) Hãy so sánh $P = \frac{A}{B}$ với 1

Hướng dẫn:

a) $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$

b) Ta có: $P = \frac{A}{B} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} : \frac{x+5\sqrt{x}}{x-25} = \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+3}$

Xét hiệu: $P-1 = \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+3} - 1 = \frac{-8}{\sqrt{x}+3} < 0$ với $x \geq 0; x \neq 9; x \neq 25$

Ví dụ: Cho biểu thức: $A = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}-1}{3-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0; x \neq 9; x \neq 4$

a) Rút gọn A

b) Hãy so sánh $\frac{1}{A}$ với 1

HDG:

a) với $x \geq 0; x \neq 9; x \neq 4$

$$A = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}-9-x+9+2x-3\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$A = \frac{x-\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$$

b) Xét hiệu: $\frac{1}{A} - 1 = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1} - 1 = \frac{\sqrt{x}-3-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = \frac{-4}{\sqrt{x}+1} < 0$

Vậy $\frac{1}{A} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{1}{A} < 1$

Ví dụ: Cho biểu thức: $A = \frac{3x+\sqrt{9x}-3}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0; x \neq 1$

a) Rút gọn A

b) Hãy so sánh A với $\frac{1}{2}$

HDG:

Với $x \geq 0; x \neq 1$

$$A = \frac{3x + \sqrt{9x} - 3}{x + \sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2} + \frac{\sqrt{x} - 2}{1 - \sqrt{x}} = \frac{3x + 3\sqrt{x} - 3 - x + 1 - x + 4}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)}$$

$$A = \frac{x + 3\sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$$

Ví dụ: Cho biểu thức: $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x} - x + \sqrt{x} - 1} \right) : \left(\frac{x + \sqrt{x}}{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x} + 1} + \frac{1}{x + 1} \right)$ **với**

$$x \geq 0; x \neq 1$$

a) Rút gọn A

b) Hãy so sánh A với 1

$$A = \left(\frac{1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x} - x + \sqrt{x} - 1} \right) : \left(\frac{x + \sqrt{x}}{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x} + 1} + \frac{1}{x + 1} \right)$$

$$A = \left(\frac{1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 1)(x + 1)} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} + 1)(x + 1)} + \frac{1}{x + 1} \right)$$

$$A = \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{(\sqrt{x} - 1)(x + 1)} : \frac{\sqrt{x} + 1}{x + 1} = \frac{\sqrt{x} - 1}{x + 1} \cdot \frac{x + 1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$$

$$A - 1 = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} - 1 = \frac{\sqrt{x} - 1 - \sqrt{x} - 1}{3(\sqrt{x} + 1)} = \frac{-2}{3(\sqrt{x} + 1)} < 0$$

Xét hiệu $\Rightarrow A < 1$

Ví dụ: Cho biểu thức: $A = \left(2 - \frac{\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x} - 3} \right) : \left(\frac{6\sqrt{x} + 1}{(2\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 1)} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} \right)$

a) Rút gọn A

b) Hãy so sánh A với $\frac{3}{2}$

$$A = \left(2 - \frac{\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x} - 3} \right) : \left(\frac{6\sqrt{x} + 1}{(2\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 1)} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} \right)$$

$$A = \frac{4\sqrt{x} - 6 - \sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x} - 3} : \frac{6\sqrt{x} + 1 + 2x - 3\sqrt{x}}{(\sqrt{x} + 1)(2\sqrt{x} - 3)}$$

$$A = \frac{3\sqrt{x} - 5}{2\sqrt{x} - 3} \cdot \frac{(\sqrt{x} + 1)(2\sqrt{x} - 3)}{2x + 3\sqrt{x} + 1} = \frac{3\sqrt{x} - 5}{2\sqrt{x} + 1}$$

$$A - \frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{x}-5}{2\sqrt{x}+1} - \frac{3}{2} = \frac{6\sqrt{x}-10-6\sqrt{x}-3}{2(2\sqrt{x}+1)} = \frac{-13}{2(2\sqrt{x}+1)} < 0$$

Xét hiệu: $\Rightarrow A - \frac{3}{2} < 0 \Leftrightarrow A < \frac{3}{2}$

DẠNG 4: TÌM GIÁ TRỊ NGUYÊN CỦA $\sqrt{x}$ ĐỂ BIỂU THỨC CÓ GIÁ TRỊ NGUYÊN

Phương pháp: Biến đổi biểu thức về dưới dạng phân thức có tử là số nguyên, lí luận chặt chẽ để rồi chỉ ra mẫu phải thuộc ước của tử và kết luận.

Ví dụ: Cho biểu thức: $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{5}{\sqrt{x}-3} - \frac{6}{9-x} \right) : \frac{6}{\sqrt{x}+2}$

a) Rút gọn A

b) Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên

Hướng dẫn:

a) Điều kiện: $x \geq 0; x \neq 9$

$$A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{5}{\sqrt{x}-3} - \frac{6}{9-x} \right) : \frac{6}{\sqrt{x}+2} = \frac{\sqrt{x}-3+5(\sqrt{x}+3)+6}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{6}$$

$$A = \frac{6\sqrt{x}+18}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{6} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}$$

b) Ta có: $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} = \frac{\sqrt{x}-3+5}{\sqrt{x}-3} = 1 + \frac{5}{\sqrt{x}-3}$

A có giá trị nguyên $\Leftrightarrow \frac{5}{\sqrt{x}-3}$ có giá trị nguyên $\Leftrightarrow \sqrt{x}-3 \in U(5) \Leftrightarrow \sqrt{x}-3 \in \{-1; 1; -3; 3\}$

Ta biết rằng khi x là số nguyên thì $\sqrt{x}$ hoặc là số nguyên (nếu x là số chính phương) hoặc là số vô tỉ (nếu x không là số chính phương) Để $\frac{5}{\sqrt{x}-3}$ là số nguyên thì $\sqrt{x}$ không thể là số vô tỉ, do đó $\sqrt{x}$ là số nguyên, suy ra $\sqrt{x}-3$ là ước tự nhiên của 5

Ta bảng sau:

$\sqrt{x}-3$	1	-1	5	-5
$\sqrt{x}$	4	2	8	-2
x	16	4	64	

Ví dụ: Cho biểu thức: $A = \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1}\right)$

a) Rút gọn A

b) Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

HDG:

a) ĐK: $x > 0$

$$A = \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1}\right) = \frac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}} \cdot \frac{x-1-x+\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}$$

$$A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$$

b) Ta có: $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}}$

A có giá trị nguyên $\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x}}$ **có giá trị nguyên** $\Leftrightarrow \sqrt{x} \in U(2) \Leftrightarrow \sqrt{x} \in \{-1; 1; -2; 2\}$

Mà $\sqrt{x} > 0$ **nên** $\sqrt{x} \in \{1; 2\}$

Ta có: $\sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1^2$ (TM)

$\sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4$ (TM)

Vậy $x \in \{1; 4\}$

Ví dụ: Cho biểu thức: $A = \frac{3}{\sqrt{x}} + \left(\frac{x}{x-\sqrt{x}} + \frac{x+1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}-1}\right) \cdot \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$

a) Rút gọn A

b) Tìm các giá trị của x để $A \geq 10$

c) Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

HDG:

a) ĐK: $x > 0; x \neq 1$

$$A = \frac{3}{\sqrt{x}} + \left(\frac{x}{x-\sqrt{x}} + \frac{x+1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} = \frac{3}{\sqrt{x}} + \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{x+1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$$

$$A = \frac{3}{\sqrt{x}} + \left(\frac{x+1}{\sqrt{x}} + 1 \right) \cdot \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} = \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$$

$$A = 1 + \frac{3}{\sqrt{x}}$$

b) Với $x > 0; x \neq 1$ để $A \geq 10$ thì

$$1 + \frac{3}{\sqrt{x}} \geq 10 \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x}} \geq 9 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 3 \Leftrightarrow \frac{1-3\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \geq 0$$

$$\text{Do } \sqrt{x} > 0 \Rightarrow 1-3\sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x} \leq 1 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{9}$$

Vậy với $x > 0; x \neq 1$ để $A \geq 10$ thì $0 < x \leq \frac{1}{9}$

c) $A = 1 + \frac{3}{\sqrt{x}}$

A có giá trị nguyên $\Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x}}$ có giá trị nguyên $\Leftrightarrow \sqrt{x} \in U(3) \Leftrightarrow \sqrt{x} \in \{-1; 1; -3; 3\}$

Mà $\sqrt{x} > 0$ nên $\sqrt{x} \in \{1; 3\}$

Ta có: $\sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$ (TM)

$\sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9$ (TM)

Vậy $x \in \{1; 9\}$

Ví dụ: Cho biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \left(\frac{\sqrt{x}}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} \right) : \frac{\sqrt{x}+2}{x-4}$ với $x \geq 0; x \neq 4$

a) Rút gọn B

b) Tìm các giá trị nguyên của x để $P = A(B-2)$ có giá trị nguyên

HDG:

Với $x \geq 0; x \neq 4$

$$B = \left(\frac{\sqrt{x}}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} \right) : \frac{\sqrt{x}+2}{x-4} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x}+2}{x-4} \cdot \frac{x-4}{\sqrt{x}+2} = \frac{2\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}$$

$$P = A(B-2) = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} \cdot \left(\frac{2\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} - 2 \right) = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{2\sqrt{x}+2-2\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+2}$$

b)Ta có:

$$P = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{-2}{\sqrt{x}+2} = \frac{-2}{\sqrt{x}-2}$$

$$P \text{ có giá trị nguyên} \Leftrightarrow \frac{-2}{\sqrt{x}-2} \text{ có giá trị nguyên} \Leftrightarrow \sqrt{x}-2 \in U(2) \Leftrightarrow \sqrt{x}-2 \in \{-1;1;-2;2\}$$

Ta biết rằng khi x là số nguyên thì $\sqrt{x}$ hoặc là số nguyên (nếu x là số chính phương) hoặc là số vô tỉ (nếu x không là số chính phương) Để $\frac{-2}{\sqrt{x}-2}$ là số nguyên thì $\sqrt{x}$ không thể là số vô tỉ, do đó $\sqrt{x}$ là số nguyên, suy ra $\sqrt{x}-2$ là ước tự nhiên của 2

$\sqrt{x}-2$	1	-1	2	-2
$\sqrt{x}$	3	1	4	0
x	9	1	16	0

Vậy $x \in \{0;1;9;16\}$

DẠNG 5: TÌM GIÁ TRỊ CỦA $\sqrt{x}$ ĐỂ BIỂU THỨC CÓ GIÁ TRỊ NGUYÊN

Phương pháp:

Cách 1: Dựa vào điều đánh giá biểu thức để tìm ra khoảng biểu thức nằm trong, biện luận biểu thức nguyên nên ta chỉ được các giá trị nguyên thuộc khoảng đó, với mỗi giá trị của biểu thức ta sẽ tìm ra được các nghiệm của biến tương ứng.

Cách 2: Đặt biểu thức bằng một tham số nguyên, biến đổi suy ra một vế chỉ còn chứa căn thức bậc hai, dựa vào căn thức để giải bất phương trình để tương ứng, tìm khoảng tham số nằm trong rồi giải với các tham số tương ứng để tìm ra các nghiệm của biến tương ứng.

Ví dụ: $A = \frac{7}{\sqrt{x}+3}$ với $x \geq 0$. Tìm các giá trị của x để A có giá trị nguyên.

$$A > 0$$

Cách 1: Với $x \geq 0$ ta có *) $A = \frac{7}{\sqrt{x}+3} \leq \frac{7}{3}$

Mà $A \in \mathbb{Z} \Rightarrow A \in \{1;2\}$

Với $A=1 \Leftrightarrow x=16$ (thỏa mãn)

Với $A=2 \Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$ (thỏa mãn)

Cách 2: Đặt $A=\frac{7}{\sqrt{x}+3}=n(n \in \mathbb{Z})$

$$A=\frac{7}{\sqrt{x}+3}=n \Leftrightarrow \sqrt{x}=\frac{7-3n}{n}$$

Vì $\sqrt{x} \geq 0$ nên $\frac{7-3n}{n} \geq 0 \Leftrightarrow 0 < n \leq \frac{7}{3}$

Mà $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n \in \{1; 2\}$

Với $n=1 \Leftrightarrow x=16$ (thỏa mãn)

Với $n=2 \Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$ (thỏa mãn)

Vậy với $x=16; x=\frac{1}{4}$ thì biểu thức A có giá trị nguyên.

Ví dụ: Cho biểu thức: $A=\frac{7\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}+1}$ và $B=\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3}-\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}-\frac{36}{x-9}$ với $x \geq 0; x \neq 9$

a) Rút gọn B và tìm tất cả các giá trị của x để $A=B$

b) Tìm các giá trị của x để A có giá trị nguyên

Hướng dẫn:

$$a) \quad B=\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3}-\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}-\frac{36}{x-9}=\frac{(\sqrt{x}+3)^2-(\sqrt{x}-3)^2-36}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}=\frac{12\sqrt{x}-36}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$$

$$B=\frac{12}{\sqrt{x}+3}$$

$$A=B \Leftrightarrow \frac{7\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}+1}=\frac{12}{\sqrt{x}+3} \Leftrightarrow (7\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)=12(2\sqrt{x}+1)$$

$$\text{Đế} \Leftrightarrow 7x-5\sqrt{x}-18=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=2 \\ \sqrt{x}=\frac{-9}{7} \text{ (KTM)} \end{cases} \Rightarrow x=4$$

vậy để $A = B$ thì $x = 4$

$$b) A = \frac{7\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}+1} = \frac{\frac{7}{2}(2\sqrt{x}+1) - \frac{11}{2}}{2\sqrt{x}+1} < \frac{\frac{7}{2}(2\sqrt{x}+1)}{2\sqrt{x}+1} = \frac{7}{2}$$

$$A < \frac{7}{2} \text{ mà nhận giá trị nguyên dương} \Rightarrow 0 < A < \frac{7}{2}. A \text{ nguyên} \Rightarrow A = 1; 2; 3$$

$$\text{Với } A = 1 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{3}{5} \Rightarrow x = \frac{9}{25}$$

$$\text{Với } A = 2 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \frac{16}{9}$$

$$\text{Với } A = 3 \Rightarrow \sqrt{x} = 5 \Rightarrow x = 25$$

Vậy để A nhận giá trị nguyên dương thì $x = \frac{9}{25}; \frac{16}{9}; 25$

$$\text{Ví dụ: Cho biểu thức: } A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} + \frac{2\sqrt{x}-24}{x-9} \text{ và } B = \frac{7}{\sqrt{x}+8} \text{ với } x \geq 0; x \neq 9$$

a) Tính giá trị của biểu thức B khi $x = 36$

a) Rút gọn A

b) Tìm các giá trị của x để $P = A.B$ có giá trị nguyên

Hướng dẫn:

$$b) A = \frac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+3}$$

$$c) \text{Ta có đánh giá } 0 \leq P \leq \frac{7}{3}$$

$$\text{Với } P = 1 \Leftrightarrow x = 16 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Với } P = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Ví dụ: Cho biểu thức: } A = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \text{ và } B = \left(\frac{15-\sqrt{x}}{x-25} + \frac{2}{\sqrt{x}+5} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-5} \text{ với } x \geq 0; x \neq 25$$

a) Rút gọn B

b) Tìm các giá trị của x để $P = B - A$ có giá trị nguyên.

HĐG:

a) Với $x \geq 0; x \neq 25$

$$B = \left(\frac{15 - \sqrt{x}}{x - 25} + \frac{2}{\sqrt{x} + 5} \right) : \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 5} = \frac{15 - \sqrt{x} + 2\sqrt{x} - 10}{(\sqrt{x} - 5)(\sqrt{x} + 5)} \cdot \frac{\sqrt{x} - 5}{\sqrt{x} + 1}$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$$

b) Ta có: $P = B - A = \frac{1}{\sqrt{x} + 1} - \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$

Có $\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow P \geq 0$

$$\text{Có } -\frac{1}{\sqrt{x} + 1} < 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{\sqrt{x} + 1} < 1$$

Nên $0 \leq P < 1$ mà P nguyên nên $P = 0$

Với $P = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (TM)}$

Vậy $x = 0$ thì $P = B - A$ có giá trị nguyên.

Ví dụ: Cho biểu thức: $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x} + 2} + \frac{1}{\sqrt{x} - 2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}}$ với $x \geq 0; x \neq 4$

a) Rút gọn A

b) Tìm x thực để $\frac{7A}{3}$ có giá trị nguyên.

HĐG:

a) Với $x \geq 0; x \neq 4$

$$A = \left(\frac{1}{\sqrt{x} + 2} + \frac{1}{\sqrt{x} - 2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - 2 + \sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)} \cdot \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}}$$

$$A = \frac{2}{\sqrt{x} + 2}$$

$$b) \quad \frac{7A}{3} = \frac{7}{3}A = \frac{7}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}+2}$$

$$\text{Có } x > 0 \Rightarrow \frac{7}{3}A > 0$$

$$\sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} + 2 \geq 2 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x}+2} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{7}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}+2} \leq \frac{7}{3}$$

$$\text{Nên } 0 < \frac{7}{3}A \leq \frac{7}{3}$$

$$\text{Mà } \frac{7}{3}A \text{ nguyên nên } \frac{7}{3}A \in \{1; 2\}$$

$$\text{Có } \frac{7}{3}A = 1 \Rightarrow \frac{7}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}+2} = 1 \Rightarrow 3\sqrt{x} + 6 = 14 \Leftrightarrow x = \frac{64}{9}$$

$$\text{Có } \frac{7}{3}A = 2 \Rightarrow \frac{7}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}+2} = 2 \Rightarrow 3\sqrt{x} + 6 = 7 \Leftrightarrow x = \frac{1}{9}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ \frac{64}{9}; \frac{1}{9} \right\} \text{ thì } \frac{7}{3}A \text{ có giá trị nguyên.}$$

DẠNG 6: TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT HOẶC GIÁ TRỊ LỚN NHẤT.

Phương pháp:

Cách 1: Thêm bớt rồi dùng định lí Cô si hoặc đánh giá dựa vào điều kiện.

Cách 2: Dùng phương pháp miền giá trị.

Chú ý:

+ Biểu thức A có giá trị lớn nhất là a , kí hiệu là $A_{\max} = a$ nếu $A \leq a$ với mọi giá trị của biến và tồn tại sao cho ít nhất một giá trị của biến dấu "=" xảy ra.

+ Biểu thức A có giá trị nhỏ nhất là b , kí hiệu là $A_{\min} = b$ nếu $A \geq b$ với mọi giá trị của biến và tồn tại sao cho ít nhất một giá trị của biến dấu "=" xảy ra.

$$\text{Ví dụ: Cho biểu thức: } A = \frac{x\sqrt{x} + 26\sqrt{x} - 19}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 3} \text{ với } x \geq 0; x \neq 1$$

a) Rút gọn A

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của A

Hướng dẫn:

a) $A = \frac{x+16}{\sqrt{x}+3}$

b) Cách 1: Thêm bớt rồi dùng Cô-si hoặc đánh giá dựa vào ĐKXD.

$$\begin{aligned} A &= \frac{x+16}{\sqrt{x}+3} = \frac{x-9+25}{\sqrt{x}+3} = \sqrt{x}-3 + \frac{25}{\sqrt{x}+3} \\ &= \sqrt{x}+3 + \frac{25}{\sqrt{x}+3} - 6 \geq 2\sqrt{(\sqrt{x}+3) \cdot \frac{25}{\sqrt{x}+3}} - 6 \\ &= 2 \cdot 5 - 6 = 4 \end{aligned}$$

$$\sqrt{x}+3 = \frac{25}{\sqrt{x}+3} \Leftrightarrow x = 4$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\Rightarrow A \geq 4$

$$\Rightarrow A_{\min} = 4$$

Cách 2: Dùng phương pháp miền giá trị.

$$A = \frac{x+16}{\sqrt{x}+3} \Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 - A\sqrt{x} + 16 - 3A = 0$$

Để phương trình có nghiệm thì $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 4 \\ A \leq -16 \end{cases} \Rightarrow \min A = 4$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{x} = \frac{A}{2} = 2 \Leftrightarrow x = 4$ (thỏa mãn)

Ví dụ: Cho biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} : \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right)$

a) Rút gọn A

b) Tìm giá trị lớn nhất của A

Hướng dẫn:

a) ĐK: $x > 0$

$$A = \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} : \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} \right) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)} : \frac{\sqrt{x} + 1 + x}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}$$

$$A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}{x + \sqrt{x} + 1} = \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1}$$

b) Ta có: $A = \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}}$

Xét biểu thức ở mẫu: $1 + \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} \geq 2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}} + 1 = 3$ (áp dụng Cô - si)

Ta có: $A \leq \frac{1}{3}$ Do đó $\max A = \frac{1}{3}$ khi $\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = 1$

Ví dụ: Cho biểu thức: $A = \left(\frac{\sqrt{x}}{x - 36} + \frac{\sqrt{x} - 6}{x + 6\sqrt{x}} \right) \cdot \frac{x\sqrt{x} - 36\sqrt{x}}{2(\sqrt{x} - 3)(x - 2\sqrt{x} + 3)}$

a) Rút gọn A

b) Tìm giá trị lớn nhất của A

Hướng dẫn:

a) $A = \frac{6}{x - 2\sqrt{x} + 3}$ với ĐK $x > 0; x \neq 9; x \neq 36$

b) $A = \frac{6}{x - 2\sqrt{x} + 3} = \frac{6}{(\sqrt{x} - 1)^2 + 2} \leq \frac{6}{2} = 3$ vì $(\sqrt{x} - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow \max A = 3$ khi $x = 1$

Ví dụ: Cho biểu thức: $A = \frac{2\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 3} - \frac{3\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1} - \frac{15\sqrt{x} - 11}{x + 2\sqrt{x} + 3}$ với $x \geq 0; x \neq 1$

a) Rút gọn A

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của A

Hướng dẫn:

a) $A = \frac{5\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 3}$ với ĐK: $x \geq 0; x \neq 1$

$$A = \frac{5\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3} = \frac{5\sqrt{x}+15-17}{\sqrt{x}+3} = 5 - \frac{17}{\sqrt{x}+3} \geq 5 - \frac{17}{3}$$

$$\Rightarrow A \geq \frac{-2}{3} (\sqrt{x} \geq 0)$$

b)

$$\Rightarrow \min A = \frac{-2}{3} \text{ khi } x = 0$$

MÌNH sửa đề bài biểu thức B để đc kết quả như bài toán yêu cầu.

Ví dụ: Cho biểu thức: $A = \frac{x+\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \frac{3x-\sqrt{x}-2}{x-2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}-1}{2-\sqrt{x}}$ với $x > 0; x \neq 4$

a) Chứng minh: $B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$

b) Tính giá trị của A khi $x + \sqrt{x} + 1 + (2\sqrt{5}-1)\sqrt{x} = 3x - 2\sqrt{x-4} + 3$

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{A}{B}$

HDG:

Với $x > 0; x \neq 4$

$$B = \frac{3x-\sqrt{x}-2}{x-2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}-1}{2-\sqrt{x}} = \frac{3x-\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}$$

$$B = \frac{3x-\sqrt{x}-2 - (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2) - \sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}$$

$$B = \frac{3x-\sqrt{x}-2 - x + \sqrt{x} + 2 - x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} = \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$$

$$x + \sqrt{x} + 1 + (2\sqrt{5}-1)\sqrt{x} = 3x - 2\sqrt{x-4} + 3$$

$$\Leftrightarrow 3x - 2\sqrt{x-4} + 3 - x - \sqrt{x} - 1 - 2\sqrt{5x} + \sqrt{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 2\sqrt{x-4} - 2\sqrt{5x} + 2 = 0$$

b) Ta có: $\Leftrightarrow (x-4-2\sqrt{x-4}+1) + (x-2\sqrt{5x}+5) = 0$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x-4}-1)^2 + (\sqrt{x}-\sqrt{5})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-4}-1=0 \\ \sqrt{x}-\sqrt{5}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-4=1 \\ x=5 \end{cases} \Leftrightarrow x=5$$

Thay $x=5$ vào biểu thức A ta có:

$$A = \frac{5+\sqrt{5}+4}{\sqrt{5}-2} = \frac{9+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2} = \frac{(9+\sqrt{5})(\sqrt{5}+2)}{5-4} = 9\sqrt{5}+18+5+2\sqrt{5}$$

$$A = 23+11\sqrt{5}$$

$$P = \frac{A}{B} = \frac{x+\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-2} : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} = \frac{x+\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}+1}$$

$$c) P = \sqrt{x}+1 + \frac{4}{\sqrt{x}+1} - 1$$

Có: $\sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}+1; \frac{4}{\sqrt{x}+1}$ là các số dương. Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có:

$$\sqrt{x}+1 + \frac{4}{\sqrt{x}+1} \geq 2\sqrt{(\sqrt{x}+1) \cdot \frac{4}{\sqrt{x}+1}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}+1 + \frac{4}{\sqrt{x}+1} - 1 \geq 2.2 - 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}+1 + \frac{4}{\sqrt{x}+1} - 1 \geq 3$$

Vậy min $P = 3$ Dấu "=" xảy ra khi $\sqrt{x}+1 = \frac{4}{\sqrt{x}+1} \Leftrightarrow \sqrt{x}+1 = 2 \Leftrightarrow x = 1$

DẠNG 7: CHỨNG MINH BIỂU THỨC LUÔN LUÔN ÂM HOẶC LUÔN LUÔN DƯƠNG VỚI MỌI GIÁ TRỊ CỦA ẨN.

Phương pháp:

+ Để chứng minh biểu thức $A > 0$ ta chỉ ra $A = A_1^2 + k$ với (k là hằng số dương)

+ Để chứng minh biểu thức $A < 0$ ta chỉ ra $A = A_1^2 - k$ với (k là hằng số dương)

Ví dụ: Cho biểu thức: $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{x\sqrt{x}+1} \right) \cdot \frac{2}{\sqrt{x}}$ với $x \geq 0; x \neq 4$

a) Rút gọn A

b) Chứng minh rằng biểu thức A luôn luôn âm với mọi giá trị của x làm A xác định.

Hướng dẫn:

a) Điều kiện $x > 0$

$$A = \frac{x - \sqrt{x} + 1 - (x + 2)}{(\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)} : \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$A = \frac{-(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)} \cdot \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{-\sqrt{x}}{2(x - \sqrt{x} + 1)}.$$

b) Ta có: $x > 0$ nên $-\sqrt{x} < 0$; $x - \sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x} - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$

Do đó $A < 0$ với mọi $x > 0$.

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \frac{1}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x-1} - \sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x} + x}{\sqrt{x} + 1}$.

- a) Rút gọn A.
b) Chứng minh rằng biểu thức A luôn luôn âm với mọi giá trị của x làm A xác định.

Hướng dẫn

- a) Điều kiện $x \geq 1$. Khi đó ta có

$$A = x - 2\sqrt{x-1}.$$

- b) Ta có: $A = x - 2\sqrt{x-1} = (\sqrt{x-1} - 1)^2 \geq 0$. Vậy A không âm với mọi $x \geq 1$.

Dạng 8:

CHỨNG MINH BIỂU THỨC THỎA MÃN VỚI ĐIỀU KIỆN NÀO ĐÓ

Phương pháp: Vận dụng linh hoạt các kiến thức đã học.

Ví dụ: Cho biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} - \frac{7\sqrt{x}-9}{x-9}$ (Với $x > 0, x \neq 9$).

- a) Rút gọn biểu thức B.

- b) Tính giá trị của A khi $x = \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1}$.

- c) Cho biểu thức $P = \frac{A}{B}$. Hãy tìm các giá trị của m để x thỏa mãn $P = m$

Hướng dẫn

a) $B = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3}.$

b) $x = \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = 2$ Thay vào $A = \frac{\sqrt{2}-2}{2}.$

c) $P = \frac{A}{B} = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}}$ Với điều kiện $x > 0, x \neq 4, x \neq 9.$

$$P = m \Leftrightarrow (m-1)\sqrt{x} = 3 \quad (1)$$

Nếu $m = 1$ thì phương trình (1) vô nghiệm.

Nếu $m \neq 1$ thì từ (1) $\Rightarrow \sqrt{x} = \frac{3}{m-1}.$

Do $x > 0, x \neq 4, x \neq 9 \Rightarrow \sqrt{x} > 0, \sqrt{x} \neq 2, \sqrt{x} \neq 3.$

$$\text{Để có } x \text{ thỏa mãn } P = m \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{m-1} > 0 \\ \frac{3}{m-1} \neq 2 \\ \frac{3}{m-1} \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \neq \frac{5}{2} \\ m \neq 2 \end{cases}$$

Vậy $m > 1, m \neq \frac{5}{2}, m \neq 2$ (Thỏa mãn yêu cầu bài toán)

Ví dụ: Cho biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} - \frac{7\sqrt{x}-9}{x-9}$ (Với $x > 0, x \neq 9$).

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tính giá trị của A khi $x = \sqrt{4-2\sqrt{3}}.$

c) Tìm x để biểu thức $\frac{A}{B} = 1.$

d) Tìm các giá trị m để có x thỏa mãn $\frac{A}{B} = m.$

Ví dụ: Cho biểu thức: $A = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{2(x-1)}{\sqrt{x}-1}.$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của A.

c) Tìm x để biểu thức $Q = \frac{2\sqrt{x}}{A}$ nhận giá trị là số nguyên.

Ví dụ: Cho biểu thức: $A = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \frac{3}{2-\sqrt{x}} + \frac{3\sqrt{x}+2}{x-4} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-x} \right)$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tính giá trị của A khi $x = 9 - 4\sqrt{5}$.

c) Tìm x sao cho $A(x-1) = 3\sqrt{x}$.

Ví dụ: Cho biểu thức: $A = \frac{7\sqrt{x}+3}{9-x} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$ và $B = \frac{x+7}{3\sqrt{x}}$ (DK XD: $x > 0, x \neq 9$).

a) Chứng minh rằng $A = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$.

b) So sánh A với 3.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = A.B$.

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \frac{x-2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}} + \frac{1+2x-2\sqrt{x}}{x^2-\sqrt{x}}$ (Với $x > 0, x \neq 1$)

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm x để biểu thức A nhận giá trị là số nguyên.

Hướng dẫn

a) $A = \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1}$.

b) **Cách 1:** Với $x > 0, x \neq 1 \Rightarrow x + \sqrt{x} + 1 > \sqrt{x} + 1 > 1$.

$$\text{Vậy } 0 < A = \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1} < \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}+1} < 2.$$

$$\text{Vì A nguyên nên } A = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1} = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (Không thỏa mãn).}$$

Vậy không có giá trị nguyên nào của x để giá trị A là một số nguyên.

Cách 2: Dùng miền giá trị

$$A = \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1} \Leftrightarrow Ax + (A-1)\sqrt{x} + A - 2 = 0$$

$$\text{Trường hợp 1: } A = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = -2 \Rightarrow x \in \emptyset$$

$$\text{Trường hợp 2: } A \neq 0 \Rightarrow \Delta = (A-1)^2 - 4A(A-2) = -3A^2 + 6A + 1 \geq 0 \Leftrightarrow A^2 - 2A - \frac{1}{3} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow A^2 - 2A + 1 \leq \frac{4}{3} \Leftrightarrow (A-1)^2 \leq \frac{4}{3} \Rightarrow A \in \{1; 2\} \text{ do } A \in \mathbb{Z}, A > 0$$

Với $A = 1 \Rightarrow x = 1$ (loại)

$$\text{Với } A = 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1} = 2 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (loại)}.$$

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x-1} \right) \cdot \frac{x-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}$ (Với $x \geq 0, x \neq 1$).

- Rút gọn biểu thức B.
- Tính giá trị của A khi $x = 5 + 2\sqrt{6}$.
- Với $x \in \mathbb{N}$ và $x \neq 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = A.B$.

C. LUYỆN TẬP BÀI TẬP GỒM NHIỀU Ý HỎI

Bài I: Cho biểu thức:

$$A = \left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} + \frac{2-2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}-1} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{2}{x-1} \right) \text{ với } x \geq 0, x \neq 1$$

- Chứng minh: $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$.
- Tính giá trị của A khi:
 - $x = 6 - 4\sqrt{2}$
 - $x = \frac{1}{4}(\sqrt{9+\sqrt{80}} - \sqrt{9-\sqrt{80}})$.
 - $x = \sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} + \sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}$.
 - $x = \frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{81}}$.
 - x là nghiệm của phương trình $\sqrt{2x^2-3x-5} = x-1$.
 - x là nghiệm của phương trình $|2x-6| = 3x+1$.
 - x là giá trị của biểu thức $M = \sqrt{x}(1-\sqrt{x})$ đạt giá trị lớn nhất.
- Tìm x để:
 - $A = \frac{1}{6}$;
 - $|A| = A$;
 - $A^2 + A \leq 0$.
- So sánh:
 - A với 1
 - A với biểu thức $N = \frac{\sqrt{x}-3}{2\sqrt{x}}$.

5. Tìm x nguyên dương để biểu thức $\frac{2}{A}$ nhận giá trị nguyên.
6. Tìm x thực để A nhận giá trị nguyên.
7. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
- a) $P = A(x - \sqrt{x} - 2)$.
- b) $Q = \frac{A}{-x + 3\sqrt{x} - 2}; 0 \leq x < 4$.
- c) $R = \frac{\sqrt{x}}{A}; x > 1$.
8. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:
- a) $B = 2 - A$;
- b) $C = \frac{A}{\sqrt{x} + 7}$ với $x > 1$.
9. Tìm x thỏa mãn $A(\sqrt{x} + 1) - (2\sqrt{6} - 1)\sqrt{x} = 2x - 2\sqrt{x - 5} + 1$.

Bài II. Cho biểu thức:

$$B = \left(\frac{2x+1}{x\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} \right) \cdot \left(\frac{1+x\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} - \sqrt{x} \right) + \frac{2-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \text{ với } x > 0, x \neq 1$$

- Chứng minh: $B = \frac{x - 3\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x}}$.
- Tính giá trị của B khi:
 - $x = 7 - \sqrt{48}$
 - $x = \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} + \sqrt{11 - 6\sqrt{2}}$.
 - $x = \sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7} + \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7}$.
 - $x = \frac{1}{1+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{7}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{97}+\sqrt{100}}$.
 - x là nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2 - x + 2} = x$.
 - x là nghiệm của phương trình $|x - 1| = |2x - 5|$
 - x là giá trị của biểu thức $P = x - 4\sqrt{x} + 6$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- Tìm x để:
 - $B = 0$;
 - $B + \frac{3\sqrt{x} - 4}{\sqrt{x}} \leq 0$.
- So sánh:
 - B với -2
 - B với biểu thức $C = \frac{\sqrt{x} - 3x}{x}$.
- Tìm x để B nhận giá trị nguyên.

6. Xét dấu biểu thức $T = B(\sqrt{x} - 1)$.
7. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
- a) B.
- b) $D = B\sqrt{x}$.
- c) $E = \frac{B}{\sqrt{x}}$.
8. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:
- a) $G = -3 - B$;
- b) $Q = 1 - B\sqrt{x}$.
9. Tìm x thỏa mãn $B\sqrt{x} + (2\sqrt{3} + 3)\sqrt{x} = 3x - 4\sqrt{x+1} + 10$.

Bài III. Cho biểu thức:

$$C = \left(\frac{x+2\sqrt{x}}{x+4\sqrt{x}+4} + \frac{2x}{4-x} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-2\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}} \right) \text{ với } x > 0, x \neq 4, x \neq 9$$

- Chứng minh: $C = \frac{x}{\sqrt{x}-3}$.
- Tính giá trị của C khi:
 - $x = 6 - 2\sqrt{8}$
 - $x = \sqrt{11+3\sqrt{8}} + \sqrt{11-3\sqrt{8}}$.
 - $x = \sqrt[3]{14\sqrt{2}+20} + \sqrt[3]{14\sqrt{2}-20} - 1$.
 - $x = \frac{1}{1+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{9}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{77}+\sqrt{81}}$.
 - x là nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2-x} = x-1$.
 - x là nghiệm của phương trình $|x-3|=3$
 - x là giá trị của biểu thức $M = -x + 3\sqrt{x} + 5$ đạt giá trị lớn nhất.
- Tìm x để:
 - $C^2 \leq 0$;
 - $|C| = -C$;
- So sánh C với biểu thức $D = \sqrt{x}$ khi $x > 9$.
- Tìm x để biểu thức $E = \frac{2C}{\sqrt{x}}$ nhận giá trị nguyên.
- Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
 - Biểu thức C với $x > 9$.
 - $I = -\frac{C}{x\sqrt{x}}$ với $0 < x < 9, x \neq 4$.

7. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $N = \frac{C}{\sqrt{x-1}+C}$.

8. Tìm x thỏa mãn $(2\sqrt{2}+C)\sqrt{x}-3C=3x-2\sqrt{x-1}+2$.

D. MỘT SỐ CÂU VỀ RÚT GỌN VÀ CÂU HỎI PHỤ TRONG ĐỀ TUYỂN SINH HÀ NỘI

Ví dụ: (TS 10 – THPT Hà Nội, năm học 2012 – 2013)

1) Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+2}$. Tính giá trị của A khi $x = 36$

2) Rút gọn biểu thức $B = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4} + \frac{4}{\sqrt{x}-4} \right) : \frac{x+16}{\sqrt{x}+2}$ (với $x \geq 0; x \neq 16$)

3) Với các của biểu thức A và B nói trên, hãy tìm các giá trị của x nguyên để giá trị của biểu thức $B(A-1)$ là số nguyên.

Giải:

1) Với $x = 36$, ta có : $A = \frac{\sqrt{36}+4}{\sqrt{36}+2} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$

2) Với $x \geq 0; x \neq 16$ ta có :

$$B = \left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-4)}{x-16} + \frac{4(\sqrt{x}+4)}{x-16} \right) \frac{\sqrt{x}+2}{x+16} = \frac{(x+16)(\sqrt{x}+2)}{(x-16)(x+16)} = \frac{\sqrt{x}+2}{x-16}$$

3) Ta có: $B(A-1) = \frac{\sqrt{x}+2}{x-16} \cdot \left(\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+2} - 1 \right) = \frac{\sqrt{x}+2}{x-16} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}+2} = \frac{2}{x-16}$.

Để $B(A-1)$ nguyên, x nguyên thì $x-16$ là ước của 2, mà $U(2) = \{\pm 1; \pm 2\}$

Ta có bảng giá trị tương ứng:

$x-16$	1	-1	2	-2
x	17	15	18	14

Kết hợp ĐK $x \geq 0, x \neq 16$, để $B(A-1)$ nguyên thì $x \in \{14; 15; 17; 18\}$.

Ví dụ: (TS 10 – THPT Hà Nội, năm học 2013 – 2014)

Với $x > 0$, cho hai biểu thức $A = \frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 64$.

2) Rút gọn biểu thức B.

3) Tìm x để $\frac{A}{B} > \frac{3}{2}$.

Giải:

1) Với $x = 64$ ta có $A = \frac{2+\sqrt{64}}{\sqrt{64}} = \frac{2+8}{8} = \frac{5}{4}$

2) $B = \frac{(\sqrt{x}-1).(x+\sqrt{x}) + (2\sqrt{x}+1).\sqrt{x}}{\sqrt{x}.(x+\sqrt{x})} = \frac{x\sqrt{x}+2x}{x\sqrt{x}+x} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}$

3) Với $x > 0$ ta có :

$$\frac{A}{B} > \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} : \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} > \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} > \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x}+2 > 3\sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow 0 < x < 4. (Do x > 0)$$

Ví dụ: (TS 10 – THPT Hà Nội, năm học 2014 – 2015)

1) Tính giá trị biểu thức : $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ khi $x = 9$.

2) Cho biểu thức $P = \left(\frac{x-2}{x+2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ với $x > 0; x \neq 1$.

a) Chứng minh $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$.

b) Tìm giá trị của x để $2P = 2\sqrt{x} + 5$.

Giải:

1) Với $x = 9$ thì $\sqrt{x} = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow A = \frac{3+1}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$

2) a) Chứng minh $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$.

$$P = \left(\frac{x-2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{x+\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$

3) - Để $2P = 2\sqrt{x}+5$ nên $\frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}+5$

- Đưa về được phương trình $2x+3\sqrt{x}-2=0$

- Tính được $\begin{cases} \sqrt{x} = -2(L) \\ \sqrt{x} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$ thỏa mãn điều kiện $x > 0; x \neq 1$

- Vậy với $x = \frac{1}{4}$ thì $2P = 2\sqrt{x}+5$

Ví dụ: (TS 10 – THPT Hà Nội, năm học 2015 – 2016)

Cho hai biểu thức $A = \frac{x+3}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} + \frac{5\sqrt{x}-2}{x-4}$ với $x > 0; x \neq 4$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$.

2) Rút gọn biểu thức B.

3) Tìm giá trị của x để biểu thức $P = \frac{A}{B}$ đạt GTNN.

Giải:

1) Thay $x = 9$ (TMDK) vào biểu thức A ta có: $A = \frac{9+3}{3-2} = 12$

2)

$$B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} + \frac{5\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} + \frac{5\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)+5\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{x+2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$$

$$3) P = \frac{A}{B} = \frac{x+3}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}}$$

Theo BĐT Cosi, ta có: $\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{3}$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{x} = \frac{3}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = 3$ (TM)

Vậy GTNN của P là $2\sqrt{3}$, đạt được khi $x = 3$.

Ví dụ: (TS 10 – THPT Hà Nội, năm học 2016 – 2017)

Cho hai biểu thức $A = \frac{7}{\sqrt{x}+8}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} + \frac{2\sqrt{x}-24}{x-9}$ với $x \geq 0; x \neq 9$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$.

2) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+3}$.

3) Tìm x để biểu thức $P = A.B$ có giá trị là số nguyên.

Giải:

1) Thay $x = 25$ (TMDK) vào biểu thức A ta có: $A = \frac{7}{5+8} = \frac{7}{13}$

2)

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} + \frac{2\sqrt{x}-24}{x-9} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} + \frac{2\sqrt{x}-24}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{x+3\sqrt{x}+2\sqrt{x}-24}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{x+5\sqrt{x}-24}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+8)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+3} \end{aligned}$$

$$3) P = A.B = \frac{7}{\sqrt{x}+3}$$

+) Ta có: $x \geq 0$ nên $P > 0$.

$$+) x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} + 3 \geq 3 \Leftrightarrow \frac{7}{\sqrt{x}+3} \leq \frac{7}{3}$$

Nên $0 < P \leq \frac{7}{3}$. Để $P \in \mathbb{Z} \Rightarrow P \in \{1; 2\}$

$$\text{TH1: } P = 1 \Leftrightarrow x = 16 \text{ (TM)}$$

$$\text{TH2: } P = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \text{ (TM)}$$

Vậy để biểu thức $P = A.B$ có giá trị là số nguyên thì $x \in \left\{ \frac{1}{4}; 16 \right\}$.

Ví dụ: (TS 10 – THPT Hà Nội, năm học 2017 – 2018)

Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5}$ và $B = \frac{3}{\sqrt{x}+5} + \frac{20-2\sqrt{x}}{x-25}$ với $x \geq 0; x \neq 25$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$.

2) Chứng minh $B = \frac{1}{\sqrt{x}-5}$.

3) Tìm tất cả các giá trị của x để $A = B|x-4|$.

Giải:

1) Thay $x = 9$ (TMDK) vào biểu thức A ta có: $A = \frac{3+2}{3-5} = \frac{-5}{2}$

2)

$$B = \frac{3}{\sqrt{x}+5} + \frac{20-2\sqrt{x}}{x-25} = \frac{3}{\sqrt{x}+5} + \frac{20-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-5)} = \frac{3\sqrt{x}-15+20-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-5)} = \frac{\sqrt{x}+5}{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-5)} = \frac{1}{\sqrt{x}-5}$$

3)

$$\begin{aligned} A &= B|x-4| \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5} &= \frac{1}{\sqrt{x}-5}|x-4| \\ \Leftrightarrow \sqrt{x}+2 &= |x-4| \quad (1) \end{aligned}$$

TH1: Nếu $x \geq 4, x \neq 25$ thì (1) trở thành:

$$\sqrt{x}+2 = x-4 \Leftrightarrow x-\sqrt{x}-6=0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-3)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=3 \Leftrightarrow x=9 \text{ (TM)} \\ \sqrt{x}=-2 \text{ (KTM)} \end{cases}$$

TH1: Nếu $0 \leq x \leq 4$ thì (1) trở thành:

$$\sqrt{x}+2 = -x+4 \Leftrightarrow x+\sqrt{x}-2=0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=1 \Leftrightarrow x=1 \text{ (TM)} \\ \sqrt{x}=-2 \text{ (KTM)} \end{cases}$$

Vậy để $A = B|x-4|$ thì $x \in \{1; 9\}$.

Ví dụ: (TS 10 – THPT Hà Nội, năm học 2018 – 2019)

Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \frac{3\sqrt{x}+1}{x+2\sqrt{x}-3} - \frac{2}{\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0; x \neq 1$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$.

2) Chứng minh $B = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$.

3) Tìm tất cả các giá trị của x để $\frac{A}{B} \geq \frac{x}{4} + 5$.

Giải:

1) Thay $x = 9$ (TMDK) vào biểu thức A ta có: $A = \frac{3+4}{3-1} = \frac{7}{2}$.

2)

$$B = \frac{3\sqrt{x}+1}{x+2\sqrt{x}-3} - \frac{2}{\sqrt{x}+1} = \frac{3\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)} - \frac{2}{\sqrt{x}+1} = \frac{3\sqrt{x}+1-2\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)} = \frac{\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)} = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

3) $\frac{A}{B} \geq \frac{x}{4} + 5 \Leftrightarrow \sqrt{x} + 4 \geq \frac{x}{4} + 5 \Leftrightarrow x - 4\sqrt{x} + 4 \leq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 2 = 0$ vì

$$(\sqrt{x} - 2)^2 \geq 0 \quad \forall x \geq 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (TM)}$$

Vậy để $\frac{A}{B} \geq \frac{x}{4} + 5$ thì $x = 4$.

CHỦ ĐỀ II: HỆ PHƯƠNG TRÌNH

PHẦN 1: GIẢI VÀ BIỆN LUẬN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

A. LÝ THUYẾT

1. Hệ phương trình cơ bản

Cho hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \quad (I)$

- Cặp số $(x_0; y_0)$ là một nghiệm của hệ (I) nếu hai phương trình của hệ có chung một nghiệm $(x_0; y_0)$.
- Nếu hệ (I) không có nghiệm thì ta kết luận hệ (I) vô nghiệm.
- Giải hệ phương trình là tìm tập nghiệm của nó.
- Tập nghiệm của hệ phương trình (I) được biểu diễn bởi tập hợp các điểm chung của hai đường thẳng $(d_1): ax + by = c$ và $(d_2): a'x + b'y = c'$. Khi đó:
 - +) Nếu (d_1) cắt (d_2) thì hệ (I) có một nghiệm duy nhất.
 - +) Nếu $(d_1) // (d_2)$ thì hệ (I) vô nghiệm.
 - +) Nếu (d_1) trùng (d_2) thì hệ (I) có vô số nghiệm.
- Hai hệ phương trình được gọi là tương đương với nhau nếu chúng có cùng tập nghiệm.

2. Giải hệ phương trình không cơ bản

Phương pháp đặt ẩn phụ

Bước 1: Đặt điều kiện để hệ có nghĩa.

Bước 2: Đặt ẩn phụ và điều kiện của ẩn nếu có.

Bước 3: Giải hệ theo các ẩn đã đặt.

Bước 4: Trỏ lại ẩn đã cho để tìm nghiệm.

3. Giải và biện luận hệ phương trình cơ bản

Phương pháp

- Từ một phương trình rút y theo x rồi thay vào phương trình còn lại để được phương trình $ax = b$.
- Biện luận:
 - +) Nếu $a \neq 0$ thì $x = \frac{b}{a}$ thay vào biểu thức để tìm y , khi đó hệ có duy nhất nghiệm.
 - +) Nếu $a = 0$ thì ta có $0.x = b$
- Nếu $b = 0$ thì hệ có vô số nghiệm.
- Nếu $b \neq 0$ thì hệ vô nghiệm.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN

Phương pháp: Sử dụng phương pháp thế, phương pháp cộng đại số.

- Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế

Phương pháp:

Bước 1: Từ một phương trình của hệ đã cho, ta biểu diễn một ẩn theo ẩn kia rồi thế vào phương trình còn lại, ta được phương trình mới chỉ còn một ẩn.

Bước 2: Giải phương trình một ẩn vừa có, rồi suy ra nghiệm của hệ đã cho.

Chú ý: Ở bước 1 ta thường chọn phương trình có các hệ số có giá trị tuyệt đối không quá lớn.

