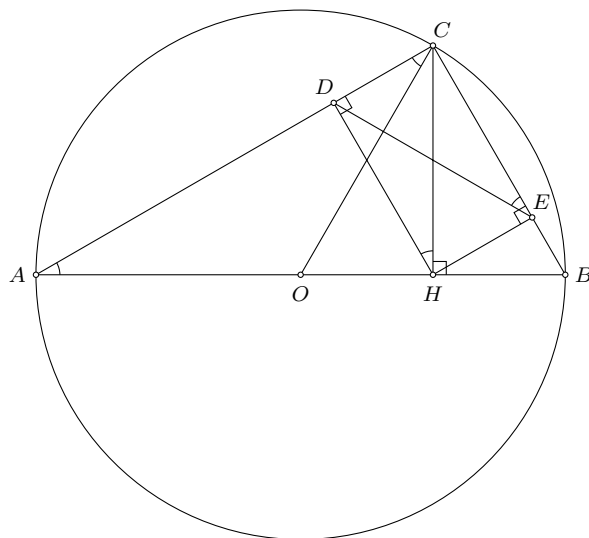


Bài 1

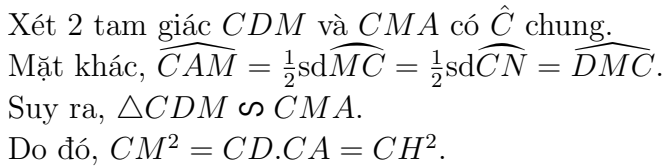
Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB , lấy C trên đường tròn sao cho $CB = R$. Gọi CH là đường cao của tam giác ABC .

- Tính các góc của tam giác ABC .
- Chứng minh $CH^2 = AC \cdot BC \cdot \sin A \cdot \cos A$.
- Kẻ $HD \perp CA$ và $HE \perp CB$. Chứng minh tứ giác $CDHE$ là hình chữ nhật và tứ giác $ADEB$ nội tiếp được đường tròn.
- Chứng minh $OC \perp DE$.
- Đường thẳng DE cắt đường tròn (O) tại M và N (M thuộc cung AC). Chứng minh $CM^2 = CD \cdot CA$ suy ra tam giác CMH cân.
- Tính độ dài đoạn thẳng CM theo R .
- Vẽ đường kính CF của đường tròn (O) . Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AMD . Chứng minh M, I, F thẳng hàng.
- Gọi K là giao điểm CF và DE . Chứng minh $CK \cdot CF = CD \cdot CA$.
- Tính CK và DK theo R .
- Chứng minh $\widehat{CHK} = \widehat{CFH}$.

 Hướng dẫn hoặc đáp số.



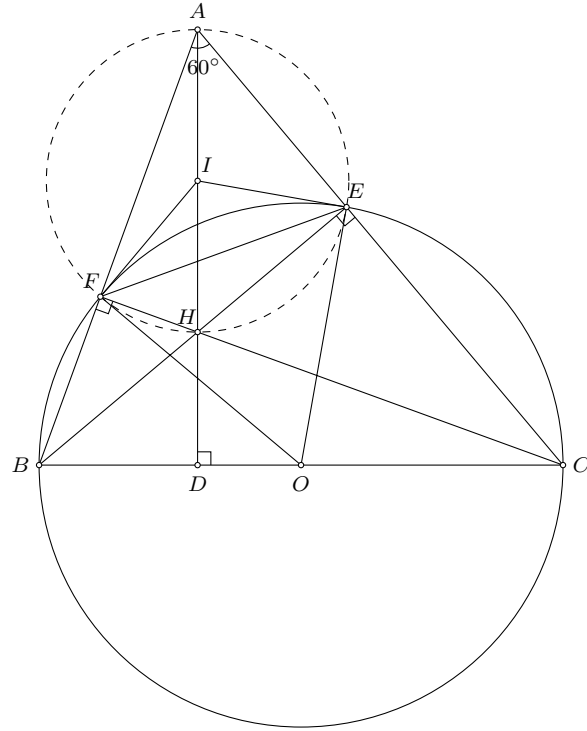
- Ta có $\triangle OBC$ đều. Suy ra $\hat{B} = 60^\circ$, $\hat{C} = 90^\circ$ và $\hat{A} = 30^\circ$.
- $CH^2 = AH \cdot BH = AC \cdot BC \cdot \sin A \cdot \cos A$.
- Từ $\hat{D} = \hat{E} = \hat{C} = 90^\circ$ suy ra $CDHE$ là hình chữ nhật.
 $\widehat{HAD} = \widehat{CHD} = \widehat{CED}$.
 Do đó, $ADEB$ nội tiếp đường tròn.
- Từ $\widehat{CED} = \widehat{CAO} = \widehat{ACO}$.
- Đường thẳng DE cắt đường tròn (O) tại M và N (M thuộc cung AC). Chứng minh $CM^2 = CD \cdot CA$ suy ra tam giác CMH cân.



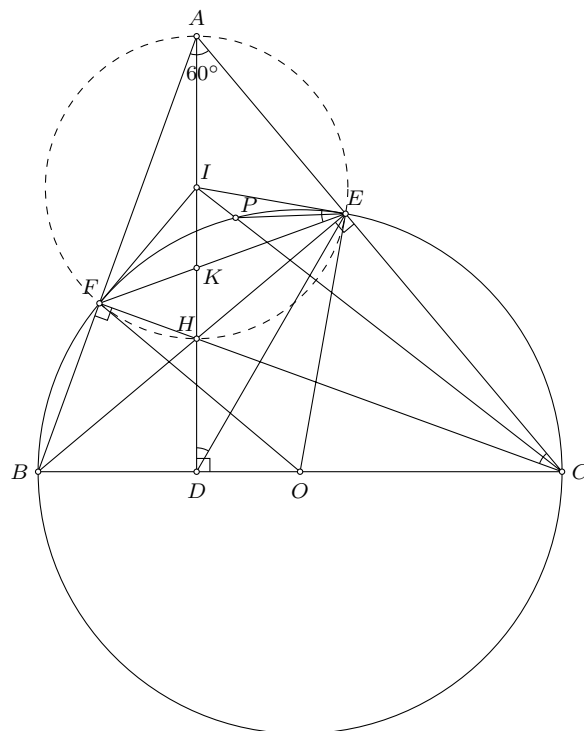
- 

Bài 2

- a Tính số đo cung nhỏ EF .
- b Tính theo a độ dài dây và độ dài cung nhỏ EF .
- c BE cắt CF tại H . Chứng minh AH vuông góc với BC (tại D) và $AF \cdot AB = AE \cdot AC$.
- d Chứng minh tứ giác $AFHE$ nội tiếp. Xác định tâm I đường tròn ngoại tiếp tứ giác.
- e Chứng minh IE, IF là tiếp tuyến đường tròn (O) .
- f Chứng minh $BF \cdot BA = BD \cdot BC$. Tính $BF \cdot BA + CE \cdot CA$ theo a .
- g IC cắt đường tròn (O) tại P . Chứng minh $IP \cdot IC = IE^2$.
- h Gọi K là giao điểm AD và EF . Chứng minh $IP \cdot IC = IK \cdot ID$ suy ra tứ giác $KPCD$ nội tiếp được đường tròn.
- i Chứng minh B, K, P thẳng hàng, suy ra K là trực tâm tam giác IBC .
- j AD cắt đường tròn (O) tại M và N (M nằm giữa A và D) Chứng minh $DH \cdot DA = \frac{MN^2}{4}$.



- a $\widehat{BAC} = \frac{1}{2} (\text{sd}\widehat{BC} - \text{sd}\widehat{EF})$. Suy ra $\text{sd}\widehat{EF} = 60^\circ$.
- b $\triangle OFE$ đều. Suy ra $EF = a$.
- c H là trực tâm $\triangle ABC$ suy ra $AH \perp BC$.
- d $\triangle AEB \simeq \triangle AFC$.
Hoặc $AF.AB = AH.AD = AE.EC$.
- e $AFHE$ nội tiếp đường tròn đường kính AH .
- f $\widehat{IEF} = \widehat{EFI} = \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{FIE}) = 30^\circ$.
- g $BF.BA = BH.BE = BD.BC$ hoặc $ACDF$ nội tiếp.
 $BF.BA + CE.CA = BD.BC + CB.CD = 4a^2$.
- h IC cắt đường tròn (O) tại P . Chứng minh $IP.IC = IE^2$.



Ta có $\widehat{IEP} = \widehat{ECP} = \widehat{sdPE}$.