Ví dụ: Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp thế

$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$$

Hướng dẫn

$$\begin{cases} x - 2y = -1 & (1) \\ 2x + 3y = 5 & (2) \end{cases} \text{ . Từ phương trình (1) } \Rightarrow x = y - 1 \text{ thế vào phương trình (2)}$$

$$\text{Ta được } 2(y - 1) + 3y = 5 \Leftrightarrow y = 1 \Rightarrow x = 1.$$

$$\text{Vậy hệ phương trình có nghiệm } \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Ví dụ: Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp thế

$$1) \begin{cases} x - y = 3 \\ 3x - 4y = 4 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 5x\sqrt{3} + y = 2\sqrt{2} \\ -x + 4y = 10 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 2x + y = 7 \\ x\sqrt{6} - y\sqrt{2} = 2 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x\sqrt{2} - \sqrt{3}y = 1 \\ x + \sqrt{3}y = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 6x + 9y = 1 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} x - 2y = 3 \\ -2x + 4y = -6 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} 5x - 4y = 3 \\ 7x - 9y = 8 \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} \sqrt{3}x - \sqrt{2}y = -1 \\ 2\sqrt{2}x + \sqrt{3}y = 0 \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} x + \sqrt{2}y = 1 \\ \sqrt{2}x - 3y = 4 \end{cases}$$

Đáp số:

$$1) x = 8; y = 5$$

$$2) x = \frac{8\sqrt{2} - 10}{1 + 20\sqrt{3}}; y = \frac{2\sqrt{2} + 50\sqrt{3}}{1 + 20\sqrt{3}}$$

$$3) x = \frac{\sqrt{2} + 7}{\sqrt{3} - 2}; y = \frac{7\sqrt{3} - 2\sqrt{2} - 28}{\sqrt{3} - 2}$$

$$4) x = 1; y = \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{3}}$$

$$5) \text{ HPT VN}$$

$$6) \text{ HPT VSN}$$

$$7) x = \frac{-5}{17}; y = \frac{-19}{17}$$

$$8) x = \frac{-\sqrt{3}}{7}; y = \frac{\sqrt{5}}{7}$$

$$9) x = \frac{3 + 4\sqrt{2}}{5}; y = \frac{\sqrt{2} - 4}{5}$$

• Giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số

$$a) \begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x - 2y = 6 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$$

Hướng dẫn

a) Cộng từng vế của hai phương trình của hệ ta có:

$$\begin{cases} 3x = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$.

$$b) \begin{cases} x - 2y = 6 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4y = 12 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7y = 7 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 4 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \end{cases}$.

Ví dụ: Giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số

$$1) \begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} -4x + y = -12 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x\sqrt{2} - \sqrt{3}y = 1 \\ x + \sqrt{3}y = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 6x + 9y = 1 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} x - 2y = 3 \\ -2x + 4y = -6 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} 5x - 4y = 3 \\ 7x - 9y = 8 \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} \sqrt{3}x - \sqrt{2}y = -1 \\ 2\sqrt{2}x + \sqrt{3}y = 0 \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} x + \sqrt{2}y = 1 \\ \sqrt{2}x - 3y = 4 \end{cases}$$

Đáp án:

$$1) x = 2; y = 0$$

$$2) x = -5; y = 4$$

$$3) x = \frac{10}{3}; y = \frac{4}{3}$$

$$4) x = 1; y = \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{3}}$$

$$5) \text{ HPT VN}$$

$$6) \text{ HPT VSN}$$

$$7) x = \frac{-5}{17}; y = \frac{-19}{17}$$

$$8) x = \frac{-\sqrt{3}}{7}; y = \frac{\sqrt{5}}{7}$$

$$9) x = \frac{3 + 4\sqrt{2}}{5}; y = \frac{\sqrt{2} - 4}{5}$$

Ví dụ: Giải các hệ phương trình sau:

$$1) \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \\ \frac{x+8}{y+4} = \frac{9}{4} \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \frac{y}{2} + \frac{x+y}{5} = 0,1 \\ \frac{y}{5} + \frac{x-y}{2} = 0,1 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Đáp án:

$$1) x = \frac{-8}{19}; y = \frac{-12}{19}$$

$$2) x = \frac{10}{41}; y = \frac{3}{41}$$

$$3) x = 3; y = 1$$

Dạng 2: GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH KHÔNG CƠ BẢN**Phương pháp:** Đặt ẩn phụ:**Bước 1:** Đặt điều kiện để hệ có nghĩa.**Bước 2:** Đặt ẩn phụ và điều kiện của ẩn nếu có.**Bước 3:** Giải hệ theo các ẩn đã đặt.**Bước 4:** Trở lại ẩn đã cho để tìm nghiệm.**Ví dụ:** Giải hệ phương trình sau:

$$a) \begin{cases} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y-2} = -1 \\ \frac{3}{x+1} - \frac{2}{y-2} = 7 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3\sqrt{x+2018} + 2(y+2020) = 13 \\ 3\sqrt{x+2018} - 3(y+2020) = 9 \end{cases}$$

Hướng dẫna) Điều kiện: $x \neq -1; y \neq 2$.

Đặt $\frac{1}{x+1} = a; \frac{1}{y-2} = b$. Khi đó hệ trên trở thành $\begin{cases} a + b = -1 \\ 3a - 2b = 7 \end{cases}$. Giải hệ phương trình cơ bản này ta được $\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$.

Trở lại ẩn $x; y$ ta có: $\begin{cases} \frac{1}{x+1} = 1 \\ \frac{1}{y-2} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$.

b) Điều kiện: $x \geq -2018$.

Đặt $\sqrt{x+2018} = a; y+2020 = b$. Khi đó hệ trên trở thành $\begin{cases} 3a + 2b = 13 \\ 5a - 3b = 9 \end{cases}$. Giải hệ phương trình cơ bản này ta được $\begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$.

Trở lại ẩn $x; y$ ta có: $\begin{cases} \sqrt{x+2018}=3 \\ y+2020=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2009 \\ y=-2018 \end{cases}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\begin{cases} x=-2009 \\ y=-2018 \end{cases}$.

Ví dụ: Giải hệ phương trình sau:

$$1) \begin{cases} \frac{x+2}{x+1} + \frac{2}{y-2} = 6 \\ \frac{5}{x+1} - \frac{1}{y-2} = 3 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} (x^2 - 2x)^2 + 4(x^2 - 2x) = 0 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y-1} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x + \frac{1}{y} = -\frac{1}{2} \\ 2x - \frac{3}{y} = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 3\sqrt{2x-1} - \frac{y}{y+1} = 1 \\ \sqrt{2x-1} + \frac{2y}{y+1} = 5 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} \frac{8}{\sqrt{x-3}} + \frac{1}{|2y-1|} = 5 \\ \frac{4}{\sqrt{x-3}} + \frac{1}{|2y-1|} = 3 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} \frac{4}{x-1} + \frac{y-15}{y+2} = \frac{2}{5} \\ \frac{x-9}{x-1} + \frac{30}{y+2} = 2 \end{cases}$$

Đáp án:

$$1) x = 0; y = \frac{5}{2}$$

$$2) x = 2; y = 2$$

$$3) x = -1; y = 2$$

$$4) x = 1; y = -2$$

$$5) \begin{cases} x = 7; y = 0 \\ x = 7; y = 1 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} \frac{4}{x-1} + \frac{y-15}{y+2} = \frac{2}{5} \\ \frac{x-9}{x-1} + \frac{30}{y+2} = 2 \end{cases}$$

Ví dụ: Giải hệ phương trình sau:

$$1) \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \\ \frac{3}{x} - \frac{4}{y} = -1 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \frac{3}{2x-y} - \frac{6}{x+y} = -1 \\ \frac{1}{2x-y} - \frac{1}{x+y} = 0 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \frac{5x}{x+1} + \frac{y}{y-3} = 27 \\ \frac{2x}{x+1} - \frac{3y}{y-3} = 4 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} \frac{7}{x+2} + \frac{3}{y} = 2 \\ \frac{4}{x+2} - \frac{1}{y} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} \frac{2x}{x+4} + \frac{2y}{2y-3} = 27 \\ \frac{2x}{x+4} - \frac{6y}{2y-3} = 4 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} \frac{3}{x+2} - \frac{y}{y+1} = -1 \\ \frac{x}{x+2} - \frac{2}{y+1} = \frac{-5}{3} \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} \sqrt{3x-1} - \sqrt{2y+1} = 1 \\ 2\sqrt{3x-1} + 3\sqrt{2y+1} = 12 \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} \sqrt{x-2} + \sqrt{y-3} = 3 \\ 2\sqrt{x-2} - 3\sqrt{y-3} = -4 \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} \frac{3x}{x+1} + \frac{2}{y+4} = 4 \\ \frac{2x}{x+1} - \frac{5}{y+4} = 9 \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} \frac{2x+3y-1}{x-y+2} = \frac{12}{13} \\ 2x+3y+2=0 \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} 2(x^2-2x)+\sqrt{y+1}=0 \\ 3(x^2-2x)-3\sqrt{y+1}=-7 \end{cases}$$

$$12) \begin{cases} \frac{81}{x+y} + \frac{105}{x-y} = 8 \\ \frac{54}{x+y} + \frac{42}{x-y} = 4 \end{cases}$$

Đáp án

$$1)x=7; y=\frac{14}{5}$$

$$2)x=2; y=1$$

$$3)x=\frac{-5}{4}; y=6$$

$$4)x=0; y=-2$$

$$5)\text{HPT VN}$$

$$6)x=\frac{-7}{2}; y=\frac{-1}{2}$$

$$7)x=\frac{10}{3}; y=\frac{-3}{2}$$

$$8)x=3; y=7$$

$$9)x=-2; y=-5$$

$$10)x=\frac{-191}{5}; y=\frac{124}{5}$$

$$11) \begin{cases} x=\frac{3+\sqrt{2}}{3}; y=\frac{115}{81} \\ x=\frac{3-\sqrt{2}}{3}; y=\frac{115}{81} \end{cases}$$

$$12)x=24; y=3$$

$$13) \begin{cases} \frac{4}{x+y-1} + \frac{5}{xy-2x-3} = \frac{5}{2} \\ \frac{3}{x+y-1} - \frac{1}{xy-2x-3} = \frac{7}{5} \end{cases} \quad 14) \begin{cases} 5|x-1|-3|y+2|=7 \\ 2\sqrt{4x^2-8x+4}+5\sqrt{y^2+4y+4}=13 \end{cases}$$

$$15) \begin{cases} x+y+\frac{1}{y}=\frac{9}{x} \\ x+y-\frac{1}{x}=\frac{4y}{x^2} \end{cases} \quad 16) \begin{cases} \frac{4}{x+2y}-\frac{1}{x-2y}=1 \\ \frac{20}{x+2y}+\frac{3}{x-2y}=1 \end{cases} \quad 17) \begin{cases} x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=4 \\ x^2+y^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=4 \end{cases}$$

$$18) \begin{cases} x+y+x^2+y^2+xy=4 \\ x+y+xy=2 \end{cases} \quad 19) \begin{cases} x+y+xy=\frac{7}{2} \\ xy(x+y)=\frac{5}{2} \end{cases} \quad 20) \begin{cases} x^3+y^3=8 \\ x+y+2xy=2 \end{cases}$$

Dạng 3. GIẢI VÀ BIỆN LUẬN HỆ PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN

Phương pháp:

- Từ một phương trình rút y theo x rồi thay vào phương trình còn lại để được phương trình $ax=b$
- Biện luận

- i. Nếu $a \neq 0$ thì $x = \frac{b}{a}$ thay vào biểu thức để tìm y , khi đó hệ có nghiệm duy nhất.
- ii. Nếu $a = 0$ thì ta có $0.x = b$
 Nếu $b = 0$ thì hệ có vô số nghiệm
 Nếu $b \neq 0$ thì hệ vô nghiệm

Ví dụ : Giải và biện luận hệ phương trình sau

$$\begin{aligned}
 &1) \begin{cases} mx - y = 2m \\ x - my = m + 1 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x + my = 5\sqrt{2} \\ mx + 2y = 2m + 1 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} mx - y = 2m \\ 4x - my = m + 6 \end{cases} \\
 &4) \begin{cases} mx + y = 3m - 1 \\ x + my = m + 1 \end{cases} \quad 5) \begin{cases} mx + 4y = 10 - m \\ x + my = 4 \end{cases} \quad 6) \begin{cases} (m-1)x - my = 3m - 1 \\ 2x - y = m + 5 \end{cases} \\
 &7) \begin{cases} x + my = 3m \\ mx - y = m^2 - 2 \end{cases} \quad 8) \begin{cases} x - my = 1 + m^2 \\ mx + y = 1 + m^2 \end{cases} \quad 9) \begin{cases} 2x - y = 3 + 2m \\ mx + y = (m+1)^2 \end{cases} \\
 &10) \begin{cases} (m+1)x - y = m + 1 \\ x + (m-1)y = 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ví dụ : Tìm các giá trị của m để hệ phương trình sau có nghiệm $(x; y)$ với $x; y \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} (m+1)x - my = 5 \\ x + my = m^2 + 4m \end{cases}$$

Hướng dẫn

$$\begin{cases} (m+1)x - my = 5 & (1) \\ x + my = m^2 + 4m & (2) \end{cases}$$

Từ (2) suy ra $x = m^2 + 4m - my$

Thay vào (1) ta được $m(m+2)y = m^3 + 5m^2 + 4m - 5$ (3)

- Nếu $\begin{cases} m = 0 \\ m = -2 \end{cases}$ thì phương trình (3) vô nghiệm
- Nếu $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -2 \end{cases}$. Khi đó $y = \frac{m^3 + 5m^2 + 4m - 5}{m(m+2)}$. Từ đó ta được $x = \frac{m^2 + 4m + 5}{m+2}$

Trước hết, ta tìm $m \in \mathbb{Z}$ để $x \in \mathbb{Z}$

$$x = \frac{m^2 + 4m + 5}{m + 2} = m + 2 + \frac{1}{m + 2}. \text{ Để } x \in \mathbb{Z} \text{ thì } m + 2 \in U(1)$$

$$\text{Suy ra } m + 2 = \pm 1 \Rightarrow m = -3; m = -1$$

$$\text{Với } m = -3 \Rightarrow y = \frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$$

$$\text{Với } m = -1 \Rightarrow y = 5 \in \mathbb{Z}$$

Vậy với $m = -1$ thì hệ phương trình có nghiệm nguyên $(2; 5)$

Ví dụ : Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} mx + 4y = 10 - m \\ x + my = 2m + 1 \end{cases}$$

- Xác định các giá trị nguyên của m để hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ sao cho $x > 0; y > 0$
- Tìm giá trị nguyên của m để hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ với x, y là các số nguyên dương.

Hướng dẫn

- Để hệ có nghiệm duy nhất là $m \neq \pm 2$

$$\text{Khi đó hệ có nghiệm } \begin{cases} x = \frac{8 - m}{2 + m} \\ y = \frac{5}{2 + m} \end{cases}$$

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{8 - m}{2 + m} > 0 \\ \frac{5}{2 + m} > 0 \end{cases}$$

$$\text{Vậy với } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-1; -2; \dots; 7\}$$

$$\text{b) } m = \{-1; 3\}$$

Ví dụ: Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} x + my = 2 \\ mx - 2y = 1 \end{cases}$$

- Tìm số nguyên m để hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ sao cho $x > 0; y < 0$
- Tìm số nguyên m để hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ mà x, y là các số nguyên.

Hướng dẫn

a) Với $m = 0$ thì hệ có nghiệm $\left(2; \frac{1}{2}\right)$ thỏa mãn đề bài

$$\text{Với } m \neq 0 \text{ khi đó hệ có nghiệm duy nhất } \begin{cases} x = \frac{m+4}{m^2+2} \\ y = \frac{2m-1}{m^2+2} \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m+4}{m^2+2} > 0 \\ \frac{2m-1}{m^2+2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 < m < \frac{1}{2}. \text{ Vì } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-3; -2; -1; 0\}$$

Vậy với $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-3; -2; -1; 0\}$ thì hệ có nghiệm duy nhất thỏa mãn

b) Theo ý a. $m = 0$ không thỏa mãn

$$\text{Với } m \neq 0 \text{ khi đó hệ có nghiệm duy nhất } \begin{cases} x = \frac{m+4}{m^2+2} \\ y = \frac{2m-1}{m^2+2} \end{cases}$$

Trước hết tìm $m \in \mathbb{Z}$ để $x \in \mathbb{Z}$ thì $m+4 : m^2+2$

$$\Rightarrow m^2 + 4m : m^2 + 2 \Rightarrow 4m - 2 : m^2 + 2$$

$$\Rightarrow 4(m+4) - (4m-2) : m^2 + 2 \Rightarrow 18 : m^2 + 2$$

$$\text{Mà } m^2 + 2 > 2 \Rightarrow m^2 + 2 \in \{3; 6; 9; 18\} \Rightarrow m^2 \in \{1; 4; 7; 16\}$$

$$\text{Vì } m \in \mathbb{Z} \text{ nên } m \in \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\}$$

Thử trực tiếp để $x \in \mathbb{Z}$ và $y \in \mathbb{Z}$ thì chỉ có $m = -1$ thỏa mãn.

Ví dụ: Cho hệ phương trình $\begin{cases} x - 2y = 3 - m \\ 2x + y = 3(m + 2) \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình khi $m = -1$

b) Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ sao cho $S = x^2 + y^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Hướng dẫn

$$\text{a) Khi } m = -1 \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

b) Hệ phương trình luôn có nghiệm $\begin{cases} x = m + 3 \\ y = m \end{cases}$ với mọi giá trị m

• Ta có $S = x^2 + y^2 = (m + 3)^2 + m^2 = 2m^2 + 6m + 9 = 2\left(m + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{2} \geq \frac{9}{2}$

Vậy s nhỏ nhất bằng $\frac{9}{2}$ khi $m = \frac{3}{2}$

Ví dụ: Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx - y = 3 \\ 2x + my = 9 \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình khi $m = 1$

b) Tìm giá trị nguyên của m để hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ sao cho biểu thức $P = 3x - y$ nhận giá trị nguyên

Hướng dẫn

a) Khi $m = 1 \Rightarrow \begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$

b) Hệ phương trình luôn có nghiệm $\begin{cases} x = \frac{3m + 9}{m^2 + 2} \\ y = \frac{9m - 6}{m^2 + 2} \end{cases}$ với mọi giá trị của m

Xét $A = 3x - y = \frac{33}{m^2 + 2}$

Để $A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow m^2 + 2 \in U(33)$ mà $m^2 + 2 \geq 2; m \in \mathbb{Z}$

Suy ra $m \in \{-3; -1; 1; 3\}$

Ví dụ : Cho hệ phương trình sau $\begin{cases} (m + 1)x - y = m + 1 \\ x + (m - 1)y = 2 \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình khi $m = 2$

b) Giải và biện luận hệ phương trình

c) Tìm giá trị nguyên của m để hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ với $x; y$ có giá trị nguyên.

d) Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất sao cho $x + y$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Hướng dẫn

a) Khi $m = 2 \Rightarrow \begin{cases} 3x - y = 3 \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{4} \\ y = \frac{3}{4} \end{cases}$

b) Với $m = 0$ hệ vô nghiệm

$$\text{Với } m \neq 0 \text{ hệ có nghiệm duy nhất } \begin{cases} x = \frac{m^2 + 1}{m^2} \\ y = \frac{m + 1}{m^2} \end{cases}$$

$$\text{c) Với } m \neq 0 \text{ hệ có nghiệm duy nhất } \begin{cases} x = \frac{m^2 + 1}{m^2} \\ y = \frac{m + 1}{m^2} \end{cases}$$

$$\text{Để } \frac{m^2 + 1}{m^2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = \pm 1$$

Thử lại giá trị m thì $x, y \in \mathbb{Z}$

Vậy $m = \pm 1$ thì hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ với $x, y \in \mathbb{Z}$

$$\text{d) Với } m \neq 0 \text{ hệ có nghiệm duy nhất } \begin{cases} x = \frac{m^2 + 1}{m^2} \\ y = \frac{m + 1}{m^2} \end{cases}$$

$$\text{Xét } x + y = \frac{m^2 + 1}{m^2} + \frac{m + 1}{m^2} = \frac{7}{8} + \frac{(m + 4)^2}{8m^2} \geq \frac{7}{8}$$

Vậy với $m = -4$ thì $x + y$ đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{7}{8}$.

Ví dụ : Cho hệ phương trình sau $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x + my = 1 \end{cases}$ (m là tham số). Tìm giá trị nguyên của m để hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ sao cho x, y là các số nguyên.

C. MỘT SỐ CÂU GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH CỦA ĐỀ THI TUYỂN SINH HÀ NỘI

$$\text{Ví dụ : (TS 10 – THPT Hà Nội, năm học 2012 – 2013) } \begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 2 \\ \frac{6}{x} - \frac{2}{y} = 1 \end{cases}$$

$$\text{Ví dụ: (biên soạn) } \begin{cases} \frac{2}{|x|} + \frac{1}{|y|} = 2 \\ \frac{6}{|x|} - \frac{2}{|y|} = 1 \end{cases}$$

Ví dụ : (TS 10 – THPT Hà Nội, năm học 2013–2014)
$$\begin{cases} 3(x+1)+2(x+2y)=4 \\ 4(x+y)-(x+2y)=9 \end{cases}$$

Ví dụ : (TS 10 – THPT Hà Nội, năm học 2014–2015)
$$\begin{cases} \frac{4}{x+y} + \frac{1}{y-1} = 5 \\ \frac{1}{x+y} - \frac{2}{y-1} = -1 \end{cases}$$

Ví dụ : (TS 10 – THPT Hà Nội, năm học 2015–2016)
$$\begin{cases} 2(x+y)+\sqrt{x+1}=4 \\ (x+y)-3\sqrt{x+1}=-5 \end{cases}$$

Ví dụ : (TS 10 – THPT Hà Nội, năm học 2016–2017)
$$\begin{cases} \frac{3x}{x-1} - \frac{2}{y+2} = 4 \\ \frac{2x}{x-1} + \frac{1}{y+2} = 5 \end{cases}$$

Ví dụ : (TS 10 – THPT Hà Nội, năm học 2017–2018)
$$\begin{cases} \sqrt{x} + 2\sqrt{y-1} = 5 \\ 4\sqrt{x} - \sqrt{y-1} = 2 \end{cases}$$

Ví dụ : (TS 10 – THPT Hà Nội, năm học 2018–2019)
$$\begin{cases} 4x - |y+2| = 3 \\ x + 2|y+2| = 3 \end{cases}$$

PHẦN II: GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH

A. LÝ THUYẾT

Phương pháp

Các bước thực hiện

Bước 1: Lập hệ phương trình

- Chọn ẩn và đặt điều kiện, chọn đơn vị cho ẩn (chọn ẩn là các đại lượng cần tìm)
- Biểu thị các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết
- Lập hệ phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng

Bước 2: Giải hệ phương trình vừa lập

Bước 3: Kiểm tra xem các nghiệm của phương trình có thỏa mãn điều kiện đặt ra và trả lời .

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. TÌM CÁC CHỮ SỐ TỰ NHIÊN

Phương pháp:

- $\overline{ab} = 10.a + b (a, b \in \mathbb{N}; 0 < a \leq 9, 0 \leq b \leq 9)$
- $\overline{abc} = 100.a + 10.b + c (a, b, c \in \mathbb{N}, 0 < a \leq 9, 0 \leq b, c \leq 9)$
- Tỷ số của hai số a, b là $\frac{a}{b} (b \neq 0)$
- Tổng bình phương hai số x, y là $x^2 + y^2$

- Tổng nghịch đảo của hai số x, y là $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

Ví dụ 1: Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết hiệu giữa chữ số hàng chục và hàng đơn vị là 7, nếu lấy số đã cho chia cho số viết theo thứ tự ngược lại ta được thương là 3 và dư 5

Hướng dẫn

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{ab}$ điều kiện $\begin{cases} a, b \in \mathbb{N} \\ a = 1, \dots, 9 \\ b = 1, \dots, 9 \end{cases}$

Vì hiệu giữa chữ số hàng chục và hàng đơn vị là 7 nên $a - b = 7$ (1)

Vì lấy số đã cho chia cho số viết theo thứ tự ngược lại ta được thương là 3 và dư 5 nên

$$\overline{ab} = 3\overline{ba} + 5 \Leftrightarrow 7a - 29b = 5 \quad (2)$$

Từ (1)(2) ta có hệ phương trình $\begin{cases} a - b = 7 \\ 7a - 29b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 9 \\ b = 2 \end{cases}$

PHẦN II: GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH

A. LÝ THUYẾT

1. Phương pháp

Các bước thực hiện

Bước 1: Lập hệ phương trình

- Chọn ẩn và đặt điều kiện, chọn đơn vị cho điều kiện. (chọn ẩn là các đại lượng cần tìm).
- Biểu thị các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết.
- Lập hệ phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

Bước 2: Giải hệ phương trình vừa lập.

Bước 3: Kiểm tra xem các nghiệm của phương trình có thỏa mãn điều kiện đặt ra và trả lời.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. TÌM CÁC CHỮ SỐ TỰ NHIÊN

Phương pháp:

- $\overline{ab} = 10.a + b$ ($a, b \in \mathbb{N}$, $0 < a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$)
- $\overline{abc} = 100.a + 10.b + c$ (a, b, c , $0 < a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$)
- Tỉ số của hai số a và b ($b \neq 0$) là $\frac{a}{b}$
- Tổng của hai số x và y là $x + y$

- Tổng bình phương của hai số x và y là $x^2 + y^2$
- Tổng nghịch đảo của hai số x và y là $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

Ví dụ 1: Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết hiệu giữa chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị là 7, nếu lấy số đã cho chia cho số viết theo thứ tự ngược lại ta được thương là 3 và số dư là 5.

Hướng dẫn

Gọi chữ số cần tìm có dạng: $\overline{ab}$ điều kiện $\begin{cases} a, b \in \mathbb{Z}^* \\ a = 1; 2; \dots; 9 \\ b = 1; 2; \dots; 9 \end{cases}$

Vì hiệu giữa chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị là 7 nên: $a - b = 7$ (1)

Vì lấy số đã cho chia cho số viết theo thứ tự ngược lại ta được thương là 3 và số dư là 5 nên:

$$\overline{ab} = 3\overline{ba} + 5 \Leftrightarrow 7a - 29b = 5 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} a - b = 7 \\ 7a - 29b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 9 \\ b = 2 \end{cases}$

Vậy số cần tìm là 92.

Ví dụ 2: Tìm một số có hai chữ số, biết rằng tổng của các chữ số của số đó bằng 9 và viết các chữ số đó theo thứ tự ngược lại thì được một số bằng $\frac{2}{9}$ số ban đầu.

Hướng dẫn

Gọi chữ số cần tìm có dạng: $\overline{ab}$ điều kiện $\begin{cases} a, b \in \mathbb{Z}^* \\ a = 1; 2; \dots; 9 \\ b = 1; 2; \dots; 9 \end{cases}$

Vì tổng của các chữ số của số đó bằng 9 nên $a + b = 9$ (1)

Vì viết các chữ số đó theo thứ tự ngược lại thì được một số bằng $\frac{2}{9}$ số ban đầu nên:

$$\overline{ba} = \frac{2}{9}\overline{ab} \Leftrightarrow \frac{11}{9}a - \frac{88}{9}b = 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} a + b = 9 \\ \frac{11}{9}a - \frac{88}{9}b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 1 \end{cases}$

Vậy số cần tìm là 81.

Dạng 2. TÍNH TUỔI

Ví dụ 1: Hai năm trước đây tuổi của anh gấp đôi tuổi của em, còn tám năm trước đây, tuổi của anh gấp 5 lần tuổi của em. Hỏi hiện nay anh và em là bao nhiêu tuổi.

Hướng dẫn

Gọi tuổi của anh hiện nay là x và tuổi của em hiện nay là y điều kiện: $x, y \in \mathbb{Z}$ $x, y > 8$

Vì hai năm trước đây tuổi của anh gấp đôi tuổi của em nên: $x - 2 = 2(y - 2) \Leftrightarrow x - 2y = -2$
(1)

Vì tám năm trước đây, tuổi của anh gấp 5 lần tuổi của em nên:
 $x - 8 = 5.(y - 8) \Leftrightarrow x - 5y = -32$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} x - 2y = -2 \\ x - 5y = -32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 18 \\ y = 10 \end{cases}$$

Vậy tuổi của anh là 18 và tuổi của em là 10.

Ví dụ 2: Bảy năm trước, tuổi của mẹ bằng 5 lần tuổi của con cộng thêm 4, năm nay tuổi của mẹ vừa bằng đúng 3 lần tuổi con. Hỏi năm nay mỗi người bao nhiêu tuổi.

Hướng dẫn

Gọi tuổi của mẹ hiện nay là x và tuổi của con hiện nay là y , điều kiện: $x, y \in \mathbb{N}$; $x > y > 7$

Vì bảy năm trước, tuổi của mẹ bằng 5 lần tuổi của con cộng thêm 4 nên:

$$x - 7 = 5(y - 7) + 4 \Leftrightarrow x - 5y = -24 \quad (1)$$

Vì năm nay tuổi của mẹ vừa bằng đúng 3 lần tuổi con nên: $x = 3y$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} x - 5y = -24 \\ x = 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 36 \\ y = 12 \end{cases}$$

Vậy tuổi của mẹ là 36 và tuổi của con là 12.

Dạng 3. HÌNH HỌC

Phương pháp:

- Định lý Py - ta - go: $\triangle ABC$ vuông tại $A \Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$
- Chu vi và diện tích hình chữ nhật lần lượt là: $C_{\text{chu vi}} = 2(a + b)$, $S = a.b$ với a, b lần lượt là chiều dài và chiều rộng.
- Diện tích hình thang: $S = \frac{(a + b).h}{2}$ hoặc $S = m.h$ với a, b là độ dài hai đáy, h là đường cao, m là độ dài đường trung bình.

Ví dụ 1: Một mảnh đất hình chữ nhật có chiều dài lớn hơn chiều rộng là 5m. Nếu giảm chiều rộng đi 4m và giảm chiều dài đi 5m thì diện tích mảnh đất giảm đi 180cm^2 . Tính chiều dài và chiều rộng mảnh đất đó.

Hướng dẫn

Gọi chiều dài mảnh đất là x (mét) $x > 5$

Gọi chiều rộng mảnh đất là y (mét) $y > 4$

Vì chiều dài lớn hơn chiều rộng là 5m nên: $x - y = 5$ (1)

Vì giảm chiều rộng đi 4m và giảm chiều dài đi 5m thì diện tích mảnh đất giảm đi 180cm^2 nên:

$$(x - 5)(y - 4) = xy - 180 \Leftrightarrow 4x + 5y = 200 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} x - y = 5 \\ 4x + 5y = 200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 25 \\ y = 20 \end{cases}$$

Vậy chiều dài mảnh đất là 25m và chiều rộng mảnh đất là 20m.

Ví dụ 2: Một hình thang có diện tích là 140cm^2 , chiều cao 8cm. Tính độ dài các đáy của hình thang, biết rằng chúng hơn kém 15cm.

Hướng dẫn

Gọi đáy lớn của hình thang là x và đáy nhỏ của hình thang là y , điều kiện $x, y \in \mathbb{N}; x > y > 7$

Vì hình thang có diện tích là 140cm^2 nên: $\frac{(x+y).8}{2} = 140 \Leftrightarrow 8x + 8y = 280$ (1)

Vì độ dài các đáy của hình thang hơn kém nhau 15cm nên: $x - y = 15$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} 8x + 8y = 280 \\ x - y = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 25 \\ y = 10 \end{cases}$$

Vậy độ dài đáy lớn là 25cm và độ dài đáy nhỏ là 10cm.

Dạng 4. TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN TỈ SỐ PHẦN TRĂM

Phương pháp:

- Khối lượng công việc = Năng suất. Thời gian.
- Năng suất = Khối lượng công việc : Thời gian.
- Thời gian = Khối lượng công việc : Năng suất.

Ví dụ 1: Hai tổ sản xuất được giao làm 800 sản phẩm trong một thời gian quy định. Nhờ tăng năng suất lao động, tổ I vượt mức 10%, tổ II vượt mức 20% nên cả hai tổ làm được 910 sản phẩm. Tính số sản phẩm phải làm theo kế hoạch của mỗi tổ.

Hướng dẫn

Gọi số sản phẩm tổ I và tổ II làm theo kế hoạch lần lượt là x, y ($x, y \in \mathbb{N}^*; x, y < 800$)

Vì hai tổ theo kế hoạch sản xuất được 800 sản phẩm nên: $x + y = 800$ (1)

Nhờ tăng năng suất lao động, tổ I vượt mức 10% là $\frac{10}{100}x$, tổ II vượt mức 20% là $\frac{20}{100}x$.

Cả hai tổ làm được 910 sản phẩm ta có:

$$\left(x + \frac{10}{100}x\right) + \left(y + \frac{20}{100}y\right) = 910 \Leftrightarrow \frac{10}{100}x + \frac{20}{100}y = 910 - 800 \Leftrightarrow \frac{x}{10} + \frac{y}{5} = 110 \Leftrightarrow x + 2y = 1100$$

(2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} x + y = 800 \\ x + 2y = 1100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 500 \text{ (thỏa mãn)} \\ y = 300 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$$

Vậy số sản phẩm tổ I là 500 và tổ II là 300.

Ví dụ 2: Hai trường A và B có 420 em học sinh đỗ vào lớp 10 đạt tỷ lệ 84%. Riêng trường A tỷ lệ đỗ 80%, riêng trường B tỷ lệ đỗ 90%. Tính số học sinh dự thi của mỗi trường.

Hướng dẫn

Gọi số học sinh dự thi của trường A và B lần lượt là x, y ($x, y \in \mathbb{N}^*; x, y < 800$)

Vì hai trường A và B có 420 em học sinh đỗ vào lớp 10 đạt tỷ lệ 84% nên: $x + y = 420 \cdot \frac{100}{84}$

(1)

Vì riêng trường A tỷ lệ đỗ 80%, riêng trường B tỷ lệ đỗ 90% nên: $\frac{80}{100}x + \frac{90}{100}y = 420$

(2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = 420 \cdot \frac{100}{84} \\ \frac{80}{100}x + \frac{90}{100}y = 420 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 300 \\ y = 200 \end{cases}$$

Vậy số học sinh dự thi của trường A và B lần lượt là 300; 200 học sinh.

Ví dụ 3: Tháng thứ nhất hai tổ sản xuất được 900 chi tiết máy. Tháng thứ 2 tổ I vượt mức 15% và tổ II vượt mức 10% so với tháng thứ nhất. Vì vậy hai tổ đã sản xuất được 1010 chi tiết máy. Hỏi tháng thứ nhất mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu chi tiết máy.

Hướng dẫn

Gọi ý hệ phương trình biểu diễn các đại lượng là:

$$\begin{cases} x + y = 900 \\ \frac{115}{100}x + \frac{110}{100}y = 1010 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 400 \text{ (thỏa mãn)} \\ y = 500 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$$

Ví dụ 4: Theo kế hoạch hai tổ sản xuất được 600 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Do áp dụng kỹ thuật mới nên tổ I đã vượt mức 18% và tổ II đã vượt mức 21%. Vì vậy trong thời gian quy định họ đã hoàn thành vượt mức 120 sản phẩm. Hỏi số sản phẩm được giao của mỗi tổ theo kế hoạch.

Hướng dẫn

Gọi ý hệ phương trình biểu diễn các đại lượng là:

$$\begin{cases} x + y = 600 \\ \frac{118}{100}x + \frac{121}{100}y = 720 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 200 \text{ (thỏa mãn)} \\ y = 400 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$$

Dạng 5. TOÁN LÀM CHUNG CÔNG VIỆC

Phương pháp:

- Coi toàn bộ công việc là 1.
- Năng suất = 1 : Thời gian.
- Tổng các năng suất riêng = năng suất chung.

Ví dụ 1: Hai người cùng làm chung một công việc thì sau 6 giờ xong. Nếu một mình người thứ nhất làm trong 2 giờ, sau đó người thứ hai làm một mình trong 3 giờ thì cả hai làm được $\frac{2}{5}$ công việc. Hỏi nếu mỗi người làm một mình thì sau bao nhiêu giờ xong công việc?

Hướng dẫn

Gọi thời gian người thứ nhất và người thứ hai làm một mình xong công việc lần lượt là x, y (giờ; $x, y > 6$)

+) Trong 1 giờ

Người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ (công việc)

Người thứ hai làm được $\frac{1}{y}$ (công việc)

Cả hai người làm được $\frac{1}{6}$ (công việc)

$$\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \quad (1)$$

Trong 2 giờ người thứ nhất làm được $\frac{2}{x}$ (công việc)

Trong 3 giờ người thứ hai làm được $\frac{3}{y}$ (công việc)

Cả hai người làm được $\frac{2}{5}$ (công việc)

$$\Rightarrow \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = \frac{2}{5} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \\ \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = \frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 (\text{thỏa mãn}) \\ y = 15 (\text{thỏa mãn}) \end{cases}$$

Vậy người thứ nhất làm một mình xong công việc là 10 giờ.

Người thứ hai làm một mình xong công việc là 15 giờ.

Ví dụ 2: Hai người cùng làm chung một công việc thì hoàn thành sau 7 giờ 12 phút. Nếu một mình người thứ nhất làm trong 5 giờ, người thứ hai làm một mình trong 6 giờ thì cả hai người làm được $\frac{3}{4}$ công việc. Hỏi nếu mỗi người làm một mình thì hoàn thành công việc sau bao lâu?

Hướng dẫn

Gọi thời gian người thứ nhất và người thứ hai làm một mình xong công việc lần lượt là x, y (giờ; $x, y > \frac{36}{5}$)

+) Trong 1 giờ

Người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ (công việc)

Người thứ hai làm được $\frac{1}{y}$ (công việc)

Cả hai người làm được $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ (công việc)

$$\text{Đổi } 7\text{h}12' = \frac{36}{5}h \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{\frac{36}{5}} = \frac{5}{36} \quad (1)$$

Trong 5 giờ người thứ nhất làm được $\frac{5}{x}$ (công việc)

Trong 6 giờ người thứ hai làm được $\frac{6}{y}$ (công việc)

Cả hai người làm được $\frac{3}{4}$ (công việc)

$$\Rightarrow \frac{5}{x} + \frac{6}{y} = \frac{3}{4} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{36} \\ \frac{5}{x} + \frac{6}{y} = \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \text{ (thỏa mãn)} \\ y = 18 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$$

Vậy người thứ nhất làm một mình xong công việc là 12 giờ.

Người thứ nhất làm một mình xong công việc là 18 giờ.

Ví dụ 3: Hai vòi nước cùng chảy vào một bể cạn thì sau 1 giờ 20 phút bể sẽ đầy.

Nếu mở vòi I trong 10 phút và vòi II trong 12 phút thì được $\frac{2}{15}$ bể. Hỏi nếu mỗi vòi chảy một mình thì sau bao lâu sẽ đầy?

Hướng dẫn

$$\text{Đổi } 1\text{h}20' = \frac{4}{3}h \text{ và } 10' = \frac{1}{6}h; 12' = \frac{1}{5}h$$

Gọi thời gian vòi I và vòi II chảy một mình đầy bể lần lượt là x, y (giờ; $x, y > \frac{4}{3}$)

+) Trong 1 giờ: Vòi I chảy được $\frac{1}{x}$ (bể), vòi II chảy được $\frac{1}{y}$ (bể)

$$\text{Cả hai vòi chảy được } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{4} \text{ (bể)} \quad (1)$$

+) Trong 10 phút vòi I chảy được $\frac{1}{6x}$ (bể), trong 12 phút vòi II chảy được $\frac{1}{5y}$ (bể)

$$\text{Cả hai vòi chảy được: } \frac{1}{6x} + \frac{1}{5y} = \frac{2}{15} \text{ (bể)} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{4} \\ \frac{1}{6x} + \frac{1}{5y} = \frac{2}{15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ (thỏa mãn)} \\ y = 4 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$$

Vậy thời gian vòi I chảy một mình đầy bể là 2 giờ, vòi II chảy một mình đầy bể là 4 giờ.

Ví dụ 4: Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước thì sau 2 giờ 55 phút bể sẽ đầy. Nếu chảy một mình thì vòi I chảy nhanh hơn vòi II là 2 giờ. Hỏi thời gian mỗi vòi chảy một mình đầy bể?

Hướng dẫn

Đổi $2\text{h}55' = \frac{35}{12}\text{h}$

Gọi thời gian vòi I và vòi II chảy một mình đầy bể lần lượt là x, y (giờ; $x, y > \frac{35}{12}$)

+) Trong 1 giờ: Vòi I chảy được $\frac{1}{x}$ (bể), vòi II chảy được $\frac{1}{y}$ (bể)

Cả hai vòi chảy được: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{\frac{35}{12}} \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{12}{35}$ (bể) (1)

Vì nếu chảy một mình thì vòi I chảy nhanh hơn vòi II là 2 giờ nên: $y - x = 2$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{12}{35} \\ y - x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \text{ (TM)} \\ x = -\frac{7}{6} \text{ (KTM)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \text{ (TM)} \\ y = 7 \text{ (TM)} \end{cases}$$

Vậy thời gian vòi I chảy một mình đầy bể là 5 giờ, vòi II chảy một mình đầy bể là 7 giờ.

Ví dụ 5: Cho ba vòi A, B, C cùng chảy vào một bể. Vòi A và vòi B chảy đầy bể trong 71 phút. Vòi A và vòi C chảy đầy bể trong 43 phút. Vòi C và vòi B chảy đầy bể trong 56 phút.

a) Hỏi mỗi vòi chảy sau bao lâu thì đầy bể? Cả ba vòi cùng mở một lúc thì sau bao lâu đầy bể?

b) Biết vòi C chảy 10 lít ít hơn mỗi phút so với vòi A và vòi B. Tính sức chứa của bể và sức chảy của mỗi vòi?

Hướng dẫn

Gọi thời gian vòi A chảy một mình đầy bể là x (mỗi phút chảy đầy bể là $\frac{1}{x}$)

Thời gian vòi B chảy một mình đầy bể là y (mỗi phút chảy đầy bể là $\frac{1}{y}$)

Thời gian vòi C chảy một mình đầy bể là z (mỗi phút chảy đầy bể là $\frac{1}{z}$)

+) Trong 1 phút: Vòi A chảy được $\frac{1}{x}$ (bể), vòi B chảy được $\frac{1}{y}$ (bể)

$$\text{Cả hai vòi chảy được: } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{72} \text{ (bể)} \quad (1)$$

+) Trong 1 phút vòi A chảy được $\frac{1}{x}$ (bể), vòi C chảy được $\frac{1}{z}$ (bể)

$$\text{Cả hai vòi chảy được } \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{63} \text{ (bể)} \quad (2)$$

+) Trong 1 phút vòi C chảy được $\frac{1}{z}$ (bể), vòi B chảy được $\frac{1}{y}$ (bể) (3)

$$\text{Từ (1),(2),(3) ta có hệ phương trình sau: } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{72} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{63} \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{y} = \frac{1}{56} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 168(TM) \\ y = 126(TM) \\ z = \frac{504}{5}(TM) \end{cases}$$

Vậy thời gian vòi A chảy một mình đầy bể là 168 phút

thời gian vòi B chảy một mình đầy bể là 126 phút

thời gian vòi C chảy một mình đầy bể là $\frac{504}{5}$ phút

Nếu ba vòi cùng mở một lúc thì mỗi phút đầy về là: $\frac{5+4+3}{504} = \frac{12}{504}$

Vậy ba vòi cùng chảy đầy bể sau $\frac{504}{12}$ phút

b) Gọi dung tích của bể là t phút thì mỗi phút vòi C chảy được $\frac{5}{504}.t$ lít, Vòi A và vòi B

chảy được $\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{504}\right).t$ lít. Theo đề bài ta có phương trình :

$$\frac{5}{504}.t + 10 = \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{504}\right).t \Rightarrow t = 2520(\text{lit})$$

Sức chảy của vòi A là : $\frac{3.2520}{504} = 15(\text{lit} / p)$

Sức chảy vòi B là : $\frac{4.2520}{504} = 20(\text{lit} / p)$

Sức chảy của vòi C là: $\frac{5.2520}{504} = 25(\text{lit} / p)$

Ví dụ 6: Hai công nhân làm một công việc trong 18h thì xong. Nếu người thứ nhất làm 6h và người thứ hai làm 12h thì chỉ hoàn thành 50 phần trăm công việc. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi người hoàn thành công việc đó trong bao lâu?

Hướng dẫn

Gọi ý hệ phương trình biểu diễn các đại lượng là:
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{18} \\ \frac{6}{x} + \frac{12}{y} = \frac{50}{100} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 36(TM) \\ y = 36(TM) \end{cases}$$

Ví dụ 7: Hai vòi nước chảy vào một bể không có nước thì sau 1h30 phút sẽ đầy bể. Nếu mở vòi I chảy trong 15 phút rồi khóa lại và mở vòi thứ II trong 20 phút thì được $\frac{1}{5}$ bể.

Hỏi nếu mỗi vòi chảy riêng thì bao lâu đầy bể?

Hướng dẫn

Gọi ý hệ phương trình biểu diễn các đại lượng
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4x} + \frac{1}{3y} = \frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{15}{4}(TM) \\ y = \frac{5}{2}(TM) \end{cases}$$

Ví dụ 8: Hai người thợ cùng làm một công việc trong 16 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm một mình trong 15 giờ rồi người thứ hai làm tiếp 6 giờ thì hoàn thành được 75 phần trăm công việc. Hỏi mỗi người làm công việc đó một mình hoàn thành trong bao lâu?

Hướng dẫn

Gọi ý hệ phương trình biểu diễn các đại lượng
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{16} \\ \frac{15}{x} + \frac{6}{y} = \frac{75}{100} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 24(TM) \\ y = 48(TM) \end{cases}$$

Ví dụ 9: Để hoàn thành một công việc, hai tổ phải làm chung trong 6 giờ. Sau 2 giờ làm chung thì tổ hai được điều đi làm việc khác, tổ một đã hoàn thành công việc còn lại trong 10 giờ. Hỏi nếu mỗi tổ làm riêng thì sau lâu hoàn thành công việc đó.

Hướng dẫn

Gọi ý hệ phương trình biểu diễn các đại lượng
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \\ 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \frac{10}{x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15(TM) \\ y = 10(TM) \end{cases}$$

Ví dụ 10: Hai người làm chung một công việc trong 7 giờ 12 phút thì xong. Nếu người thứ nhất làm trong 5 giờ và người thứ hai làm trong 6 giờ thì cả hai chỉ làm được $\frac{3}{4}$

công việc. Hỏi mỗi người làm một mình trong thời gian bao lâu hoàn thành công việc đó?

Hướng dẫn

Gọi ý hệ phương trình biểu diễn các đại lượng
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{36} \\ \frac{5}{x} + \frac{6}{y} = \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12(TM) \\ y = 18(TM) \end{cases}$$

Ví dụ 11: Hai vòi nước cùng chảy thì sau 5h50 phút sẽ đầy bể. Nếu hai vòi chảy trong 5 giờ rồi khóa vòi thứ nhất lại thì vòi thứ hai chảy trong 2 giờ nữa mới đầy bể. Tính xem nếu để mỗi vòi chảy một mình thì trong bao lâu sẽ đầy bể?

Gọi ý hệ phương trình biểu diễn các đại lượng
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{6}{35} \\ 5 \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) + \frac{2}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10(TM) \\ y = 14(TM) \end{cases}$$

Dạng 6: BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN SỰ THAY ĐỔI THỪA SỐ GIỮA CÁC TÍCH

Ví dụ 1: Trong một ngôi trường có một số ghế băng, mỗi ghế băng quy định một số người như nhau. Nếu bớt hai ghế băng và mỗi ghế băng thêm 1 người thì thêm được 8 chỗ. Nếu thêm 3 ghế băng và mỗi ghế băng rút 1 người thì giảm 8 chỗ. Tính số ghế băng trong hội trường và số người theo quy định ngồi trong một ghế.

Gọi số ghế băng trong hội trường là x (cái) ($x > 0$)

Số người quy định ngồi trên một ghế băng là y ($y > 0$) (người)

Số chỗ ngồi quy định trong hội trường là xy (chỗ)

+) Nếu bớt hai ghế băng và mỗi ghế băng thêm 1 người thì thêm được 8 chỗ thì

$$(x-2)(y+1) = xy + 8, \Rightarrow x - 2y = 10 \quad (1)$$

+ Nếu thêm 3 ghế băng và mỗi ghế băng rút 1 người thì giảm 8 chỗ

$$(x+3)(y-1) = xy + 8 \Rightarrow x - 3y = 5 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} x - 2y = 10 \\ x - 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20(TM) \\ y = 5(TM) \end{cases}$$

Vậy số ghế băng là 20 cái, mỗi ghế quy định ngồi 5 người.

Ví dụ 2: Một ô tô đi quang đường AB với vận tốc 50km/h, rồi đi tiếp quang đường BC với vận tốc 45 km/h. Biết quãng đường tổng cộng dài 165 km và thời gian ô tô đi hết quãng đường AB ít hơn thời gian ô tô đi trên quãng đường BC là 30 phút.

Hướng dẫn

Làm sai bài

Dạng 7: DẠNG TOÁN CHUYỂN ĐỘNG**Phương pháp:** $S = v.t$ trong đó+) S là quãng đường (m, km)+ v là vận tốc (m/s; km/h)+ t là thời gian (s, phút, h)**- Nếu chuyển động trong dòng chảy thì:**

+) $V_{xui} = V_{rieng} + V_{nuoc}$

+) $V_{nguc} = V_{rieng} - V_{nuoc}$

Ví dụ 1: Một ô tô đi quãng đường AB với vận tốc 50km/h rồi đi tiếp quãng đường BC với vận tốc 45km/h . Biết quãng đường tổng cộng dài 165km và thời gian ô tô đi trên quãng đường AB ít hơn thời gian đi trên quãng đường BC là 30 phút. Tính thời gian ô tô đi trên mỗi quãng đường.

Hướng dẫn

Gọi thời gian ô tô đi trên quãng đường AB là x (giờ, $x > 0$)Gọi thời gian ô tô đi trên quãng đường BC là y (giờ, $y > 0$)Độ dài quãng đường AB là $50x$ (km)Độ dài quãng đường BC là $45y$ (km)Vì quãng đường tổng cộng dài 165km nên ta có phương trình:

$$50x + 45y = 165 \Leftrightarrow 10x + 9y = 33 \quad (1)$$

Thời gian ô tô đi trên quãng đường AB ít hơn thời gian đi trên quãng đường BC là 30 phút nên ta có phương trình: $x + \frac{1}{2} = y \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} 10x + 9y = 33 \\ y = x + \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \text{ (tm)} \\ y = 2 \text{ (tm)} \end{cases}$$

Vậy thời gian ô tô đi trên quãng đường AB là $\frac{3}{2}$ (giờ), thời gian ô tô đi trên quãng đường BC là 2 (giờ)

Ví dụ 2. Quãng đường AB dài 650km . Hai ô tô khởi hành từ A đến B đi ngược chiều nhau. Nếu cùng khởi hành thì sau 10 giờ chúng gặp nhau và nếu xe đi từ B khởi hành trước xe kia 4 giờ 20 phút thì hai xe gặp nhau sau khi xe đi từ A khởi hành được 8 giờ. Tính vận tốc mỗi xe.

Hướng dẫn

Gọi thời gian ô tô đi trên quãng đường AB là x (giờ, $x > 0$)

Gọi thời gian ô tô đi trên quãng đường BC là y (giờ, $y > 0$)

Độ dài quãng đường AB là $50x$ (km)

Độ dài quãng đường BC là $45y$ (km)

Vì quãng đường tổng cộng dài 165km nên ta có phương trình:

$$50x + 45y = 165 \Leftrightarrow 10x + 9y = 33 \quad (1)$$

Thời gian ô tô đi trên quãng đường AB ít hơn thời gian đi trên quãng đường BC là 30 phút nên ta có phương trình: $x + \frac{1}{2} = y \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} 10x + 9y = 33 \\ y = x + \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \quad (tm) \\ y = 2 \quad (tm) \end{cases}$$

Vậy thời gian ô tô đi trên quãng đường AB là $\frac{3}{2}$ (giờ), thời gian ô tô đi trên quãng đường BC là 2 (giờ)

Ví dụ 3: Một ca nô chạy xuôi dòng một khúc sông dài 60 km , sau đó chạy ngược dòng 48 km trên khúc sông đó thì hết 6 giờ. Nếu ca nô ấy chạy xuôi dòng 40 km và ngược dòng 80 km trên khúc sông đó thì hết 7 giờ. Tính vận tốc riêng của ca nô và dòng nước.

Hướng dẫn

Gọi vận tốc riêng của ca nô là x (km/giờ, $x > 0$).

Gọi vận tốc riêng của dòng nước là y (km/giờ, $y > 0$).

Vận tốc ca nô chạy xuôi dòng là $x + y$ (km/giờ)

Vận tốc ca nô chạy ngược dòng là $x - y$ (km/giờ)

Thời gian ca nô chạy xuôi dòng 60 km là $\frac{60}{x+y}$ h

Thời gian ca nô chạy ngược dòng 48 km là $\frac{48}{x-y}$ h

Ta có phương trình: $\frac{60}{x+y} + \frac{48}{x-y} = 6 \Leftrightarrow \frac{10}{x+y} + \frac{8}{x-y} = 1 \quad (1)$

Tương tự ta có phương trình: $\frac{40}{x+y} + \frac{80}{x-y} = 7 \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} \frac{10}{x+y} + \frac{8}{x-y} = 1 \\ \frac{40}{x+y} + \frac{80}{x-y} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 18(tm) \\ y = 2(tm) \end{cases}$$

Vậy vận tốc riêng của ca nô là 18 (km/h) , vận tốc riêng của dòng nước là 2 (km/h) .

Ví dụ 4: Một chiếc thuyền xuôi, ngược trên một khúc sông dài 40 km hết $4 \text{ giờ } 30 \text{ phút}$. Cho thời gian thuyền xuôi dòng 5 km bằng thời gian thuyền ngược dòng 4 km . Tính vận tốc của dòng nước.

Ví dụ 5: Tìm vận tốc và chiều dài của 1 đoàn tàu hỏa biết đoàn tàu ấy chạy ngang qua văn phòng ga từ đầu máy đến hết toa cuối cùng mất 7 giây . Cho biết sân ga dài 378 m và thời gian kể từ khi đầu máy bắt đầu vào sân ga cho tới khi toa cuối cùng rời khỏi sân ga là 25 giây .

Hướng dẫn

Gọi vận tốc của tàu khi vào sân ga là $x \text{ (m/s, } x > 0)$.

Gọi chiều dài của đoàn tàu là $y \text{ (m, } y > 0)$.

Tàu chạy ngang văn phòng ga mất 7 giây nên $y = 7x \quad (1)$

Khi đầu máy bắt đầu vào sân ga dài 378 m , cho tới khi toa cuối cùng rời khỏi sân ga là 25 giây ta có phương trình:

$$y + 378 = 25x \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} y = 7x \\ y + 378 = 25x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 21(tm) \\ y = 147(tm) \end{cases}$$

Vậy vận tốc của đoàn tàu là 21 (m/s) , chiều dài của đoàn tàu là 147 (m)

Ví dụ 6: Một chiếc thuyền xuôi, ngược dòng trên một khúc sông dài 40 km hết $4 \text{ giờ } 30 \text{ phút}$. Biết thời gian thuyền xuôi dòng 5 km bằng thời gian thuyền ngược ngược dòng 4 km . Tính vận tốc dòng nước.

Hướng dẫn

Gọi vận tốc riêng của thuyền lúc nước yên lặng là x (km/giờ, $x > 0$).

Gọi vận tốc riêng của dòng nước là y (km/giờ, $y > 0$).

Vận tốc thuyền chạy xuôi dòng là $x + y$ (km/giờ).

Vận tốc thuyền chạy ngược dòng là $x - y$ (km/giờ).

Thời gian thuyền chạy xuôi dòng 40 km là $\frac{40}{x+y}$ h

Thời gian thuyền chạy ngược dòng 40 km là $\frac{40}{x-y}$ h

Ta có phương trình: $\frac{40}{x+y} + \frac{40}{x-y} = \frac{9}{2}$ (1)

Tương tự ta có phương trình: $\frac{5}{x+y} = \frac{4}{x-y}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} \frac{40}{x+y} + \frac{40}{x-y} = \frac{9}{2} \\ \frac{5}{x+y} = \frac{4}{x-y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 18 (tm) \\ y = 2 (tm) \end{cases}$$

Vậy vận tốc riêng của thuyền là 18 (km/h), vận tốc riêng của dòng nước là 2 (km/h).

Vi dụ 7: Trên một đường tròn chu vi 1,2m, ta lấy một điểm A cố định. Hai điểm M, N chạy trên đường tròn, cùng khởi hành từ A với vận tốc không đổi. Nếu chúng di chuyển trái chiều nhau thì chúng gặp nhau sau mỗi 15 giây. Nếu di chuyển cùng chiều thì điểm M sẽ vượt điểm N đúng một vòng 60 giây. Tìm vận tốc mỗi điểm M, N ?

Hướng dẫn

Gọi vận tốc của điểm M là x (m/s, $x > 0$).

Gọi vận tốc của điểm N là y (m/s, $y > 0$).

Khi chúng di chuyển trái chiều nhau thì chúng gặp nhau sau mỗi 15 giây

Ta có phương trình: $15x + 15y = 1,2$ (1)

Khi chúng di chuyển cùng chiều thì điểm M sẽ vượt điểm N đúng một vòng sau 60 giây ta có phương trình:

$$60x - 60y = 1,2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} 15x + 15y = 1,2 \\ 60x - 60y = 1,2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0,05(tm) \\ y = 0,03(tm) \end{cases}$$

Vậy vận tốc của điểm M là $0,05 (m/s)$, vận tốc của điểm N là $0,03 (m/s)$

Ví dụ 8: Một chiếc xe máy và ô tô đi từ A đến B với vận tốc khác nhau. Vận tốc xe máy là 62 km/giờ , còn vận tốc ô tô là 55 km/giờ . Để hai xe đến đích cùng một lúc người ta đã cho ô tô chạy trước một thời gian. Nhưng vì một lí do đặc biệt nên khi chạy được $\frac{2}{3}$ quãng đường ô tô buộc phải chạy với vận tốc $27,5 \text{ km/giờ}$. Vì vậy khi còn cách B 124 km thì xe máy đuổi kịp ô tô. Tính quãng đường từ A đến B.

Hướng dẫn

Gọi khoảng cách AB là $x (km, x > 0)$.

Gọi thời gian dự định ô tô đi trước xe máy là $y (h, y > 0)$.

Ta có hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} \frac{x}{62} + y = \frac{x}{55} \\ \frac{\frac{2}{3}x}{65} + \frac{\frac{x}{3} - 124}{27,5} = y + \frac{x - 124}{27,5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 514(tm) \\ x = 1\frac{94}{1705}(tm) \end{cases}$$

Vậy khoảng cách AB là $514(km)$, thời gian dự định ô tô đi trước xe máy là $1\frac{94}{1705}(h)$

Ta có hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} \frac{x}{62} + y = \frac{x}{55} \\ \frac{\frac{2}{3}x}{65} + \frac{\frac{x}{3} - 124}{27,5} = y + \frac{x - 124}{62} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 514(t/m) \\ y = 1\frac{94}{1705}(t/m) \end{cases}$$

Vậy khoảng cách AB là $154(km)$, thời gian dự định ô tô đi trước xe máy là $1\frac{94}{1705}(h)$

Ví dụ 9: Hai ô tô khởi hành cùng một lúc trên quãng đường từ A đến B dài 120km . Mỗi giờ ô tô thứ nhất chạy nhanh hơn ô tô thứ hai là 10km nên đến B trước ô tô thứ hai là $0,4$ giờ. Tính vận tốc của mỗi ô tô.

Hướng dẫn

Gọi vận tốc của ô tô thứ nhất là $x(\text{km}/\text{h}, x > 0)$

Gọi vận tốc của ô tô thứ hai là $y(\text{km}/\text{h}, y > 0)$

Ta có hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} x - y = 10 \\ \frac{120}{x} + 0,4 = \frac{120}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 60(t/m) \\ y = 50(t/m) \end{cases}$$

Vậy vận tốc của ô tô thứ nhất là $60\text{km}/\text{h}$, vận tốc của ô tô thứ hai là $50\text{km}/\text{h}$

Ví dụ 10: Một ca nô đi từ A đến B với vận tốc và thời gian dự định. Nếu ca nô tăng vận tốc thêm $3\text{km}/\text{h}$ thì thời gian rút ngắn được 2 giờ. Nếu ca nô giảm vận tốc đi $3\text{km}/\text{h}$ thì thời gian tăng 3 giờ. Tính vận tốc và thời gian dự định của ca nô.

Hướng dẫn

Gọi vận tốc dự định của ca nô là $x(\text{km}/\text{h}, x > 0)$

Gọi thời gian dự định của ca nô là y (giờ, $y > 0$)

Ta có hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} (x+3)(y-2) = xy \\ (x-3)(y+3) = xy \end{cases} \begin{cases} x = 15(t/m) \\ y = 12(t/m) \end{cases}$$

Vậy vận tốc dự định của ca nô là $15\text{km}/\text{h}$

Thời gian dự định của ca nô là 12 giờ

Ví dụ 11: Một ca nô chạy trên sông trong 8 giờ xuôi dòng được 81km và ngược dòng 105km . Một lần khác, ca nô chạy trên sông trong 4 giờ xuôi dòng được 54km và ngược dòng 42km . Tính vận tốc riêng của ca nô và vận tốc dòng nước. (Biết vận tốc riêng của ca nô, vận tốc dòng nước không đổi)

Hướng dẫn

Gọi vận tốc riêng của ca nô là $x(\text{km}/\text{h}, x > 0)$

Vận tốc dòng nước là $y(\text{km}/\text{h}, x > y > 0)$

Ta có hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} \frac{81}{x+y} + \frac{105}{x-y} = 8 \\ \frac{54}{x+y} + \frac{42}{x-y} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 24(t/m) \\ y = 3(t/m) \end{cases}$$

Vận tốc riêng của ca nô là 24km/h ; vận tốc dòng nước là 3km/h

Ví dụ 12: Một xe máy đi từ A đến B trong thời gian đã định. Nếu đi với vận tốc 45 km/h sẽ tới B chậm mất nửa giờ. Nếu đi với vận tốc 60 km/h sẽ tới B sớm 45 phút. Tính quãng đường AB và thời gian dự định.

Hướng dẫn:

Gọi quãng đường AB là x (km; $x > 0$)

Thời gian dự định đi từ A đến B là y ($y > 0$; h)

Ta có hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} x = 45 \cdot \left(y + \frac{1}{2}\right) \\ x = 60 \cdot \left(y - \frac{3}{4}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 225 \\ y = 4,5 \end{cases} (tm)$$

Vận tốc riêng của ca nô là 225 (km) .

Thời gian dự định từ A đến B là 4,5 giờ.

Ví dụ 13: Một ca nô xuôi dòng 81 km và ngược dòng 42 km mất 5 giờ. Một lần khác, ca nô xuôi dòng 9 km và ngược dòng 7 km thì mất 40 phút. Tính vận tốc riêng của ca nô và vận tốc dòng nước. (Biết vận tốc riêng của ca nô, vận tốc của dòng nước không đổi.)

Hướng dẫn

Gọi vận tốc riêng của ca nô là x (km/h; $x > 0$).

Vận tốc dòng nước là y (km/h; $y > x > 0$)

Ta có hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} \frac{81}{x+y} + \frac{42}{x-y} = 5 \\ \frac{9}{x+y} + \frac{7}{x-y} = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 24 \\ y = 3 \end{cases} (tm)$$

Vận tốc dự định của ca nô là 24 km/h .

Vận tốc dòng nước 3 km/h.

Ví dụ 14: Một ô tô đi từ Hà Nội và dự định đến Huế lúc 20h 30 phút. Nếu đi với vận tốc 45 km/h thì đến Huế chậm hơn so với dự định là 2 giờ. Nếu xe chạy với vận tốc 60 km/h thì đến Huế sớm hơn 2 giờ so với dự định. Tính độ dài quãng đường Hà Nội – Huế và thời gian xe xuất phát từ Hà Nội.

Hướng dẫn

Gọi quãng đường Hà Nội – Huế là x (km; $x > 0$).

Thời gian ô tô dự định đi là y (giờ; $y > 0$).

Ta có hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} x = 60 \cdot (y - 2) \\ x = 45 \cdot (y + 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 720 \\ y = 14 \end{cases} \quad (tm)$$

Vậy quãng đường Hà Nội – Huế là 720 (km/h).

Thời gian xe xuất phát từ Hà Nội là 20h30 phút – 14h = 6h30 phút.

Ví dụ 15: Hai địa điểm A và B cách nhau 36km. Cùng lúc đó một xe tải khởi hành từ A chạy về B và một xe con chạy từ B chạy về A. Sau khi gặp nhau xe tải chạy tiếp 5 giờ nữa thì đến B và xe con chạy tiếp 3h12 phút thì tới A. Tính vận tốc mỗi xe.

Hướng dẫn

Gọi vận tốc của xe tải x (km/h; $x > 0$).

Vận tốc của xe con là y (km/h; $y > 0$)

Ta có hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} 5x + \frac{16}{5}y = 360 \\ \frac{16}{5}y = \frac{5x}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 \\ y = 50 \end{cases} \quad (tm)$$

Vậy vận tốc của xe tải là 40 km/h.

Vậy vận tốc của xe con là 50 km/h.

Ví dụ 16.

Một bè nứa trôi tự do (với vận tốc bằng vận tốc của dòng nước) và một ca nô cùng rời bến A để xuôi dòng. Ca nô xuôi dòng được 144 km thì quay lại trở về bến A ngay, cả

đi lần về 21 giờ. Trên đường ca nô trở về bến A khi còn cách bến A là 35 km thì gặp bè nứa trôi trên. Tính vận tốc riêng của ca nô và vận tốc của dòng nước.

Hướng dẫn

Gọi vận tốc riêng của ca nô là x (km/h; $x > 3$).

Vận tốc dòng nước là y (km/h; $y > x > 0$)

Ta có hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} \frac{144}{x+y} + \frac{144}{x-y} = 21 \\ \frac{144}{x+y} + \frac{144-36}{x-y} = \frac{36}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=14 \\ y=3 \end{cases} (tm)$$

Vậy vận tốc dự định của ca nô là 14km/h.

Vận tốc dòng nước 2 km/h.

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Bài 1. Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng chữ số hàng chục hơn chữ số hàng đơn vị là 2 và nếu viết thêm chữ số hàng chục vào bên phải thì được một số mới lớn hơn số ban đầu là 682 .

- A. 75 B. 85 C. 95 D. 65

Bài 2. Có hai số tự nhiên, biết rằng tổng của hai số là 59 . hai lần số này bé hơn ba lần số kia là 7 . Tìm hai số đó.

- A. 30,35 B. 25,34 C. 30,34 D. 25,35

Bài 3. Cho một số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng tổng của hai chữ số là 10, tích của hai chữ số là 12. Tìm số đã cho.

- A.26 B.27 C.28 D.29

Bài 4. Một hình chữ nhật có chu vi là 280 m . Nếu giảm chiều dài của hình chữ nhật đi 2m và tăng chiều rộng thêm 3 m thì diện tích nó tăng thêm 144 m² . Tính chiều rộng và chiều dài của hình chữ nhật.

- A.45,86 B.45,68 C.55,68 D.54,86

Bài 5. Một khu vườn hình chữ nhật có chu vi là 320m . Nếu chiều dài của hình chữ nhật tăng thêm 10 m và giảm chiều rộng đi 5 m thì diện tích nó tăng thêm 50 m² . Tính diện tích của khu vườn ban đầu.

A. $3000m^2$ B. $6000m^2$ C. $9000m^2$ D. $10000m^2$

Bài 6. Một sân trường hình chữ nhật có chu vi là $160m$ và diện tích là $1500 m^2$. Chiều rộng và chiều dài của hình chữ nhật lần lượt là.

A. $20; 75$ B. $25; 60$ C. $10; 150$ D. $30; 50$.

Bài 7. Một sân trường hình chữ nhật có chu vi là $340m$, ba lần chiều dài hơn bốn lần chiều rộng là $20m$. Tính diện tích của sân trường.

A. $3000m^2$ B. $4000m^2$ C. $6000m^2$ D. $7000m^2$

Bài 8. Cho một tam giác vuông. Nếu tăng các cạnh góc vuông lên $4cm$ và $5cm$ thì diện tích tam giác sẽ tăng thêm $110 cm^2$. Nếu giảm cả hai cạnh này đi $5cm$ thì diện tích sẽ giảm đi $100cm^2$. Tính hai cạnh góc vuông của tam giác.

A. $20cm, 25cm$ B. $25cm, 25 cm$ C. $20cm, 20cm$ D. $30cm, 35cm$

Bài 9. Cho tam giác vuông có cạnh huyền bằng $5 cm$, diện tích bằng $6 cm^2$. Tính độ dài các cạnh góc vuông.

A. $3cm, 4cm$

B. $3cm, 4cm$ hoặc $4cm, 3cm$.

C. $4cm, 5cm$ hoặc $5cm, 4cm$

D. $5cm, 4cm$

Bài 10. Hai vòi nước cùng chảy vào một cái bể không chứa nước trong 4 giờ 48 phút thì đầy bể. Nếu để mở vòi thứ nhất chảy 3 giờ và vòi thứ hai chảy trong 4 giờ thì được $\frac{3}{4}$ bể. Hỏi vòi một và vòi hai theo thứ tự chảy một mình trong bao lâu thì mới đầy bể?

A. $12h, 8h$ B. $8h, 12h$ C. $9h, 15h$ D. $15h, 9h$.

Bài 11. Hai vòi nước cùng chảy vào một cái bể không có nước trong 1 giờ 20 phút thì đầy bể. Nếu để vòi thứ nhất chảy một mình trong 10 phút và vòi thứ hai chảy một mình trong 12 phút thì được $\frac{2}{15}$ thể tích của bể nước. Hỏi mỗi vòi chảy một mình trong bao lâu sẽ đầy bể?

A. Vòi một chảy đầy bể sau $2h$, vòi hai chảy đầy bể sau $8h$.

B. Vòi một chảy đầy bể sau $8h$, vòi hai chảy đầy bể sau $2h$.

C. Vòi một chảy đầy bể sau $4h$, vòi hai chảy đầy bể sau $2h$.

D. Vòi một chảy đầy bể sau $2h$, vòi hai chảy đầy bể sau $4h$

Bài 12. Hai vòi nước cùng chảy vào một bể cạn chưa có nước thì sau 18 giờ đầy bể. Nếu chảy riêng thì vòi thứ nhất sẽ chảy đầy bể chậm hơn vòi thứ hai 27 giờ. Hỏi nếu chảy riêng thì mỗi vòi mất bao lâu mới chảy đầy bể?

A. Vòi thứ nhất chảy riêng đầy bể trong $425h$, vòi thứ hai chảy riêng đầy bể trong $27h$.

B. Vòi thứ nhất chảy riêng đầy bể trong $542h$, vòi thứ hai chảy riêng đầy bể trong $72h$.

C. Vòi thứ nhất chảy riêng đầy bể trong $524h$, vòi thứ hai chảy riêng đầy bể trong $27h$.

D. Vòi thứ nhất chảy riêng đầy bể trong $542h$, vòi thứ hai chảy riêng đầy bể trong $27h$.

.....HẾT.....

ĐÁP ÁN

1 A	3 C	5 B	7 D	9 B	11 D
2 B	4 D	6 D	8 A	10 A	12 D

MỘT SỐ ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Ví dụ: (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2011-2012)

Một đội xe theo kế hoạch chở hết 140 tấn hàng trong một số ngày quy định. Do mỗi ngày đội đó chở vượt mức 5 tấn nên đội đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn thời gian quy định 1 ngày và chở thêm được 10 tấn. Hỏi theo kế hoạch đội xe phải chở hàng hết bao nhiêu ngày?

Ví dụ: (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2012-2013)

Hai người cùng làm chung một công việc trong $\frac{12}{15}$ giờ thì xong. Nếu mỗi người làm một mình thì thời gian để người thứ nhất hoàn thành công việc ít hơn người thứ hai là 2 giờ. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người phải làm trong bao nhiêu giờ để xong công việc?

Ví dụ: (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2013-2014)

Quãng đường từ A đến B dài 90 km. Một người đi xe máy từ A đến B, khi đến B người đó nghỉ 30 phút rồi quay trở lại A với vận tốc lớn hơn vận tốc lúc đi là 9 km/h. Thời gian kể từ lúc bắt đầu đi từ A đến lúc trở về đến A là 5 giờ. Tính vận tốc của xe máy lúc đi từ A đến B?

Ví dụ: (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2014-2015)

Một phân xưởng theo kế hoạch cần phải sản xuất 1100 sản phẩm trong một số ngày quy định. Do mỗi ngày phân xưởng đó sản xuất vượt mức 5 sản phẩm nên phân xưởng đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn thời gian quy định 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày phân xưởng phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm?

Ví dụ: (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2015-2016)

Một tàu tuần tra chạy ngược dòng 60km, sau đó chạy xuôi dòng 48km trên cùng một dòng sông có vận tốc dòng nước là 2km/h. tính vận tốc của tàu tuần tra khi nước yên lặng, biết thời gian xuôi dòng ít hơn thời gian ngược dòng là 1 giờ.

Ví dụ: (THI THỬ 10: - THPT Hà Nội, năm học 2015-2016)

Hai khối 8 và 9 của một trường THCS có 420 học sinh có học lực trên trung bình đạt tỉ lệ 84%. Khối 8 đạt tỉ lệ 80% là học sinh trên trung bình, khối 9 đạt 90%. Tính số học sinh của mỗi khối.

Ví dụ: (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2016-2017)

Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích $720cm^2$. Nếu tăng chiều dài thêm 10m và giảm chiều rộng 6m thì diện tích mảnh vườn không đổi. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn.

Ví dụ: (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2017-2018)

Một xe ô tô và một xe máy cùng khởi hành từ A để đi đến B với vận tốc của mỗi xe không đổi trên toàn bộ quãng đường AB dài 120km. Do vận tốc xe ô tô lớn hơn vận tốc xe máy là 10km/h nên xe ô tô đến B sớm hơn xe máy 36 phút. Tính vận tốc mỗi xe.

Ví dụ: (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2018-2019)

Một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi bằng 28 mét và độ dài đường chéo bằng 10 mét. Tính chiều dài, chiều rộng của mảnh đất đó theo đơn vị mét.

CHƯƠNG III: PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI- ĐƯỜNG THẲNG- PARABOL

A. LÝ THUYẾT :

1. Hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$)

* Hàm số bậc nhất $y = ax + b$ ($a \neq 0$)

+ Đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $a > 0$

+ Nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $a < 0$

* Đồ thị hàm số bậc nhất là một đường thẳng

+) Với $b = 0$ thì đường thẳng đi qua các điểm $(0; 0)$ và $(1; a)$

+) Với $b \neq 0$ thì đường thẳng cắt trục hoành và trục tung lần lượt tại các điểm $\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$ và $(0; b)$

* Hệ số góc của đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$)

+) Nếu $a \geq 0$: góc tạo bởi trục Ox và d là góc nhọn α và $a = \tan \alpha$.

+) Nếu $a < 0$: góc tạo bởi trục Ox và d là góc tù α và $a = -\tan(180^\circ - \alpha)$.

* Vị trí tương đối của hai đường thẳng d: $y = ax + b$ và d': $y = a'x + b'$

+) $d \equiv d' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$

+) $d // d' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b \neq b' \end{cases}$

+) $d \cap d' \Leftrightarrow a \neq a'$

+) $d \perp d' \Leftrightarrow a.a' = -1$

Chú ý: Độ dài đoạn thẳng AB với $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ là $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

2. Hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

* Hàm số này có tập xác định $\forall x \in \mathbb{R}$

* Nếu $a > 0$ thì hàm số nghịch biến khi $x < 0$ và đồng biến khi $x > 0$

* Nếu $a < 0$ thì hàm số nghịch biến khi $x > 0$ và đồng biến khi $x < 0$

* Nếu $a > 0$ thì $y > 0 \forall x \neq 0$

+) $y = 0$ khi $x = 0$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $y = 0$.

* Nếu $a < 0$ thì $y < 0 \forall x \neq 0$

+) $y = 0$ khi $x = 0$. Giá trị lớn nhất của hàm số là $y = 0$.

- **Đồ thị của hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$)**

* Đồ thị của hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) là một đường cong đi qua gốc tọa độ và nhận trục Oy làm trục đối xứng. Đường cong đó được gọi là một Parabol với đỉnh O.

* Nếu $a > 0$ thì đồ thị nằm phía trên trục hoành, O là điểm thấp nhất của đồ thị.

* Nếu $a < 0$ thì đồ thị nằm phía dưới trục hoành, O là điểm cao nhất của đồ thị.

3. Phương trình bậc hai một ẩn :

Phương trình bậc hai một ẩn là phương trình có dạng $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) trong đó x là ẩn số, a, b, c là các hệ số.

- Công thức nghiệm của phương trình bậc hai.

Xét phương trình $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) và biểu thức $\Delta = b^2 - 4ac$

* Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

* Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép : $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$

* Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Chú ý: Nếu $ac < 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Đối với phương trình $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) có $b = 2b'$ và biểu thức $\Delta' = b'^2 - ac$

* Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}; x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$$

* Nếu $\Delta' = 0$ thì phương trình có nghiệm kép : $x_1 = x_2 = \frac{-b'}{a}$

* Nếu $\Delta' < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

4. Hệ thức VI – ÉT và ứng dụng :

* Nếu x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) thì
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

* Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có $a + b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = 1$, còn nghiệm kia là $x_2 = \frac{c}{a}$

* Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ có $a - b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = -1$, còn nghiệm kia là $x_2 = -\frac{c}{a}$

* Nếu hai số có tổng bằng S và tích bằng P thì hai số đó là nghiệm của phương trình $x^2 - Sx + P = 0$. Điều kiện để có hai số đó là $S^2 - 4P \geq 0$ (hay $\Delta \geq 0$)

Chú ý: Cách xét dấu các nghiệm của phương trình bậc hai

* Phương trình có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow a.c < 0$

* Phương trình có hai nghiệm cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P = \frac{c}{a} > 0 \end{cases}$

* Phương trình có hai nghiệm cùng dấu dương $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P = \frac{c}{a} > 0 \\ S = \frac{-b}{a} > 0 \end{cases}$

* Phương trình có hai nghiệm cùng dấu âm $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P = \frac{c}{a} > 0 \\ S = \frac{-b}{a} < 0 \end{cases}$

* Phương trình có hai nghiệm trái dấu mà nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn nghiệm dương $\Leftrightarrow \begin{cases} ac < 0 \\ S = \frac{-b}{a} < 0 \end{cases}$

5. Phương trình quy về phương trình bậc hai :

a) Phương trình trùng phương:

Phương trình trùng phương là phương trình có dạng : $ax^4 + bx^2 + c = 0 (a \neq 0)$ (1)

Phương pháp giải : Đặt $t = x^2 (t \geq 0)$ đưa về phương trình $at^2 + bt + c = 0$ (2)

b) Phương trình chứa ẩn ở mẫu thức :

Bước 1: Tìm điều kiện xác định của phương trình.

Bước 2: Quy đồng mẫu thức hai vế rồi khử mẫu.

Bước 3: Giải phương trình vừa nhận được.

Bước 4: Kiểm tra nghiệm với điều kiện rồi kết luận.

c) Phương trình tích :

Bước 1: Phân tích vế trái thành nhân tử, vế phải bằng 0.

Bước 2: Giải phương trình tích.

6. Giải bài toán bằng cách lập phương trình :

Bước 1: Lập hệ phương trình

- Chọn ẩn và đặt điều kiện, chọn đơn vị cho ẩn (chọn ẩn là các đại lượng cần tìm)
- Biểu thị các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết.
- Lập hệ phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

Bước 2: Giải hệ phương trình vừa lập.

Bước 3: Kiểm tra xem các nghiệm của phương trình có thỏa mãn điều kiện đặt ra và trả lời.

Kiến thức cần nhớ 1: $S = v.t$. Trong đó

+) S là quãng đường (m, km)

+) v là vận tốc (m/s , km/h)

+) t là thời gian (s, phút, h)

- Nếu chuyển động trong dòng chảy thì :

$$+) V_{xuôi} = V_{riêng} + V_{dòng nước}$$

$$+) V_{ngược} = V_{riêng} - V_{dòng nước}$$

Kiến thức cần nhớ 2:

- Khối lượng công việc = năng suất $\times$ thời gian
- Năng suất = Khối lượng công việc $\div$ Thời gian
- Thời gian = Khối lượng công việc $\div$ Năng suất.

Kiến thức cần nhớ 3: Coi toàn bộ công việc là 1.

- Năng suất = $1 \div$ Thời gian
- Tổng các năng suất riêng = Năng suất chung

Kiến thức cần nhớ 4 :

- Biểu diễn : $\overline{ab} = 10a + b \quad a, b \in \mathbb{N} \quad (0 < a \leq 9, 0 \leq b \leq 9)$
 $\overline{abc} = 100a + 10b + c \quad a, b, c \in \mathbb{N} \quad (0 < a \leq 9, 0 \leq b, c \leq 9)$
- Tỉ số của hai số a và b ($b \neq 0$) là $\frac{a}{b}$
- Tổng của hai số a và b là: $a + b$.
- Tổng bình phương của hai số a và b là $a^2 + b^2$
- Tổng nghịch đảo của hai số a và b là: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

Kiến thức cần nhớ 5 :

- Định lý Py- ta- go
- Diện tích hình chữ nhật.
- Diện tích hình Thang
- Tính chu vi của các hình.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI :

Dạng 1: TÍNH GIÁ TRỊ CỦA HÀM SỐ $y = f(x) = ax^2$ ($a \neq 0$) tại $x = x_0$

Ví dụ 1: Cho Parabol $y = \frac{1}{3}x^2$. Xác định giá trị m để các điểm sau đây thuộc Parabol

- a) $A(3 ; m)$ b) $B(-3 ; m)$ c) $C(m ; \frac{1}{3})$ d) $D(m ; \frac{m}{3})$

Hướng dẫn giải:

- a) Vì $A \in (P) \Rightarrow y_A = \frac{1}{3}x_A^2 \Rightarrow m = \frac{1}{3}.3^2 = 3$. Vậy $m = 3$
 b) Tương tự có $m = 3$. c) $m = \pm 1$ d) $m = 1; m = 0$

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = 2x^2$ có đồ thị là Parabol (P). Biết điểm A nằm trên (P) có hoành độ bằng $-\frac{1}{2}$. Hãy tính tung độ của điểm A.

Hướng dẫn giải: Vì $A \in (P) \Rightarrow y_A = \frac{1}{3}x_A^2 \Rightarrow y_A = \frac{1}{3}.\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}$

Dạng 2: XÁC ĐỊNH TÍNH ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = (3m - 2)x^2$ ($m \neq \frac{2}{3}$)

- a) Tìm điều kiện của m để hàm số đồng biến khi $x > 0$
 b) Tìm điều kiện của m để hàm số nghịch biến khi $x < 0$.

Hướng dẫn giải:

- a) Hàm số đồng biến khi x và a cùng dấu mà $x > 0 \Rightarrow 3m - 2 > 0 \Rightarrow m > \frac{2}{3}$
 b) Hàm số nghịch biến khi x và a trái dấu mà $x < 0 \Rightarrow 3m - 2 > 0 \Rightarrow m > \frac{2}{3}$

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = (\sqrt{m+2} - 3)x^2$

- a) Tìm điều kiện của m để hàm số đồng biến khi $x > 0$
 b) Tìm điều kiện của m để hàm số nghịch biến khi $x > 0$

Hướng dẫn giải:

- a) Hàm số đồng biến khi x và a cùng dấu mà $x > 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{m+2} - 3 > 0 \\ m \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow m > 7$
 b) Hàm số nghịch biến khi x và a trái dấu mà $x > 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{m+2} - 3 < 0 \\ m \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq m < 7$

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = (m^2 - 2m + 3)x^2$. Chứng minh rằng khi $x > 0$ thì hàm số đồng biến.

Hướng dẫn giải:

Xét $a = m^2 - 2m + 3 = (m-1)^2 + 2 > 0 \quad \forall m; x > 0$ nên a và x cùng dấu

$\Rightarrow x > 0$ thì hàm số đồng biến.

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = f(x) = 2x^2$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số khi:

- a) $0 \leq x \leq 3$ b) $-3 \leq x \leq -1$

Hướng dẫn giải:

- a) Vì $0 \leq x \leq 3 \Rightarrow$ hàm số đồng biến $\Rightarrow y_{\min} = 0$ tại $x = 0$ và $y_{\max} = 18$ tại $x = 3$
 b) Vì $-3 \leq x \leq -1 \Rightarrow$ hàm số nghịch biến $\Rightarrow y_{\min} = 0$ tại $x = 0$ và $y_{\max} = 18$ tại $x = -3$

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = f(x) = (m^2 + m + 1)x^2$

- a) Chứng minh rằng khi $x < 0$ thì hàm số nghịch biến.
 b) Với $m = -2$, tìm các giá trị nguyên của x để $f(x) < 100$.

Hướng dẫn giải:

a) Xét $a = m^2 + m + 1 = \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \quad \forall m$; $x < 0$ nên a và x trái dấu.

$\Rightarrow x < 0$ thì hàm số nghịch biến.

b) $x \in \{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 5\}$

Dạng 3: VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

Ví dụ : Vẽ đồ thị các hàm số sau :

a) $y = \frac{1}{2}x^2$

b) $y = \frac{1}{2}x \cdot |x|$

c) $y = -\frac{1}{3}x^2$

d) $y = \frac{1}{3}x \cdot |x|$

Dạng 4: XÁC ĐỊNH THAM SỐ

Ví dụ 1: Xác định hệ số a của hàm số $y = ax^2$. Biết rằng đồ thị hàm số đi qua điểm A(10;30)

Hướng dẫn giải:

$$\text{Vì } A \in (P) \Rightarrow y_A = ax_A^2 \Rightarrow a = \frac{30}{10^2} = \frac{3}{10} = 0,3$$

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = (k+2)x^2$ có đồ thị cắt đường thẳng $y - 2x + 3 = 0$ tại điểm M(1 ; m). Hãy xác định k và m.

Hướng dẫn giải:

Gọi (P): $y = (k+2)x^2$ và (d): $y - 2x + 3 = 0$

$$\text{Vì } M \in (d) \Rightarrow m = 2 \cdot 1 - 3 \Rightarrow m = -1$$

$$\text{Vì } M \in (P) \Rightarrow -1 = (k+2) \cdot 1^2 \Rightarrow k = -3$$

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = ax + b$. Tìm a và b biết rằng đồ thị hàm số đã cho song song với đường thẳng $y = -3x + 5$ và đi qua điểm A thuộc Parabol (P): $y = \frac{1}{2}x^2$ có hoành độ bằng -2.

Hướng dẫn giải:

Gọi (d) : $y = ax + b$; (d'): $y = -3x + 5$

$$\text{Vì } (d) \parallel (d') \Rightarrow a = -3.$$

$$\text{Vì } A \in (P) \Rightarrow y_A = \frac{1}{2}(-2)^2 = 2 \Rightarrow A(-2; 2)$$

$$\text{Vì } A \in (d) \Rightarrow b = -4$$

Vậy $a = -3$ và $b = -4$.

Dạng 5: TỌA ĐỘ GIAO ĐIỂM CỦA PARABOL VÀ ĐƯỜNG THẲNG

Ví dụ 1: Biện luận theo tham số m số nghiệm của phương trình $2x^2 - 1 = m$ (*)

Hướng dẫn giải:

Xét: $2x^2 - 1 = m \Rightarrow x^2 = \frac{m+1}{2}$

+) Nếu $m = -1 \Rightarrow$ pt (*) có nghiệm $x = 0$

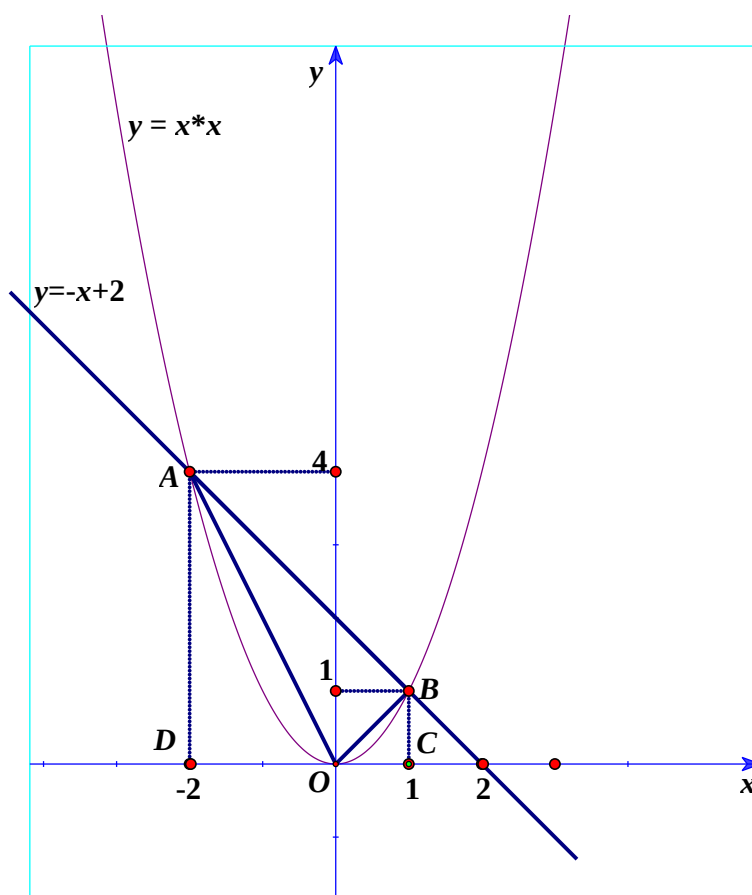
+) Nếu $m > -1$ thì $x = \pm \sqrt{\frac{m+1}{2}}$

+) Nếu $m < -1$ thì pt (*) vô nghiệm

Ví dụ 2: Cho parabol (P) : $y = x^2$ và đường thẳng (d) : $y = -x + 2$

- Vẽ (P) và (d) trên cùng mặt phẳng tọa độ
- Tìm tọa độ giao điểm A và B của (P) và (d) bằng phép tính.
- Tính diện tích ΔAOB (đơn vị trên hai trục là cm)

Hướng dẫn giải:



b) Hoành độ giao điểm của (P) và (d) là nghiệm của phương trình : $x^2 + x - 2 = 0$

Thấy $a + b + c = 0$ nên $x_1 = 1$, $x_2 = -2 \Rightarrow y_1 = 1, y_2 = 4$

Vậy tọa độ giao điểm : B(1,1) và A(-2 ; 4)

c)

$$\begin{aligned} S_{AOB} &= S_{ABCD} - (S_{AOD} + S_{BCO}) \\ \Rightarrow S_{AOB} &= \frac{(AD + BC)DC}{2} - \frac{1}{2}(AD \cdot DO - BC \cdot OC) \\ &= \frac{15}{2} - \frac{8-1}{2} = 3 \text{ (đvđđ)} \end{aligned}$$

Dạng 6 :XÁC ĐỊNH HỆ SỐ a, b, c CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

Ví dụ 1: Đưa các phương trình sau về dạng $ax^2 + bx + c = 0$ và chỉ rõ các hệ số a, b, c

a) $2x^2 - 3x = 4 + 3x$ b) $x^2 - 3x = mx + m$ (m là hằng số) c) $2x^2 + \sqrt{2}(3x - 1) = 1 + \sqrt{2}$

Hướng dẫn giải:

a) $2x^2 - 3x = 4 + 3x$	b) $x^2 - 3x = mx + m$ (m là hằng số)	c) $2x^2 + \sqrt{2}(3x - 1) = 1 + \sqrt{2}$
$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 2 = 0$	$\Leftrightarrow x^2 - (m+3)x - m = 0$	$\Leftrightarrow 2x^2 + 3\sqrt{2}x - 1 - 2\sqrt{2} = 0$
($a=1$; $b=-3$; $c=-2$)	($a=1$; $b=-(m+3)$; $c=-m$)	($a=2$; $b=3\sqrt{2}$; $c=-1-2\sqrt{2}$)

***Ví dụ 2:** Lập phương trình bậc hai có các hệ số hữu tỉ có một nghiệm là $1 + \sqrt{2}$. Xác định các hệ số của phương trình.

Dạng 7 :GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau :

a) $x^2 - 2 = 0$	b) $x^2 - 2x = 0$	c) $2x^2 + 4 = 0$	d) $x^2 - 2x + 1 = 0$
e) $2x^2 + 5x + 3 = 0$	f) $x^2 - x - 12 = 0$	g) $x^2 - 3(x-1)^2 = 0$	h) $x^2 + 6x - 16 = 0$
i) $2x^2 - 6x + 1 = 0$			

Hướng dẫn giải:

a) $x = \pm\sqrt{2}$	b) $x \in \{0 ; 2\}$	c) $x \in \emptyset$	d) $x = 1$
----------------------	----------------------	----------------------	------------

e) $x \in \left\{-1; \frac{-3}{2}\right\}$

f) $x \in \{-3; 4\}$

g) $x^2 - 3(x-1)^2 = 0$

h) $x^2 + 6x - 16 = 0$

i) $2x^2 - 6x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = 3(x-1)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 - 25 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + \frac{1}{2} = 0$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}(x-1)$

$\Leftrightarrow (x+3)^2 = (\pm 5)^2$

$\Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{\pm\sqrt{7}}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3+\sqrt{3}}{2} \\ x = \frac{3-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -8 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3+\sqrt{7}}{2} \\ x = \frac{3-\sqrt{7}}{2} \end{cases}$

Dạng 8: GIẢI VÀ BIỆN LUẬN PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau :

a) $x^2 - 5x - 12 = 0$

b) $x^2 + (\sqrt{3} + \sqrt{2})x + \sqrt{6} = 0$

c) $\frac{x^2}{2} + \frac{2x}{3} = \frac{2x+7}{6}$

Ví dụ 2: Giải và biện luận các phương trình sau :

a) $x^2 - 4x + m + 1 = 0$

b) $(m+1)x^2 - 2(m+1)x + m - 3 = 0$

Dạng 9: GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH HAI ẨN GỒM MỘT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT VÀ MỘT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI.

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình sau : $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x^2 - 3xy + y^2 + 2x + 3y - 2 = 0 \end{cases}$

Ví dụ 2: Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm : $\begin{cases} 2x + y = m \\ x^2 - xy + y^2 = 7 \end{cases}$

Dạng 10: GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CÓ HAI ẨN SỐ:

Ví dụ 1: Giải phương trình sau : $x^2y^4 - 16xy^3 + 68y^2 - 4xy + x^2 = 0$ (1)

Hướng dẫn giải:

$$x^2y^4 - 16xy^3 + 68y^2 - 4xy + x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2y^2 - 16xy + 68 - \frac{4x}{y} + \frac{x^2}{y^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 \left(y^2 + \frac{1}{y^2} \right) - 4x \left(y + \frac{1}{y} \right) + 68 = 0$$

$$\text{Đặt } t = y + \frac{1}{y} \Leftrightarrow y^2 - ty + 1 = 0 (*) \Rightarrow \begin{cases} t \leq -2 \\ t \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } t^2 = y^2 + \frac{1}{y^2} + 2 \Leftrightarrow y^2 + \frac{1}{y^2} = t^2 - 2$$

Ví dụ 2: Với mỗi cặp (x, y) thỏa mãn $x^2 - x^2y - y + 8x + 7 = 0$. Hãy tìm cặp nghiệm mà y lớn nhất.

Dạng 11: HỆ THỨC VI-ÉT VÀ ỨNG DỤNG

Ví dụ 1: Cho phương trình $2x^2 + 2x + m = 0$. Tìm điều kiện của tham số m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 3$.

Hướng dẫn giải:

Để pt $2x^2 + 2x + m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 khác 0

$$\Leftrightarrow \Delta' = 1 - 2m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{2} \text{ và } m \neq 0$$

Theo hệ thức vi-et ta có $x_1 + x_2 = -1; x_1 \cdot x_2 = \frac{m}{2}$

$$\text{Có: } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 3 \Leftrightarrow x_1 + x_2 - 3x_1x_2 = 0 \Rightarrow -1 - \frac{3m}{2} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{-2}{3} \text{ (thỏa mãn đk)}$$

Ví dụ 2: Cho phương trình $(m+2)x^2 - (2m-1)x - 3 + m = 0$.

- Chứng tỏ phương trình có nghiệm với mọi m .
- Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Khi đó tìm m để nghiệm này gấp đôi nghiệm kia

Hướng dẫn giải:

$$\text{a) Xét pt: } (m+2)x^2 - (2m-1)x - 3 + m = 0 (*)$$

$$\text{Thấy } a + b + c = m + 2 - 2m + 1 - 3 + m = 0$$

$\Rightarrow$ pt (*) luôn có một nghiệm $x = 1$ với mọi $m \Rightarrow$ phương trình có nghiệm với mọi m .

$$\text{b) Theo câu a), pt (*) luôn có nghiệm: } x_1 = 1, x_2 = \frac{m-3}{m+2} \text{ (} m \neq -2 \text{)}$$

$$\text{Để } x_1, x_2 \text{ là hai nghiệm phân biệt } \Leftrightarrow 1 \neq \frac{m-3}{m+2} \text{ (} m \neq -2 \text{)} \Rightarrow \text{luôn đúng với mọi } m \neq -2.$$

$$\text{TH1: } x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow 1 = \frac{2(m-3)}{m+2} \text{ (} m \neq -2 \text{)} \Leftrightarrow m+2 = 2m-6 \Leftrightarrow m = 8$$

$$\text{TH2: } x_2 = 2x_1 \Leftrightarrow 2 = \frac{(m-3)}{m+2} \quad (m \neq -2) \Leftrightarrow 2m+4 = m-3 \Leftrightarrow m = -7$$

Vậy $m = 8$ hoặc $m = -7$ thì pt (*) có hai nghiệm phân biệt mà nghiệm này gấp đôi nghiệm kia.

Ví dụ 3: Cho phương trình $2x^2 - 2(m-1)x + m - 3 = 0$. Xác định m để phương trình có hai nghiệm cùng dương.