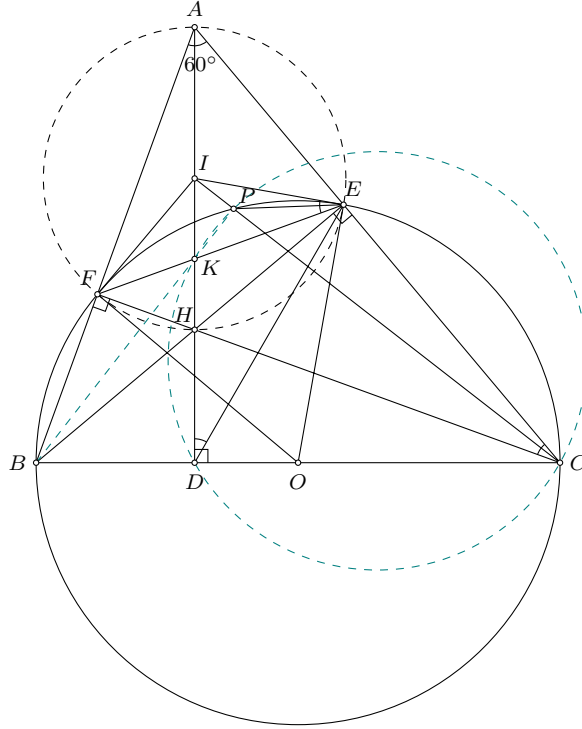
Suy ra $\triangle IEP \simeq \triangle ICE$.

i Tứ giác $HDCE$ nội tiếp nên $\widehat{EDH} = \widehat{ECF} = 30^\circ = \widehat{IEK}$.

Suy ra $\triangle IEK \simeq \triangle IDE$.

Do đó, $IK.ID = IE^2 = IP.IC$.

j Chứng minh B, K, P thẳng hàng, suy ra K là trực tâm tam giác IBC .

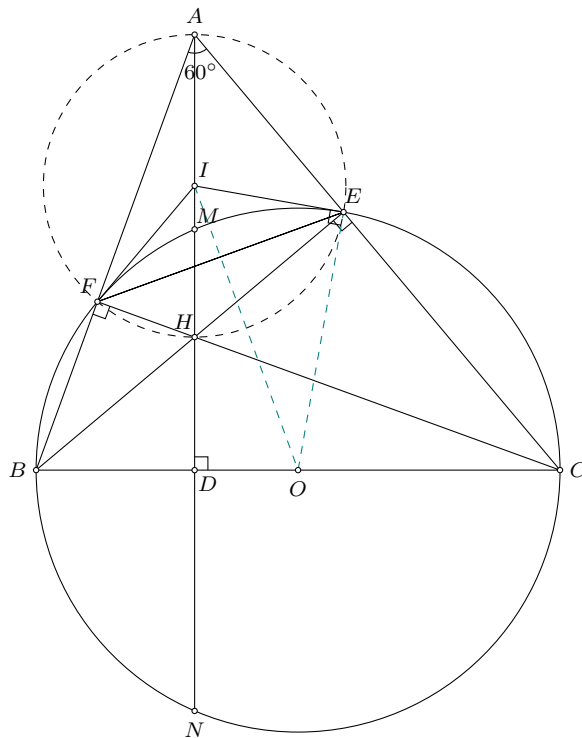


$\widehat{KPC} = \widehat{KDC} = 90^\circ$.

Suy ra $KP \perp CP$.

Mặt khác, $BP \perp CP$.

k AD cắt đường tròn (O) tại M và N (M nằm giữa A và D) Chứng minh $DH.DA = \frac{MN^2}{4}$.



- 1 Ta có $DH \cdot DA = (DI - IH)(DI - MA) = DI^2 - IE^2 = DI^2 - OI^2 + OE^2 = -DO^2 + OM^2 = DM^2$.