Hướng dẫn giải:

Để pt : $2x^2 - 2(m-1)x + m - 3 = 0$ có hai nghiệm cùng dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P = \frac{c}{a} > 0 \\ S = \frac{-b}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)^2 - 2(m-3) \geq 0 \Rightarrow m^2 - 4m + 7 \geq 0 \Leftrightarrow (m-2)^2 + 3 > 0 \quad \forall m \\ P = \frac{m-3}{2} > 0 \\ S = m-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 3$$

Ví dụ 4: Cho phương trình $2x^2 - 2mx + m + 6 = 0$ (*). Biện luận dấu các nghiệm của phương trình này.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Xét } \Delta' = m^2 - 2(m+6) = (m-1)^2 - 13 = (m-1+\sqrt{13})(m-1-\sqrt{13})$$

$$\text{Nếu } 1-\sqrt{13} < m < 1+\sqrt{13} \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow \text{pt(*) vô nghiệm.}$$

$$\text{Nếu } m \leq 1-\sqrt{13} ; m \geq 1+\sqrt{13} \Rightarrow \Delta \geq 0 \Rightarrow \text{pt(*) có 2 nghiệm (1)}$$

$$\text{Xét: } \begin{cases} P = \frac{m+6}{2} > 0 \\ S = m > 0 \end{cases} \Rightarrow m > 0 \quad (2) \qquad \begin{cases} P = \frac{m+6}{2} > 0 \\ S = m < 0 \end{cases} \Rightarrow -6 < m < 0 \quad (3)$$

$$\text{Từ (1)(2)} \Rightarrow \text{pt(*) có hai nghiệm cùng dấu dương thì } m \geq 1+\sqrt{13}.$$

$$\text{Từ (1)(3)} \Rightarrow \text{pt (*) có hai nghiệm cùng dấu âm thì } -6 < m \leq 1-\sqrt{13}.$$

$$\text{pt (*) có hai nghiệm trái dấu} \Leftrightarrow m < -6$$

Ví dụ 5: Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2 = 0$ (*)

a) Giải phương trình khi $m = 1$

b) Tìm giá trị m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 10$

Hướng dẫn giải:

Khi $m = 1$ thì pt(*) có dạng: $x^2 - 2(1+1)x + 1 + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$$

$$\text{Xét } \Delta' = [-(m+1)]^2 - m^2 - 2 = 2m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$$

Theo hệ thức vi-et ta có $x_1 + x_2 = 2(m+1)$; $x_1 \cdot x_2 = m^2 + 2$

$$\text{Có: } x_1^2 + x_2^2 = 10 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = 10$$

$$\Leftrightarrow 4(m+1)^2 - 2m^2 - 4 = 10$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 + 8m - 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 2m - \frac{5}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (m+1)^2 = \frac{7}{2} \Leftrightarrow m+1 = \pm \sqrt{\frac{7}{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{\sqrt{14}-2}{2} \\ m = \frac{-\sqrt{14}-2}{2} < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{phương trình có hai nghiệm phân biệt } x_1, x_2 \text{ thỏa mãn } x_1^2 + x_2^2 = 10 \Leftrightarrow m = \frac{\sqrt{14}-2}{2}$$

Ví dụ 6: Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + 2m = 0$.

- Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m .
- Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình, chứng tỏ $x_1 + x_2 - x_1 \cdot x_2$ không phụ thuộc vào giá trị của m .

Hướng dẫn giải:

$$\text{a) Xét } \Delta' = [-(m+1)]^2 - 2m = m^2 + 1 > 0 \quad \forall m$$

$\Rightarrow$ phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m .

$$\text{b) Theo hệ thức vi-et ta có } x_1 + x_2 = 2(m+1); \quad x_1 \cdot x_2 = 2m$$

$$\text{Có: } x_1 + x_2 - x_1 \cdot x_2 = 2m + 2 - 2m = 2 \text{ không phụ thuộc vào giá trị của } m.$$

Ví dụ 7: Tìm tọa độ điểm A và B của đồ thị hàm số (d) : $y = 2x + 3$ và (P): $y = x^2$. Gọi D và C lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và B trên trục hoành. Tính diện tích tứ giác ABCD.

Hướng dẫn giải:

Hoàn chỉnh độ giao điểm của (d) và (P) là nghiệm của phương trình: $x^2 - 2x - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = 3$$

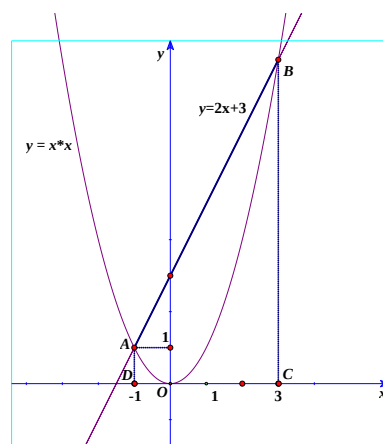
$$\Rightarrow A(-1; 1) \text{ và } B(3; 9)$$

$$\text{Có } AD = |y_A| = 1 \text{ (đvdd)}$$

$$BC = |y_B| = 9 \text{ (đvdd)}$$

$$DC = |x_A| + |x_B| = 1 + 3 = 4 \text{ (đvdd)}$$

$$S_{ABCD} = \frac{(AD + BC) \cdot DC}{2} = \frac{(1 + 9) \cdot 4}{2} = 20 \text{ (đvdt)}$$



Ví dụ 8: Cho phương trình $x^2 - 2(m+2)x + m+1 = 0$.

a) Tìm các giá trị m để phương trình có hai nghiệm trái dấu.

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình, tìm m để $x_1(1-2x_2) + x_2(1-2x_1) = m^2$.

Hướng dẫn giải:

a) Để phương trình $x^2 - 2(m+2)x + m+1 = 0$ có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow m+1 < 0 \Leftrightarrow m < -1$

$$\text{b) Xét } \Delta' = [-(m+2)]^2 - m - 1 = m^2 + 3m + 3 = 0 \Leftrightarrow \left(m + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \quad \forall m$$

$\Rightarrow$ Phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi giá trị m .

Theo hệ thức Vi-ét ta có $x_1 + x_2 = 2(m+2)$; $x_1 \cdot x_2 = m+1$

$$x_1(1-2x_2) + x_2(1-2x_1) = m^2$$

$$\Leftrightarrow x_1 - 2x_1x_2 + x_2 - 2x_1x_2 = m^2$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 - 4x_1x_2 - m^2 = 0$$

$$\Rightarrow 2m + 4 - 4m - 4 - m^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Để } x_1(1-2x_2) + x_2(1-2x_1) = m^2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$$

Ví dụ 9: Cho phương trình $x^2 - (2m+2)x + 2m - 4 = 0$ (*) với x là ẩn và m là tham số.

- Giải phương trình khi $m = 1$.
- Tìm giá trị của tham số m để phương trình đã cho có một nghiệm $x = 2$. Tìm nghiệm còn lại.
- Chứng minh phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m .

Hướng dẫn giải:

- Khi $m = 1$ thì pt(*) có dạng: $x^2 - (2.1+2)x + 2.1 - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{6} \\ x = 2 - \sqrt{6} \end{cases}$$

- Khi $x = 2$ thì pt(*) có dạng: $2^2 - (2m+2).2 + 2m - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow 4 - 4m - 4 + 2m - 4 = 0 \Leftrightarrow -2m = 4 \Leftrightarrow m = -2$$

Theo hệ thức vi-et ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+2) = 0 \\ x_1 = 2 \end{cases} \Rightarrow x_2 = -2$

- Xét $\Delta' = [-(m+1)]^2 - 2m + 4 = m^2 + 5 > 0 \forall m$

$\Rightarrow$ phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m (đpcm)

- Gọi $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình đã cho. Hãy tìm m để:

- $x_1^2 + x_2^2 = 13$
- $2x_1 + 3x_2 = 3$

- $|x_1 + x_2| = 4$
- $|x_1| + |x_2| = 5$

- Nghiệm này gấp ba lần nghiệm kia.

- Gọi $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình đã cho. Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm $x_1; x_2$ không phụ thuộc vào m .

- Tìm các giá trị của m để phương trình:

- Có hai nghiệm trái dấu;
- Có hai nghiệm cùng âm;
- Có hai nghiệm cùng dương;

iv) Có hai nghiệm trái dấu, nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn nghiệm dương;

v) Có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1 < 1 < x_2$.

g) Gọi $x_1; x_2$ là các nghiệm của phương trình đã cho. Xét biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 + 4$;

i) Tính giá trị của biểu thức A theo m

ii) Tìm các giá trị của m để $A = 41$;

iii) Tìm các giá trị của m để A đạt giá trị nhỏ nhất.

h) Gọi $x_1; x_2$ là các nghiệm của phương trình đã cho. Tìm các giá trị của m để $x_1; x_2$ là độ dài hai cạnh của một tam giác vuông có cạnh huyền bằng $\frac{\sqrt{205}}{2}$.

k) Gọi $x_1; x_2$ là các nghiệm của phương trình đã cho. Với $m \neq 2$ lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là $\frac{1}{x_1}$ và $\frac{1}{x_2}$ có tham số m .

Ví dụ 10: Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3 = 0$ với x là ẩn và m là tham số.

a) Giải phương trình khi $m = 2$

b) Tìm giá trị của tham số m để phương trình đã cho có một nghiệm $x = -2$. Tìm nghiệm còn lại.

c) Tìm các giá trị của m để phương trình:

i) Có hai nghiệm phân biệt. Tìm các nghiệm đó;

ii) Có nghiệm kép. Tìm nghiệm với m vừa tìm được;

iii) Vô nghiệm.

d) Trong trường hợp phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$. Tìm các giá trị của m để:

i) $x_1^2 + x_2^2 = 8$

ii) $2x_1 - 3x_2 = 8$

iii) $|x_1 - x_2| = 4$

iv) $|x_1| + |x_2| = 3$.

e) Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn:

i) $x_1; x_2$ cùng dấuii) $x_1; x_2$ cùng dươngiii) $x_1; x_2$ cùng âmiv) $x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.g) Trong trường hợp phương trình đã cho có các nghiệm phân biệt $x_1; x_2$. Hãy:i) Tìm hệ thức liên hệ giữa $x_1; x_2$ độc lập với m .ii) Tìm các giá trị của m để $(2x_1 - 3)(2x_2 - 3) > 1$ iii) Với $m \neq 0$ và $m \neq 3$. Lập phương trình bậc hai có các nghiệm là $y_1 = x_1 + \frac{1}{x_2}$ và

$$y_2 = x_2 + \frac{1}{x_1}.$$

Dạng 12. GIẢI VÀ BIỆN LUẬN PHƯƠNG TRÌNH TRÙNG PHƯƠNG**Ví dụ 1:** Giải các phương trình sau:

a) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$

b) $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$

c) $\frac{4}{x^2 + 4} + \frac{5}{x^2 + 5} = 2$

Ví dụ 2: Tìm các giá trị của m để phương trình $x^4 - 6x^2 + m - 1 = 0$ có bốn nghiệm.**Dạng 12. GIẢI MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH****Ví dụ 1:** Giải các phương trình sau bằng cách đặt ẩn phụ.

a) $(x^2 + 5x)^2 - 2(x^2 + 5x) = 24$

b) $(x^2 - 6x)^2 - 2(x - 3)^2 = 81$

c) $\frac{x^2 + x - 5}{x} + \frac{3x}{x^2 + x - 5} + 4 = 0$

d) $(x + 5)(x + 6)(x + 8)(x + 9) = 40$

e) $(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 7x + 12) = 24$

f) $2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2 = 0$

g) $2x^4 - 21x^3 + 74x^2 - 105x + 50 = 0$

h) $(x+4)^2 + (x+2)^2 = 82$

i) $(x-2)^6 + (x-4)^6 = 64$

k) $\frac{4x}{x^2+x+3} + \frac{5x}{x^2-5x+3} = \frac{-3}{2}$

n) $\frac{x^2-13x+15}{x^2-14x+15} + \frac{x^2-15x+15}{x^2-16x+15} = \frac{-1}{12}$

m) $\frac{x^2-10x+15}{x^2-6x+15} = \frac{4x}{x^2-12x+15}$

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{2x-1} = 8-x$

b) $\sqrt{15-x} + \sqrt{3-x} = 6$

c) $x^2 - x + \sqrt{x^2 - x + 24} = 18$

d) $\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x} + \sqrt{4-x^2} = 2$

Dạng 14: **GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH**

* TOÁN CHUYỂN ĐỘNG

Ví dụ 1: Hai ô tô cùng khởi hành từ A đến B cách nhau $560km$. Vận tốc ô tô (II) hơn vận tốc ô tô (I) là $10km/h$ nên đã đến sớm hơn ô tô (I) là 1 giờ. Tính vận tốc mỗi xe.

Ví dụ 2: Một người đi xe đạp từ A đến B dài $30km$. Khi đi từ B về A người đó chọn đi con đường khác dài hơn $6km$ và đi với vận tốc lớn hơn vận tốc lúc đi là $3km/h$, nên thời gian về ít hơn thời gian đi là 20 phút. Tính vận tốc lúc đi.

Ví dụ 3: Một tàu thủy chạy trên một khúc sông dài $120km$. Cả đi lẫn về hết $6h45'$. Tính vận tốc tàu thủy khi nước yên lặng, biết vận tốc của dòng nước là $4km/h$

Ví dụ 4: Một ca nô xuôi dòng từ bến A đến bến sông B cách nhau $24km$, cũng từ A về B một chiếc bè trôi với vận tốc dòng nước là $4km/h$. Khi đến B cano quay lại ngay và gặp bè tại địa điểm C cách A là $8km$. Tính vận tốc thực của ca nô.

Ví dụ 5: Một ô tô dự định đi từ A đến B cách nhau $120km$ trong một thời gian đã định. Khi đi được nửa quãng đường xe bị chặn bởi tàu hỏa mất 3 phút. Vì vậy để đến B đúng hạn xe phải tăng vận tốc thêm $2km/h$ trên quãng đường còn lại. Tính vận tốc dự định.

Ví dụ 6: Một bè nửa trôi tự do (với vận tốc bằng vận tốc của dòng nước) và một ca nô cùng rời bến A để xuôi dòng sông. Ca nô xuôi được $144km$ thì quay trở về A ngay, cả đi lẫn về hết $21h$. Trên đường ca nô trở về bến A , khi còn cách bến A là $36km$ thì gặp bè nửa nói trên. Tìm vận tốc riêng của ca nô và vận tốc dòng nước.

* TOÁN CÔNG VIỆC LIÊN QUAN ĐẾN NĂNG SUẤT VÀ THỜI GIAN

Ví dụ 1: Một công nhân dự định làm 70 sản phẩm trong thời gian quy định. Nhưng do áp dụng kĩ thuật nên đã tăng năng suất thêm 5 sản phẩm mỗi giờ. Do đó không những hoàn thành kế hoạch trước thời hạn 40 phút mà còn vượt mức 10 sản phẩm. Tính năng suất dự định.

Ví dụ 2: Một công nhân dự định làm 72 sản phẩm trong thời gian quy định. Nhưng thực tế xí nghiệp lại giao 80 sản phẩm. Vì vậy mặc dù người đó đã làm mỗi giờ thêm 1 sản phẩm, song thời gian hoàn thành công việc vẫn chậm hơn so với dự định 12 phút. Tính năng suất dự kiến, biết rằng mỗi giờ người đó làm không quá 20 sản phẩm.

Ví dụ 3: Một tổ có kế hoạch sản xuất 350 sản phẩm theo năng suất dự định. Nếu tăng năng suất lên 10 sản phẩm thì tổ đó hoàn thành sớm 2 ngày so với giảm năng suất 10 sản phẩm mỗi ngày. Tính năng suất dự kiến.

Ví dụ 4: Một nhóm thợ phải thực hiện kế hoạch sản xuất 3000 sản phẩm. Trong 8 ngày đầu họ thực hiện đúng mức đề ra, những ngày còn lại họ đã vượt mức mỗi ngày 10 sản phẩm, nên đã hoàn thành sớm hơn dự định 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch mỗi ngày cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm.

* TOÁN CÔNG VIỆC LIÊN QUAN ĐẾN LÀM CHUNG, LÀM RIÊNG

Ví dụ 1: Hai công nhân làm chung một công việc thì hoàn thành công việc đó trong 6 giờ 40 phút. Nếu họ làm riêng thì công nhân (I) hoàn thành công việc đó ít hơn công nhân (II) 3 giờ. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi công nhân phải làm trong bao lâu xong công việc.

Ví dụ 2: Hai vòi cùng chảy vào một bể thì đầy sau 7 giờ 12 phút. Nếu mỗi vòi chảy riêng mà đầy bể thì tổng thời gian là 30 giờ. Mỗi vòi chảy riêng thì đầy bể trong thời gian bao lâu?

* TOÁN VỀ QUAN HỆ GIỮA CÁC SỐ

Ví dụ 1: Tìm hai số biết rằng tổng của hai chữ số đó bằng 17 đơn vị. Nếu số thứ nhất tăng thêm 3 đơn vị, số thứ hai tăng thêm 2 đơn vị thì tích của chúng bằng 105 đơn vị.

Ví dụ 2: Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng nếu đem số đó chia cho tổng các chữ số của nó thì được thương là 4 và dư là 3. Còn nếu đem chia số đó cho tích các chữ số của nó thì được thương là 3 và dư là 5.

Ví dụ 3: Lấy một số tự nhiên có hai chữ số đó viết bởi hai chữ số có thứ tự lại thì được thương là 4 và dư là 5. Nếu lấy số đó trừ đi 9 thì được một số bằng tổng bình phương các chữ số đó. Tìm số tự nhiên đó.

Ví dụ 4: Cho một số tự nhiên có hai chữ số. Tìm số đó, biết rằng tổng hai chữ số đó nó nhỏ hơn số đó là 6 lần. Nếu thêm 25 vào tích của 2 chữ số đó sẽ được số viết theo thứ tự ngược lại với số đã cho.

* TOÁN CÓ NỘI DUNG HÌNH HỌC

Ví dụ 1: (TS 10 – THPT Hà Nội, năm học 2010 - 2011)

Một mảnh đất hình chữ nhật có độ dài đường chéo là 13 m và chiều dài hơn chiều rộng 7cm. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất đó.

Ví dụ 2: Một hình chữ nhật có chiều rộng bằng $\frac{2}{3}$ chiều dài, diện tích hình chữ nhật là $5400cm^2$. Tính chu vi hình chữ nhật.

LUYỆN TẬP TỔNG HỢP PHẦN GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH HOẶC PHƯƠNG TRÌNH CỦA CÁC TRƯỜNG THCS HÀ NỘI NĂM 2018

Ví dụ 1: Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước thì sau 4 giờ sẽ đầy bể. Nếu để vòi 1 chảy riêng trong 1 giờ rồi khóa lại và mở tiếp vòi 2 trong 40 phút thì cả hai vòi chảy được $\frac{2}{9}$ bể. Tính thời gian để mỗi vòi chảy riêng đầy bể.

Ví dụ 2: Một xe lửa đi từ Huế ra Hà Nội. Sau 1 giờ 40 phút, một xe lửa khác đi từ Hà Nội vào Huế với vận tốc lớn hơn vận tốc xe lửa thứ nhất là 5km/h. Hai xe lửa gặp nhau tại ga cách Hà Nội 300km. Tìm vận tốc của mỗi xe, biết rằng quãng đường sắt Hà Nội – Huế là 645km.

Ví dụ 3: Quãng đường AB dài 120 km. Hai xe máy khởi hành cùng một lúc từ A đến B. Vận tốc của xe thứ nhất lớn hơn vận tốc của xe thứ hai là 10km/h nên xe máy thứ nhất đến B sớm hơn xe máy thứ hai là 1 giờ. Tính vận tốc của mỗi xe.

Ví dụ 4: Hai vòi nước cùng chảy vào bể không có nước sau 2 giờ 24 phút thì đầy bể. Nếu chỉ mở vòi một trong 2 giờ sau đó khóa vòi một và chỉ mở vòi hai trong 1 giờ 30 phút thì được $\frac{3}{4}$ bể. Hỏi nếu mỗi vòi chảy một mình thì trong bao lâu sẽ đầy bể?

Ví Dụ 5: Trong đợt thi đua cuối năm , hai đội công nhân làm được 1020 sản phẩm chất lượng, loại A đạt tỉ lệ 85% . Riêng đội 1 tỉ lệ sản phẩm loại A là 90% , riêng đội 2 tỉ lệ sản phẩm loại A là 78%. Tính số sản phẩm mỗi đội đã làm được.

Ví Dụ 6: Một mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi là 280m. Người ta làm một lối đi xung quanh vườn (thuộc đất của vườn) rộng 2m, diện tích còn lại để trồng trọt là 4256m². Tính kích thước của mảnh vườn lúc đầu.

Ví Dụ 7: Một ô tô dự định đi từ A đến B dài 80km với vận tốc dự định . Thực tế trên nửa quãng đường đầu ô tô đi với vận tốc nhỏ hơn vận tốc dự định là 6km/h, trong nửa quãng đường sau ô tô đi với vận tốc lớn hơn vận tốc dự định là 12km/h. Biết rằng ô tô đến B đúng thời gian dự định. Tính vận tốc dự định của ô tô.

Ví Dụ 8: Quãng đường từ Hà Nội đi Ninh Bình dài 100km. Cùng một lúc, một xe máy khởi hành từ Hà Nội đi Ninh Bình và một xe ô tô khởi hành từ Ninh Bình đi Hà Nội . Sau khi hai xe gặp nhau, xe máy đi 1 giờ 30 phút nữa mới đến Ninh Bình. Biết vận tốc hai xe không đổi trên suốt quãng đường đi và vận tốc xe máy kém vận tốc xe ô tô là 20km/h. Tính vận tốc mỗi xe.

Ví Dụ 9: Một mảnh đất hình chữ nhật có diện tích 320m² . Nếu tăng chiều rộng thêm 10m, và giảm chiều dài đi 16m thì diện tích mảnh vườn không thay đổi. Tính kích thước của mảnh đất ban đầu.

Ví Dụ 10: Một ca nô xuôi dòng từ bến sông A đến bến sông B cách nhau 24km. Cùng lúc đó, cũng từ A về B, một bè nửa trôi với vận tốc dòng nước là 4km/h. Khi đến B ca nô quay lại ngay và gặp bè nửa tại điểm C cách A là 8km. Tính vận tốc thực của ca nô.

Ví Dụ 11: Quãng đường từ A đến B dài 90km. Một người đi xe máy từ A đến B , khi đến B người đó nghỉ 30 phút rồi quay trở lại về A với vận tốc lớn hơn vận tốc lúc đi là 9km/h. Thời gian kể từ lúc bắt đầu đi từ A đến khi trở về A là 5 giờ. Tính vận tốc xe máy lúc đi từ A đến B?

Ví Dụ 12: Quãng đường AB dài 50km, một người dự định đi xe đạp từ A đến B với vận tốc không đổi, khi đi được 2 giờ , người ấy dừng lại 30 phút để nghỉ. Muốn đến B đúng thời gian dự định người đó phải tăng vận tốc 2km/h trên quãng đường còn lại. Tính vận tốc ban đầu của người đó?

Ví Dụ 13: một xe máy khởi hành từ A đến B dài 60km , 30 phút sau một ô tô cũng khởi hành từ A đến B với vận tốc lớn hơn vận tốc xe máy là 10km/h, nên cả hai xe đến B cùng một lúc. Tính vận tốc của mỗi xe?

Ví Dụ 14: Một phân xưởng theo kế hoạch cần phải sản xuất 1100 sản phẩm trong một số ngày quy định. Do mỗi ngày phân xưởng đó sản xuất vượt mức 5 sản phẩm nên phân xưởng đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn thời gian quy định là 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch mỗi ngày phân xưởng phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm?

Ví Dụ 15: Hai người thợ cùng làm một công việc trong 16 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm riêng trong 3 giờ rồi người thứ hai làm tiếp trong 6 giờ thì họ làm được 25% khối lượng công việc. Hỏi nếu mỗi người thợ làm một mình thì hoàn thành công việc đó trong bao lâu?

Ví Dụ 16: Đội tình nguyện ARCHIMEDES ACADEMI tham gia quét dọn đường phố .Theo kế hoạch, đội phải quét 75km đường trong 1 tuần lễ. Vì các em học sinh tham gia nhiệt tình và năng nổ nên mỗi tuần quét dọn vượt mức 5km so với kế hoạch, kết quả là đã quét dọn được 80km đường và hoàn thành sớm hơn 1 tuần. Hỏi theo kế hoạch đội tình nguyện của trường ARCHIMEDES ACADEMI phải quét dọn bao nhiêu km đường mỗi tuần?

Ví Dụ 17: Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích 360m². Nếu tăng chiều dài thêm 10m và giảm chiều rộng 6m thì diện tích mảnh vườn không đổi. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn.

Ví Dụ 18: Một ô tô đi từ A đến B trong một thời gian dự định . Nếu vận tốc tăng thêm 14km/h thì đến B sớm hơn dự định là 2 giờ. Nếu vận tốc giảm đi 4km/h thì sẽ đến B chậm hơn dự định 1 giờ. Tính khoảng cách AB, vận tốc và thời gian dự định của ô tô.

Ví Dụ 19: Để hoàn thành một công việc theo dự định , cần một số công nhân làm trong một số ngày nhất định. Nếu bớt đi 2 công nhân thì phải mất thêm 3 ngày mới có thể hoàn thành công việc. Nếu tăng thêm 5 công nhân thì công việc hoàn thành sớm được 4 ngày. Hỏi theo dự định cần bao nhiêu công nhân và làm bao nhiêu ngày.

Ví Dụ 20: Một ca nô xuôi dòng một quãng đường dài 12km, rồi ngược quãng sông đó mất 2 giờ 30 phút . Nếu cũng quãng sông ấy ca nô xuôi dòng 4km rồi ngược dòng 8km hết 1 giờ 20 phút . Biết rằng vận tốc riêng của ca nô và vận tốc riêng của dòng nước là không đổi . Tính vận tốc riêng của ca nô và vận tốc riêng của dòng nước.

Ví Dụ 21: Tính độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông biết cạnh góc vuông lớn dài hơn cạnh góc vuông bé là 7cm. Độ dài cạnh huyền là 13cm.

Ví Dụ 22: Hai vòi nước chảy vào một bể cạn trong 1 giờ 20 phút thì đầy bể. Nếu mở vòi thứ nhất chảy trong 30 phút và vòi thứ hai chảy trong 1 giờ thì được $\frac{7}{12}$ bể. Hỏi mỗi vòi chảy một mình thì bao lâu sẽ đầy bể?

Ví Dụ 23: Theo kế hoạch hai tổ sản xuất được giao làm 600 sản phẩm. Nhờ tăng năng suất lao động tổ 1 vượt mức 10% và tổ 2 làm vượt mức 20% so với kế hoạch của mỗi tổ nên cả hai tổ làm được 685 sản phẩm. Tính số sản phẩm mỗi tổ làm theo kế hoạch?

Ví Dụ 24: Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước thì sau 12 giờ đầy bể. Nếu để vòi I chảy riêng trong 4 giờ rồi khóa lại và mở tiếp vòi II trong 3 giờ thì cả hai vòi chảy được $\frac{3}{10}$ bể. Tính thời gian để mỗi vòi chảy riêng đầy bể?

Ví Dụ 25: Cho số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng tổng hai chữ số của nó bằng 5, bình phương chữ số hàng chục hơn chữ số hàng đơn vị là 1 đơn vị. Tìm số đó.

Ví Dụ 26: Hai xe máy khởi hành cùng một lúc trên quãng đường từ A đến B dài 120km. Mỗi giờ xe máy thứ nhất chạy nhanh hơn xe máy thứ hai là 10km nên xe máy thứ nhất đến B trước xe máy thứ hai là 1 giờ. Tính vận tốc của mỗi xe máy?

máy thứ hai 1 giờ. Tính vận tốc của mỗi xe máy?

Ví dụ 27: Cho tam giác có chiều cao bằng $\frac{3}{4}$ cạnh đáy. Nếu chiều cao tăng thêm 3m và cạnh đáy giảm đi 2m thì diện tích tam giác đó tăng thêm. Tính cạnh đáy và chiều cao của tam giác?+++++ lỗi đề

Ví dụ 28: Theo kế hoạch một phân xưởng phải sản xuất 400 sản phẩm trong một thời gian quy định. Do cải tiến kĩ thuật nên trong thực tế mỗi ngày phân xưởng làm thêm được 10 sản phẩm. Vì vậy, đã hoàn thành kế hoạch trước 1 ngày và còn làm thêm được 20 sản phẩm. Hỏi theo kế hoạch mỗi ngày phân xưởng phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm?

Ví dụ 29: Một xe khách và một xe du lịch khởi hành đồng thời đi từ A đến B. Biết vận tốc của xe du lịch lớn hơn vận tốc xe khách là 20 km/h. Do đó đến B trước xe khách 50 phút. Tính vận tốc của mỗi xe. Biết quãng đường AB dài 100km.

Ví dụ 30: Một công nhân dự định làm 33 sản phẩm trong thời gian dự định. Nhưng thực tế xí nghiệp lại giao 62 sản phẩm, do vậy mặc dù công nhân đã làm tăng mỗi giờ 3 sản phẩm xong vẫn hoàn thành chậm hơn dự định 1h30 phút. Tính năng suất dự định?

Ví dụ 31: Một người đi xe máy từ thành phố A đến thành phố B với vận tốc định trước. Hai thành phố cách nhau 150Km. Sau khi đi được $\frac{1}{5}$ quãng đường thì người đó tăng vận tốc thêm 10km/h trên toàn bộ quãng đường còn lại. Tính vận tốc dự định ban đầu và thời gian di chuyển của người đó? Biết người đó đến B sớm 36 phút.

Ví dụ 32: Một xe ô tô cần chạy quãng đường 80 km trong thời gian đã dự định. Vì trời mưa nên một phần tư quãng đường đầu xe phải chạy chậm hơn dự định 15 km/h nên quãng đường còn lại xe phải chạy nhanh hơn vận tốc dự định là 10 km/h. Tính thời gian dự định của xe ô tô đó?

Ví dụ 33(Trường THPT chuyên Sư phạm 2013). Trên quãng đường AB dài 210m, tại cùng một thời gian một xe máy khởi hành từ A đến B và một ô tô khởi hành từ B đi về A. Sau khi gặp nhau xe máy đi tiếp 4 giờ nữa thì đến B và ô tô đi tiếp 2h 15 phút thì đến A. Biết rằng vận tốc ô tô và xe máy không thay đổi trong suốt quãng đường. Tính vận tốc của xe máy và ô tô?

Ví dụ 34 (Trường THPT chuyên ĐHSP năm 2015). Quãng đường AB dài 120 km. Lúc 7h sáng một xe máy đi từ A đến B. Đi được quãng đường xe bị hỏng phải dừng 10 phút để sửa rồi đi tiếp với vận tốc kém vận tốc lúc đầu 10 km/h. Biết xe máy đến B lúc 11h 40 phút trưa cùng ngày.. Giả sử vận tốc xe máy trên quãng đường đầu không thay đổi và vận tốc xe máy trên $\frac{1}{4}$ quãng đường sau cũng không đổi. Hỏi xe máy bị hỏng lúc mấy giờ?

DẠNG 15: TÌM HỆ THỨC LIÊN HỆ GIỮA CÁC NGHIỆM KHÔNG PHỤ THUỘC VÀO THAM SỐ.

Phương Pháp: Để tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc vào tham số ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Tìm điều kiện của m để phương trình có hai nghiệm $x_1, x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$

Bước 2: Áp dụng hệ thức vi ét ta được $\begin{cases} x_1 + x_2 = f(m) \\ x_1 \cdot x_2 = g(m) \end{cases} (I)$

Bước 3: Khử m từ hệ (I) ta được hệ thức cần tìm.

Ví dụ: Cho phương trình $(m-1).x^2 - 2.(m-4)x + m - 5 = 0$. Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm của phương trình không phụ thuộc m.

DẠNG 16: TÌM ĐIỂM CỐ ĐỊNH CỦA ĐƯỜNG THẲNG PHỤ THUỘC THAM SỐ.

Phương pháp: Cho đường thẳng $d: y = ax + b$ phụ thuộc tham số m.

Bước 1: Gọi $M(x_0, y_0)$ là điểm cố định của d $\Rightarrow y_0 = ax_0 + b; \forall m (1)$

Bước 2: Biến đổi đưa về phương trình (1) về dạng phương trình ẩn m tham số như:

$$A(x_0, y_0)m + B(x_0, y_0) = 0 \text{ hoặc } A(x_0, y_0)m^2 + B(x_0, y_0)m + C(x_0, y_0) = 0$$

Bước 3: Cho các hệ số đó bằng 0.

Bước 4: Tìm ra và rút ra kết luận.

Ví dụ: Cho đường thẳng d: $y = (m+1)x - 2m$ với m là tham số. Tìm điểm cố định mà d đi qua với mọi m.

Hướng dẫn

Gọi $M(\text{})$ là điểm cố định của d

$$\Rightarrow y_0 = (m+1)x_0 - 2m; \forall m$$

$$\Leftrightarrow (x_0 - 2)m + x_0 - y_0 = 0; \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - 2 = 0 \\ x_0 - y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 2 \end{cases}$$

Vậy $M(2; 2)$ là điểm cố định mà d luôn đi qua với mọi m.

Ví dụ: Cho đường thẳng d: $y = (2m+1)x + m - 2$ với m là tham số. Tìm điểm cố định mà d đi qua với mọi m.

DẠNG 17: TÌM THAM SỐ m SAO CHO KHOẢNG CÁCH TỪ GỐC TỌA ĐỘ ĐẾN ĐƯỜNG THẲNG ĐÃ CHO LÀ LỚN NHẤT HOẶC NHỎ NHẤT

Phương pháp: Cho đường thẳng $d: y = ax + b$ phụ thuộc tham số m . Tìm m để khoảng cách từ O đến d là lớn nhất.

Cách 1: Phương pháp hình học:

Bước 1: Gọi A, B lần lượt là giao điểm của d với Ox và Oy ; H là hình chiếu của O trên d .

Bước 2: Khoảng cách từ O đến d tính bởi công thức $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$

Bước 3: Tìm điều kiện của m để OH đạt giá trị lớn nhất.

Cách 2: Phương pháp điểm cố định

Bước 1: Tìm điểm cố định I mà d luôn đi qua.

Bước 2: Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên $d \Rightarrow OH \leq OI = \text{const}$

Bước 3: Ta có OH lớn nhất $= OI$ khi và chỉ khi d là đường thẳng qua I và vuông góc OI . Từ đó ta tìm được tham số m .

Ví dụ: Cho đường thẳng $d: y = mx - 2m - 1$ với m là tham số. Tìm m sao cho khoảng cách từ O đến (d) đạt giá trị:

- a) Lớn nhất b) Nhỏ nhất.

Hướng dẫn:

a) Cách 1: Trường hợp 1: Nếu $m = 0 \Rightarrow (d): y = -1 \Rightarrow$ Khoảng cách từ O đến d bằng 1.

Trường hợp 2:

Nếu $m \neq 0 \Rightarrow d$ cắt hai trục Ox và Oy lần lượt tại $A(\frac{2m+1}{m}; 0)$ và $B(0; -2m-1)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên d .

Từ $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$ ta được $OH^2 = \frac{(2m+1)^2}{m^2+1}$

Mà $OH^2 - 5 = -\frac{(m-2)^2}{m^2+1} \leq 0 \Rightarrow OH \leq \sqrt{5}; \forall m \neq 0$

Kết hợp với trường hợp 1 và 2 ta được $OH_{\max} = \sqrt{5} \Leftrightarrow m = 2$

Cách 2: Gọi I là điểm cố định của (d) $\Rightarrow I(2; -1)$

Với mỗi m . Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên $d \Rightarrow OH \leq OI = \sqrt{5}; \forall m$

Từ đó $OH_{\max} = \sqrt{5} \Leftrightarrow m = 2$ $d \perp OI$. Ta được $m = 2$.

b) Khoảng cách từ O đến d nhỏ nhất bằng $O \Leftrightarrow O \in d$. Ta tìm được $m = 3$.

Ví dụ: Cho đường thẳng $d: y = (m+1)x + m + 2$ với m là tham số. Tìm m sao cho khoảng cách từ O đến (d) đạt giá trị:

- a) Lớn nhất b) Nhỏ nhất.

C. LUYỆN TẬP TỔNG HỢP

Ví dụ 1: Cho đường thẳng $d: y = (m-2)x + m + 3$ và parabol $y = mx^2$ với m là tham số; x là ẩn số.

- 1) Với $m = 1$. Hãy
 - a) Vẽ (P) và d trên cùng trục Oxy.
 - b) Tính diện tích ΔABC với A, B là các giao điểm của (d) và (P) .
- 2) Tìm giá trị của m để:
 - a) (d) đi qua $C(1;1)$
 - b) Ba đường thẳng $d_1: y = 2x + 3; d_2: y = -x + 1$ và (d) đồng quy.
 - c) (d) tạo với đường thẳng $y = 2$ một góc 120°
 - d) (d) song song với đường thẳng Δ . Biết Δ đi qua $D(1; 2)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta': 2x - y + 3 = 0$;
 - e) (P) đi qua điểm cố định của (d) ;
 - f) (d) cắt trục tọa độ Ox; Oy tạo thành tam giác có diện tích bằng $2|m - 2|$;
 - g) Khoảng cách từ O đến đường thẳng d lớn nhất.
- 3) Viết phương trình đường d_3 song song đường thẳng $d_1: y = 2x + 3$.
- 4) Chứng minh: Với $m \neq 0$, (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.
- 5) Gọi $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$ là các giao điểm của (d) và (P) . Hãy tìm:
 - a) Hệ thức độc lập giữa $x_A; x_B$
 - b) Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x_A^2 + x_B^2 + 2018$
- 6) Gọi $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$ là các giao điểm của (d) và (P) . Hãy tìm m để:
 - a) A và B nằm về hai phía của trục tung.
 - b) A và B nằm về cùng đường thẳng $x = 1$;
 - c) $x_A; x_B$ thỏa mãn hệ thức $x_A; x_B$

- d) AB song song đường thẳng $d_4 : y = x + 2018$. Tính diện tích tam giác OAB với m vừa tìm được.

Ví dụ 2: Cho đường thẳng d: $y = (3 - m)x - m$ và parabol $y = -2x^2$ với m là tham số; x là ẩn số.

1) Với $m = -2$. Hãy

- Vẽ (P) và d trên cùng trục Oxy.
- Tính diện tích ΔABC với A, B là các giao điểm của (d) và (P).

2) Tìm giá trị của m để :

- (d) đi qua C (1;1) và song song $d_1 : y = 2x + 3$
 - (d) tạo với đường thẳng Ox một góc 45°
 - (d) cắt trục tọa độ Ox; Oy tạo thành tam giác có diện tích bằng 2;
 - Khoảng cách từ O đến đường thẳng d lớn nhất
- 3) Viết phương trình đường d3 song song đường thẳng $d_1 : y = 2x + 3$ và đi qua điểm cố định của d.
- 4) Chứng minh: Với $m \neq 0$, (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.
- 5) Gọi $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$ là các giao điểm của (d) và (P). Hãy tìm:
- Hệ thức độc lập giữa $x_A; x_B$
 - Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{x_A^2} + \frac{1}{x_B^2}$
 - Tìm m để A và B có hoành độ âm;
 - Tìm m để $(2x_A^2 + mx_A)(2x_B^2 + mx_B) = \frac{3}{2}$

Ví dụ 3: Cho đường thẳng d: $y = 3x + 2m - 5$ và parabol $y = \frac{1}{2}x^2$ với m là tham số; x là ẩn số.

1) Với $m = \frac{1}{2}$. Hãy

- Vẽ (P) và d trên cùng trục Oxy.
- Tính diện tích ΔABC với A, B là các giao điểm của (d) và (P).

2) Tìm giá trị của m để :

- a) (d) và (P) tiếp xúc nhau.

b) Tìm m để (d) và (P) của cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

c) Giao điểm của $d_1: y = \frac{2}{3}x - 1; d_2: y = x + 2$ thuộc d

d) Khoảng cách từ O đến đường thẳng d lớn nhất

3) Tính giá trị tan của góc tạo bởi d với tia Ox

4)Viết phương trình đường d3 vuông góc với mọi đường thẳng d và đi qua điểm cố định của đường thẳng $d_4: y = (m - 2)x + m$.

5) Trong trường hợp (d) và (P) của cắt nhau tại hai điểm phân biệt. Gọi $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$ là các giao điểm của (d) và (P).

a) Tìm m để $y_A + y_B = 0$

b) Tìm m để biểu thức $P = x_A^2 + x_B^2 + (x_A \cdot x_B)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

c) Tìm m để $Q = \frac{m^2}{x_A^2 + 6x_B - 4m} + \frac{x_B^2 + 6x_A - 4m}{m^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất với $m \neq 0$.

D. MỘT SỐ CÂU VỀ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI TRONG ĐỀ TUYỂN SINH HÀ NỘI.

Ví dụ: (TS10 - Đề thi vào lớp 10 năm 2011- 2012)

Một đội xe theo kế hoạch chở hết 140 tấn hàng trong một số ngày quy định. Do mỗi ngày đội đó chở vượt mức thêm 5 tấn nên đội đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn thời gian quy định 1 ngày và chở thêm được 10 tấn. Hỏi theo kế hoạch đội xe hàng hết bao nhiêu ngày?

Ví dụ: (TS10 - Đề thi vào lớp 10 năm 2012- 2013)

Hai người cùng làm chung một công việc trong $\frac{12}{5}$ giờ. Nếu mỗi người làm một mình thì thời gian để người thứ nhất hoàn thành công việc ít hơn người thứ hai là 2 giờ. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người phải làm trong bao nhiêu giờ để xong công việc?

Ví dụ: (TS10 - Đề thi vào lớp 10 năm 2013- 2014)

Quãng đường từ A đến B dài 90 Km. Một người đi xe máy từ A đến B. Khi đến B người đó nghỉ 30 phút rồi quay trở về A với vận tốc lớn hơn vận tốc lúc đi là 9 Km/h. Thời gian kể từ lúc bắt đầu đi từ A đến lúc trở về A là 5h. Tính vận tốc xe máy lúc đi từ A đến B?

Ví dụ: **(TS10 - Đề thi vào lớp 10 năm 2014- 2015)**

Một phân xưởng theo kế hoạch cần phải sản xuất 1100 sản phẩm trong một số ngày quy định. Do mỗi ngày phân xưởng đó sản xuất vượt mức 5 sản phẩm nên phân xưởng đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn thời gian quy định 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày phân xưởng phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm?

Ví dụ: **(TS10 - Đề thi vào lớp 10 năm 2015- 2016)**

Một tàu tuần tra chạy ngược dòng 60Km, sau đó chạy xuôi dòng 48Km trên cùng một dòng sông có vận tốc dòng nước là 2 Km/h. Tính vận tốc của tàu tuần tra khi nước yên lặng, biết thời gian xuôi dòng ít hơn thời gian ngược dòng là 1h.

Ví dụ: (Thi thử vào 10- THPT Hà Nội năm 2015-2016)

Hai khối 8 và 9 của một trường THCS có 420 học sinh có học lực trên trung bình đạt tỉ lệ 84%. Khối 8 đạt tỉ lệ 80% là học sinh trên trung bình; khối 9 đạt 90%. Tính số học sinh mỗi khối?

Ví dụ: **(TS10 - Đề thi vào lớp 10 năm 2016- 2017)**

Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích 720 m². Nếu tăng chiều dài thêm 10m và giảm chiều rộng 6 m thì diện tích mảnh vườn không đổi. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn?

Ví dụ: **(TS10 - Đề thi vào lớp 10 năm 2017- 2018)**

Một xe ô tô và một xe máy cùng khởi hành từ A để đi đến B với vận tốc của mỗi xe không đổi trên toàn bộ quãng đường AB dài 120 Km. Do vận tốc xe ô tô lớn hơn vận tốc của xe máy là 10 Km/h nên ô tô đến B sớm hơn xe máy 36 phút. Tính vận tốc mỗi xe?

Ví dụ : **(TS10 - Đề thi vào lớp 10 năm 2018- 2019)**

Lời giải

Một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi bằng 28 mét và độ dài đường chéo bằng 10 mét. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất đó theo đơn vị mét.

Ví dụ 1. (TS10-THPT Hà Nội, năm học 2010-2011)

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $(d): y = -x + 6$ và parabol

$$(P): y = x^2.$$

- a) Tìm tọa độ các giao điểm của (d) và (P) .
- b) Gọi A, B là hai giao điểm của (d) và (P) . Tính diện tích tam giác OAB .

Lời giải

- a) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là:

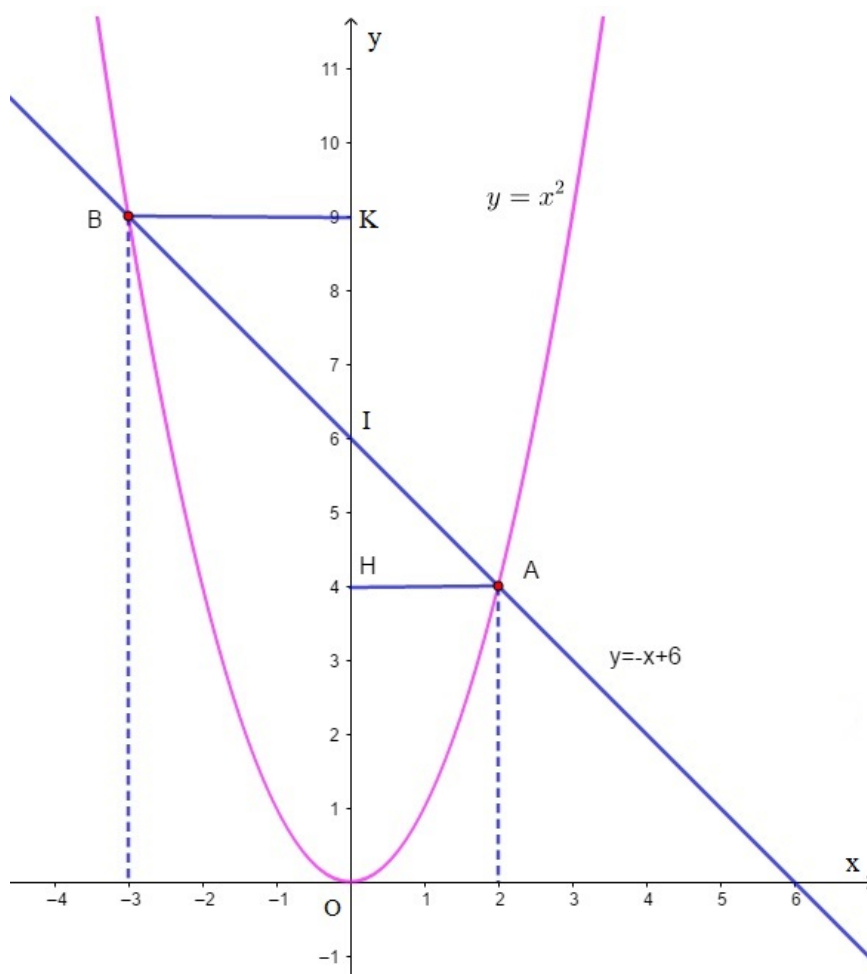
$$\begin{aligned}x^2 &= -x + 6 \\ \Leftrightarrow x^2 + x - 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 2 \end{cases}\end{aligned}$$

+) Với $x = 2 \Rightarrow y = 4$

+) Với $x = -3 \Rightarrow y = 9$

Vậy (d) cắt (P) tại hai điểm $A(2;4)$ và $B(-3;9)$.

- b)



Gọi $d \cap Oy = \{I\}$, kẻ $BK \perp Oy$; $AH \perp Oy$

$$\Rightarrow I(0;6)$$

$$S_{OAB} = S_{OBI} + S_{OAI} = \frac{1}{2}OI.BK + \frac{1}{2}OI.AH$$

$$S_{OAB} = \frac{1}{2}.6.3 + \frac{1}{2}.6.2 = 6 + 6 = 12 \text{ (đvdt)}$$

Ví dụ 2. (TS10-THPT Hà Nội, năm học 2012-2013)

Cho phương trình $x^2 - (4m-1)x + 3m^2 - 2m = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 7$.

Lời giải

Xét phương trình $x^2 - (4m-1)x + 3m^2 - 2m = 0$. (1)

Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thì:

$$\begin{cases} a = 1 \neq 0 \\ \Delta = (4m-1)^2 - 4(3m^2 - 2m) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \Delta = 4m^2 + 1 > 0$$

Điều này đúng với mọi m .

Theo định lý Vi-ét ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4m - 1 \\ x_1 x_2 = 3m^2 - 2m \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } x_1^2 + x_2^2 = 7 &\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 7 \\ &\Leftrightarrow (4m - 1)^2 - 2(3m^2 - 2m) = 7 \\ &\Leftrightarrow 10m^2 - 4m - 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{-3}{5} \text{ (thỏa mãn)} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy với $m = 1$ và $m = \frac{-3}{5}$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 7$.

Ví dụ 3. (TS10-THPT Hà Nội, năm học 2013-2014)

Cho Parabol $(P): y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $d: y = mx - \frac{1}{2}m^2 + m + 1$.

- Với $m = 1$, xác định tọa độ các giao điểm A, B của (d) và (P) .
- Tìm các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $|x_1 - x_2| = 2$.

Lời giải

- Với $m = 1$ ta có phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x^2 &= x + \frac{3}{2} \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Ta có: } y(-1) = \frac{1}{2}; y(3) = \frac{9}{2}.$$

Vậy tọa độ giao điểm A và B lần lượt là: $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$ và $\left(3; \frac{9}{2}\right)$.

- Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$\frac{1}{2}x^2 = mx - \frac{1}{2}m^2 + m + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - 2m - 2 = 0 \quad (*)$$

Để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt x_1, x_2 thì phương trình $(*)$ phải có hai nghiệm phân biệt.

$$\text{Khi đó } \Delta' = m^2 - m^2 + 2m + 2 > 0 \Leftrightarrow m > -1$$

$$\text{Khi } m > -1 \text{ ta có: } |x_1 - x_2| = 2 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = 4$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 4$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 4(m^2 - 2m - 2) = 4$$

$$\Leftrightarrow 8m = -4 \Leftrightarrow m = \frac{-1}{2}.$$

Vậy $m = -\frac{1}{2}$ để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $|x_1 - x_2| = 2$.

Ví dụ 4. (TS10-THPT Hà Nội, năm học 2015-2016)

Cho $(P): y = x^2$ và $(d): y = mx + 1$.

- Tìm điểm cố định của (d) .
- Chứng minh rằng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B nằm khác phía trục tung.
- Tìm m để diện tích tam giác $OAB = 2$.

Lời giải

- Gọi $A(x_A; y_A)$ là điểm cố định mà (d) luôn đi qua:

$$\Rightarrow y_A = mx_A + 1 \quad \text{với mọi } m$$

$$\Rightarrow x_A \cdot m + 1 - y_A = 0 \quad \text{với mọi } m.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 0 \\ 1 - y_A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = 1 \end{cases}.$$

Vậy $A(0;1)$.

- Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^2 = mx + 1 \Leftrightarrow x^2 - mx - 1 = 0 \quad (1)$$

$$\Delta = (-m)^2 - 4(-1) = m^2 + 4 > 0$$

Vì vậy phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$.

Theo Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 \cdot x_2 = -1 \end{cases}$ nên $x_1; x_2$ là hai số trái dấu.

Vậy thì với mọi m , (d) luôn giao (P) tại hai điểm phân biệt nằm khác phía với trục tung.

c) Giả sử $A(x_1; x_1^2); B(x_2; x_2^2)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow AB^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (x_2^2 - x_1^2)^2 = (x_2 - x_1)^2 [1 + (x_2 + x_1)^2] \\ &= [(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2] [1 + (x_1 + x_2)^2] \\ &= (m^2 + 4) [1 + m^2] \\ &= m^4 + 5m^2 + 4 \end{aligned}$$

Ta cũng có: $OA^2 + OB^2 = x_1^2 + x_1^4 + x_2^2 + x_2^4$

$$\begin{aligned} &= (x_1^2 + x_2^2) + (x_1^4 + x_2^4) = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 \\ &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2]^2 - 2x_1^2x_2^2 \\ &= m^2 + 2 + (m^2 + 2)^2 - 2 \\ &= m^4 + 5m^2 + 4 \end{aligned}$$

Vậy nên $AB^2 = OA^2 + OB^2$ hay tam giác OAB vuông tại O .

$$\begin{aligned} \text{Vậy thì } S_{OAB} &= \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} \sqrt{(x_1^2 + x_1^4)(x_2^2 + x_2^4)} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{x_1^2 \cdot x_2^2 + x_1^2 x_2^4 + x_1^4 \cdot x_2^2 + x_1^4 \cdot x_2^4} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{1 + x_2^2 + x_1^2 + 1} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 2} = \frac{1}{2} \sqrt{m^2 + 4} \end{aligned}$$

$$\text{Để } S_{OAB} = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{m^2 + 4} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{m^2 + 4} = 4$$

$$\Leftrightarrow m^2 = 12 \Leftrightarrow m = \pm 2\sqrt{3}$$

Vậy với $m = \pm 2\sqrt{3}$ thì diện tích tam giác $OAB = 2$.

Ví dụ 5. (TS10-THPT Hà Nội, năm học 2016-2017)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $(d): y = 3x + m^2 + 1$ và parabol $(P): y = x^2$.

- Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi m .
- Gọi x_1 và x_2 là hoành độ các giao điểm của (d) và (P) . Tìm m để $(x_1 + 1)(x_2 + 1) = 1$.

Lời giải

- Phương trình tọa độ giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P) là:

$$\begin{aligned} x^2 &= 3x + m^2 - 1 \\ \Leftrightarrow x^2 - 3x - m^2 + 1 &= 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Ta xét: $\Delta = (-3)^2 - 4(-m^2 + 1) = 9 + 4m^2 - 4 = 4m^2 + 5 > 0$ với mọi m .

Vậy (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi m .

- $x_1; x_2$ là các hoành độ giao điểm của (d) và (P) nên $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình (1).

Theo Vi-ét ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 x_2 = 1 - m^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Để } (x_1 + 1)(x_2 + 1) &= 1 \Leftrightarrow x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1 = 1 \\ &\Leftrightarrow 1 - m^2 + 3 + 1 = 1 \\ &\Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2 \end{aligned}$$

Vậy với $m = \pm 2$ thì $(x_1 + 1)(x_2 + 1) = 1$.

Ví dụ 6. (TS10-THPT Hà Nội, năm học 2017-2018)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $(d): y = mx + 5$.

- Chứng minh đường thẳng (d) luôn đi qua điểm $A(0;5)$ với mọi giá trị của m .
- Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng (d) cắt parabol $(P): y = x^2$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1, x_2 (với $x_1 < x_2$) sao cho $|x_1| > |x_2|$.

Lời giải

Ta có: $(d): y = mx + 5$

- a) Thay tọa độ điểm $A(0;5)$ vào (d) ta được: $5 = m \cdot 0 + 5$ (luôn đúng)
 Vậy đường thẳng (d) luôn đi qua điểm $A(0;5)$ với mọi giá trị của m .
- b) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là:

$$x^2 = mx + 5$$

$$\Leftrightarrow x^2 - mx - 5 = 0 \quad (*)$$

Đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 + 20 > 0 \quad \forall m$$

Vậy đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt $x_1; x_2$ với mọi m .

Theo hệ thức Vi-ét ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = -5 \end{cases}$$

Vì $a \cdot c < 0$ nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt trái dấu

$$x_1 < 0 < x_2.$$

Để $|x_1| > |x_2|$ thì $x_1 + x_2 < 0 \Leftrightarrow m < 0$.

Vậy $m < 0$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Ví dụ 7. (TS10-THPT Hà Nội, năm học 2018-2019)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $(d): y = (m+2)x + 3$ và parabol $(P): y = x^2$.

- a) Chứng minh đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.
 b) Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có các hoành độ là các số nguyên.

Lời giải

- a) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) :

$$x^2 = (m+2)x + 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (m+2)x - 3 = 0 (*)$$

Vì $ac = -3 < 0$ nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt trái dấu

$\Rightarrow$ (d) luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt (đpcm).

b) Áp dụng hệ thức Vi-et cho phương trình (*)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m + 2 \\ x_1 x_2 = -3 \end{cases}$$

Vì x_1, x_2 nguyên $\Rightarrow x_1, x_2 \in U(-3)$, ta có bảng sau:

x_1	1	-3	-1	-3
x_2	-3	1	3	1
$x_1 + x_2$	-2	-2	2	2
m	-4	-4	0	0

Kết luận: Vậy $m = 0$ hoặc $m = -4$

CHỦ ĐỀ IV: CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN ĐƯỜNG TRÒN

TỔNG QUAN KIẾN THỨC HÌNH

I. Kiến thức lớp 7 cần nhớ.

1. Để chứng minh $a \parallel b$ ta có:

Cách 1: $\begin{cases} a \perp c \\ b \perp c \end{cases} \Rightarrow a \parallel b.$

Cách 2: $\begin{cases} a \parallel c \\ b \parallel c \end{cases} \Rightarrow a \parallel b.$

Cách 3: Chứng minh hai góc ở hai vị trí so le trong hoặc đồng vị hoặc trong cùng phía bù nhau.

2. Để chứng minh $a \perp b$ ta có:

Cách 1: $\begin{cases} a \parallel c \\ b \perp c \end{cases} \Rightarrow a \perp b.$

Cách 2: Chứng minh góc giữa chúng bằng 90° tức là .

3. Để chứng minh hai tam giác thường bằng nhau ta có:

Cách 1: $C - C - C.$

Cách 2: $c - g - c.$

Cách 3: $g - c - g.$

4. Để chứng minh hai tam giác vuông bằng nhau ta có:

Cách 1: $C - C - C.$

Cách 2: $c - g - c.$

Cách 3: $g - c - g.$

Cách 4: Cạnh huyền – góc nhọn.

Cách 5: Cạnh huyền – góc vuông.

5. **Định lí Py-ta-go.**

- Nếu $AB^2 + AC^2 = BC^2$ thì $\triangle ABC$ là vuông tại A .
- Nếu $\triangle ABC$ là vuông tại A thì $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

6. **Chứng minh $\triangle ABC$ cân tại**

Cách 1: Chứng minh $AB = AC$ thì $\triangle ABC$ là cân tại A .

Cách 2: Chứng minh thì $\triangle ABC$ là cân tại A .

7. **Chứng minh $\triangle ABC$ đều.**

Cách 1: Chứng minh $AB = BC = AC$ thì $\triangle ABC$ là đều.

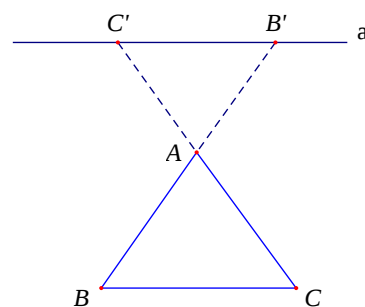
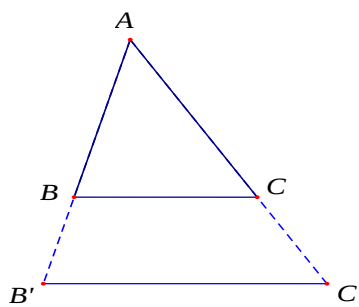
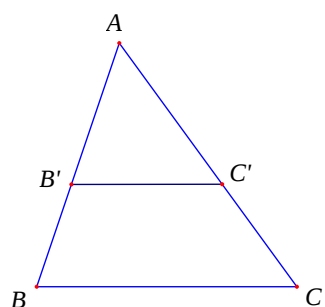
Cách 2: Chứng minh thì $\triangle ABC$ là đều.

Cách 3: Chứng minh $\triangle ABC$ cân và có một góc bằng 60° thì $\triangle ABC$ là đều.

8. Trong một tam giác cân đường phân giác cũng là đường cao, cũng là đường trung tuyến, cũng là đường trung trực.
9. Giao điểm của ba đường trung tuyến là trọng tâm của tam giác.
10. Giao điểm của ba đường cao là trực tâm của tam giác.
11. Giao điểm của ba đường phân giác cách đều ba cạnh của tam giác.
12. Đường thẳng trung trực là đường thẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng và vuông góc với đoạn thẳng đó.

II. **Kiến thức lớp 8 cần nhớ.**

1. Tính chất, dấu hiệu nhận biết hình thang, hình thang cân, hình bình hành, hình thoi, hình chữ nhật, hình vuông.
2. Định lí ta-lét thuận và đảo, hệ quả.



$$\text{Định lí ta-lét: } \begin{cases} \triangle ABC \\ B'C' \parallel BC \end{cases} \Rightarrow \frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}; \frac{AB'}{BB'} = \frac{AC'}{CC'}; \Rightarrow \frac{BB'}{AB} = \frac{C'C}{AC}.$$

Định lý ta-lét đảo: $\begin{cases} \Delta ABC \\ \frac{AB'}{B'B} = \frac{AC'}{C'C} \end{cases} \Rightarrow B'C' \parallel BC.$

Hệ quả của định lý ta-lét: $\begin{cases} \Delta ABC \\ B'C' \parallel BC \end{cases} \Rightarrow \frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}.$

Chú ý: Hệ quả vẫn đúng cho trường hợp đường thẳng d song song với một cạnh của tam giác và cắt phần kéo dài của hai cạnh còn lại.

3. Cách chứng minh hai tam giác đồng dạng.

Cách 1: $C - C - C.$

Cách 2: $c - g - c.$

Cách 3: $g - g.$

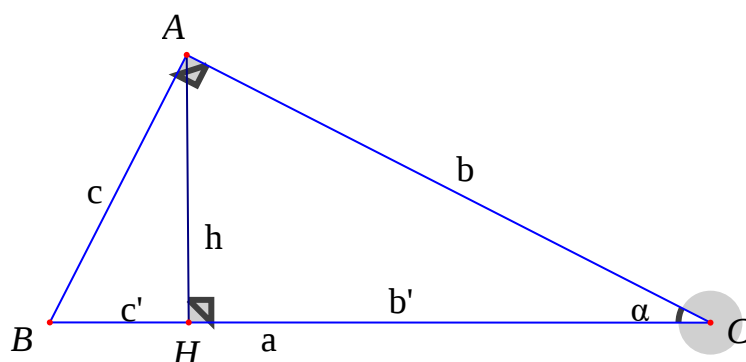
- Hai tam giác đồng dạng thì tỉ số diện tích bằng bình phương tỉ số đồng dạng.
- Trong một tam giác vuông đường trung tuyến thuộc cạnh huyền thì bằng một nửa cạnh huyền và ngược lại.

III. Kiến thức lớp 9 cần nhớ. "GÓC VỚI ĐƯỜNG TRÒN"

Nội dung kiến thức cần biết của học kì I.

1. Hệ thức lượng trong tam giác vuông.

Cho ΔABC vuông tại A có các giả thiết như hình vẽ.



$$(1) \quad b^2 = a.b'; c^2 = a.c'.$$

$$(2) \quad h^2 = b'.c'.$$

$$(3) \quad ah = bc.$$

$$(4) \quad \frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

$$(5) \quad \text{Từ hệ thứ (1) suy ra định lý Py-ta-go } a^2 = b^2 + c^2$$

2. Tỉ số lượng giác của góc nhọn.

$$(1)$$

$$(2)$$

(3)

(4)

3. Một số tính chất của các tỉ số lượng giác.

- Nếu $\alpha + \beta = 90^\circ$ thì:
- $\sin \alpha = \cos \beta; \cos \alpha = \sin \beta; \tan \alpha = \cot \beta; \cot \alpha = \tan \beta.$
- Nếu $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ thì:
- $0 < \sin \alpha < 1; 0 < \cos \alpha < 1; \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$
- $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}; \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1.$
- Nếu α tăng thì $\sin \alpha$ tăng, $\tan \alpha$ tăng còn $\cos \alpha$ giảm, $\cot \alpha$ giảm.

4. Các hệ thức về cạnh trong tam giác vuông.

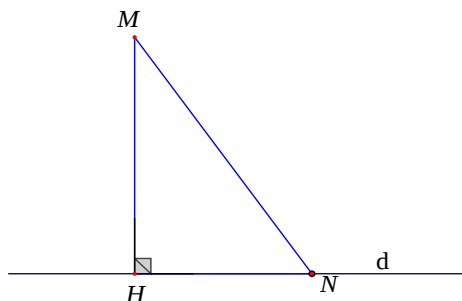
- $b = a \cdot \sin B; b = a \cdot \cos C; b = a \cdot \tan B; b = a \cdot \cot C.$
- $c = a \cdot \sin C; c = a \cdot \cos B; c = a \cdot \tan C; c = a \cdot \cot B.$

Chú ý: Với các góc nhọn α, β thì ta có:

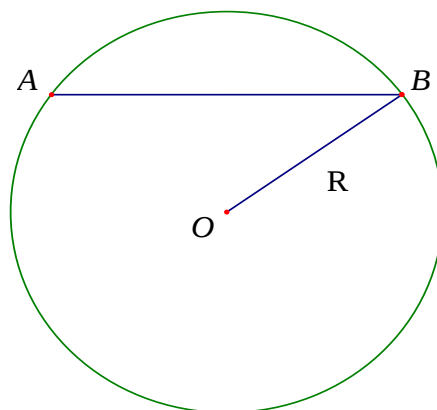
- $\sin \alpha < \sin \beta; \tan \alpha < \tan \beta.$
- $\cos \alpha > \cos \beta; \cot \alpha > \cot \beta.$
- $\sin \alpha < \tan \alpha; \cos \alpha < \cot \alpha.$

5. Cực trị hình học.

- Vận dụng tính chất đường xiên và đường vuông góc $MH \leq MN$. Dấu "=" xảy ra khi $N \equiv H$.



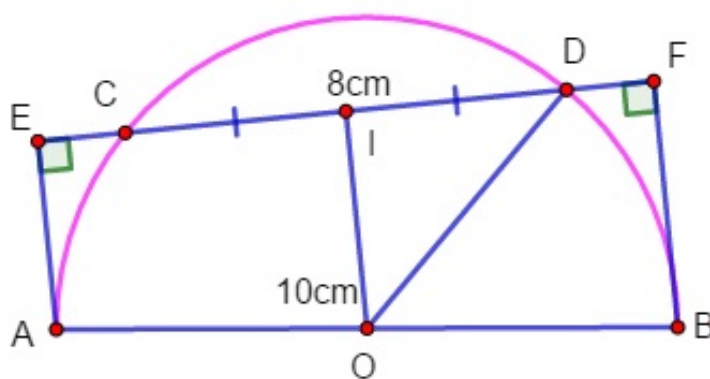
- Vận dụng định lý đường kính và dây $AB \leq 2R$. Dấu "=" xảy ra khi A, O, B thẳng hàng.



- Vận dụng các bất đẳng thức đại số.
 - +) $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ dấu "=" xảy ra khi $a = b$.
 - +) $a.b \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ dấu "=" xảy ra khi $a = b$.
 - +) Bất đẳng thức tam giác (quy tắc ba điểm).
 - +) Quan hệ đường kính và dây cung.
 - +) Quan hệ đường vuông góc và đường xiên.

Ví dụ: Cho nửa đường tròn tâm O , đường kính $AB = 10\text{cm}$. Một dây $CD = 8\text{cm}$, có hai đầu mút di chuyển trên nửa đường tròn. Gọi E, F theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của A và B trên đường thẳng CD . Xác định vị trí của CD để diện tích tứ giác $ABFE$ lớn nhất.

Lời giải



Gọi I là trung điểm của $CD \Rightarrow CI = ID = 4\text{cm}$

Do OI là trung tuyến của CD và CD là dây của (O)

$\Rightarrow OI \perp CD$.

Ta có: $AE \perp EF$; $BF \perp EF$

$$\Rightarrow AE \parallel BF$$

$\Rightarrow$ Tứ giác $AEFB$ là hình thang.

Lại có $OI \perp EF$

$$\Rightarrow AE \parallel OI \parallel BF$$

Mà O là trung điểm của AB

$\Rightarrow I$ là trung điểm của EF .

$$\Rightarrow EI = FI$$

$\Rightarrow OI$ là đường trung bình của hình thang $AEFB$

$$\Rightarrow OI = \frac{AE + FB}{2}$$

Diện tích tứ giác $ABFE$ là: $\frac{1}{2}(AE + FB).EF = OI.EF$

$$\text{Mà } OI = \sqrt{OD^2 - ID^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$$

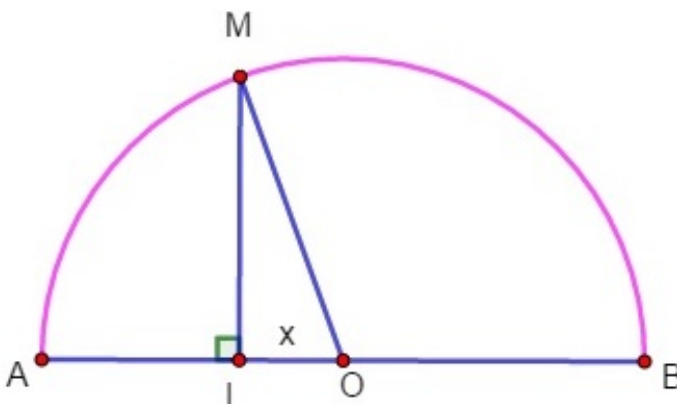
$$\Rightarrow S_{ABFE} = 3.EF \leq 3.AB = 3.10 = 30 \text{ cm}^2.$$

Suy ra S_{ABFE} lớn nhất $= 30 \text{ cm}^2$ khi và chỉ khi $AB = EF$

Vậy khi $CD \parallel AB$ thì S_{ABFE} lớn nhất.

Ví dụ: Cho nửa đường tròn tâm (O) , đường kính $AB = 2R$. Lấy điểm I trong đoạn OA sao cho $OI = x (0 < x < R)$. Qua I vẽ đường thẳng d vuông góc với AB và cắt nửa đường tròn tâm O tại M . Xác định x để chu vi tam giác IMO lớn nhất.

Lời giải



Ta có: Chu vi tam giác IMO là: $C_{\Delta IMO} = MI + IO + MO = \sqrt{MO^2 - IO^2} + x + R$

$$= \sqrt{R^2 - x^2} + x + R$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si: $A^2 + B^2 \geq \frac{(A+B)^2}{2}$ với A, B là các số không âm.

Ta có: $\frac{(x + \sqrt{R^2 - x^2})^2}{2} \leq R^2 - x^2 + x^2 = R^2$

Dấu "=" xảy ra khi $x = \sqrt{R^2 - x^2} \Leftrightarrow x^2 = R^2 - x^2 \Leftrightarrow x = \frac{R}{\sqrt{2}}$.

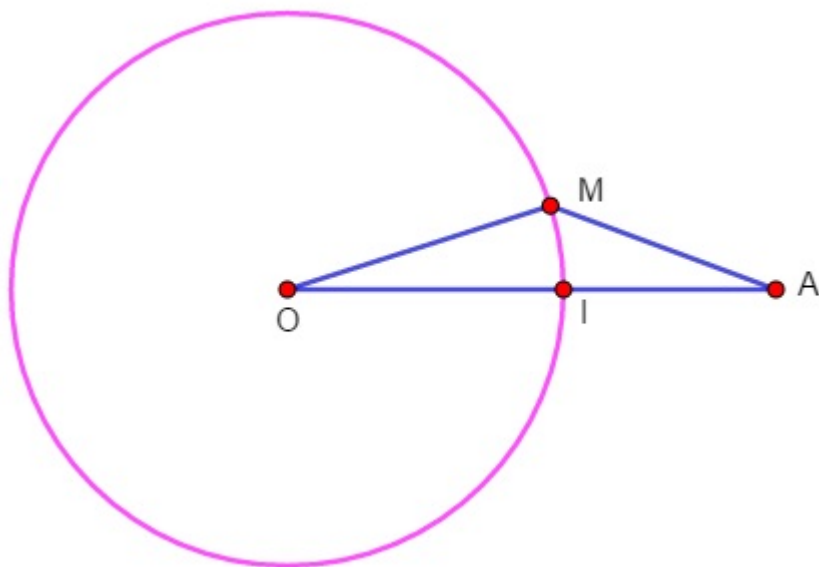
$C_{\Delta IMO} \max = \sqrt{2}R + R$ đạt được khi $x = \frac{R}{\sqrt{2}}$.

Vậy với $x = \frac{R}{\sqrt{2}}$ thì chu vi tam giác IMO lớn nhất (đpcm).

Ví dụ: Cho điểm A và đường tròn $(O; R)$ cố định ($OA > R$). Tìm điểm M thuộc (O) sao cho AM lớn nhất, AM nhỏ nhất.

Lời giải

- Chứng minh: điểm M thuộc (O) sao cho AM nhỏ nhất.



Gọi $I = OA \cap (O)$. Theo bất đẳng thức tam giác ta có:

$$AO \leq OM + MA$$

$$\Leftrightarrow OI + IA \leq OM + MA$$

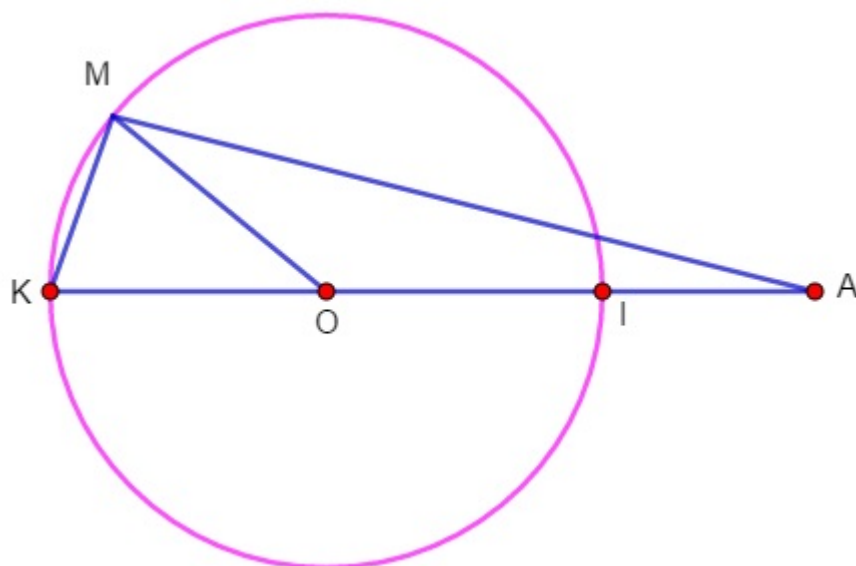
$$\Leftrightarrow R + IA \leq R + MA$$

$$\Leftrightarrow MA \geq IA$$

$$\Rightarrow AM_{\min} \Leftrightarrow AM = AI \Rightarrow M \equiv I$$

Vậy $M = OA \cap (O)$ thì AM nhỏ nhất.

- Chứng minh: điểm M thuộc (O) sao cho AM lớn nhất.



Gọi $I = OA \cap (O)$; KI là đường kính của (O) .

Áp dụng bất đẳng thức tam giác trong $\triangle MOA$ ta có:

$$MO + OA \geq MA$$

$$\Leftrightarrow MO + OI + IA \geq MA$$

$$\Leftrightarrow 2R + IA \geq MA \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức tam giác trong $\triangle MKA$ ta có:

$$AK + MK \geq MA$$

$$\Leftrightarrow KI + IA + MK \geq MA$$

$$\Leftrightarrow 2R + IA + MK \geq MA \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $MA \max \Leftrightarrow MK = 0$

$$\Rightarrow M \equiv K$$

Vậy M, O, A thẳng hàng và MA đi qua đường kính của (O) thì MA lớn nhất.

Ví dụ: Cho nửa đường tròn tâm $(O; R)$, đường kính AB . Từ điểm M bất kỳ thuộc đường tròn, kẻ $MN \perp AB (N \in AB; M \text{ khác } A; \text{ khác } B)$. Từ N kẻ ND và NE lần lượt vuông góc với AM và $BM (D \in AM, E \in BM)$.

$$\Rightarrow \widehat{DEO'} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow DE \perp EO'$$

Vậy DE là tiếp tuyến của đường tròn (O') .

d) Xét tam giác IMN ta có: $DM \perp IN$; $ID = DN$

$$\Rightarrow \triangle IMN \text{ cân tại } M.$$

$$\Rightarrow IM = MN \quad (4)$$

Chứng minh tương tự

$$MN = MK \quad (5)$$

$$\text{Từ (4) và (5)} \Rightarrow MN = IM = MK.$$

Ta có: $\widehat{IMK} = 2\widehat{AMN} + 2\widehat{BMN} = 2\widehat{AMB} = 180^\circ \Rightarrow I, M, K$ thẳng hàng.

$\Rightarrow M$ là trung điểm của IK .

+ Xét tam giác IAM và tam giác NAM có:

$$IM = MN$$

AM chung

$$IA = AN \quad (\triangle IAN \text{ cân tại } A)$$

$$\Rightarrow \triangle IAM = \triangle NAM \quad (\text{c-c-c})$$

$$\Rightarrow \widehat{MNA} = \widehat{MIA} = 90^\circ$$

+ Chứng minh tương tự ta có: $\widehat{MKB} = 90^\circ$

$$\Rightarrow \begin{cases} AI \perp IK \\ BK \perp IK \end{cases} \Rightarrow IA \parallel BK$$

+ Xét tứ giác $IKBA$ có: $AI \parallel KB$

$$\widehat{AIK} = \widehat{MKB} = 90^\circ$$

$\Rightarrow IAKB$ là hình thang vuông.

$$\Rightarrow C_{AIKB} = IA + IK + KB + AB$$

Do M là trung điểm của IK ; O là trung điểm AB

$\Rightarrow MO$ là đường trung bình của hình thang $IAKB$.

$$\Rightarrow MO = \frac{IA + KB}{2}$$

$$\Rightarrow C_{AIKB} = 2MO + IK + AB = 4R + IK$$

Suy ra để tứ giác $AIKB$ có chu vi lớn nhất khi IK max.

Mà $IK = 2MN \Rightarrow MN$ max khi và chỉ khi $MN = R$

$\Rightarrow N \equiv O$; M là điểm chính giữa cung AB

6. Tiếp tuyến của đường tròn.

- a) **Định nghĩa:** Tiếp tuyến của đường tròn là đường thẳng chỉ có một điểm chung với đường tròn đó.
- b) **Định lý 1:** Nếu một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn thì nó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.
- c) **Định lý 2:** Nếu một đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là một tiếp tuyến của đường tròn.

d) **Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau:**

Định lý: Nếu hai tiếp tuyến của đường tròn cắt nhau tại một điểm thì:

- Điểm đó cách đều hai tiếp điểm.
- Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tia tiếp tuyến.
- Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm.

7. **Các bước của phương pháp chứng minh đi qua một điểm cố định.**

Bước 1: Xác định rõ các yếu tố cố định đã biết.

Bước 2: Xác định tứ giác nội tiếp liên quan đến điểm cố định.

Bước 3: Chứng minh đường thẳng hoặc đường tròn đi qua điểm cố định.

Các ví dụ điểm đi qua đường tròn cố định:

Ví dụ: Cho đường tròn (O) và dây BC cố định (BC không đi qua (O)).

Lấy điểm A thuộc (O) sao cho A và (O) thuộc cùng một phía so với BC .

Lấy điểm M là trung điểm của AB , vẽ $MH \perp AC$ tại H . Chứng minh H luôn nằm trên một đường tròn cố định.

Ví dụ: Cho A, B nằm ngoài đường tròn $(O; R)$ cố định (đường thẳng AB không có điểm chung với (O)). Lấy điểm M bất kỳ trên (O) , gọi G là trọng tâm $\triangle MAB$. Chứng minh G chạy trên một đường tròn cố định khi M di động trên (O) .

Các ví dụ điểm đi qua đường thẳng cố định:

Ví dụ: Cho đường tròn (O) và điểm A cố định thuộc (O) . Vẽ tiếp tuyến d tại A của (O) . Lấy M bất kỳ thuộc d , gọi N là trung điểm của đoạn OM .

Chứng minh rằng khi M di động trên d thì

N chạy trên một đường cố định

Ví dụ: Cho đường tròn (O) bán kính R và một đường thẳng d cắt (O) tại C, D .

Một điểm M di động trên d sao cho $MC > MD$ và ở ngoài đường tròn (O) . Qua M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB (A, B là tiếp điểm). Chứng minh đường thẳng AB đi qua điểm cố định.

Ví dụ: Cho đoạn thẳng AC cố định, điểm B cố định nằm giữa A và C . Đường tròn (O) thay đổi luôn đi qua A và B . Gọi PQ là đường kính của đường tròn (O) , PQ vuông góc AB , (P thuộc cung lớn AB). Gọi CP cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai I . Chứng minh QI luôn đi qua một điểm cố định khi đường tròn (O) thay đổi.

Ví dụ: Cho đường tròn tâm (O) và hai điểm A, B cố định thuộc đường tròn đó (AB không phải là đường kính). Gọi M là trung điểm của cung nhỏ kAB . Trên đoạn AB lấy hai điểm C, D phân biệt và không nằm trên đường tròn. Các đường thẳng MC, MD cắt đường tròn đã cho tương ứng tại E, F khác M

- 1) Chứng minh rằng bốn điểm C, D, E, F nằm trên một đường tròn
- 2) Gọi O_1, O_2 tương ứng là tâm các đường tròn ngoại tiếp tam giác ACE và BDF . Chứng minh rằng khi C, D thay đổi trên đoạn AB các đường thẳng AO_1 và BO_2 luôn cắt nhau tại một điểm cố định.

Ví dụ: Cho tam giác ABC và điểm D di chuyển trên cạnh BC (D khác B và C). Đường tròn (O_1) đi qua D và tiếp xúc AB tại B . Đường tròn (O_2) đi qua D và tiếp xúc AC tại C . Gọi E là giao điểm thứ hai của $(O_1) \& (O_2)$

- a) Chứng minh rằng khi D di động trên đoạn BC thì đường thẳng ED luôn đi qua một điểm cố định
- b) Kết quả trên còn đúng không trong trường hợp D di động ở ngoài đoạn BC

Ví dụ: Cho góc vuông $\angle Ay$, điểm B cố định trên Ay , điểm C di chuyển trên Ax . Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với AC, BC theo thứ tự ở M, N . Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định

Ví dụ: Cho đường tròn tâm O dây AB . Điểm M di chuyển trên cung lớn AB . Các đường cao AE, BF của tam giác ABM cắt nhau ở H . Đường tròn tâm H bán kính HM cắt MA, MB theo thứ tự ở C, D .

- a) Chứng minh rằng đường thẳng kẻ từ M vuông góc với CD luôn đi qua một điểm cố định.
- b) Chứng minh rằng đường thẳng kẻ từ H và vuông góc với CD cũng đi qua một điểm cố định.

Ví dụ: Cho tam giác ABC , M là điểm bất kỳ thuộc đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ấy. Gọi D là điểm đối xứng với M qua AB , E là điểm đối xứng với M qua BC . Chứng

minh rằng khi điểm M di chuyển trên đường tròn (O) thì DE luôn đi qua một điểm cố định.

Ví dụ: Cho đường tròn tâm (O) . Từ điểm A cố định ở ngoài (O) kẻ tiếp tuyến AB, AC tới (O) (B, C tiếp điểm). Lấy điểm M trên cung nhỏ BC . Gọi D, E, F thứ tự là hình chiếu từ M đến BC, AC, AB . Gọi MB cắt DF tại P , MC cắt DE tại Q . Chứng minh đường thẳng nối giao điểm của hai đường tròn ngoại tiếp tam giác MPF và MQE luôn đi qua một điểm cố định

Ví dụ: Cho tam giác ABC cân tại A . Gọi M, N thứ tự là các điểm di động trên các đường thẳng AB, AC sao cho trung điểm I của MN nằm trên cạnh BC . Chứng minh rằng đường tròn qua 3 điểm A, M, N luôn đi qua một điểm cố định khác A

Ví dụ: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , I là điểm chính giữa của cung BC không chứa A . Vẽ đường tròn (O_1) đi qua I và tiếp xúc với AB tại B , vẽ đường tròn (O_2) đi qua I và tiếp xúc với AC tại C . Gọi K là giao điểm thứ hai của hai đường tròn $(O_1), (O_2)$

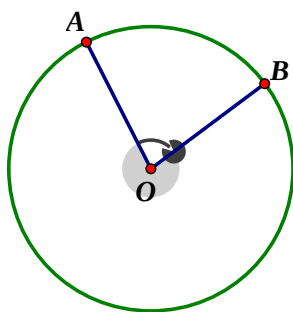
- Chứng minh rằng ba điểm B, K, C thẳng hàng
- Lấy điểm D bất kỳ thuộc cạnh AB , điểm E thuộc tia đối của tia CA sao cho $BD = CE$. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE luôn đi qua một điểm cố định khác A

Ví dụ: Cho đường tròn (O) đường kính AB , điểm C cố định trên đường kính ấy (C khác O). Điểm M chuyển động trên đường tròn. Đường vuông góc với AB tại C cắt MA, MB theo thứ tự ở E, F . Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF luôn đi qua một điểm cố định khác A .

Ví dụ: Cho đường tròn (O) và dây cung AB . Lấy điểm E trên dây cung AB (E khác A và B). Qua E vẽ dây cung CD của đường tròn (O) . Trên hai tia DA, DB lấy hai điểm P, Q đối xứng qua E . Chứng minh rằng đường tròn (I) tiếp xúc với PQ tại E và đi qua C luôn đi qua một điểm cố định khi E di động trên dây cung AB .

Nội dung kiến thức cần biết của học kỳ II

1. Góc ở tâm



a) Định nghĩa

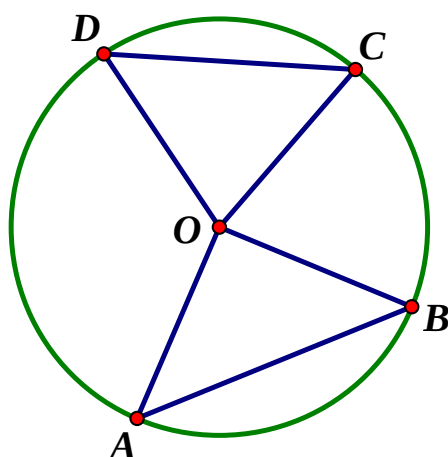
Góc ở tâm là góc có đỉnh trùng với tâm của đường tròn.

b) Tính chất

$$\widehat{AOB} = sd \widehat{AB}$$

c) Bài tập áp dụng

2. Liên hệ giữa cung và dây



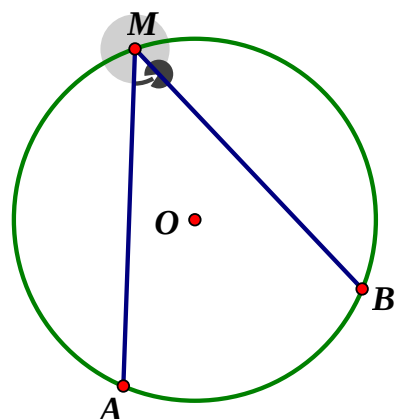
a) Hai cung bằng nhau căng hai dây bằng nhau

b) Hai dây bằng nhau căng hai cung bằng nhau

Định lý:

- Đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì chia đôi dây căng cung. Đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì đi qua điểm chính giữa cung căng dây đó
- Đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì vuông góc với dây căng cung ấy và ngược lại.

3. Góc nội tiếp



a) Định nghĩa

Góc nội tiếp là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó

b) Tính chất

$$\widehat{AMB} = \frac{1}{2} sđ \widehat{AB}$$

Ví dụ 1: Trong đường tròn (O) có dây AC và BD vuông góc nhau tại I. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh $IM \perp AD$

Ví dụ 2: Cho $\triangle ABC$ đều nội tiếp đường tròn (O). Lấy điểm M nằm trên cung BC. Chứng minh rằng $AM = BM + CM$

Ví dụ 3: Trong đường tròn (O); (O') cắt nhau tại A, B. Trên AB lấy điểm I. Qua I kẻ dây MN của đường tròn (O), kẻ dây CD của đường tròn (O'). Chứng minh $IM \cdot IN = IC \cdot ID$

Ví dụ 4: Cho $\triangle ABC$ đều nội tiếp đường tròn (O). Tia phân giác góc A cắt BC tại F, cắt đường tròn tại E. Chứng minh

a) $\triangle BEC$ cân

b) $\widehat{BEC} = \widehat{ABC} + \widehat{ACB}$

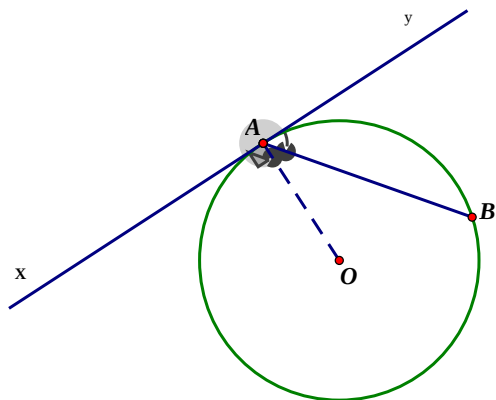
c) $AB \cdot AC = AE \cdot AF$

d) $AF^2 = AB \cdot AC - BF \cdot CF$

Ví dụ 5: Cho tứ giác ABCD có bốn đỉnh thuộc đường tròn (O). Chứng minh $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$

4. Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung

a) Định nghĩa



[Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và một cạnh là tia tiếp tuyến còn cạnh kia chứa dây cung của đường tròn đó.

Trong hình trên $\widehat{BAx}$ và $\widehat{BAy}$ là hai góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung

($\widehat{BAx} = \frac{1}{2}sd \widehat{AB}$ cung lớn và $\widehat{BAy} = \frac{1}{2}sd \widehat{AB}$ cung nhỏ)

b) Định lý

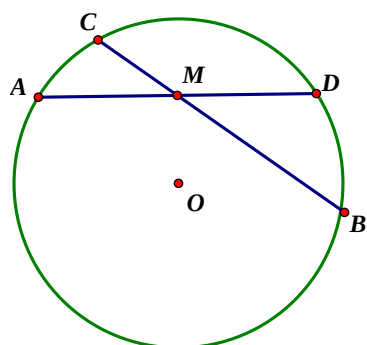
Số đo của góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung bằng nửa số góc của cung bị chắn.

c) Hệ quả

Trong một đường tròn, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.

5. Góc có đỉnh ở bên trong đường tròn, góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn

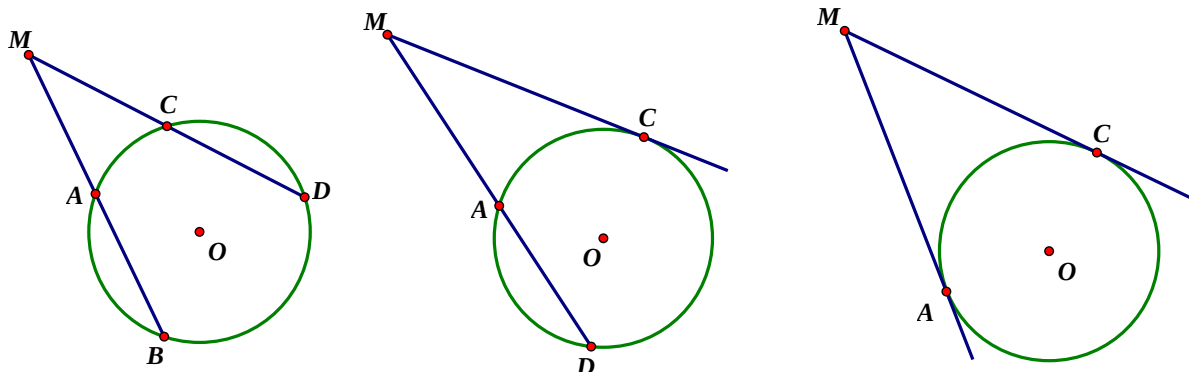
a) Góc có đỉnh ở bên trong đường tròn



$\widehat{AMC}$ có đỉnh M nằm bên trong đường tròn (O) .

Định lý: Số đo góc có đỉnh nằm bên trong đường tròn bằng nửa tổng số đo hai cung bị chắn

b) Góc có đỉnh nằm bên ngoài đường tròn



$\widehat{AMC}$ có đỉnh M nằm bên ngoài đường tròn (O)

Định lý: Số đo góc có đỉnh nằm bên ngoài đường tròn bằng nửa hiệu số đo hai cung bị chắn

6. Cung chứa góc

a. Bài toán quỹ tích cung chứa góc

Với đoạn thẳng AB và góc α ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$) cho trước thì quỹ tích các điểm M thỏa mãn $\widehat{AMB} = \alpha$ là hai cung chứa góc α dựng trên đoạn AB

Chú ý

- c) Hai cung chứa góc α dựng trên đoạn AB là hai cung tròn đối xứng nhau qua AB
- d) Hai điểm A, B được coi là thuộc quỹ tích
- e) Khi $\alpha = 90^\circ$ thì quỹ tích các điểm nhìn đoạn AB cho trước dưới một góc vuông là đường tròn đường kính AB

b. Cách giải bài toán quỹ tích

Muốn chứng minh quỹ tích (tập hợp) các điểm M thỏa mãn tính chất (τ) là một hình H nào đó ta phải chứng minh hai phần

Phần thuận: Mọi điểm có tính chất (τ) đều thuộc hình H

Phần đảo: Mọi điểm thuộc hình H đều có tính chất (τ)

Kết luận: Quỹ tích (tập hợp) là các điểm M có tính chất (τ) là hình (H)

c. Dạng bài quỹ tích

Dạng 1. Quỹ tích là cung chứa góc α

Phương pháp :

- +) Tìm đoạn thẳng cố định trong hình vẽ

+) Nối điểm phải tìm quỹ tích với hai đầu của đoạn thẳng cố định đó, xác định góc α tạo thành

+) Khẳng định điểm phải tìm quỹ tích thuộc cung chứa góc α vẽ trên đoạn thẳng cố định

Ví dụ 1: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB cố định. Điểm C chuyển động trên nửa đường tròn. Ở phía ngoài $\triangle ABC$ vẽ $\triangle BCD$ vuông cân tại C . Tìm quỹ tích điểm D .

Ví dụ 2: Trên đường tròn $(O; R)$ lấy hai điểm B, C cố định sao cho số đo cung $sd \widehat{BC} = 128^\circ$. Lấy điểm A di động trên cung lớn BC . Gọi M là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của $\triangle ABC$. Chứng minh rằng M nằm trên một cung tròn cố định.

7. Tứ giác nội tiếp

a) Định nghĩa

Tứ giác có 4 đỉnh nằm trên một đường tròn gọi là tứ giác nội tiếp

b) Tính chất

- Trong một tứ giác nội tiếp thì hai góc đối có tổng số đo bằng 180°
- Nếu một tứ giác có tổng hai góc đối diện bằng 180° thì tứ giác đó nội tiếp đường tròn.

c) Dấu hiệu

- Tổng hai góc đối của một tứ giác bằng 180° thì tứ giác nội tiếp đường tròn
- Nếu tứ giác có 2 đỉnh kề nhau cùng nhìn một cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới một góc bằng nhau thì bốn đỉnh của tứ giác ấy cùng thuộc một đường tròn

d) Vận dụng

Phương pháp: Để chứng minh một tứ giác nội tiếp (hay 4 điểm cùng thuộc một đường tròn) ta cần:

- (1) Chứng minh cho bốn đỉnh của tứ giác cách đều một điểm nào đó
- (2) Chứng minh tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180°
- (3) Chứng minh từ hai đỉnh cùng kề một cạnh cùng nhìn một cạnh dưới hai góc bằng nhau.
- (4) Nếu một tứ giác có tổng số đo hai góc đối bằng 180° thì tứ giác đó nội tiếp được trong một đường tròn.

Cụ thể: Cho tam giác $ABCD$. Nếu các bạn chứng minh được $\widehat{A} + \widehat{C} = \widehat{B} + \widehat{D}$ thì tứ giác $ABCD$ cũng nội tiếp trong một đường tròn. Đây có thể nói là một trường hợp đặc biệt của trường hợp thứ 2.

(5) Tứ giác có góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong tại đỉnh đối diện của đỉnh đó thì nội tiếp được trong một đường tròn.

(6) Chứng minh bằng phương pháp phản chứng.

Chú ý: Các bạn có thể chứng minh tứ giác $ABCD$ là một trong những hình đặc biệt sau: Tứ giác $ABCD$ là hình thang cân, hình chữ nhật, hình vuông.

Ví dụ 1: Cho tam giác nhọn ABC có $\hat{A} = 60^\circ$. Các đường phân giác trong BB_1, CC_1 của tam giác ABC cắt nhau tại I .

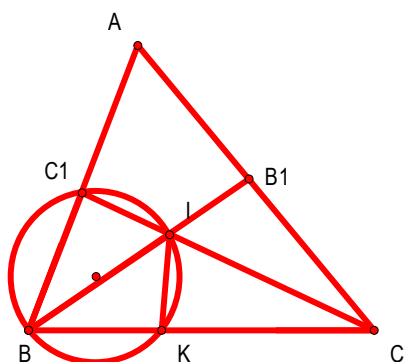
1. Chứng minh tứ giác AB_1IC_1 nội tiếp.
2. Gọi K là giao điểm thứ hai khác B của đường thẳng BC với đường tròn ngoại tiếp tam giác BC_1I . Chứng minh tứ giác $CKIB_1$ nội tiếp.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp $(O; R)$. Hạ đường cao AD, BE của tam giác. Các tia AD, BE lần lượt cắt (O) tại các điểm thứ hai M, N . Chứng minh rằng:

1. Bốn điểm A, E, D, B nằm trên một đường tròn.
2. $MN \parallel DE$
3. $DE \perp OC$
4. Cho (O) và dây AB cố định, điểm C di chuyển trên cung lớn AB . Chứng minh rằng độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác CED không đổi.