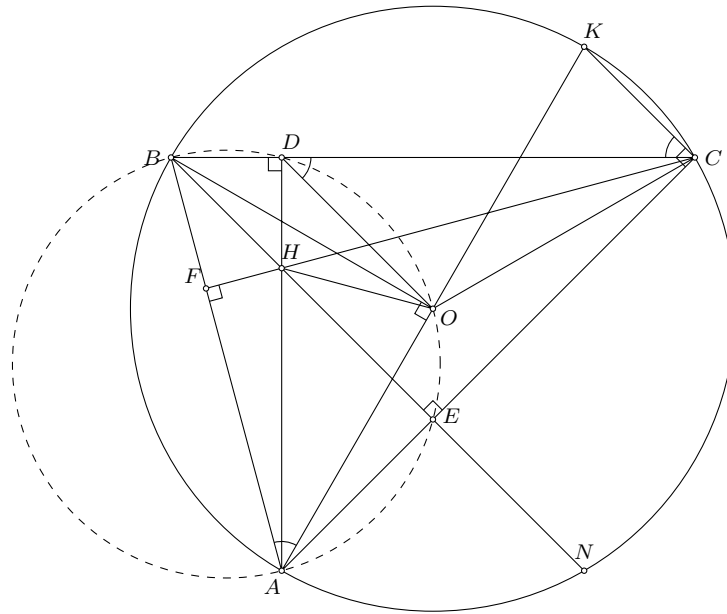
★★★★☆

Bài 3

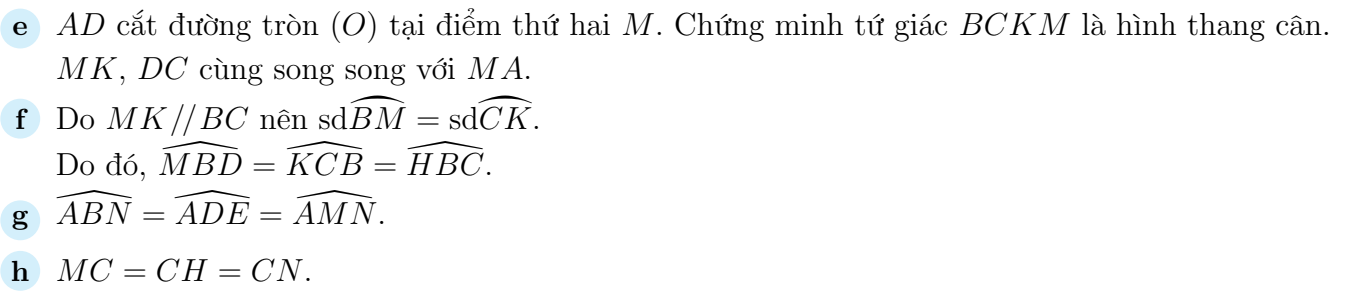
Cho đường tròn $(O; R)$ và dây BC sao cho $\widehat{BOC} = 120^\circ$, A là điểm trên cung lớn BC sao cho $\widehat{AOB} = 90^\circ$. Gọi AD là đường cao của tam giác ABC . Kẻ đường kính AK của đường tròn (O)

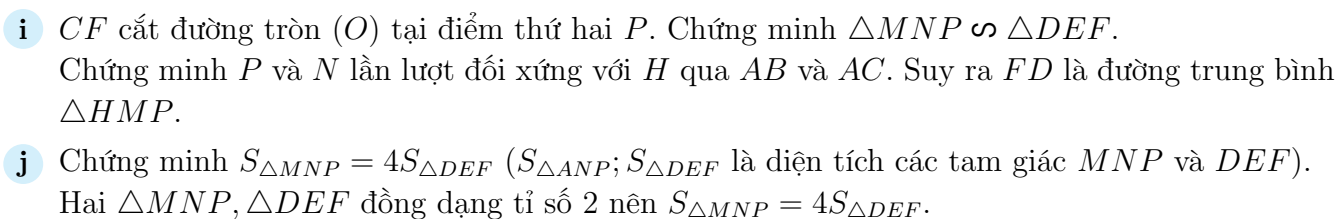
- Chứng minh tứ giác $AODB$ nội tiếp và $DO \parallel KC$.
- Chứng minh $AB \cdot AC = AK \cdot AD$.
- Kẻ $BE \perp AC$ (E thuộc AC). BE cắt AD và đường tròn (O) tại H và N . Tính theo R độ dài các đoạn thẳng AE , BE suy ra độ dài đoạn thẳng AC .
- CH cắt AB tại F . Tính $\widehat{EHF}$ và chứng minh tứ giác $BHOC$ nội tiếp.
- AD cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai M . Chứng minh tứ giác $BCKM$ là hình thang cân.
- Chứng minh M và H đối xứng với nhau qua BC .
- Chứng minh $DE \parallel MN$.
- Chứng minh C là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle HMN$.
- CF cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai P . Chứng minh $\triangle MNP \sim \triangle DEF$.
- Chứng minh $S_{\triangle MNP} = 4S_{\triangle DEF}$ ($S_{\triangle ANP}$; $S_{\triangle DEF}$ là diện tích các tam giác MNP và DEF).