Hướng dẫn giải

VD1:



a. Ta có $\angle IBC = \angle IBA = \frac{\hat{B}}{2}$ (do BB_1 là phân giác)

$$\angle ICB = \angle ICA = \frac{\hat{C}}{2} \text{ (do } CC_1 \text{ là phân giác)}$$

Áp dụng định lý tổng ba góc trong một tam giác tính được $\hat{B} + \hat{C} = 120^\circ$

Có $\angle IBC + \angle ICB + \angle BIC = 180^\circ$ (định lý tổng ba góc trong một tam giác)

CM tương tự $BK \parallel AH(2)$

Từ (1), (2) $\Rightarrow AKHB$ là hình bình hành

Suy ra I là trung điểm KH (tính chất đường chéo hbh)

$\Rightarrow K, I, H$ thẳng hàng

CM được tứ giác $CEHD$ nội tiếp đường tròn tâm O' (do có tổng hai góc đối bằng 180°)

Suy ra đường tròn ngoại tiếp tứ giác $CEHD$ là đường tròn ngoại tiếp $\triangle CED$

Xét $\triangle CKH$ có $IA = IB; OK = OC$. Suy ra OI là đường trung bình

$\Rightarrow OI = \frac{1}{2}CH \Rightarrow CH = 2OI$. Do OI cố định nên CH không đổi

Vậy khi C di chuyển trên cung lớn AB thì độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác CED không đổi.

C. CÁC DẠNG CƠ BẢN.

- Bài toán liên quan đến chứng minh.
- Bài toán liên quan đến tính toán.
- Bài toán liên quan đến quỹ tích.
- Bài toán liên quan đến dựng hình.
- Bài toán liên quan đến cực trị hình học.

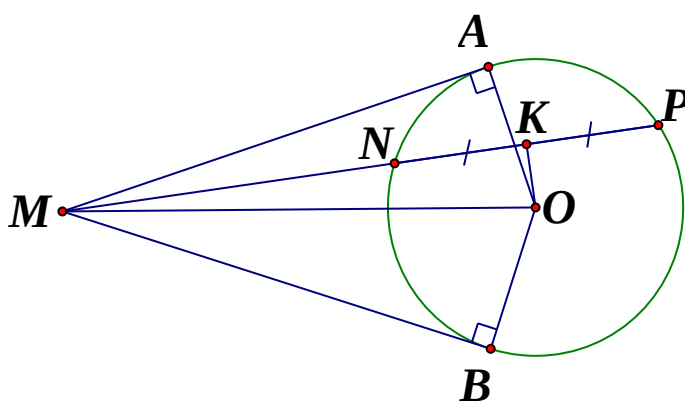
Ví dụ: Cho đường tròn (O) và điểm M nằm bên ngoài (O) . Từ M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB đến (O) (A, B là tiếp điểm). Qua M kẻ cát tuyến MNP ($MN < MP$) đến (O) . Gọi K là trung điểm của NP .

1. Chứng minh M, A, K, O, B cùng thuộc một đường tròn.
2. Chứng minh tia KM là tia phân giác của $\widehat{AKB}$.
3. Gọi Q là giao điểm thứ hai của đường thẳng BK với đường tròn (O) . Chứng minh $AQ \parallel NP$
4. Chứng minh rằng $MA^2 = MH \cdot MO = MN \cdot MP$
5. Chứng minh rằng tứ giác $NHOP$ là tứ giác nội tiếp.
6. Gọi E là giao điểm của AB và KO . Chứng minh rằng $AB^2 = 4 \cdot HE \cdot HF$ (H là giao điểm của AB và NP)
7. Chứng minh rằng tứ giác $KEMH$ là tứ giác nội tiếp. Từ đó chứng tỏ $OK \cdot OE$ không đổi.
8. Gọi I là giao điểm của đoạn thẳng MO với đường tròn (O) . Chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle MAB$
9. Chứng minh rằng KE và KF là phân giác trong và phân giác ngoài của $\widehat{AKB}$. Từ đó suy ra $AE \cdot BF = AF \cdot BE$.
10. Tìm vị trí của cát tuyến MNP để diện tích $\triangle MQP$ đạt giá trị lớn nhất.

11. Chứng minh rằng khi cát tuyến MNP quay quanh M thì trọng tâm G của $\triangle NAP$ luôn chạy trên một đường tròn cố định và khi cát tuyến MNP cố định, điểm M di chuyển trên tia đối của tia NP, chứng minh đường thẳng AB đi qua một điểm cố định.
12. Giả sử $MO = 2.R$. Tính diện tích hình quạt giới hạn bởi hai bán kính OA, OB và cung nhỏ AB.

Hướng dẫn

1. Chứng minh rằng M, A, K, O, B cùng thuộc một đường tròn.



Vì MA là tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) nên $MA \perp OA$ tại A

$$\Rightarrow \widehat{MAO} = 90^\circ \Rightarrow A \text{ thuộc đường tròn đường kính MO (1)}$$

Vì MB là tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) nên $MB \perp OB$ tại B

$$\Rightarrow \widehat{MBO} = 90^\circ \Rightarrow B \text{ thuộc đường tròn đường kính MO (2)}$$

Trong đường tròn (O) có K là trung điểm của dây NP nên $OK \perp NP$ tại K $\Rightarrow \widehat{OKN} = 90^\circ$

Mà M, N, K thẳng hàng nên $\widehat{OKM} = 90^\circ \Rightarrow K \text{ thuộc đường tròn đường kính MO (1)}$

Từ (1), (2), (3) suy ra: $A, B, K \in (MO)$

$\Rightarrow$ 5 điểm M, A, K, O, B cùng thuộc một đường tròn (đpcm).

2. Chứng minh rằng tia KM là tia phân giác góc AKB:



Xét đường tròn đường kính MO, có:

$$\widehat{AKM} = \widehat{AOM} \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn } \widehat{AM} \text{)} \quad (4)$$

$$\widehat{\text{BKM}} = \widehat{\text{BOM}} \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn } \widehat{\text{BM}} \text{)} \quad (5)$$

Mặt khác: MA, MB là hai tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $\widehat{AOM} = \widehat{BOM}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Suy ra: $\widehat{AKM} = \widehat{BKM}$

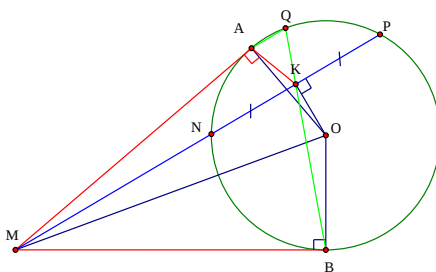
$\Rightarrow$ KM là tia phân giác của $\widehat{AKB}$ (đpcm)

OM là phân giác của góc $\widehat{AOB} \Rightarrow \widehat{AOM} = \widehat{BOM}$ (6)

+) Từ (4), (5) và (6) $\Rightarrow \widehat{\text{AKM}} = \widehat{\text{BKM}}$

$\Rightarrow$ KM là tia phân giác của $\widehat{AKB}$ (đpcm)

3. Gọi Q là giao điểm thứ hai của đường thẳng BK với đường tròn (O). Chứng minh $AQ \perp NP$



Ta sẽ chứng minh $\widehat{AQB} = \widehat{NKB}$

+) Trong đường tròn (O): $\widehat{AQB} = \frac{1}{2} \text{sđ}\widehat{AB}$ (7)

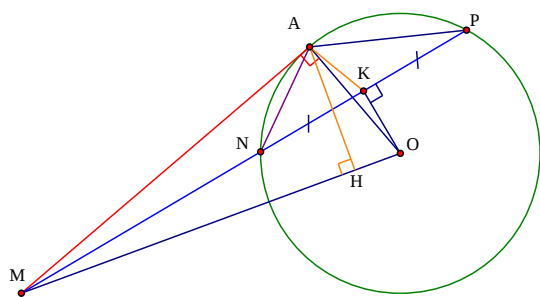
+) Trong đường tròn (MO): $\widehat{NKB} = \widehat{MKB} = \widehat{MOB}$ (cùng = $\frac{1}{2} \text{sđ}\widehat{MB}$) (7)

$= \frac{1}{2} \widehat{AOB}$ (vì MO là phân giác của góc $\widehat{AOB}$)

$= \frac{1}{2} \text{sđ}\widehat{AB}$ (vì $\widehat{AOB} = \text{sđ}\widehat{AB}$) (8)

Từ (7) và (8) $\Rightarrow \widehat{AQB} = \widehat{NKB}$, mà hai góc này ở vị trí đồng vị $\Rightarrow AQ \parallel NP$ (đpcm)

4. Chứng minh rằng $MA^2 = MH.MO = MN.MP$



Ta chứng minh $MA^2 = MH.MO$

Xét $\triangle MAO$ vuông tại A và có chiều cao $AH \perp MO$

$\Rightarrow$ Theo hệ thức lượng ta có $MA^2 = MH.MO$ (đpcm) (9)

Ta chứng minh $MA^2 = MN.MP$

Xét $\triangle MAN$ và $\triangle MPA$ có:

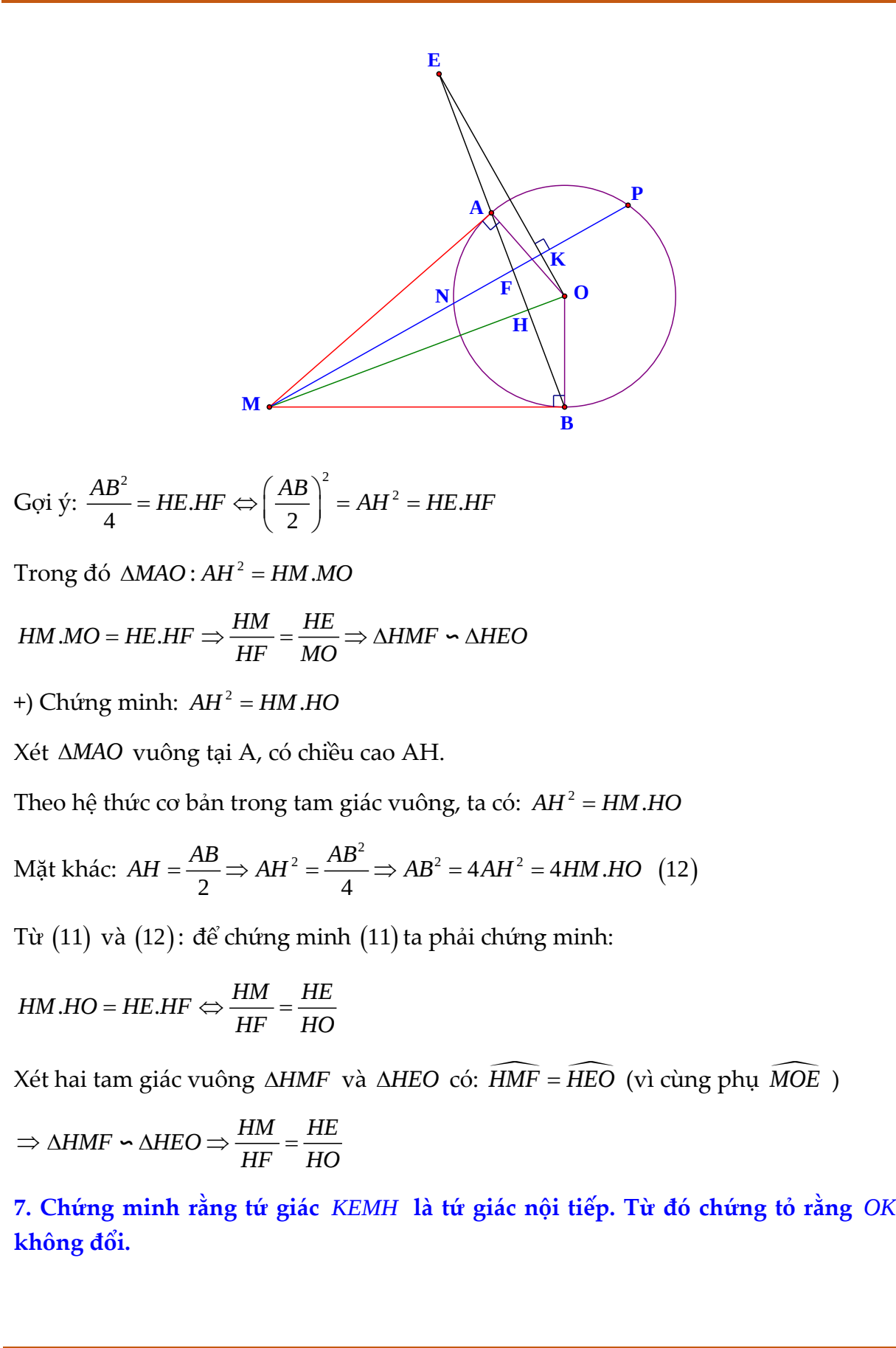
+) $\widehat{M}$ chung (I)

+) $\widehat{MAN} = \frac{1}{2} \text{sđ}\widehat{AN}$

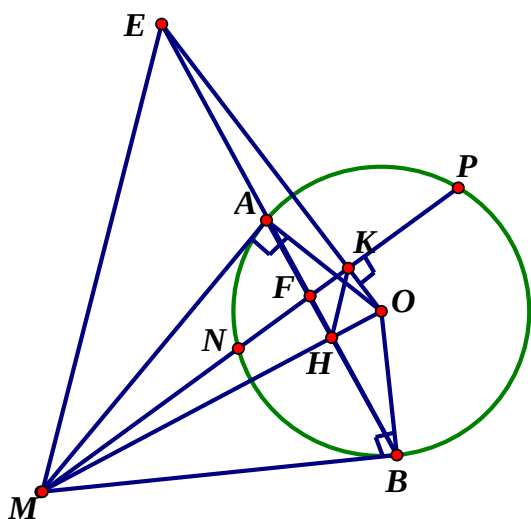
+) $\widehat{MPA} = \widehat{NPA} = \frac{1}{2} \text{sđ}\widehat{AN}$

$\Rightarrow \widehat{MAN} = \widehat{MPA}$ (II)

Từ (I) và (II) suy ra: $\triangle MAN \sim \triangle MPA \Rightarrow \frac{MA}{MN} = \frac{MP}{MA} \Rightarrow MA^2 = MN.MP$.



Website: tailieutoanhoc.com

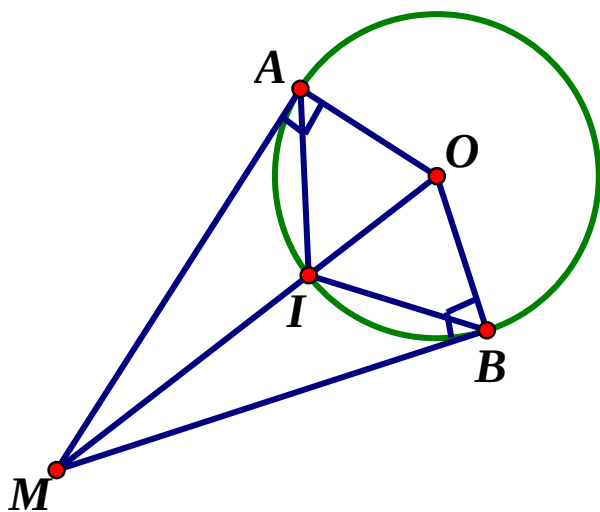


Ta có MK vuông góc EK, EH vuông góc MH, $\widehat{EKM} = \widehat{EHM} = 90^\circ$ cùng nhìn đoạn EM $\Rightarrow$ KEMH là tứ giác nội tiếp

Dùng kết quả ở câu 5 ta có $OK.OE = OM.OH = OA^2 = R^2$

Từ $OK.OE = R^2 = ON^2 = OP^2 \Rightarrow \widehat{ENO} = 90^\circ$ (đpcm)

8. Gọi I là giao điểm của đường tròn (O) với MO. Chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle MAB$



Vì MO là trung trực của AB nên $IA = IB \Rightarrow \widehat{IAM} = \widehat{IBM} \Rightarrow AI$ là phân giác của $\widehat{AMB}$

9. Chứng minh rằng KE và KF là phân giác trong và phân giác ngoài của $\widehat{AKB}$. Từ đó suy ra $AE.BF = AF.BE$

Từ câu 2 ta có KF là phân giác của $\widehat{AKB}$, với KE vuông KF nên KE là phân giác góc ngoài tại đỉnh K. Dùng tính chất đường phân giác với AKB ta được $AE.BF = AF.BE$

10. Tìm vị trí của cát tuyến MNP để diện tích tam giác MQP là lớn nhất

Chú ý: Do P, Q thay đổi nên độ dài 3 cạnh của ΔMQP cũng thay đổi. Vì vậy cần đưa về tam giác chứa nhiều yếu tố cố định hơn.

Từ câu 3 $\Rightarrow AQ//MP \Rightarrow S_{QMP} = S_{AMP}$

Kẻ PJ vuông MA, ta có $S_{QMP} = \frac{1}{2} AM.PJ$

Vì AM không đổi nên S_{QMP} max khi PJ max

Vì $PJ \leq PA \leq P'A$ nên $P \equiv P'$ (P' đối xứng với A qua O)

Vậy S_{QMP} max khi $P \equiv P'$

11. Chứng minh khi cát tuyến MNP quay quanh M thì trọng tâm G của ΔNAP luôn chạy trên 1 đường tròn cố định, và khi cát tuyến MNP cố định, điểm M di chuyển trên tia đối của NP, chứng minh đường AB đi qua 1 điểm cố định

Gọi S là trung điểm OM, từ G kẻ GL//KS. Vì AS cố định, $\frac{AL}{AS} = \frac{2}{3}$ nên L cố định

Lại có $LG = \frac{2}{3} SK = \frac{1}{3} OM$ không đổi. Vì vậy G luôn chạy trên đường tròn ($L; \frac{1}{3} OM$)

Do OK.OE không đổi nên E thuộc đường OK cố định, trên đó E cách O cố định 1 đoạn $OE = \frac{R^2}{ok}$ không đổi $\Rightarrow$ E là điểm cố định mà AB luôn đi qua.

12. Giả sử $OM = 2R$. Tính diện tích hình quạt giới hạn bởi hai bán kính OA và OB và cung nhỏ AB.

Từ $OM = 2R$ ta tính được $\widehat{MOA} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{AOB} = 120^\circ$

Diện tích hình quạt cần tính là $S = \frac{\pi R^2}{3}$

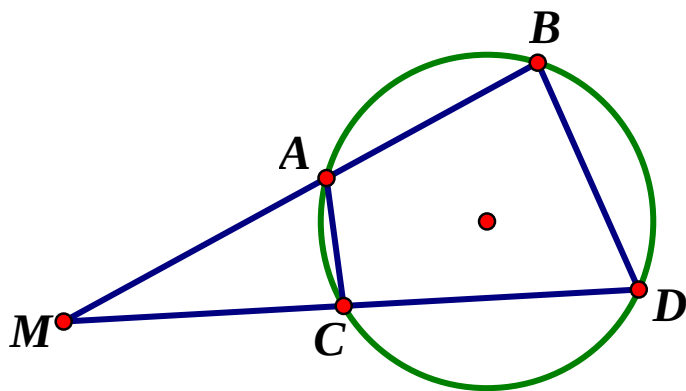
Ví dụ 2: Cho ΔABC nội tiếp đường tròn tâm O, các đường cao AD BE CF cắt nhau tại H, lần lượt cắt đường tròn tại các điểm M, N, P. Chứng minh rằng:

- Tứ giác BFEC, AEDB nội tiếp
- $AE.AC = AF.AB$
- H là tâm đường tròn nội tiếp ΔEFD

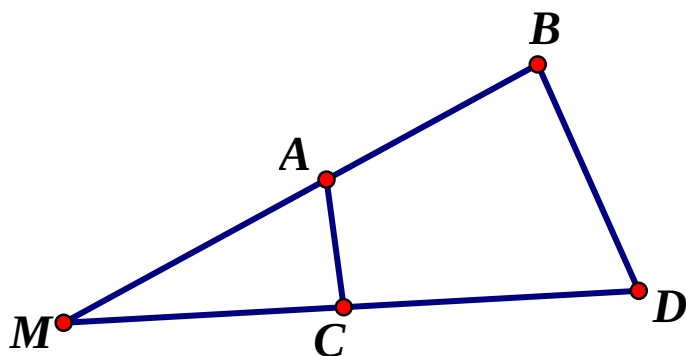
- d) Khi $\widehat{BAC} = 30^\circ$, tính diện tích hình quạt giới hạn bởi OB, OC và cung nhỏ BC
- e) BC là phân giác của $\widehat{HNM}$, từ đó suy ra H và M đối xứng với nhau qua BC
- f) $PN \parallel EF$, AO vuông góc EF
- g) Gọi I là trung điểm BC, K đối xứng với H qua I. Chứng minh K thuộc (O)
- h) BMKC là hình thang cân
- i) $PN < 2AH$
- j) AI cắt OH tại G. Chứng minh G là trọng tâm $\triangle ABC$
- k) Tìm điều kiện của góc B và góc C để $OH \parallel BC$
- l) Khi A di chuyển trên cung lớn BC, chứng minh bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle AFE$ không đổi. Chứng minh H luôn thuộc 1 đường tròn cố định.
- m) Khi A di chuyển trên cung lớn BC, chứng minh EF có độ dài không đổi, suy ra vị trí điểm A để diện tích $\triangle AFE$ lớn nhất.

E. PHƯƠNG TÍCH GIẢI CÁC BÀI TOÁN KHÓ

1. Bổ đề 1



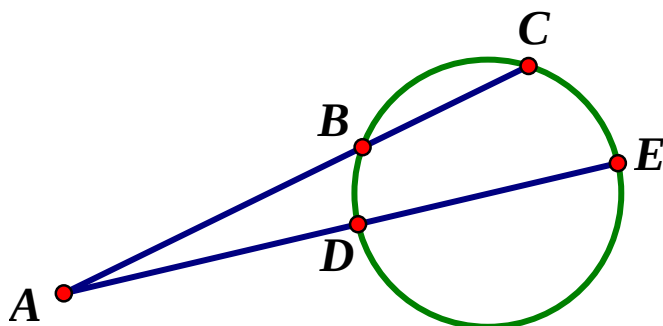
Nếu tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn $\Rightarrow MA \cdot MB = MC \cdot MD$ hay $\triangle MAC \sim \triangle MDB$ (g-g)
hay $\triangle MAC \sim \triangle MCB$ (g-g)



Nếu $MA \cdot MB = MC \cdot MD \Leftrightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MB} \Leftrightarrow \triangle MAC \sim \triangle MDB (g-g)$ thì tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn

Kết luận: Vậy tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn $\Leftrightarrow MA \cdot MB = MC \cdot MD$

Mở rộng bổ đề 1:



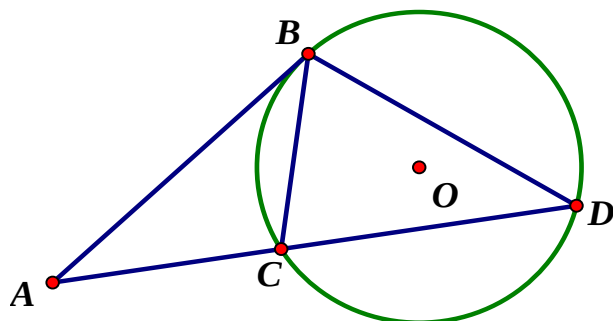
Chứng minh $AB \cdot AC = d^2 - R^2$

Theo bổ đề 1: $AB \cdot AC = AD \cdot AE = (d-R)(d+R) = d^2 - R^2$ (d là khoảng cách từ A tới O)

Bài toán ứng dụng: Chứng minh AB.AC không đổi

2. Bổ đề 2:

Cho (O), tiếp tuyến AB và cát tuyến ACD. Chứng minh $AB^2 = AC \cdot AD$

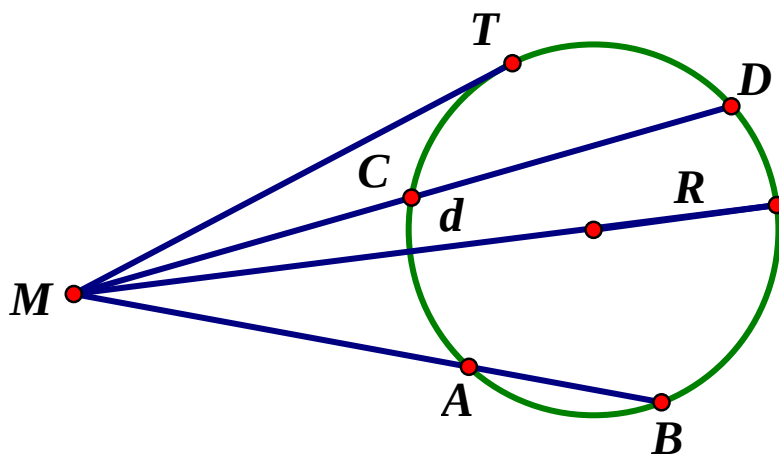


$$\Delta ACB \sim \Delta ABD (g-g)$$

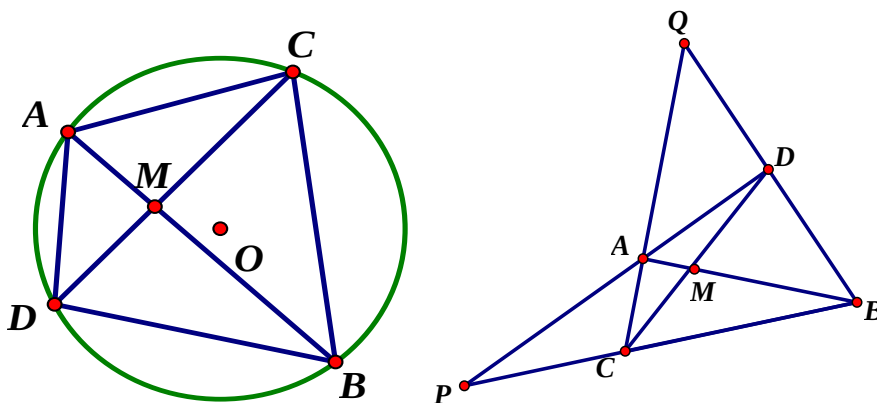
Ứng dụng: AB là tiếp tuyến của $\Delta BCD \Leftrightarrow AB^2 = AC \cdot AD \Leftrightarrow \Delta ACB \sim \Delta ABD (g-g)$

$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{D} \Rightarrow AB$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔBCD

Từ bổ đề 1 và bổ đề 2 ta có $MA \cdot MB = MC \cdot MD = MT^2 = d^2 - R^2$



Tương tự trường hợp hai dây cung cắt nhau cùng nằm trong 1 đường tròn cũng xảy ra hai chiều cách chứng minh tương tự các phần trên

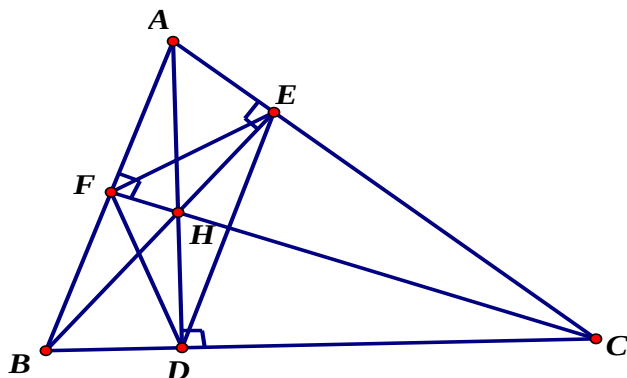


- Tứ giác ABCD nội tiếp $\Leftrightarrow MA \cdot MB = MC \cdot MD$

$$\text{Chứng minh } \Delta MCA \sim \Delta MBD \Leftrightarrow \frac{MC}{MB} = \frac{MA}{MD} = MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

- Vậy tứ giác ABCD nội tiếp $\Leftrightarrow PA.PD = PC.PB, QA.QC = QD.QB, MA.MB = MC.MD$

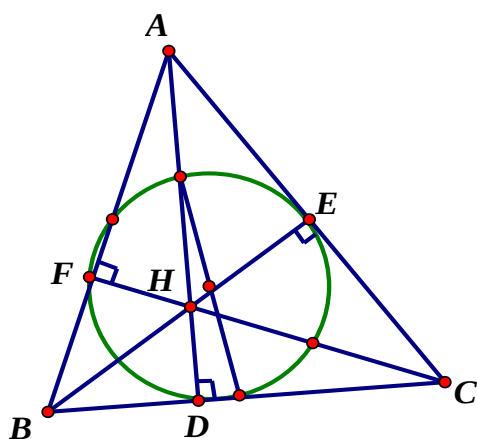
3. Bổ đề 3



Trong $\triangle ABC$ có 3 đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H

- Chứng minh được các tứ giác loại 1 AFHE, Và tứ giác loại 2 ABDE, ... nội tiếp.
- Chứng minh được H là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle DEF$
- Chứng minh được $AF.AB = AH.AD = AE.AC$ và $HA.HD = HE.HB = HC.HF$
- Chứng minh được $DB.DC = DH.DA \Rightarrow \triangle BDH \sim \triangle ADC$ (quan trọng nhất)

4. Đường tròn Euler



- Đường tròn đi qua 9 điểm như hình vẽ trên được gọi là đường tròn Euler

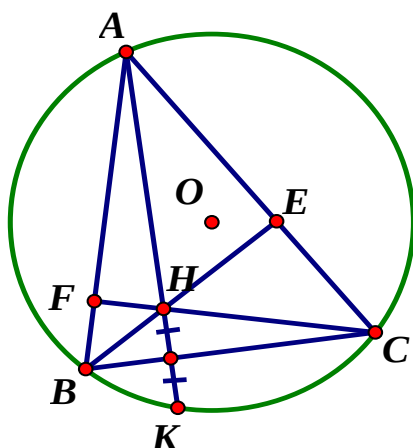
Chú ý: Khi đi thi đề chỉ hỏi chứng minh 4 hoặc 5 điểm trong 9 điểm cùng thuộc 1 đường tròn.

5. Điểm đối xứng với trực tâm qua cạnh của tam giác

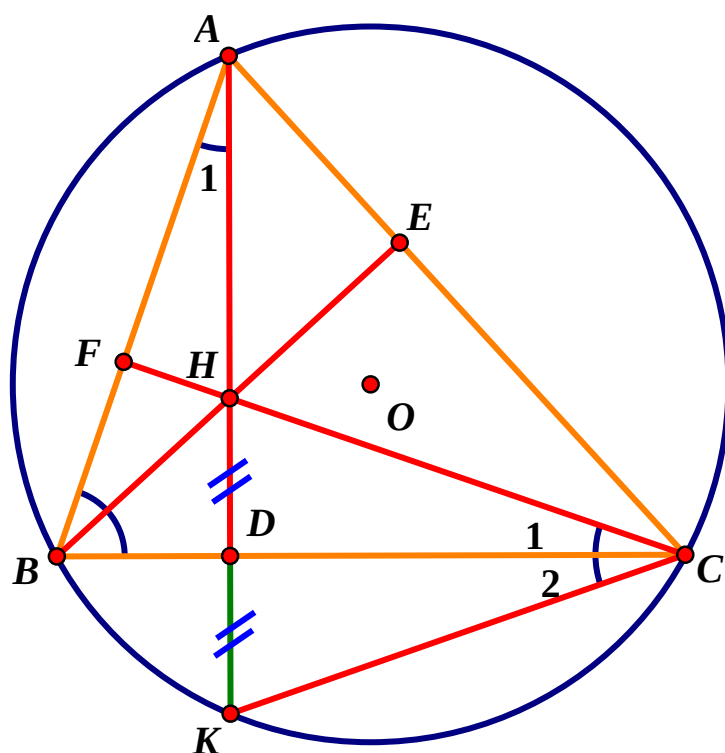
Cho ΔABC có 3 đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H

Cách hỏi 1: Kẻ AD cắt (ABC) tại K thì H và K đối xứng nhau qua BC

Cách hỏi 2: Gọi K là điểm đối xứng với H qua BC thì $K \in (ABC)$



Chứng minh:



Cách hỏi 1: H và K đối xứng nhau qua BC .

- ΔHCK là Δ cân. Vì $\widehat{C_1} = \widehat{C_2} \Rightarrow BC$ là phân giác của $\widehat{HCK}$ mà $BC \perp HK$.

- $\Delta BHC = \Delta BKC \Rightarrow (BHC)$ và (BKC) có bán kính bằng nhau hơn nữa (BHC) , (CHA) , (AHB) , (BKC) , (ABC) cũng có bán kính bằng nhau.

Cách hỏi 2: Gọi K là điểm đối xứng với H qua BC thì $K \in (ABC)$

Ta có $K \in (ABC) \Leftrightarrow ABKC$ nội tiếp

$$\Leftrightarrow \widehat{BKC} + \widehat{BAC} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{BHC} + \widehat{BAC} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{EHF} + \widehat{BAC} = 180^\circ$$

6. Đường thẳng Euler H, G O

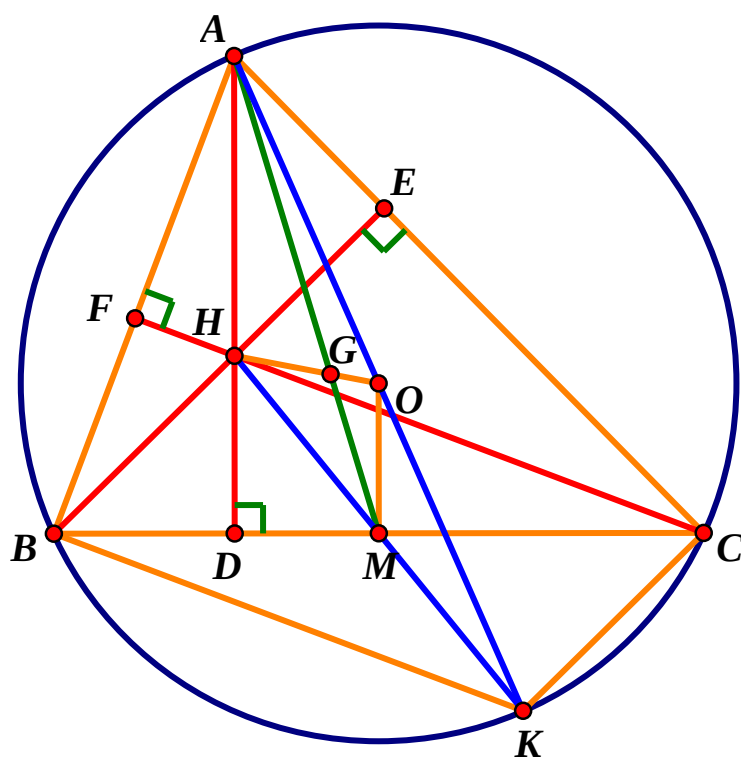
Cho ΔABC , ba đường cao AD, BE, CF đồng qui tại H. Kẻ đường kính AK.

Ta chứng minh được BHCK là hình bình hành vì $CK \parallel BE$, $BK \parallel CF$.

Nối HK cắt BC tại M thì $AH = 2OM$.

Chứng minh được G là trọng tâm ΔABC vì $OM = \frac{1}{2}AH$ theo định lý Ta – lét

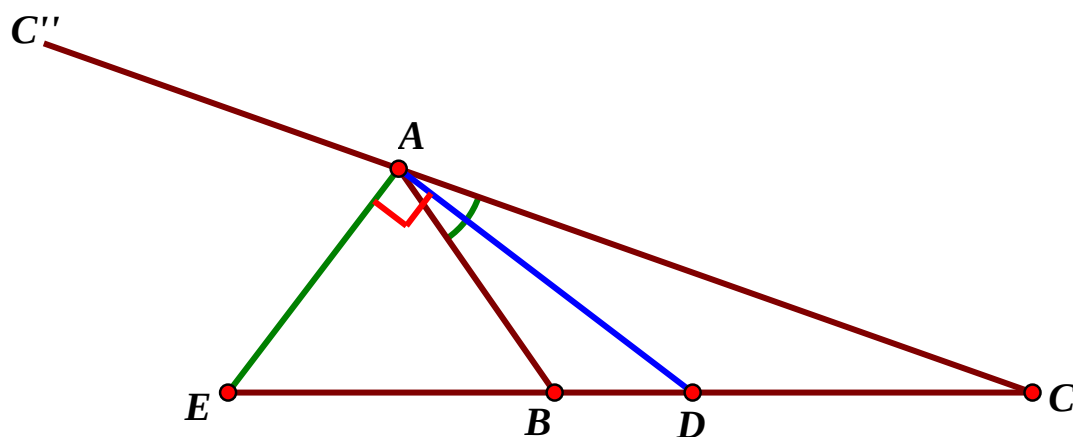
$$\frac{AG}{GM} = 2 \Rightarrow \frac{AG}{AM} = \frac{2}{3}$$



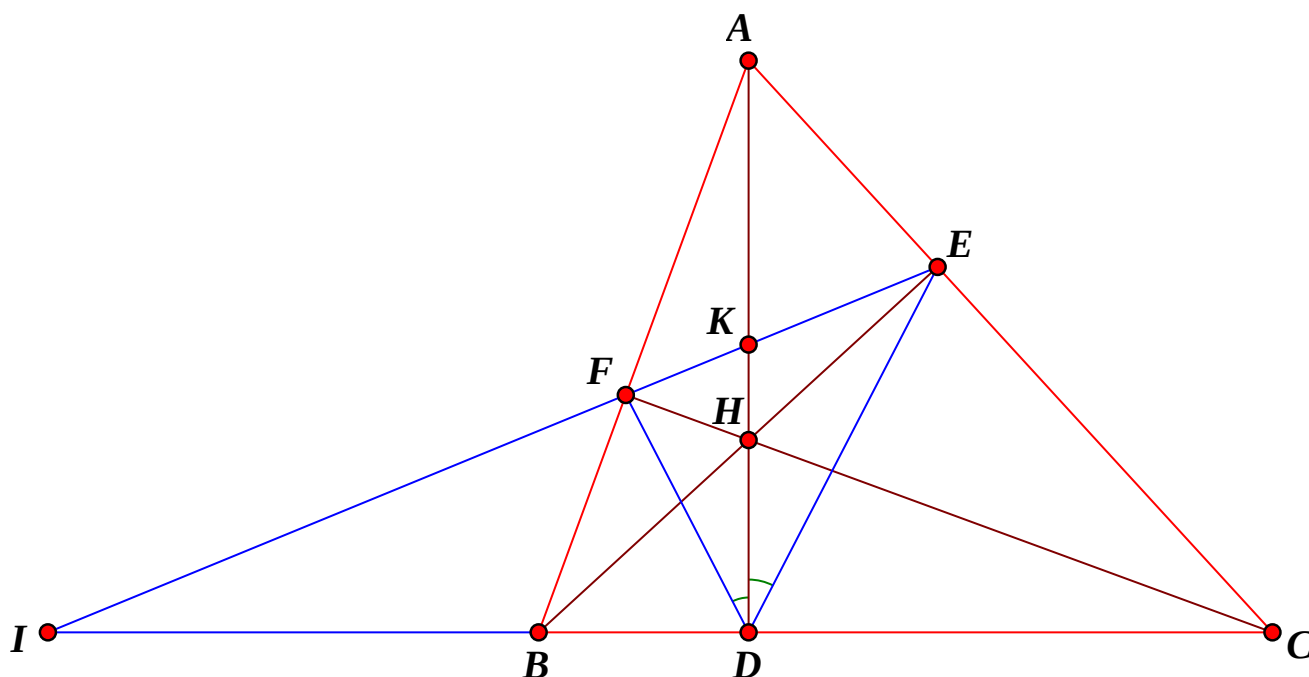
7. Tính chất phân giác

Cho ΔABC có đường phân giác trong AD và phân giác ngoài AE.

Ta có $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{EB}{EC} \Leftrightarrow DB \cdot EC = DC \cdot EB$

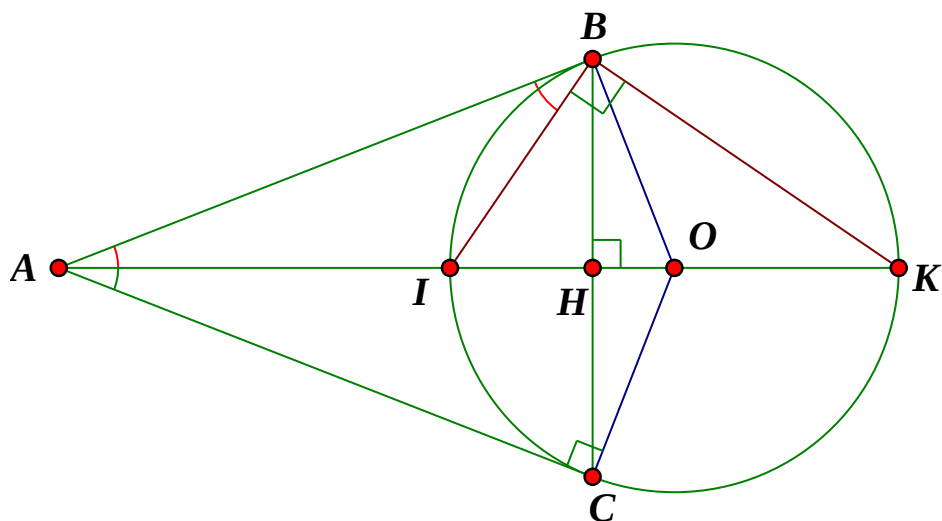


Chú ý: Trong $\triangle ABC$ có ba đường cao AD , BE , CF cắt nhau tại H . Kẻ EF cắt BC tại I , cắt AD tại K . Thì DK , ID là đường phân giác trong và phân giác ngoài. Khi đó ta có $FK \cdot IE = IF \cdot KE$.



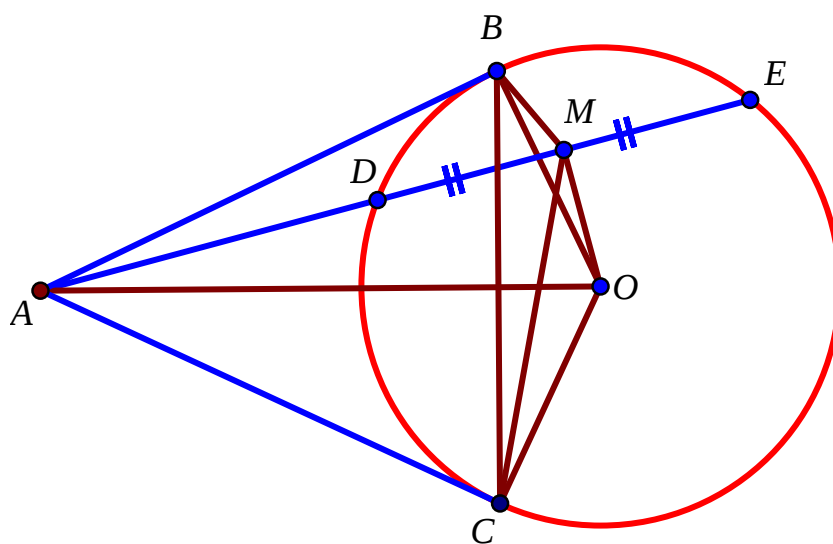
Ba điều cần chú ý:

- Ta có I là tâm nội tiếp $\triangle ABC$.
- BI , BK là đường phân giác trong và phân giác ngoài.
- $IH \cdot AK = AI \cdot HK$



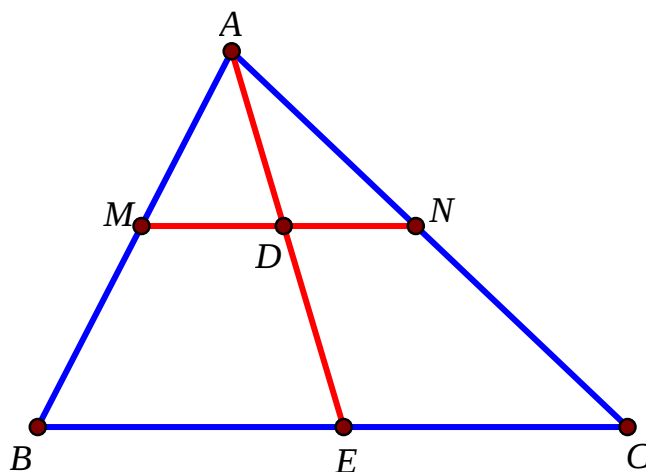
8. 5 điểm cùng thuộc một đường tròn

- A, B, M, O, C cùng thuộc một đường tròn.
- $\widehat{\text{BMA}} = \widehat{\text{AMC}}$



9. Định lí ta – lét

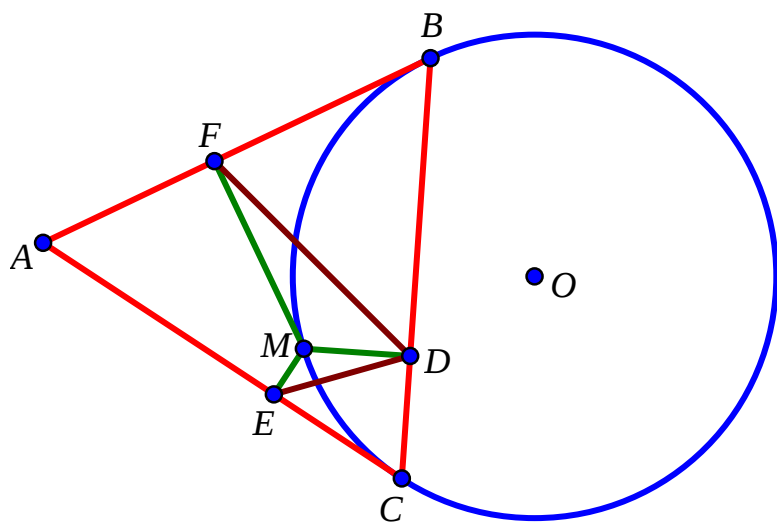
Cho ΔABC , $M \in AB$, $N \in AC$ và $MN \parallel BC$. Lấy E thuộc cạnh BC , AE cắt MN tại D .
Ta có E là trung điểm của $BC \Leftrightarrow D$ là trung điểm của MN .



- $\frac{MD}{BE} = \frac{AD}{AE} = \frac{ND}{EC}$

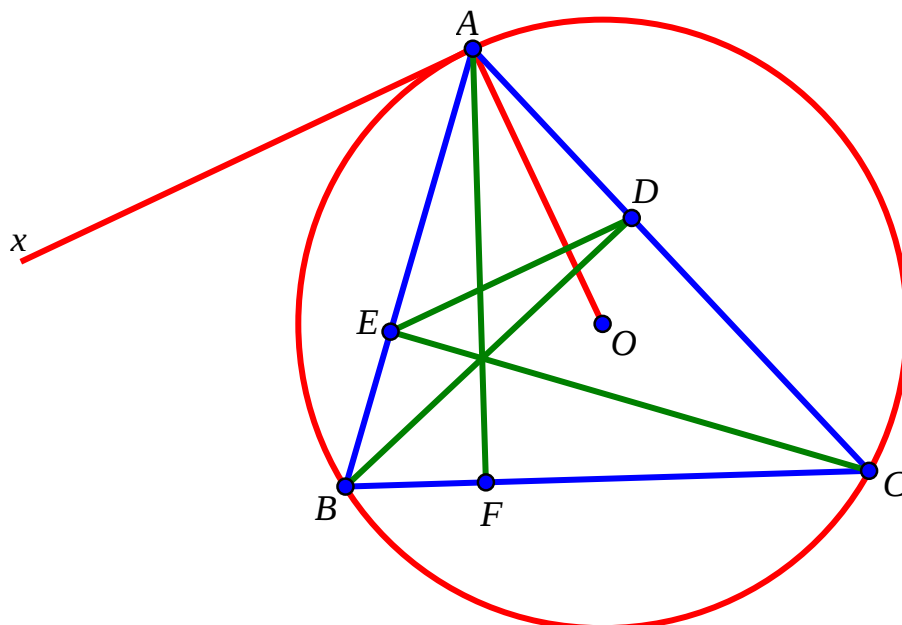
10. Khoảng cách đến ba cạnh của tam giác.

Vẽ $MD \perp BC$, $ME \perp AC$, $MF \perp AB$.



- $MD^2 = ME \cdot MF \Leftrightarrow \frac{MD}{ME} = \frac{MF}{MD} \Leftrightarrow \Delta MDE \sim \Delta MFD$ (g.g) (Dựa vào tứ giác nội tiếp MDCE và MDBF)
- $ME \cdot MF_{\max} \Leftrightarrow MD^2_{\max} \Leftrightarrow M$ là điểm chính giữa cung BC .

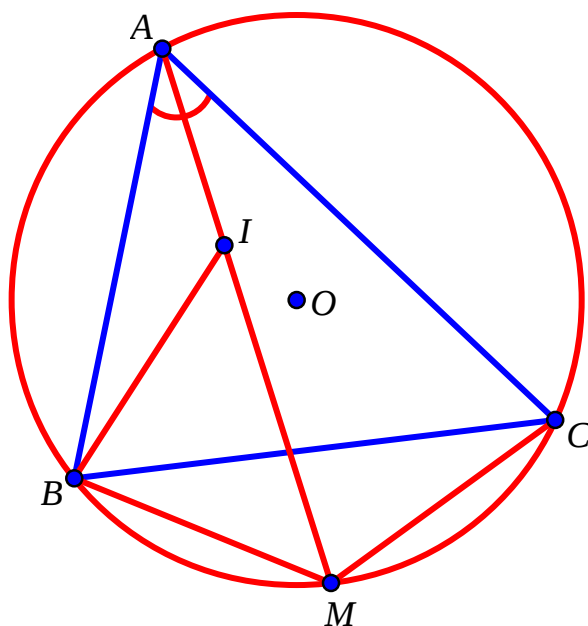
11. Chứng minh vuông góc



- $AO \perp ED$

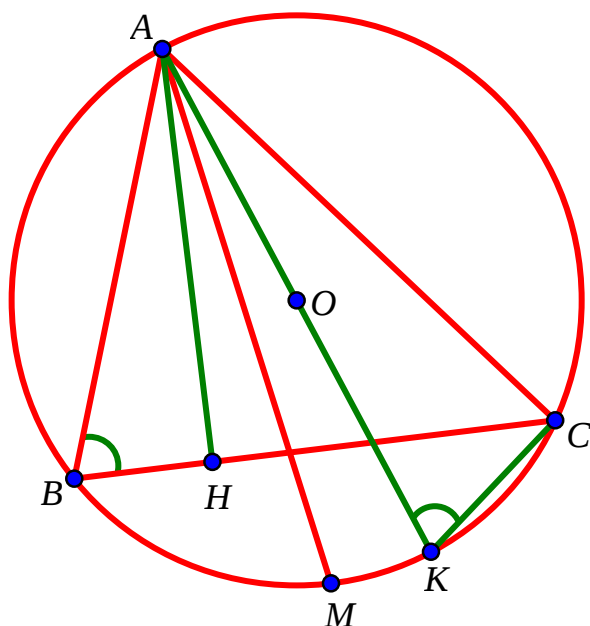
Kẻ Ax là tiếp tuyến của đường tròn. Khi đó

$$\widehat{xAB} = \widehat{ACB} = \widehat{AED} \Rightarrow ED \parallel Ax \Rightarrow Ax \perp AO \Rightarrow AO \perp ED.$$

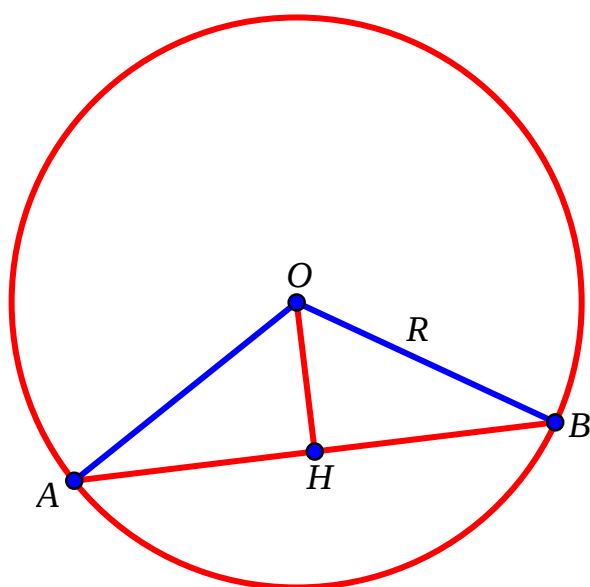


- $MB = MC = MI$.
- $\widehat{BIM} = \widehat{BAM} + \widehat{ABI}$.
- Chứng minh (BIC) có tâm thuộc (ABC) chính là điểm M vì $MB = MC = MI$.

- Đường phân giác $\widehat{BAC}$ cắt (O) tại M, trên AM lấy điểm I thì ta chứng minh được I là tâm nội tiếp $\triangle ABC$.



- $\widehat{BAH} = \widehat{OAC}$.
 - $\widehat{BAH}$ và $\widehat{HAO}$ có chung đường phân giác AM.
12. Độ dài dây và số đo cung

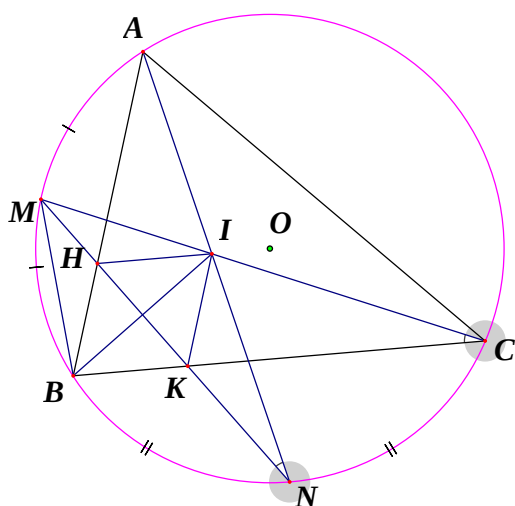


- $AB = R\sqrt{3} \Leftrightarrow \text{sđ}\widehat{AB} = 60^\circ$.

- $AB = R\sqrt{2} \Leftrightarrow sđ\widehat{AB} = 90^\circ$.
- $AB = R\sqrt{3} \Leftrightarrow sđ\widehat{AB} = 120^\circ$.
- $AB = R\sqrt{4} \Leftrightarrow sđ\widehat{AB} = 180^\circ$

Chú ý: $OA = 2R$

Thiếu từ 102-107: gv nhận ko gửi



Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác CNKI có $\widehat{IKC} = \widehat{INC}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{IC}$)

Xét đường tròn (O) có $\widehat{ABN} = \widehat{ANC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{AC}$)

$$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{IKC} (= \widehat{ANC})$$

Mà hai góc này ở vị trí đồng vị $\Rightarrow IK // HB$ (dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song)

Chứng minh tương tự ta được $BK // HI$.

Xét (O) có $\widehat{BN} = \widehat{NC}$ (N là điểm chính giữa cung BC)

$$\Rightarrow \widehat{BAN} = \widehat{CAN} \text{ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)}$$

$\Rightarrow AN$ là phân giác $\widehat{BAC}$.

Chứng minh tương tự ta được CM là phân giác của $\widehat{ACB}$.

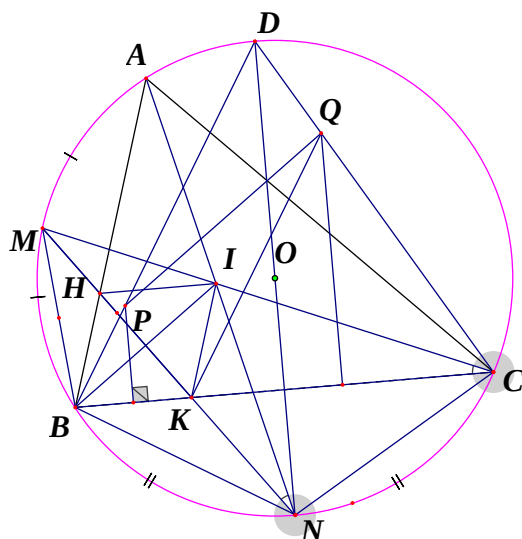
Mà $AN \cap CM = \{I\}$ là giao điểm của ba đường phân giác trong của tam giác ABC.

$\Rightarrow BI$ là phân giác của $\widehat{ABC}$.

Xét tứ giác BHIK có $HI // BK, BH // KI$ nên tứ giác BHIK là hình bình hành.

Mà BI là phân giác $\widehat{HBK}$. Suy ra tứ giác BHIK là hình thoi (dấu hiệu nhận biết hình thoi)

4. Gọi P, Q lần lượt là tâm của các đường tròn ngoại tiếp tam giác MBK, tam giác MCK và E là trung điểm của đoạn PQ. Vẽ đường kính ND của đường tròn (O). Chứng minh ba điểm D, E, K thẳng hàng.



Do $\widehat{NBK} = \widehat{BMK} \Rightarrow BN$ là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp $\triangle BMK$.

Ta có $BD \perp BN$ ($\widehat{NBD}$ là góc nội tiếp đường tròn (O))

$\Rightarrow B \in BD$ và trung trực BK.

Chứng minh tương tự ta được $Q \in CD$ và trung trực KC.

Ta chứng minh được $\triangle BPK, \triangle QKC, \triangle BDC$ cân.

$$\Rightarrow \widehat{PBK} = \widehat{PKB} = \widehat{QCK}$$

$$\widehat{PBK} = \widehat{QKC} \text{ (hai góc đồng vị)}$$

$$\Rightarrow QK // DP$$

Suy ra tứ giác DQKH là hình bình hành.

$\Rightarrow PQ$ cắt DK tại trung điểm của mỗi đường

Mà E là trung điểm PQ

$\Rightarrow$ E là trung điểm của DK.

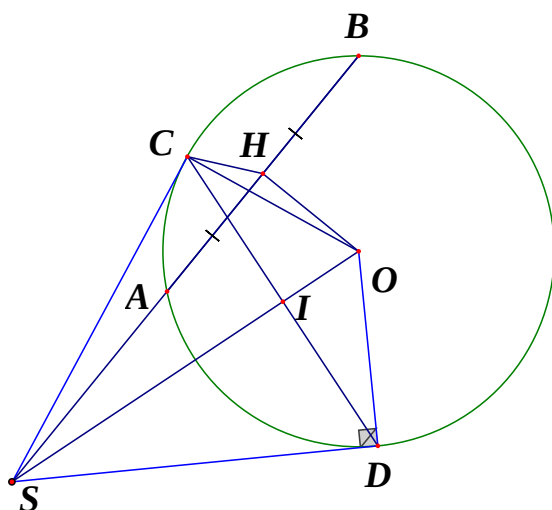
Vậy D, E, K thẳng hàng.

Ví dụ: (TS 10 – THPT Hà Nội, năm học 2018 – 2019)

Ví dụ: Cho đường tròn $(O; R)$ với dây cung AB không đi qua tâm. Lấy S là điểm bất kì trên tia đối của tia AB (S khác A). Từ điểm S vẽ hai tiếp tuyến SC và SD với đường tròn $(O; R)$ sao cho điểm C nằm trên cung nhỏ AB (C, D là các tiếp điểm). Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng AB.

1. Chứng minh năm điểm C, D, H, O, S cùng thuộc một đường tròn đường kính SO.
2. Khi $SO = 2R$, hãy tính độ dài đoạn thẳng SD theo R và tính số đo $\widehat{CSD}$.
3. Đường thẳng đi qua điểm A và song song với đường thẳng SC, cắt đoạn thẳng CD tại điểm K. Chứng minh tứ giác ADHK là tứ giác nội tiếp và đường thẳng BK đi qua trung điểm của đoạn thẳng SC.
4. Gọi E là trung điểm của đoạn thẳng BD và F là hình chiếu vuông góc của điểm E trên đường thẳng AD. Chứng minh rằng, khi điểm S thay đổi trên tia AB thì điểm F luôn thuộc một đường tròn cố định.

Giải



- 1) Xét ba tam giác $\triangle SDO, \triangle SCO, \triangle SHO$ có:

$$\widehat{SDO} = \widehat{SCO} = 90^\circ \text{ (Do } SD, SC \text{ là tiếp tuyến của đường tròn } (O; R))$$

$$\widehat{SHO} = 90^\circ \text{ (do } HA = HB \text{ nên } HO \perp AB \text{)}$$

Do đó ba điểm D, C, H cùng nằm trên đường tròn đường kính SO

Hay năm điểm D, C, H, S, O cùng nằm trên đường tròn đường kính SO

2) Xét $\triangle SDO$ vuông tại D :

$$SD^2 = SO^2 - OD^2 = (2R)^2 - R^2 = 3R^2 \Rightarrow SD = \sqrt{3}R$$

Gọi I là giao điểm của SO và CD. Vì SD, SC là tiếp tuyến của đường tròn (O; R) nên

SO = SD, SO $\perp$ CD tại I. I là trung điểm của CD

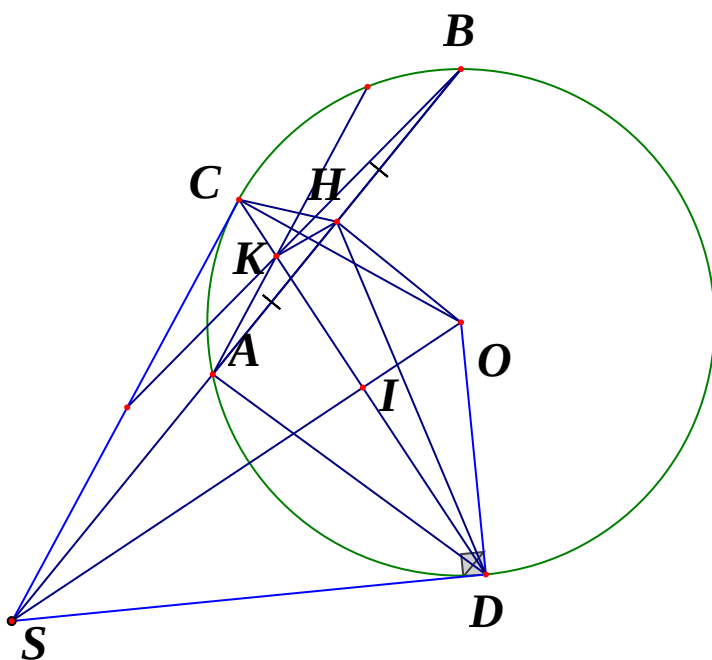
$\triangle SDO$ vuông tại D có ID là đường cao (ID $\perp$ SO). Do đó:

$$ID \cdot SO = SD \cdot DO \Rightarrow ID = \frac{SD \cdot DO}{SO} = \frac{\sqrt{3} \cdot R \cdot R}{2R} = \frac{\sqrt{3}}{2}R$$

$$\Rightarrow DC = 2 \cdot ID = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}R = \sqrt{3}R$$

$\triangle SDC$ cân tại S (SD = SC) có SD = DC = $\sqrt{3}R$ nên là tam giác đều. Suy ra $\widehat{CSD} = 60^\circ$.

3)



Vì tứ giác SCHD nội tiếp đường tròn đường kính SC nên:

$$\widehat{SCD} = \widehat{AKD} \text{ (góc nội tiếp cùng chắn cung } \widehat{SD} \text{)}$$

Mà $\widehat{SCD} = \widehat{SKD}$ (đồng vị, $SC \parallel AK$);

$$\widehat{AKD} = \widehat{AHD}$$

Do đó tứ giác ADHK nội tiếp.

Ví dụ: Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB cố định, dây CD di động vuông góc với AB tại H nằm giữa A và O, lấy điểm F thuộc cung AC nhỏ, DF cắt dây CD tại E, AF cắt dây DC tại I.

1. Chứng minh rằng các điểm A, H, E, F cùng thuộc một đường tròn)
2. Chứng minh rằng $HA.HB = HE.HI$
3. Đường tròn ngoại tiếp tam giác IFE cắt AE tại M. Chứng minh M thuộc đường tròn $(O;R)$
4. Tìm vị trí điểm H trên OA để chu vi tam giác OHD lớn nhất.

Đề sai

Ví dụ: Từ một điểm A nằm ngoài đường tròn $(O;R)$. Vẽ tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Trên cung nhỏ BC lấy điểm M bất kì, vẽ MI vuông góc với AB, MK vuông góc với AC ($I \in AB, K \in AC$).

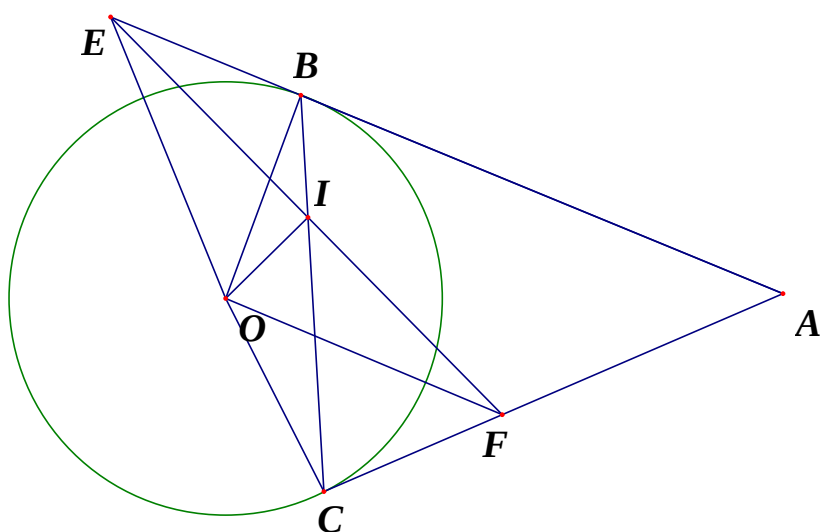
1. Chứng minh rằng các điểm A, I, M, K cùng thuộc một đường tròn.
2. Vẽ MP vuông góc với BC ($P \in BC$). Chứng minh rằng $\widehat{MPK} = \widehat{MBC}$
3. Chứng minh $MI.MK = MP^2$.
4. Xác định vị trí điểm M trên cung nhỏ BC để tích $MI.MK.MP$ đạt giá trị lớn nhất.

Giải:

Ví dụ: Từ điểm A nằm ngoài đường tròn $(O; R)$ kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Lấy điểm I thuộc dây BC sao cho $IB < IC$. Kẻ đường thẳng d vuông góc với OI tại I , đường thẳng d cắt các tia AB, AC lần lượt tại E và F .

1. Chứng minh các tứ giác $OIBE$, $OIFC$ là các tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh $\triangle OEF$ là tam giác cân.
3. Qua O kẻ đường thẳng vuông góc với OA , nó cắt tia AB, AC lần lượt tại P và Q . Tìm vị trí của A để diện tích $\triangle APQ$ nhỏ nhất.

Giải



- 1) Chứng minh các tứ giác $OIBE$, $OIFC$ là các tứ giác nội tiếp

Xét tứ giác $OIBE$ và tứ giác $OIFC$ có:

$$\widehat{EIO} = \widehat{OIF} = 90^\circ \quad (EI \perp IO)$$

$$\widehat{EBO} = \widehat{OCF} = 90^\circ \quad (BE, CF \text{ là tiếp tuyến của đường tròn } (O))$$

Do đó tứ giác $OIBE$ và tứ giác $OIFC$ là tứ giác nội tiếp.

- 2) Chứng minh $\triangle OEF$ là tam giác cân.

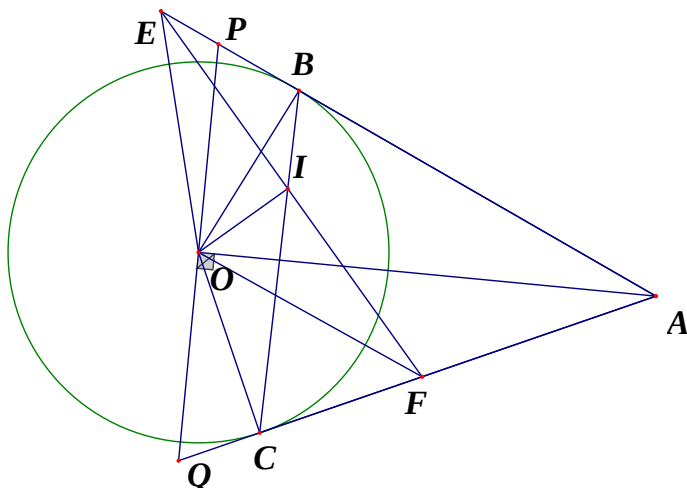
Vì tứ giác $OIBE$ nội tiếp nên $\widehat{OEI} = \widehat{OBI}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{OI}$)

Ta lại có: $\triangle OBC$ cân tại O ($OB = OC = R$) nên $\widehat{OBI} = \widehat{OCI}$ (tính chất tam giác cân)

Và vì tứ giác $OIFC$ nội tiếp nên $\widehat{OCI} = \widehat{OFI}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{OI}$)

Từ đó suy ra $\widehat{OEI} = \widehat{OFI}$. Vậy $\triangle OEF$ là tam giác cân.

3. Qua O kẻ đường thẳng vuông góc với OA , nó cắt tia AB, AC lần lượt tại P và Q . Tìm vị trí của A để diện tích $\triangle APQ$ nhỏ nhất.



Ta có

$$\begin{aligned} S_{\triangle APQ} &= \frac{1}{2} OA \cdot PQ = \frac{1}{2} OA \cdot (OP + OQ) = \frac{1}{2} OA \cdot OP + \frac{1}{2} OA \cdot OQ \\ &= \frac{1}{2} OB \cdot AP + \frac{1}{2} OA \cdot AQ = \frac{1}{2} R \cdot AP + \frac{1}{2} R \cdot AQ = \frac{1}{2} R \cdot (AP + AQ) \end{aligned}$$

Diện tích $\triangle APQ$ nhỏ nhất khi $AP + AQ$ nhỏ nhất

II. CÁC BÀI HÌNH HỌC ĐỂ LUYỆN TẬP PHẢN XẠ THEO MÔ HÌNH

Ví dụ: Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính BC , A là điểm nằm trên tia đối của tia BC . Vẽ tiếp tuyến AD (D là tiếp điểm) và dây DE song song với BC , M là giao điểm của AE với đường tròn $(O; R)$, N là điểm chính giữa của AB và DM . Chứng minh

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{AN} \quad (\text{Gợi ý chứng minh } AN^2 = NM \cdot ND = NB \cdot NC)$$

Đề sai

Ví dụ: Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O) dựng các tiếp tuyến MA, MB và cát tuyến MCD với đường tròn (A, B là các tiếp điểm, $MC < MD$). Gọi E là trung điểm của CD .

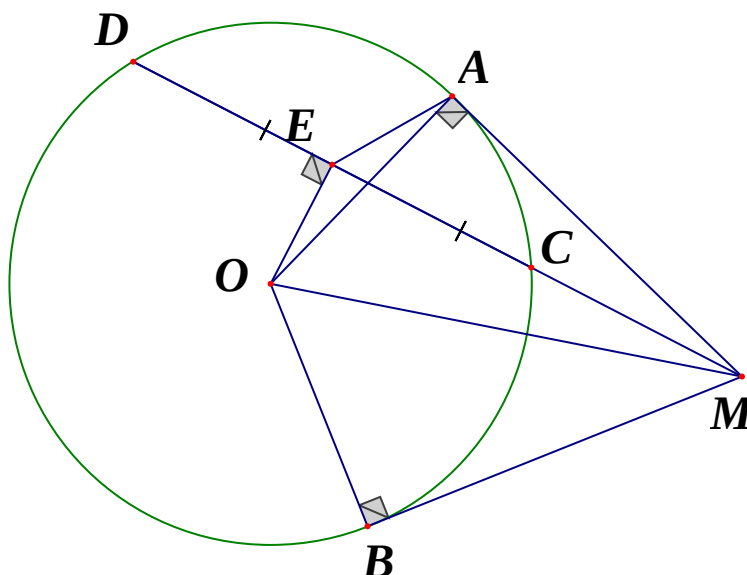
1) Chứng minh 5 điểm M, A, E, O, B cùng thuộc đường tròn.

2) Chứng minh: $MC.MD = MB^2$.

3) Qua C kẻ đường thẳng vuông góc với OA , nó cắt AB tại F . Chứng minh tứ giác $BCFE$ là tứ giác nội tiếp.

4) Gọi H là giao điểm của AB và CD . Chứng minh rằng $\frac{1}{MC} + \frac{1}{MD} = \frac{2}{MH}$. (Gợi ý chứng minh $MA^2 = MH.ME$ và $MA^2 = MD.MC \Rightarrow MH.ME = MC.MD \Leftrightarrow 2MH.ME = 2MC.MD \Leftrightarrow MH.(ME + ED + ME - EC) = 2MC.MD \Leftrightarrow MH.(MD + MC) = MC.MD$).

Giải



Ta có $MA \perp OA; MB \perp OB$ (do MA, MB là tiếp tuyến của đường tròn (O))

$$\Rightarrow \widehat{OAM} = \widehat{OBM} = 90^\circ$$

$\Rightarrow A, B$ cùng nằm trên đường tròn đường kính OM (1)

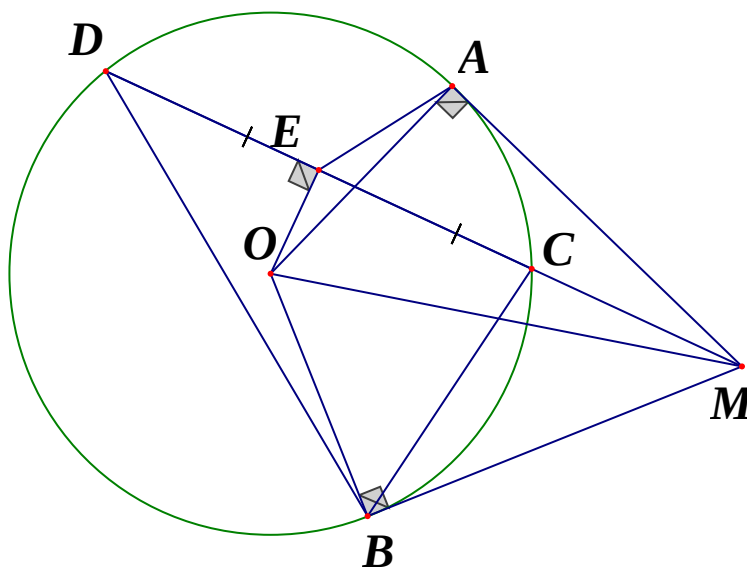
Và vì E là trung điểm của dây cung CD nên $OE \perp CD$ (đường kính và dây cung)

$$\Rightarrow \widehat{OEM} = 90^\circ$$

$\Rightarrow E$ nằm trên đường tròn đường kính OM (2)

Từ (1) và (2) suy ra năm điểm M, A, E, O, B cùng nằm trên đường tròn đường kính OM

2) Chứng minh: $MC \cdot MD = MB^2$.



Nối B với D và C . Xét $\triangle DBM$ và $\triangle BCM$ có:

$\widehat{CMB}$ chung

$$\widehat{MDB} = \widehat{CBM} = \frac{1}{2} \widehat{BC} \text{ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến chắn bởi } \widehat{BC} \text{)}$$

$$\Rightarrow \triangle DBM \sim \triangle BCM \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{MC}{MB} = \frac{MB}{MD} \Rightarrow MC \cdot MD = MB^2 \text{ (đpcm)}$$

3) Qua C kẻ đường thẳng vuông góc với OA , nó cắt AB tại F . Chứng minh tứ giác $BCFE$ là tứ giác nội tiếp.

Vì năm điểm M, A, E, O, B cùng nằm trên đường tròn đường kính OM nên

Mà $\widehat{\text{BAM}} = \widehat{\text{BFC}}$ (đồng vị, CF // AM)

Suy ra $\widehat{BEC} = \widehat{BFC}$. Vậy tứ giác BCFE là tứ giác nội tiếp

4) Gọi H là giao điểm của AB và CD. Chứng minh rằng $\frac{1}{MC} + \frac{1}{MD} = \frac{2}{MH}$. (Gợi ý chứng minh $MA^2 = MH.ME$ và $MA^2 = MD.MC \Rightarrow MH.ME = MC.MD \Leftrightarrow 2MH.ME = 2MC.MD \Leftrightarrow MH.(ME + ED + ME - EC) = 2MC.MD \Leftrightarrow MH.(MD + MC) = MC.MD$).

$$\widehat{MBA} = \widehat{MEA} \text{ (góc nội tiếp cùng chắn)}$$

Do đó $\widehat{MEA} = \widehat{MAB}$

$$\widehat{\text{MEA}} = \widehat{\text{MAB}}(\text{cmt})$$

AMH chung

$$\Rightarrow \frac{MA}{ME} = \frac{MH}{MA} \Rightarrow MA^2 = MH \cdot ME$$
$$\text{MH.ME} = \text{MC.MD} \Leftrightarrow 2\text{MH.ME} = 2\text{MC.MD} \Leftrightarrow \text{MH.}(\text{ME} + \text{ED} + \text{ME} - \text{EC}) = 2\text{MC.MD}$$

$$\Leftrightarrow \text{MH} \cdot (\text{MD} + \text{MC}) = 2\text{MC} \cdot \text{MD} \Rightarrow \frac{1}{\text{MC}} + \frac{1}{\text{MD}} = \frac{2}{\text{MH}}$$

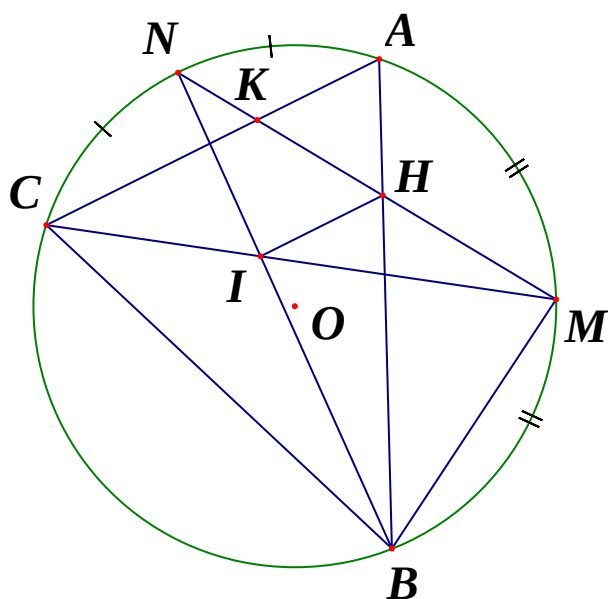
Website: tailieutoanhoc.com

Ví dụ: Cho đường tròn $(O; R)$ với dây $AB < 2R$ cố định. Gọi C là điểm thuộc cung lớn AB sao cho tam giác ABC nhọn, M và N lần lượt là điểm chính giữa cung nhỏ AB và cung nhỏ AC . Gọi I là giao của BN và CM . Dây MN cắt AB và AC lần lượt tại H và K . Chứng minh rằng:

- 1) Tứ giác $BMHI$ nội tiếp.
- 2) $NI \cdot NB = NH \cdot NM$.
- 3) KH là phân giác của góc AKI , IA là phân giác của KIH .
- 4) Khi điểm C di động trên cung lớn AB và thỏa mãn điều kiện đề bài thì tổng 2 bán kính của 2 đường tròn ngoại tiếp tam giác NAH và NBH có giá trị không đổi.

Giải

1)



Ta có $\widehat{MIB} = \frac{1}{2}(\widehat{MB} + \widehat{NC})$; $\widehat{MHB} = \frac{1}{2}(\widehat{MB} + \widehat{NA})$ (góc nằm trong đường tròn)

Mà $\widehat{NC} = \widehat{NA}$ (do N là điểm chính giữa cung nhỏ AC)

Do đó $\widehat{MIB} = \widehat{MHB}$. Suy ra tứ giác $BMHI$ nội tiếp.

2) Vì tứ giác $BMHI$ nội tiếp nên $\widehat{HMB} + \widehat{HIB} = 180^\circ$ (hai góc đối diện)

Và $\widehat{NIH} + \widehat{HIB} = 180^\circ$ (kề bù)

Do đó $\widehat{HMB} = \widehat{NIH}$

Xét $\triangle NIH$ và $\triangle NMB$ có: $\widehat{HNI}$ chung; $\widehat{NMB} = \widehat{NIH}$ (cmt)

Suy ra $\triangle NIH \sim \triangle NMB$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{NI}{NM} = \frac{NH}{NB} \Rightarrow NI \cdot NB = NH \cdot NM \text{ (đpcm)}$$

3) Do năm điểm C, N, A, M, B cùng nằm trên đường tròn (O) nên

$\widehat{CNB} = \widehat{CAB}$; $\widehat{CAB} = \widehat{CMB}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{CB}$)

$$\text{Ta có } \widehat{NKC} = \frac{1}{2}(\widehat{NC} + \widehat{AM}); \widehat{NIC} = \frac{1}{2}(\widehat{NC} + \widehat{BM})$$

Mà $\widehat{AM} = \widehat{BM}$ (do M là điểm chính giữa $\widehat{AB}$). Suy ra $\widehat{NKC} = \widehat{NIC}$

Xét tứ giác CNKI có $\widehat{NKC} = \widehat{NIC}$ nên là tứ giác nội tiếp

Suy ra $\widehat{CNI} = \widehat{CKI}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{CI}$)

Và $\widehat{CNB} = \widehat{CAB}$ (Cmt)

Từ đó suy ra $\widehat{CKI} = \widehat{CAB}$, mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $IK \parallel AB$ (1)

Do tứ giác BMHI là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{IHB} = \widehat{CMB}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{IB}$)

$\widehat{CAB} = \widehat{CMB}$ (cmt)

Từ đó suy ra $\widehat{IHB} = \widehat{CAB}$, mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $IH \parallel AC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác KAH I là hình bình hành. (3)

$$\text{Ta có: } \widehat{AKH} = \frac{1}{2}(\widehat{CN} + \widehat{AM}); \widehat{AHK} = \frac{1}{2}(\widehat{AN} + \widehat{MB}) \text{ mà } \widehat{CN} = \widehat{AN}; \widehat{AM} = \widehat{MB} \text{ nên } \widehat{AKH} = \widehat{AHK}.$$

Suy ra $\triangle AHK$ cân tại A. Vậy $AH = AK$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra tứ giác KAH I là hình thoi

Suy ra KH là phân giác của góc $\widehat{AKI}$, IA là phân giác của $\widehat{KIH}$

4) Khi điểm C di động trên cung lớn AB và thỏa mãn điều kiện đề bài thì tổng 2 bán kính của 2 đường tròn ngoại tiếp tam giác NAH và NBH có giá trị không đổi.

Ví dụ: Cho đường tròn (O) có BC là dây cung cố định nhỏ hơn đường kính, A là điểm di động trên cung lớn BC (A không trùng $B; C$). Gọi AD, BE, CF là các đường cao của $\triangle ABC$, EF cắt BC tại M . Qua D kẻ đường thẳng song song với EF cắt AB tại P , cắt AC tại Q .

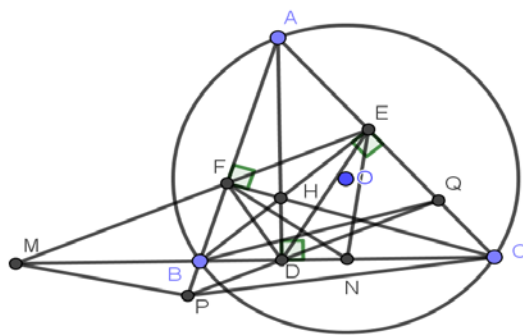
1) Chứng minh tứ giác $BPCQ$ nội tiếp.

2) Chứng minh tam giác DEP cân tại D

3) Gọi N là trung điểm của BC . CMR: $MF.ME = MD.MN$

4. CM đường tròn ngoại tiếp $\triangle MPQ$ luôn đi qua 1 điểm cố định khi A di động trên cung lớn BC

Giải



a) Chứng minh được $\triangle AFC \sim \triangle AEB$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AF}{AE} = \frac{AC}{AB}$ (2 cặp cạnh tương ứng tỉ lệ)

Xét $\triangle AFE$ và $\triangle ACB$ ta có

$$\left. \begin{array}{l} \frac{AF}{AE} = \frac{AC}{AB} \\ \widehat{BAC} \text{ chung} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta AFE \sim \Delta ACB \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{AFE} = \widehat{ACB} \text{ (2 góc tương ứng)} \quad (1)$$

$$\text{Vì } PQ \parallel EF \text{ (gt)} \Rightarrow \widehat{BPQ} = \widehat{AFE} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \widehat{BPQ} = \widehat{BCQ}$$

Xét tứ giác $BPCQ$ ta có

$$\widehat{BPQ} = \widehat{BCQ} \text{ (cmt)}$$

$\Rightarrow$ hai đỉnh P, C kề nhau cùng nhìn cạnh BQ dưới 1 góc không đổi

$\Rightarrow$ tứ giác $BPCQ$ nội tiếp (DHNB)

b) Gọi H là giao điểm của AD và BE

CM được tứ giác $BDHF$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{DBH} = \widehat{DFH}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{HN}$)

CM được tứ giác $BFEC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{DBH} = \widehat{CFE}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{EC}$)

$$\Rightarrow \widehat{DFH} = \widehat{CFE} \quad (3)$$

$$\text{Ta có: } \widehat{DFH} + \widehat{BFD} = 90^\circ; \widehat{CFE} + \widehat{AFE} = 90^\circ \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4)} \Rightarrow \widehat{BFD} = \widehat{AFE} \quad (5)$$

$$\text{Từ (2) và (5)} \Rightarrow \widehat{BFD} = \widehat{BPD} \Rightarrow \Delta DPF \text{ cân tại } D$$

c) Chứng minh được tứ giác $BDHF$ nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{FBH} = \widehat{FDH} \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung } FH \text{)} \quad (6)$$

CM được tứ giác $ABDF$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{FBE} = \widehat{HDE}$

$$\text{Do đó: } \widehat{FDH} = \widehat{HDE} = \frac{\widehat{EDF}}{2} \quad (7)$$

$$\text{CM được tứ giác } BCEF \text{ nội tiếp đường tròn tâm } N \Rightarrow \widehat{FBH} = \frac{\widehat{ENF}}{2} \quad (8)$$

$$\text{Từ (7) và (8)} \Rightarrow \widehat{FDE} = \widehat{FNE}$$

Xét tứ giác $FDNE$ ta có:

$$\widehat{FDE} = \widehat{FNE} \text{ (mct)}$$

$\Rightarrow$ 2 đỉnh D, E kề nhau cùng nhìn cạnh EF dưới 1 góc không đổi

$\Rightarrow$ tứ giác $FDNE$ nội tiếp (DHNB) $\Rightarrow \widehat{NEF} = \widehat{FDM}$ (tính chất tứ giác nội tiếp)

Xét $\triangle MDF$ và $\triangle MEN$ ta có:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{NEF} = \widehat{FDM} \\ \widehat{M} \text{ chung} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle MDF \sim \triangle MEN \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{MD}{MF} = \frac{ME}{MN} \Rightarrow MD \cdot MN = ME \cdot MF$$

Ví dụ: Cho M nằm ngoài đường tròn (O) . Vẽ các tiếp tuyến MA, MB với (O) (A, B là các tiếp điểm). Vẽ cát tuyến MCD không đi qua tâm O (C nằm giữa $M; D$) OM cắt AB và (O) lần lượt tại $H; I$. CMR:

- 1) Tứ giác $MAOB$ nội tiếp và đường tròn này đi qua trung điểm E của CD
- 2) CM: $OH \cdot OM + MC \cdot MD = MO^2$
- 3) CM: CI là phân giác của $\widehat{MCH}$
- 4) Cho các điểm M, C, D cố định, đường tròn (O) thay đổi nhưng luôn đi qua C, D . CM đường tròn ngoại tiếp $\triangle OHE$ luôn đi qua một điểm cố định.

Xét $\triangle MAO$ vuông tại A , $AH \perp MO$

$$\Rightarrow AO^2 = OM.OH \quad (\text{hệ thức lượng})$$

$$\text{CM được: } \triangle MCB \sim \triangle MBD(\text{g.g}) \Rightarrow \frac{MC}{MB} = \frac{MB}{MD} \Rightarrow MB^2 = MC.MD$$

$$\text{Mà } MA = MB \Rightarrow MA^2 = MC.MD$$

Xét $\triangle MAO$ vuông tại A , ta có :

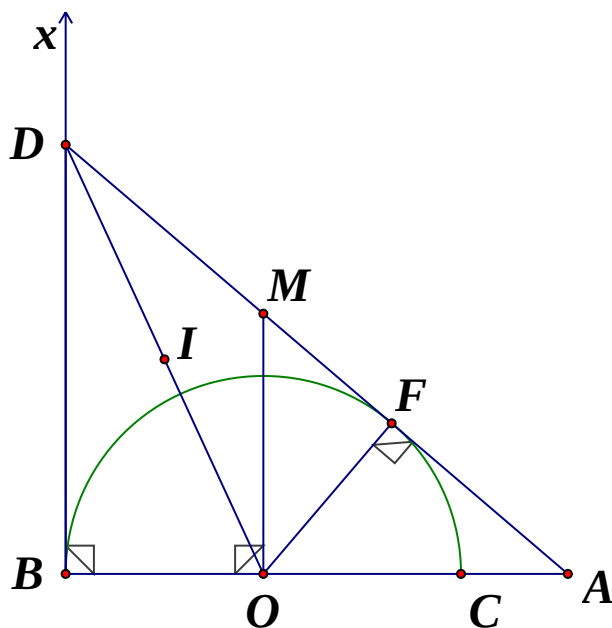
$$MO^2 = MA^2 + AO^2$$

$$\Rightarrow MO^2 = MC.MD + OH.OM$$

Ví dụ : Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính BC . Lấy điểm A trên tia đối của tia CB . Kẻ tiếp tuyến AF của nửa đường tròn (O) (với F là tiếp điểm), tia AF cắt tiếp tuyến Bx của nửa đường tròn tại D . Cho biết $AF = \frac{4R}{3}$

- 1) Chứng minh tứ giác $OBDF$ nội tiếp. Xác định tâm I đường tròn ngoại tiếp tứ giác $OBDF$
- 2) Tính $\cos \widehat{DAB}$
- 3) Kẻ $OM \perp BC$ ($M \in AD$). Chứng minh $\frac{BD}{DM} - \frac{DM}{AM} = 1$
- 4) Tính diện tích phần hình tứ giác $OBDM$ bên ngoài nửa đường tròn (O) theo R

Giải



- 1) Ta có: AF và Bx là hai tiếp tuyến của nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính BC (gt) nên $OB \perp BD, OF \perp AF \Rightarrow \widehat{DBO} = \widehat{DFO} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{DBO} + \widehat{DFO} = 180^\circ$ Do đó tứ giác OBDF nội tiếp.

Mặt khác $\widehat{DBO} = \widehat{DFO} = 90^\circ$ nên tâm I đường tròn ngoại tiếp tứ giác OBDF là trung điểm của OD

- 2) Ta có

$\triangle OAF$:

$$\widehat{F} = 90^\circ \Rightarrow OF^2 + FA^2 = OA^2 \Leftrightarrow R^2 + \frac{16}{9}R^2 = OA^2 \Leftrightarrow OA = \frac{5}{3}R$$

$$\cos \widehat{DAB} = \frac{FA}{OA} = \frac{\frac{4}{3}R}{\frac{5}{3}R} = \frac{4}{5}$$

- 3) Ta có $\triangle OAM$: $\angle AOM = 90^\circ; OF \perp AM; AF = \frac{4R}{3}; OF = R$. từ đó dùng các công thức

hệ thức lượng trong tam giác vuông ta dễ dàng tính được:

$$AM = \frac{25}{12}R; OM = \frac{5}{4}R$$

$$AB = OB + OA = R + \frac{5}{3}R = \frac{8}{3}R$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta ABD : \cos \widehat{DAB} &= \frac{AB}{AD} \\ \cos \widehat{DAB} &= \frac{4}{5} \text{ (cmt)} \\ AB &= \frac{8}{3}R \end{aligned} \right\} \Rightarrow AD = \frac{10}{3}R$$

$$DM = AD - AM = \frac{10}{3}R - \frac{25}{12}R = \frac{5}{4}R$$

$$\Rightarrow OM = DM \left(= \frac{5}{4}R \right)$$

Lại có $OM \parallel BD (\perp BC) \Rightarrow \frac{AM}{AD} = \frac{OM}{BD}$ nên $\frac{AM}{AD} = \frac{OM}{BD}$

$$\Rightarrow AM \cdot BD = DM \cdot AD$$

$$\Leftrightarrow AM \cdot BD = DM \cdot (AM + DM)$$

$$\Leftrightarrow AM \cdot BD = DM \cdot AM + DM^2$$

$$\Leftrightarrow AM \cdot BD - DM^2 = DM \cdot AM$$

$$\Leftrightarrow \frac{BD}{DM} - \frac{DM}{AM} = 1$$

4) Dễ dàng thấy tứ giác $OBDM$ là hình thang vuông nên

$$S_{OBDM} = \frac{(OM + BD) \cdot OB}{2} = \frac{\left(\frac{5}{4}R + 2R\right) \cdot R}{2} = \frac{13}{8}R^2$$

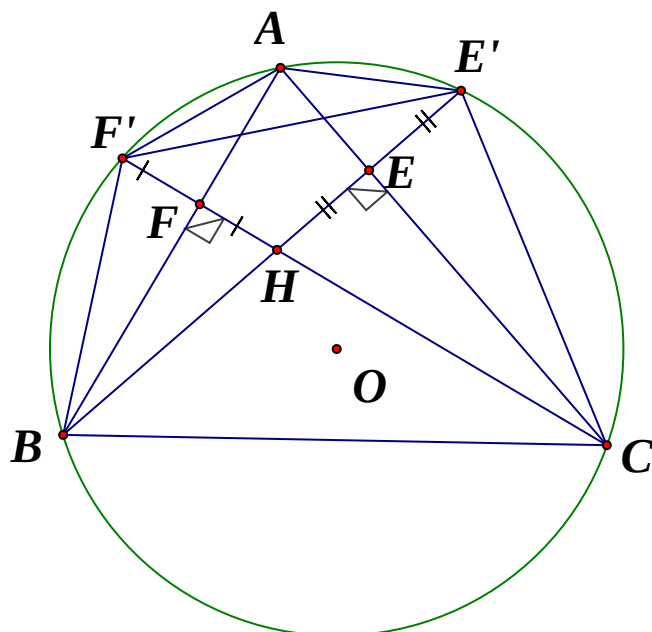
Do đó diện tích phần hình tứ giác $OBDM$ bên ngoài nửa đường tròn (O) theo R là:

$$\frac{13}{8}R^2 - \frac{\pi}{4}R^2$$

Ví dụ : Cho tam giác ABC có hai đường cao BE, CF cắt nhau tại H . Gọi E' là điểm đối xứng với H qua AC , F' là điểm đối xứng với F qua AB . Chứng minh:

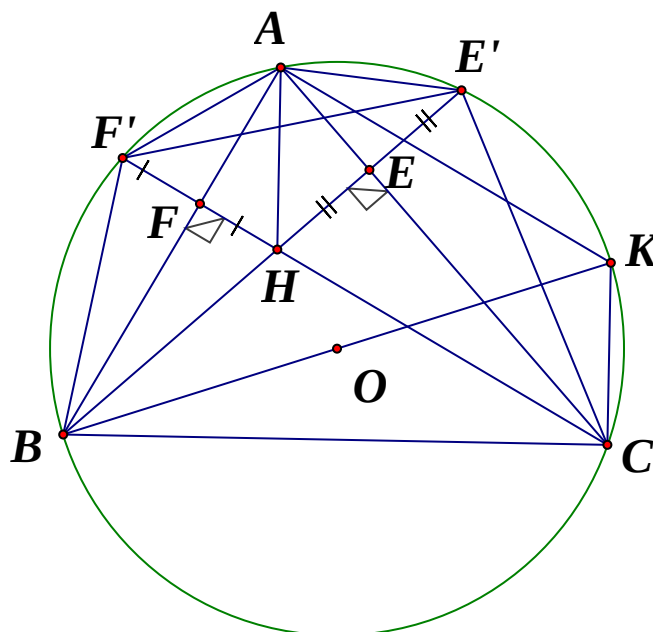
- 1) Tứ giác $BCE'F'$ nội tiếp đường tròn (O)
- 2) Tứ giác $AE'CF'$ nội tiếp. Từ đó suy ra điểm A nằm trên đường tròn (O)
- 3) $AO \perp EF$
- 4) Khi A chạy trên (O) thì bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔAEF không đổi

Giải



- 1) Ta có: E' là điểm đối xứng với H qua AC , F' là điểm đối xứng với F qua AB nên AC là đường trung trực của HE' , AB là đường trung trực của HF'
 Từ đó chứng minh được $\widehat{HCE'} = 2\widehat{HCA}$; $\widehat{F'BH} = 2\widehat{HBA}$
 Mà $\widehat{HCA} = \widehat{HBA} (= 90^\circ - \widehat{BAC})$ nên $\widehat{HCE'} = \widehat{F'BH}$ mà hai góc này cùng nhìn $E'F'$
 Nên Tứ giác $BCE'F'$ nội tiếp đường tròn (O) , do đó $B, C, E', F' \in (O)$
- 2) Ta có: E' là điểm đối xứng với H qua AC , F' là điểm đối xứng với F qua AB nên AC là đường trung trực của HE' , AB là đường trung trực của HF'
 Từ đó chứng minh được $\widehat{HCE'} = 2\widehat{HCA}$; $\widehat{F'AH} = 2\widehat{HAB}$; $\widehat{E'AH} = 2\widehat{HAC}$
 Do đó $\widehat{E'AF'} = 2\widehat{BAC}$
 Suy ra $\widehat{E'AF'} + \widehat{HCE'} = 2\widehat{HCA} + 2\widehat{BAC} = 2.90^\circ = 180^\circ$
 Nên Tứ giác $AE'CF'$ nội tiếp mà $B, C, E', F' \in (O)$ (cmt). vì vậy $A \in (O)$
- 3) Tứ giác $AFHE$ nội tiếp nên $\widehat{HEF} = \widehat{HAF}$
 Mà $\widehat{FAF'} = \widehat{HAF}$, lại có tứ giác $AE'BF'$ nội tiếp (O) nên $\widehat{FAF'} = \widehat{BE'F'}$ do đó $\widehat{HEF} = \widehat{BE'F'}$ mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $FE \parallel F'E'$ (1)
 AC là đường trung trực của HE' , AB là đường trung trực của HF' (CMT) nên $AF' = AH = AE'$
 Ta có: $AF' = AE'$; $OF' = OE'$ (cùng bằng bán kính (O)) nên AO là đường trung trực của $F'E'$
 Nên $AO \perp F'E'$ (2)
 Từ (1) và (2) suy ra $AO \perp EF$.

- 4) Tứ giác $AFHE$ nội tiếp đường tròn đường kính AH nên đường tròn ngoại tiếp $\triangle EFA$ cũng là đường tròn đường kính AH . (1)



Kẻ đường kính BK của đường tròn tâm O nên K cố định

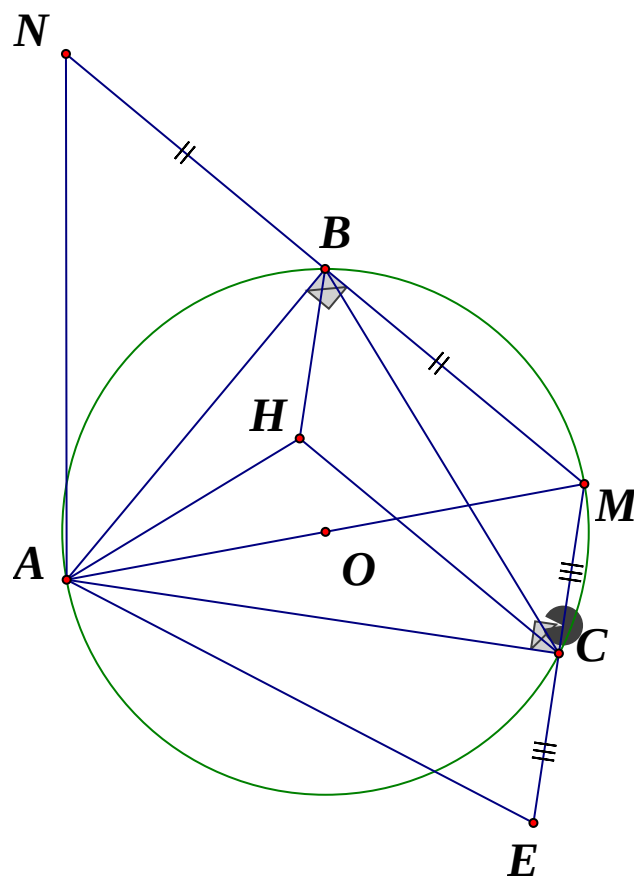
Dễ dàng chứng minh được $AHCK$ là hình bình hành nên $AH = CK$ do đó AH có độ dài không đổi. (2)

Từ (1) và (2) suy ra khi A chạy trên (O) thì bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle AEF$ không đổi

Ví dụ : cho tam giác ABC nhọn có H là trực tâm, nội tiếp đường tròn tâm O đường kính $AM = 2R$

- 1) Tứ giác $BHCM$ là hình bình hành
- 2) Gọi N là điểm đối xứng của M qua AB . Chứng minh tứ giác $AHBN$ nội tiếp được trong một đường tròn
- 3) Gọi E là điểm đối xứng của M qua AC . Chứng minh ba điểm N, H, E thẳng hàng
- 4) Giả sử $AB = R\sqrt{3}$. Tính diện tích phần chung của đường tròn (O) và đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AHBN$

Giải



1) Tam giác ABC nhọn có H là trực tâm nên $BH \perp AC, CH \perp AB$
tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O đường kính $AM = 2R$ nên
 $\widehat{ABM} = \widehat{ACM} = 90^\circ \Rightarrow AB \perp BM, AC \perp CM$

do đó $BM \parallel CH (\perp AB); CM \parallel BH (\perp CA)$ nên tứ giác $BHCM$ là hình bình hành

2) tam giác ABC nhọn có H là trực tâm nên dễ dàng chứng minh được
 $\widehat{AHB} + \widehat{ACB} = 180^\circ$

Lại có : đường tròn tâm O đường kính $AM : \widehat{ACB} = \widehat{AMB} = \frac{1}{2} \text{sd} \widehat{AB}$

và $\widehat{ANB} = \widehat{AMB}$ (do N là điểm đối xứng của M qua AB)

nên $\widehat{ANB} + \widehat{AHB} = 180^\circ$. vậy tứ giác $AHBN$ nội tiếp được trong một đường tròn

3) tứ giác $AHBN$ nội tiếp được trong một đường tròn (cmt) nên

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{AHN} = \widehat{ABN} \\ \widehat{ABN} = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{AHN} = 90^\circ$$

Tương tự chứng minh được tứ giác $AHCE$ nội tiếp nên $\widehat{AHE} = \widehat{ACE} = 90^\circ$

Suy ra $\widehat{AHN} + \widehat{AHE} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{NHE} = 180^\circ$ nên ba điểm N, H, E thẳng hàng

4) N là điểm đối xứng của M qua AB nên AB là đường trung trực của MN do đó $AM = AN = 2R$.

đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AHBN$ là đường tròn đường kính AN do $\widehat{AHN} = 90^\circ$

diện tích phần chung của đường tròn (O) và đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AHBN$ bằng 2 lần diện tích hình viên phân tạo bởi đường tròn (O) và dây AB , giả sử là $2S$

ta có : $S = S_{\widehat{AB}} - S_{OAB}$

Kẻ $OK \perp AB$ mà tam giác OAB cân tại O nên $KA=KB$

Xét tam giác vuông OAK vuông tại K :

$$\sin \widehat{AOK} = \frac{AK}{OA} = \frac{\frac{R\sqrt{3}}{2}}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{AOK} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{AOB} = 120^\circ$$

$$S_{\widehat{AB}} = \frac{120}{360} \pi R^2 = \frac{\pi R^2}{3}$$

Vậy diện tích phần chung của đường tròn (O) và đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AHBN$ là:

$$2 \left(\frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} \right)$$

CHỦ ĐỀ V. BÀI TOÁN MAX-MIN. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC

A. LÝ THUYẾT

1. Bất đẳng thức Cô-si:

* Bất đẳng thức Cô-si cho hai số a, b không âm, ta có :

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b$

Chú ý: Với hai số a, b bất kì ta luôn có:

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b$

* Bất đẳng thức Cô-si cho ba số a, b, c không âm, ta có :

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

Chú ý: đây là bất đẳng thức nằm ngoài chương trình SGK hiện hành nếu muốn áp dụng học sinh cần chứng minh trước khi sử dụng như một bổ đề

2. Một số bổ đề thường dùng khác:

Bổ đề 1. Với mọi số thực a, b ta luôn có:

$$+) (a+b)^2 \geq 4ab \qquad \qquad \qquad +) a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$

Bổ đề 2. Với mọi số thực a, b, c ta luôn có:

$$+) a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3} \geq ab + bc + ca$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

Bổ đề 3. Với mọi số thực dương a, b ta luôn có:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$

Bổ đề 4. Với mọi số thực không âm a, b ta luôn có:

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2(a+b)}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$

Bổ đề 5. Với mọi số thực không âm a, b, c ta luôn có:

$$\sqrt{a+b+c} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \leq \sqrt{3(a+b+c)}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

Chú ý: với mỗi bất đẳng thức trên, ta cần nhớ và vận dụng linh hoạt cả 2 chiều xuôi và chiều ngược của nó.

3. Giải phương trình chứa căn thức:

PHƯƠNG PHÁP CHUNG:

Cách 1: Sử dụng biến đổi đại số

Cách 2: Đặt ẩn phụ

Cách 3: Đánh giá

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI:

BÀI TOÁN MIN-MAX

DẠNG I: Kỹ thuật chọn điểm rơi trong bất đẳng thức Cô-si:

Phương pháp: Dự đoán trước dấu bằng (hay điểm rơi) của bài toán từ đó điều chỉnh hệ số để đảm bảo việc dấu bằng luôn xảy ra

Ví dụ: Cho các số $x \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức:

$$A = x + \frac{1}{x}$$

HƯỚNG DẪN:

Ta có $A = x + \frac{1}{x} = \frac{x}{4} + \frac{1}{x} + \frac{3x}{4}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho 2 số dương $\frac{x}{4}; \frac{1}{x}$ ta có

$$\frac{x}{4} + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{4} \cdot \frac{1}{x}} = 1$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{x}{4} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$

Với $x = 2 \Rightarrow \frac{3x}{4} = \frac{3}{2}$

$$\Rightarrow A \geq \frac{5}{2}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức A bằng $\frac{5}{2}$ khi $x = 2$

Ví dụ: Cho các số $x, y > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức:

a) $A = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{xy}{x^2 + y^2}$

b) $B = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{xy}{x^2 + xy + y^2}$

c) $C = \frac{(x-y)^2}{xy} + \frac{6xy}{(x+y)^2}$

d) $D = \frac{(x+y+1)^2}{xy+x+y} + \frac{xy+x+y}{(x+y+1)^2}$

HƯỚNG DẪN

a) Ta có: $A = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 + y^2}{xy} + \frac{xy}{x^2 + y^2}$

Đặt $t = \frac{x^2 + y^2}{xy} \geq 2$ (BĐT Cô-si)

$$A = t + \frac{1}{t} \quad (t \geq 2)$$

Dự đoán $A_{\min}$ đạt được tại $t = 2$. ta có $A = nt + \frac{1}{t} + t - nt$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} nt = \frac{1}{t} \\ t = 2 \end{cases}$

Do đó ta có $A = \frac{3t}{4} + \left(\frac{t}{4} + \frac{1}{t}\right)$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có :

$$\frac{t}{4} + \frac{1}{t} \geq 2\sqrt{\frac{t}{4} \cdot \frac{1}{t}} = 1$$

Dấu « = » xảy ra $\Leftrightarrow \frac{t}{4} = \frac{1}{t} \Leftrightarrow t = 2$ (vì $t \geq 2$)

Vậy $A_{\min} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow x = y$

a) $A = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{2xy}{x^2 + y^2}$;

b) $B = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{xy}{x^2 - xy + y^2}$;

c) $C = \frac{(x-y)^2}{xy} + \frac{4xy}{(x+y)^2}$;

d) $D = \frac{(x+y-2)^2}{xy+2(x+y)} + \frac{xy+2(x+y)}{(x+y+2)^2}$.

Hướng dẫn

a) Ta có $A = \frac{x^2 + y^2}{xy} + \frac{2xy}{x^2 + y^2}$; Ta đặt $t = \frac{x^2 + y^2}{xy} \geq 2$ (Cauchy)

$A = t + \frac{2}{t}$ với $t \geq 2$.

Từ $A = t + \frac{2}{t} = \frac{t}{2} + \left(\frac{t}{2} + \frac{2}{t}\right) \geq 3$.

Vậy $A_{\min} = 3 \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow x = y$.

Ví dụ: Cho các số $x, y > 0$ thỏa mãn $x + y \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

a) $A = x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$;

b) $B = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right)$;

c) $C = x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$;

d) $D = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2$.

Hướng dẫn

a) Ta có $A = \left(4x + \frac{1}{x}\right) + \left(4y + \frac{1}{y}\right) - 3(x+y) \geq 5$.

Vậy $A_{\min} = 5 \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$.

Ví dụ: Cho các số $x, y > 0$ thỏa mãn $x + y \leq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

a) $A = x + y + \frac{2}{x} + \frac{2}{y}$;

b) $B = \left(x + \frac{2}{x}\right)\left(y + \frac{2}{y}\right)$;

c) $C = x^2 + y^2 + \frac{4}{x^2} + \frac{4}{y^2}$;

d) $D = \left(x + \frac{2}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{2}{y}\right)^2$.

Hướng dẫn

a) Ta có $A = \left(2x + \frac{2}{x}\right) + \left(2y + \frac{2}{y}\right) - (x+y) \geq 6$.

Vậy $A_{\min} = 6 \Leftrightarrow x = y = 1$.

Ví dụ: Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 1$. Chứng minh:

a) $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq 3$;

b) $\sqrt{x+2y} + \sqrt{y+2z} + \sqrt{z+2x} \leq 3$;

c) $\sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{yz} + \sqrt[3]{zx} \leq \sqrt[3]{3}$;

d) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z} \leq \sqrt[3]{9}$;

e) $\sqrt[3]{x+y} + \sqrt[3]{y+z} + \sqrt[3]{z+x} \leq \sqrt[3]{18}$.

Hướng dẫn

a) Ta có $\sqrt{x} = \frac{\sqrt{3x}}{\sqrt{3}} \leq \frac{1}{2\sqrt{3}}(3x+1)$.

Tương tự $\sqrt{y} \leq \frac{1}{2\sqrt{3}}(3y+1)$; $\sqrt{z} \leq \frac{1}{2\sqrt{3}}(3z+1)$;

Do đó $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq 3$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}$.

b) Áp dụng bất đẳng thức Cossi ta có: $\sqrt{(x+2y).1} \leq \frac{x+2y+1}{2}$.

Tương tự $\sqrt{(y+2z).1} \leq \frac{y+2z+1}{2}$; $\sqrt{(z+2x).1} \leq \frac{z+2x+1}{2}$.

Vậy $\sqrt{x+2y} + \sqrt{y+2z} + \sqrt{z+2x} \leq \frac{3(x+y+z)+3}{2} = 3$. Dấu "=" xảy ra $x = y = z = \frac{1}{3}$.

c) Ta có $\sqrt[3]{xy} = \frac{\sqrt[3]{3x.3y.1}}{\sqrt[3]{9}} \leq \frac{3x+3y+1}{3\sqrt[3]{9}}$.

Tương tự $\sqrt[3]{yx} \leq \frac{3y+3x+1}{3\sqrt[3]{9}}$; $\sqrt[3]{zx} \leq \frac{3z+3x+1}{3\sqrt[3]{9}}$;

Vậy $\sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{yz} + \sqrt[3]{zx} \leq \sqrt[3]{3}$; Dấu "=" xảy ra $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Ví dụ: Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 3$. Chứng minh:

a) $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \sqrt{3}$;

b) $\sqrt{x+2y} + \sqrt{y+2z} + \sqrt{z+2x} \leq 3\sqrt{3}$;

c) $\sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{yz} + \sqrt[3]{zx} \leq 3$;

d) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z} \leq 3$;

e) $\sqrt[3]{x+y} + \sqrt[3]{y+z} + \sqrt[3]{z+x} \leq 3\sqrt[3]{2}$.

Dạng 2: Kỹ thuật khai thác giả thiết.

Phương pháp: Sử dụng những phép biến đổi tương đương (ẩn phụ, tách phép chia, nhân ...) hoặc sử dụng tính chất bắc cầu của bất đẳng thức.

Ví dụ: Cho các số x, y thỏa mãn $\sqrt{x+2} - y^3 = \sqrt{y+2} - x^3$.

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

i) $A = x^2 + 2xy - 2y^2 + 2y + 10$; ii) $B = \frac{x^2+7}{y+3} + \frac{y^2+7}{x+3}$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C = \frac{x}{x^2+4} + \frac{y}{y^2+4}$.

Hướng dẫn

Điều kiện $x \geq -2; y \geq -2$. Trục căn thức ở mẫu ta có

$$\frac{x-y}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y+2}} + (x-y)(x^2+xy+y^2) = 0 \Leftrightarrow (x-y) \left[\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y+2}} + (x^2+xy+y^2) \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow x-y=0 \Leftrightarrow x=y.$$

$$\text{Vì } \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y+2}} + (x^2+xy+y^2) > 0, \forall x, y \geq -2.$$

$$\text{a) i) Ta có } A = x^2 + 2x + 10 = (x+1)^2 + 9 \geq 9, \forall x \geq -2.$$

$$\text{Vậy } A_{\min} = 9 \Leftrightarrow x = y = -1.$$

$$\text{ii) } B = \frac{2(x^2+7)}{x+3} = 2 \cdot \left[x+3 + \frac{16}{x+3} - 6 \right] \geq 4. \text{ Dấu "}" xảy ra } \Leftrightarrow (x+3)^2 = 16 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=1.$$

$$\text{Vậy } B_{\min} = 4 \Leftrightarrow x = y = 1.$$

$$\text{b) } C = \frac{2x}{x^2+4}.$$

$$\text{Xét } \frac{1}{C} = \frac{x^2+4}{2x} = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}.$$

$$\text{Nếu } x > 0 \Rightarrow \frac{1}{C} \geq 2 \Leftrightarrow 0 < C \leq \frac{1}{2}.$$

$$\text{Nếu } -2 < x < 0 \Rightarrow \frac{1}{C} \leq 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq C < 0.$$

$$\text{Vậy } C_{\max} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y = 2; C_{\min} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y = -2;$$

Ví dụ: Cho các số x, y thỏa mãn $\sqrt{x+2} - y^3 = \sqrt{y+2} - x^3$.

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$\text{i) } A = x^2 - xy + y^2 + 2x + 2018; \text{ ii) } B = \frac{x^2+5}{y+2} + \frac{y^2+5}{x+2}.$$

$$\text{b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức } C = \frac{x}{x^2+9} + \frac{y}{y^2+9}.$$

Ví dụ: Cho các số $x, y, z > 0$ thỏa mãn $2(x+y+z)+xy+yz+zx=9xyz$. Chứng minh:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \geq 3.$$

Ví dụ: Cho các số $x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1$ thỏa mãn $x+y+z=4$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $A=x^2+y^2+z^2$.

Ví dụ: Cho các số thực x, y thỏa mãn $x-\sqrt{x+1}=\sqrt{y+1}-y$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $A=x+y+2017$.

Ví dụ: Cho các số thực $x > 0, y > 0$ thỏa mãn $xy+4 \leq 2y$.

a) Tìm giá trị nhỏ nhất $A = \frac{x^2 + 2y^2}{xy}$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

i. $B = \frac{xy}{x^2 + y^2};$ ii. $C = \frac{xy}{(x+4y)^2}.$

Dạng 3: Kỹ thuật “Cô – si ngược dấu”.

Phương pháp: Sử dụng những phép biến đổi tương đương (như thêm bớt hoặc tách ghép ...) để đưa bài toán từ “trạng thái ngược dấu” về “trạng thái xuôi dấu”.

Ví dụ: Cho các số $a, b, c > 0$ và thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh:

a) $\frac{a^3}{a^2+b^2} + \frac{b^3}{b^2+c^2} + \frac{c^3}{c^2+a^2} \geq \frac{3}{2};$ b) $\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq \frac{3}{2};$

c) $\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} \geq \frac{3}{2};$ d) $\frac{a+1}{1+b^2} + \frac{b+1}{1+c^2} + \frac{c+1}{1+a^2} \geq 3;$

e) $\frac{a}{b^3+ab} + \frac{b}{c^3+bc} + \frac{c}{a^3+ca} \geq \frac{3}{2}.$

Hướng dẫn

a) Ta có $\frac{a^3}{a^2+b^2} = a - \frac{ab^2}{a^2+b^2} \geq a - \frac{b}{2}$. Tương tự $\frac{b^3}{b^2+c^2} \geq b - \frac{c}{2}; \frac{c^3}{c^2+a^2} \geq c - \frac{a}{2}.$

Do đó $\frac{a^3}{a^2+b^2} + \frac{b^3}{b^2+c^2} + \frac{c^3}{c^2+a^2} \geq \frac{(a+b+c)}{2} = \frac{3}{2};$ Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1.$

b) Ta có $\frac{a}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2} \geq a - \frac{ab}{2};$ Tương tự $\frac{b}{1+c^2} \geq b - \frac{bc}{2}; \frac{c}{1+a^2} \geq c - \frac{ca}{2}.$

Do đó $\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq a+b+c - \frac{ab+bc+ca}{2} \geq \frac{3}{2}$. Vì $ab+bc+ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{2} = 3$.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

c) Ta có $\frac{1}{a^2+1} = 1 - \frac{a^2}{a^2+1} \geq 1 - \frac{a}{2}$. Tương tự $\frac{1}{b^2+1} \geq 1 - \frac{b}{2}$; $\frac{1}{c^2+1} \geq 1 - \frac{c}{2}$.

VT $\geq 3 - \frac{a+b+c}{2} = \frac{3}{2}$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

d) Ta có $\frac{a+1}{b^2+1} = a+1 - \frac{(a+1)b^2}{b^2+1} \geq a+1 - \frac{(a+1)b}{2}$.

Tương tự $\frac{b+1}{c^2+1} \geq b+1 - \frac{(b+1)c}{2}$; $\frac{c+1}{a^2+1} \geq c+1 - \frac{(c+1)a}{2}$;

VT $\geq 3 + \frac{a+b+c}{2} - \frac{ab+bc+ca}{2} = 3$. Vì $ab+bc+ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{2} = 3$.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

e) Ta có $\frac{a}{b^3+ab} = \frac{1}{b} - \frac{b}{a+b^2} \geq \frac{1}{b} - \frac{1}{2\sqrt{a}}$;

Tương tự $\frac{b}{c^3+bc} \geq \frac{1}{c} - \frac{1}{2\sqrt{b}}$; $\frac{c}{a^3+ca} \geq \frac{1}{a} - \frac{1}{2\sqrt{c}}$.

VT $\geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{2\sqrt{a}} - \frac{1}{2\sqrt{b}} - \frac{1}{2\sqrt{c}}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô - si $\frac{1}{2\sqrt{a}} \leq \frac{1}{4a} + \frac{1}{4}$ và $\frac{1}{a} \geq 2-a$

Do đó $\frac{1}{a} - \frac{1}{2\sqrt{a}} \geq \frac{1}{a} - \frac{1}{4a} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4a} - \frac{1}{4} \geq \frac{3}{4}(2-a) - \frac{1}{4} = \frac{5}{4} - \frac{3a}{4}$.

Suy ra VT $\geq \frac{15}{4} - \frac{3}{4}(a+b+c) = \frac{3}{2}$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Ví dụ: Cho các số $a, b, c > 0$ và thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh:

$$a) \frac{a^3}{a^2+b^2} + \frac{b^3}{b^2+c^2} + \frac{c^3}{c^2+a^2} \geq \frac{1}{2};$$

$$b) \frac{a}{1+9b^2} + \frac{b}{1+9c^2} + \frac{c}{1+9a^2} \geq \frac{1}{2};$$

$$c) \frac{1}{9a^2+1} + \frac{1}{9b^2+1} + \frac{1}{9c^2+1} \geq \frac{3}{2};$$

$$d) \frac{a+1}{1+9b^2} + \frac{b+1}{1+9c^2} + \frac{c+1}{1+9a^2} \geq 3;$$

Ví dụ: Cho các số dương a, b, c có thỏa mãn $a.b.c = 1$. Chứng minh:

$$a+b+c \geq \frac{a+1}{b+1} + \frac{b+1}{c+1} + \frac{c+1}{a+1}.$$

Hướng dẫn

$$\text{Ta có } a+1 - \frac{a+1}{b+1} = \frac{(a+1)b}{b+1}$$

$$\text{Ta đưa bài toán về chứng minh } \frac{(a+1)b}{b+1} + \frac{(b+1)c}{c+1} + \frac{(b+1)a}{a+1} \geq 3.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô – si cho ba số hạng ở VT với $abc = 1$. Ta được điều cần chứng minh.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Ví dụ: Cho các số dương a, b, c có thỏa mãn $a.b.c = 1$. Chứng minh:

$$a+b+c \geq \frac{a+2}{b+2} + \frac{b+2}{c+2} + \frac{c+2}{a+2}.$$

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CÓ CHỨA CĂN THỨC

Dạng 1: Sử dụng biến đổi đại số.

Phương pháp:

- Thêm bớt hạng tử.
- Nâng lên lũy thừa cả hai vế.
- Phép nhân liên hợp.

...

Từ các phép biến đổi đại số đó ta đi giải phương trình đơn giản hơn mà ta biết cách giải.

Ví dụ: Giải phương trình

$$a) \sqrt{x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{9}} - \sqrt{x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}} = \frac{1}{3}(3x^3 - x^2 + 6x - 2); (1)$$

$$b) \sqrt{x^2 - \frac{1}{4}} + \sqrt{x^2 + x + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}(2x^3 + x^2 + 2x + 1); (2)$$

Hướng dẫn

$$a) \text{ Điều kiện: } VP \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}.$$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{9}} - \sqrt{\left(x - \frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}(3x - 1)(x^2 + 2)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{9}} = \frac{1}{3}(3x - 1)(x^2 + 2)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(x - \frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}(3x - 1)(x^2 + 2)$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(3x - 1)(x^2 + 2)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Vậy } S = \left\{\frac{1}{3}\right\}.$$

Ví dụ: Giải phương trình

- a) $\sqrt{3x+1} - \sqrt{6-x} + 3x^2 - 14x - 8 = 0; (*)$
 b) $3\sqrt{5x+2} = x^2 + 2;$
 c) $\sqrt{x + \sqrt{2x-5}} - 2 + \sqrt{x - 3\sqrt{2x-5} + 2} = 2\sqrt{2}.$

Hướng dẫn

- a) Điều kiện: $-\frac{1}{3} \leq x \leq 6.$

$$(*) \Leftrightarrow (\sqrt{3x+1} - 4) + (1 - \sqrt{6-x}) + 3x^2 - 14x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-5) \left[\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{1}{\sqrt{6-x}+1} + (3x+1) \right] = 0$$

$$\text{Với } -\frac{1}{3} \leq x \leq 6 \text{ thì } \left[\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{1}{\sqrt{6-x}+1} + (3x+1) \right] > 0$$

$$\text{Vậy } S = \{5\}.$$

Ví dụ: Giải phương trình

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC

Dạng 1: Sử dụng biến đổi đại số

Phương pháp:

- Thêm bớt hạng tử.
- Nâng lên lũy thừa cả hai vế.
- Phép nhân liên hợp.

...

Từ đó các phép biến đổi đại số đó ta đi giải phương trình đơn giản hơn mà ta đã biết cách giải.

Ví dụ: Giải phương trình

$$a) \sqrt{x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{9}} - \sqrt{x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}} = \frac{1}{3}(3x^3 - x^2 + 6x - 2) \quad (1).$$

$$b) \sqrt{x^2 - \frac{1}{4}} + \sqrt{x^2 + x + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}(2x^3 + x^2 + 2x + 1)$$

Hướng dẫn

$$a) \text{Điều kiện: } VP \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}$$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{9}} - \sqrt{\left(x - \frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}(3x - 1)(x^2 + 2)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{9}} = \frac{1}{3}(3x - 1)(x^2 + 2)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(x - \frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}(3x - 1)(x^2 + 2)$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(3x - 1)(x^2 + 2)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Vậy } S = \left\{\frac{1}{3}\right\}.$$

Ví dụ: Giải phương trình

$$a) \sqrt{3x+1} - \sqrt{6-x} + 3x^2 - 14x - 8 = 0 \quad (*).$$

$$b) 3\sqrt{5x+2} = x^2 + 2$$

$$c) \sqrt{x + \sqrt{2x-5}} - 2 + \sqrt{x - 3\sqrt{2x-5} + 2} = 2\sqrt{2}$$

Hướng dẫn

$$a) \text{Điều kiện: } -\frac{1}{3} \leq x \leq 6.$$

$$(*) \Leftrightarrow (\sqrt{3x+1} - 4) + (1 - \sqrt{6-x}) + 3x^2 - 14x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-5) \left[\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{1}{\sqrt{6-x}+1} + (3x+1) \right] = 0$$

$$\text{Với } -\frac{1}{3} \leq x \leq 6 \text{ thì } \left[\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{1}{\sqrt{6-x}+1} + (3x+1) \right] > 0$$

$$\text{Vậy } S = \{5\}.$$

Ví dụ: Giải phương trình

$$a) \sqrt[3]{x^2-1} + x = \sqrt{x^3-2}.$$

$$b) \sqrt{x^2 - 2x + 17} - 5|x - 1| = 4 \quad (**)$$

Hướng dẫn

$$b) (**) \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + 16} - 5|x-1| = 4$$

Sử dụng bất đẳng thức $\sqrt{a^2 + b^2} \leq |a| + |b|$ nên

$$\sqrt{(x-1)^2 + 16} - 5|x-1| \leq |x-1| + 4 = 4 - |x-1|$$

$$\text{Do đó } 4 \leq 4 - |x-1| \Leftrightarrow x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\text{Vậy } S = \{1\}.$$

Dạng 2: Đặt ẩn phụ.

Phương pháp: Đặt một ẩn, hai hoặc ba biểu thức phức tạp bằng ẩn mới (gọi là ẩn phụ) và giải phương trình thu được sau đó tìm nghiệm.

Loại 1: Sử dụng một ẩn phụ

Ví dụ: Giải phương trình

$$a) \sqrt{x^4 + x^2 + 1} + \sqrt{3}(x^2 + 1) = 3\sqrt{3}x.$$

$$b) 2x^2 + \sqrt{1-x} + 2x\sqrt{1-x^2} = 1.$$

Hướng dẫn

a) Với $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình trên.

Với $x \neq 0$ ta chia hai vế của phương trình cho x ta được

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} + 1} + \sqrt{3}\left(x + \frac{1}{x}\right) = 3\sqrt{3}. \text{ Đặt } t = x + \frac{1}{x} \geq 2 \text{ (Cô-si)}$$

$$\text{Phương trình trở thành } \sqrt{t^2 - 1} = \sqrt{3}(3 - t) \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 3 \\ t^2 - 9t + 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 2 \text{ (thỏa mãn).}$$

$$\text{Với } t = 2 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\text{Vậy } S = \{1\}.$$

Loại 2: Sử dụng hai ẩn phụ

Ví dụ: Giải phương trình

$$a) \sqrt{4x^2 + 5x + 1} - 2\sqrt{x^2 - x + 1} = 9x - 3.$$

$$b) \sqrt{x^2 + 3} + \sqrt{10 - x^2} = 5.$$

Hướng dẫn

a) Đặt $\begin{cases} \sqrt{4x^2+5x+1}=a \\ 2\sqrt{x^2-x+1}=b \end{cases}$ Điều kiện: $a > 0, b > 0..$

Phương trình trên trở thành: $a-b=a^2-b^2 \Leftrightarrow (a-b)(a+b-1)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2+5x+1=4x^2-4x+4 \\ \sqrt{4x^2+5x+1}+2\sqrt{x^2-x+1}=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ \sqrt{4x^2+5x+1}=1-2\sqrt{x^2-x+1} \text{ vô nghiệm} \end{cases}$$

Vậy $S=\left\{\frac{1}{3}\right\}$.

Loại 3: Sử dụng cả ẩn phụ và ẩn chính để đưa về hệ phương trình đối xứng.

Ví dụ: Giải phương trình

a) $x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1}$.

b) $x^3-3\sqrt[3]{3x+2}=2$.

Hướng dẫn

a) Phương trình $\Leftrightarrow x^3+2x=2x-1+2\sqrt[3]{2x-1}$. Đặt $t=\sqrt[3]{2x-1}$.

Ta được $x^3+2x=t^3+2t \Leftrightarrow (x-t)(x^2+xt+t^2)+2(x-t)=0$

$$\Leftrightarrow (x-t)(x^2+xt+t^2+2)=0$$

Vì $x^2+xt+t^2+2=\left(x+\frac{t}{2}\right)^2+\frac{3t^2}{4}+2>0$.

$$\text{Nên } x=t \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^2+x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Vậy $S=\left\{1; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$

Loại 4: Sử dụng cả ẩn phụ và ẩn chính để đưa về phương trình bậc hai một ẩn.

Ví dụ: Giải phương trình

a) $2x^2+3x+7=(x+5)\sqrt{2x^2+1}$

$$b) x^2 + 3x + 5 = (x+3)\sqrt{x^2+5}$$

$$c) (\sqrt{x+1}+1)(\sqrt{x+1}+2x-5) = x.$$

Hướng dẫn

$$a) \text{ Phương trình } 2x^2 + 1 - (x+5)\sqrt{2x^2+1} + 3x + 6 = 0. \text{ Đặt } t = \sqrt{2x^2+1} \ (t > 1).$$

$$\text{Phương trình trở thành: } t^2 - (x+5)t + 3x + 6 = 0.$$

$$\Delta = [-(x+5)]^2 - 4(3x+6) = (x-1)^2 \geq 0 \quad \forall x.$$

$$\text{Do đó } \begin{cases} t = 3 \\ t = x + 2 \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 3 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

$$\text{Với } t = x + 2 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{7}$$

$$\text{Vậy } S = \{\pm 2; 2 \pm \sqrt{7}\}.$$

Dạng 3: Đánh giá.

Phương pháp: Phương trình $f(x) = g(x)$ nếu luôn có $\begin{cases} f(x) \geq m \\ g(x) \leq m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = m \\ g(x) = m \end{cases}$

Ví dụ: Giải phương trình

$$a) \sqrt{3x^2+6x+7} + \sqrt{5x^2+10x+14} = 4 - 2x - x^2.$$

$$b) \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x} = \sqrt{x+9}.$$

$$c) 13\sqrt{x^2-x^4} + 9\sqrt{x^2+x^4} = 16.$$

Hướng dẫn

$$a) \text{ Phương trình } \Leftrightarrow \sqrt{3(x+1)^2+4} + \sqrt{5(x+1)^2+9} = 5 - (x+1)^2$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} VT \geq 5 \\ VP \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow VT = VP = 5.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1.$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ \frac{21+\sqrt{41}}{2} \right\}.$$

$$b) \text{ Điều kiện: } x \geq 0. \text{ Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki: } (ax+by)^2 \leq (a^2+b^2)(x^2+y^2).$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y}.$$

$$\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x}\right)^2 \leq \left[(2\sqrt{2})^2 + x + 1\right] \left[\frac{1}{x+1} + \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\right)^2\right] = x + 9$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{7}$

Vậy $S = \left\{\frac{1}{7}\right\}$.

C. LUYỆN TẬP SÂU VÀ CÓ CHỦ ĐÍCH

Ví dụ: (TS 10 – THPT Hà Nội, năm học 2018 - 2019)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} + 2\sqrt{x}$

Hướng dẫn

Điều kiện: $0 \leq x \leq 1$.

Với $a, b \geq 0$ ta có: $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + 2\sqrt{ab} + b \geq a + b$

$\Rightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P = 2$ khi $x = 0$.

Ví dụ: (TS 10 – THPT Hà Nội, năm học 2017 - 2018)

Cho các số a, b, c thỏa mãn $a \geq 1, b \geq 1, c \geq 1$ và $ab + bc + ca = 9$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2 + c^2$

Hướng dẫn

Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có:

$$a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{a^2 b^2} = 2ab$$

$$b^2 + c^2 \geq 2\sqrt{b^2 c^2} = 2bc$$

$$c^2 + a^2 \geq 2\sqrt{c^2 a^2} = 2ca$$

$$\Rightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ca)$$

$$\Rightarrow P \geq 9$$

$$\text{Vậy } \min P = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = b^2 \\ b^2 = c^2 \\ c^2 = a^2 \\ ab + bc + ca = 9 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = \sqrt{3} \text{ khi } x = 0.$$

Ta có $a \geq 1, b \geq 1, c \geq 1$ nên

$$\begin{cases} (a-1)(b-1) \geq 0 \\ (b-1)(c-1) \geq 0 \\ (c-1)(a-1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab - a - b + 1 \geq 0 \\ bc - b - c + 1 \geq 0 \\ ca - c - a + 1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow ab + bc + ca - 2(a + b + c) + 3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a + b + c \leq \frac{ab + bc + ca + 3}{2} \Leftrightarrow (a + b + c)^2 \leq 36 \text{ vì } a + b + c \geq 3$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \leq 36$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \leq 36 - 2(ab + bc + ca) \Leftrightarrow P \leq 18$$

$$\text{Vậy } \max P = 18 \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)(b-1) \geq 0 \\ (b-1)(c-1) \geq 0 \\ (c-1)(a-1) \geq 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 1, c = 4 \\ b = c = 1, a = 4 \\ c = a = 1, b = 4 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \min P = 9 \Leftrightarrow a = b = c = \sqrt{3}$$

$$\max P = 18 \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)(b-1) \geq 0 \\ (b-1)(c-1) \geq 0 \\ (c-1)(a-1) \geq 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 1, c = 4 \\ b = c = 1, a = 4 \\ c = a = 1, b = 4 \end{cases}$$

Ví dụ: (TS 10 – THPT Hà Nội, năm học 2016 - 2017)

Với các số thực x, y thỏa mãn $x - \sqrt{x+6} = \sqrt{y+6} - y$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x + y$.

Ví dụ: (TS 10 – THPT Hà Nội, năm học 2015 - 2016)

Với các số thực a, b thỏa mãn $a^2 + b^2 = 4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = \frac{ab}{a + b + 2}.$$

Ví dụ: (TS 10 – THPT Hà Nội, năm học 2014 - 2015)

Với a, b, c là các số dương thỏa mãn $a + b + c = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$Q = \sqrt{2a + bc} + \sqrt{2b + ac} + \sqrt{2c + ab}.$$

Ví dụ: (TS 10 – THPT Hà Nội, năm học 2013 - 2014)

Với a, b, c là các số dương thỏa mãn $a+b+c+ab+bc+ca=6abc$. Chứng minh $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq 3$.

Ví dụ: (TS 10 – THPT Hà Nội, năm học 2012 - 2013)

Với x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x \geq 2y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \frac{x^2 + y^2}{xy}$.

Ví dụ: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $x + y \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \sqrt{1 + x^2 y^2}$.

Hướng dẫn

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } P &= \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \sqrt{1 + x^2 y^2} \geq \frac{2}{xy} \sqrt{1 + x^2 y^2} = 2 \sqrt{\frac{1}{xy} + xy} = 2 \sqrt{\left(xy + \frac{1}{16xy}\right) + \frac{15}{16xy}} \\ &\geq 2 \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{15}{4 \cdot (4xy)}} \quad (\text{Áp dụng Cô si}) \\ &\geq 2 \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{15}{4 \cdot (x+y)^2}} \quad (\text{Vì } 4xy \leq (x+y)^2) \\ &\geq 2 \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{15}{4}} \quad (\text{Vì } x+y \leq 1) \\ &= \sqrt{17} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \min P = \sqrt{17} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}.$$

Ví dụ: Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $x + 2y + 3z \geq 20$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x + y + z + \frac{3}{x} + \frac{9}{2y} + \frac{4}{z}$.

Hướng dẫn

$$\text{Ta có: } A = x + y + z + \frac{3}{x} + \frac{9}{2y} + \frac{4}{z} = \frac{3}{4}x + \frac{3}{x} + \frac{1}{2}y + \frac{9}{2y} + \frac{1}{4}z + \frac{4}{z} + \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y + \frac{3}{4}z\right)$$

Áp dụng Cô si ta có:

$$+)\frac{3}{4}x + \frac{3}{x} \geq 3$$

$$+)\frac{1}{2}y + \frac{9}{2y} \geq 3$$

$$+)\frac{1}{4}z + \frac{4}{z} \geq 2$$

$$\text{Và } \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y + \frac{3}{4}z = \frac{1}{4}(x + 2y + 3z) \geq 5$$

Suy ra $A \geq 13$

$$\text{Vậy } \min A = 13 \Leftrightarrow x = 2, y = 3, z = 4.$$

Ví dụ: Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = abc$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu

$$\text{thức } A = \frac{a}{a^2 + bc} + \frac{b}{b^2 + ac} + \frac{c}{c^2 + ab}.$$

Hướng dẫn

$$\text{Ta có: } A = \frac{a}{a^2 + bc} + \frac{b}{b^2 + ac} + \frac{c}{c^2 + ab}$$

$$= \frac{1}{a + \frac{bc}{a}} + \frac{1}{b + \frac{ac}{b}} + \frac{1}{c + \frac{ab}{c}}$$

$$\leq \frac{1}{2\sqrt{bc}} + \frac{1}{2\sqrt{ac}} + \frac{1}{2\sqrt{ab}}$$

$$\leq \frac{1}{4\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}$$

$$= \frac{1}{2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)}$$

$$\text{Mà } \frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} = 1 \text{ nên } 2 \geq \frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c}$$

$$P \leq \frac{1}{2}. \text{ Dấu " = " xảy ra } \Leftrightarrow a = b = c = 3.$$

$$\text{Vậy } \max P = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = b = c = 3.$$

Ví dụ: Cho các số dương a, b thỏa mãn $a + b \leq 2\sqrt{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Hướng dẫn

Ta có: $A = (a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow \frac{a+b}{ab} \geq \frac{4}{a+b} \Leftrightarrow A \geq \frac{4}{a+b}$

Mà $a+b \leq 2\sqrt{2} \Rightarrow \frac{4}{a+b} \geq \frac{4}{2\sqrt{2}}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)^2 = 0 \\ a+b = 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow a=b=\sqrt{2}$.

Vậy $\text{Min}P = \sqrt{2} \Leftrightarrow a=b=\sqrt{2}$.

Ví dụ: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = x^2 - x\sqrt{x} + x + y - \sqrt{y} + 1$.

Hướng dẫn

Điều kiện: $y \geq 0$.

Ta có: $A = x^2 - x(\sqrt{x}-1) + \frac{(\sqrt{y}-1)^2}{4} + \frac{3y}{4} - \frac{\sqrt{y}}{2} + \frac{3}{4} = \left(x - \frac{\sqrt{y}-1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\sqrt{y} - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} \geq \frac{2}{3}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{9} \end{cases}$

Vậy $\text{Min}A = \frac{2}{3}$.

Ví dụ: Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh:

$$ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca).$$

Hướng dẫn

Ta có: $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ca)$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \quad (1)$$

Vì a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác nên ta có: $a^2 < a.(b+c) \Rightarrow a^2 < ab + ac$.

Tương tự $b^2 < ab + bc$; $c^2 < ac + bc$.

Suy ra: $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$ (2)

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ: Giải phương trình: $10\sqrt{x^3+1} = 3(x^2+2)$.

Hướng dẫn

Điều kiện: $x \geq 1$ (1). Đặt $a = \sqrt{x+1}$ và $b = \sqrt{x^2-x+1}$, ($a \geq 0; b \geq 0$) (2)

$\Rightarrow a^2 + b^2 = x^2 + 2$. Khi đó phương trình đã cho trở thành:
 $10.ab = 3(a^2 + b^2) \Leftrightarrow (a-3b)(3a-b) = 0$

- Nếu $a = 3b$ thì từ (2) $\Rightarrow \sqrt{x+1} = 3\sqrt{x^2-x+1}$ phương trình này vô nghiệm.
- Nếu $b = 3a$ thì từ (2) $\Rightarrow 3\sqrt{x+1} = \sqrt{x^2-x+1} \Leftrightarrow x^2-10x-8=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5+\sqrt{33} \\ x_2 = 5-\sqrt{33} \end{cases}$ thỏa mãn (1).

Vậy phương trình có hai nghiệm là: $\begin{cases} x_1 = 5+\sqrt{33} \\ x_2 = 5-\sqrt{33} \end{cases}$

Ví dụ: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+1=2y \\ y^3+1=2x \end{cases}$.

Hướng dẫn

Lấy phương trình trên trừ phương trình dưới

Ví dụ: Cho các số $a, b, c \in [0;1]$. Chứng minh rằng: $a+b^2+c^3-ab-bc-ca \leq 1$.

Hướng dẫn

Vì $b, c \in [0;1] \Rightarrow b^2 < b, c^3 < c$. Do đó $a+b^2+c^3-ab-bc-ca \leq a+b+c-ab-bc-ca$ (1)

Mặt khác $a+b^2+c^3-ab-bc-ca = (a-1)(b-1)(c-1)-abc+1$ (2)

Vì $a, b, c \in [0;1]$ nên $a+b^2+c^3-ab-bc-ca = (a-1)(b-1)(c-1)-abc+1 \leq 0$; $-abc \leq 0$

Do đó từ (2) $\Rightarrow a+b^2+c^3-ab-bc-ca \leq 1$ (3)

Từ (1) và (3) $\Rightarrow a+b^2+c^3-ab-bc-ca \leq 1$

Ví dụ: Chứng minh rằng: $\frac{a+b}{\sqrt{a(3a+b)}+\sqrt{b(3b+a)}} \geq \frac{1}{2}$ với a, b là các số dương.

Ví dụ: Cho hai số x, y thỏa mãn đẳng thức: $(x+\sqrt{x^2+2011})(y+\sqrt{y^2+2011})=2011$. Tính $x+y$.

Ví dụ: Cho $x > 0, y > 0$ và $x+y \geq 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = 3x + 2y + \frac{6}{x} + \frac{8}{y}.$$

Ví dụ: Cho các số thực x, a, b, c thay đổi thỏa mãn hệ $\begin{cases} x+a+b+c=7 \\ x^2+a^2+b^2+c^2=13 \end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của x .

Ví dụ: Tìm x, y thỏa mãn $5x-2\sqrt{x}(2+y)+y^2+1=0$.

Ví dụ: Cho các số dương a, b, c . Chứng minh rằng: $1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$.

Ví dụ: Cho x, y là hai số thực thỏa mãn: $(x+y)^2 + 7(x+y) + y^2 + 10 = 0$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x + y + 1$.

Ví dụ: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = \frac{x^4 + 2x^2 + 2}{x^2 + 1}$.

Ví dụ: Tìm m để phương trình ẩn x sau đây có ba nghiệm phân biệt: $x^3 - 2mx^2 + (m^2 + 1)x - m = 0$.

Ví dụ: Với a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = abc$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{a}{a^2 + bc} + \frac{b}{b^2 + ac} + \frac{c}{c^2 + ab}$.

Ví dụ: Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c \geq 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2} + \frac{b^3 + c^3}{b^2 + c^2} + \frac{c^3 + a^3}{c^2 + a^2}$.

Hướng dẫn:

Ta

có:

$$\frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2} = \frac{a^3}{a^2 + b^2} + \frac{b^3}{a^2 + b^2} = \frac{a(a^2 + b^2) - ab^2}{a^2 + b^2} + \frac{b(a^2 + b^2) - ba^2}{a^2 + b^2} = a + b - \frac{ab^2}{a^2 + b^2} - \frac{ba^2}{a^2 + b^2}$$

Áp dụng Cô si

$$a + b - \frac{ab^2}{a^2 + b^2} - \frac{ba^2}{a^2 + b^2} \geq a + b - \frac{b}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a+b}{2} \Rightarrow \frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2} \geq \frac{a+b}{2}$$

$$\text{Tương tự } \frac{b^3 + c^3}{b^2 + c^2} \geq \frac{b+c}{2}; \frac{c^3 + a^3}{c^2 + a^2} \geq \frac{c+a}{2} \Rightarrow M \geq \frac{2(a+b+c)}{2} = 6$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 2$

Vậy $\min M = 6 \Leftrightarrow a = b = c = 2$

Ví dụ: Với a, b, c là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = a + b + c + ab + bc + ca$.

Hướng dẫn:

$$\text{Cách 1: Ta có: } \begin{cases} a^2 + b^2 \geq 2ab \\ b^2 + c^2 \geq 2bc \\ c^2 + a^2 \geq 2ca \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca = 3.$$

$$\text{Mặt khác } a + b + c \leq \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3.$$

$$\text{Vậy } A \leq 3+3=6. \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=c \\ a^2+b^2+c^2=3 \Leftrightarrow a=b=c=1 \\ \frac{1}{a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{c} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \text{Max}A=6 \Leftrightarrow a=b=c=1$$

Cách 2: Ta có: $a^2+b^2+c^2=3 \Leftrightarrow (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = 3$.

$$\text{Đặt } t = a+b+c, |t| \leq 3 \Rightarrow ab+bc+ca = \frac{t^2-3}{2}$$

$$\Rightarrow A = t + \frac{t^2-3}{2} = \frac{1}{2}(t+1)^2 - 2, |t| \leq 3 \Leftrightarrow |t|+1 \leq 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(t+1)^2 \leq 8 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(t+1)^2 - 2 \leq 6$$

$$\text{Vậy } \text{Max}A=6 \Leftrightarrow a=b=c=1$$

Ví dụ: Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \sqrt{3a+1} + \sqrt{3b+1} + \sqrt{3c+1}$.

Hướng dẫn:

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức Cô si: } \sqrt{3a+1} = \frac{1}{2}\sqrt{4(3a+1)} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{4+3a+1}{2} = \frac{3a+5}{4}$$

$$\text{Tương tự } \sqrt{3b+1} \leq \frac{3b+5}{4}, \sqrt{3c+1} \leq \frac{3c+5}{4}$$

$$\text{Do đó } A \leq \frac{3(a+b+c)+15}{4} = 6$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow a=b=c=1.$$

$$\text{Vậy } \text{Max}A=6 \Leftrightarrow a=b=c=1$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$.

Do $a+b+c=3$ nên $a \geq 1$.

$$\text{Ta có } (\sqrt{3b+1} + \sqrt{3c+1})^2 = 3b+3c+2+2\sqrt{(3b+1)(3c+1)} \geq 3(3-a)+4 = 13-3a \text{ do đó } b, c \geq 0$$

$$\text{Khi đó } A \geq \sqrt{3a+1} + \sqrt{13-3a} \Rightarrow A^2 \geq 14 + 2\sqrt{(3a+1)(13-3a)}.$$

Ta chứng minh được $(3a+1)(13-3a) \geq 40$ với $1 \leq a \leq 3$.

$$\Rightarrow A^2 \geq 14 + 4\sqrt{10} \Rightarrow A \geq 2 + \sqrt{10}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow a=3, b=c=0.$$

$$\text{Vậy } \text{Min}A = 2 + \sqrt{10} \Leftrightarrow a=3, b=c=0$$