📖 *Hướng dẫn hoặc đáp số.*



- Do $ABDO$ nội tiếp nên $\widehat{ODC} = \widehat{OAB} = \widehat{KCB}$.
- Ta có $\widehat{CAK} = \widehat{DOB} = 90^\circ - \widehat{KOD}$.
Suy ra $\triangle BDA \sim \triangle KCA$.
- $BO = OA = R$ do $\triangle BOA$ vuông cân. Suy ra $AB = \sqrt{2}R$. Tam giác vuông BEA có $\hat{A} = 60^\circ$.
Do đó, $AE = \frac{1}{2}AB = \frac{\sqrt{2}}{2}R$.
Tam giác BEC vuông cân nên $CE = BE = \frac{\sqrt{3}}{2}AB = \frac{6}{2}R$.
- Tứ giác $AEHF$ có $\hat{F} = \hat{E} = 90^\circ$ và $\widehat{EAF} = 60^\circ$. Suy ra $\widehat{FHE} = 120^\circ$. Do $\widehat{FHE} = \widehat{BHC} = 120^\circ = \widehat{BOC}$ nên $BHOC$ nội tiếp.





Bài 4

- a** Tính các góc của tam giác ABC .
- b** Tính theo a độ dài các đoạn thẳng AB, BD và độ dài cung AID .
- c** Chứng minh tứ giác $ACDH$ nội tiếp và $\widehat{CHD} = \widehat{ABC}$.
- d** Chứng minh CE là tiếp tuyến của đường tròn (O) .
- e** Chứng minh $CA^2 = CD \cdot CB = CH \cdot CO$.
- f** Chứng minh $\triangle OHB \sim \triangle OBC$ và HE là phân giác $\widehat{DHB}$.
- g** Gọi K là trung điểm BD, OK cắt AE tại S . Chứng minh $MK \cdot MC = MH \cdot MS$.
- h** Chứng minh $MK \cdot MC = MD \cdot MB$.
- i** Chứng minh SB là tiếp tuyến của đường tròn (O) .
- j** Chứng minh tứ giác $OKEA$ nội tiếp.

Bài 5

Cho đường tròn $(O; R)$ và dây BC không qua O , A là điểm trên cung lớn BC sao cho $AB < AC$. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại S . Gọi I là trung điểm BC . Tia OI cắt đường tròn (O) tại D , AD cắt BC tại E

- Chứng minh $BD = CD$ và AD là phân giác $\widehat{BAC}$.
- Chứng minh $SA^2 = SB \cdot SC$.
- Chứng minh $EB \cdot SC = EC \cdot SB$.
- Chứng minh $\triangle SAE$ cân và $SE^2 = SB \cdot SC$.
- Vẽ dây cung AF vuông góc với AO tại H . Chứng minh SF là tiếp tuyến của đường tròn (O) và tứ giác $SAOF$ nội tiếp.
- Kẻ đường kính DOM của đường tròn (O) , SM cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai N . Chứng minh $SN \cdot SM = SB \cdot SC = SH \cdot SO$.
- Chứng minh $\widehat{SEN} = \widehat{SME}$ suy ra SE là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp tam giác EMN .
- AF cắt BC tại K . Chứng minh $\triangle SNK \sim \triangle SIM$.
- Chứng minh D, N, K thẳng hàng.
- Trong trường hợp $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Chứng minh I là trung điểm OD . Tính $DK \cdot DN$ theo R .

Bài 6

Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A sao cho $OA = 2R$. Kẻ hai tiếp tuyến AB và AC với (O) (B, C là các tiếp điểm). Tia OA cắt BC và cung nhỏ BC tại H và I .

- Chứng minh tứ giác $ABOC$ nội tiếp và $\triangle ABC$ đều.
- Chứng minh $AO \perp BC$ và H là trung điểm BC .
- Chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$.
- Chứng minh tứ giác $OBIC$ là hình thoi.
- Vẽ cát tuyến AEF với (O) (E nằm giữa AF , AEF không qua O và AEF cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ là AO có chứa AC). Chứng minh $AB^2 = AH \cdot AO = AE \cdot AF$.
- Chứng minh tứ giác $OHEF$ nội tiếp được đường tròn.
- Chứng minh $\widehat{AHE} = \widehat{OHF}$ suy ra HC là phân giác $\widehat{EHF}$.
- Gọi K là giao điểm BC và EF . Chứng minh $AF \cdot KE = AE \cdot KF$.
- Chứng minh $\widehat{AEH} = \widehat{AOF}$ suy ra EI là phân giác $\widehat{AEH}$.
- Gọi D là trung điểm EF . Chứng minh 5 điểm A, B, O, D, C thuộc một đường tròn.
- Tia CD cắt đường tròn (O) tại điểm M . Chứng minh $BM \parallel EF$.

Bài 7

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn $(O; R)$ có các đường cao là AD, BE, CF (trục tâm H)

- Chứng minh tứ giác $BFEC$ nội tiếp, xác định tâm M của đường tròn ngoại tiếp tứ giác.
- Đường kính AK của đường tròn (O) cắt EF tại I . Chứng minh $\widehat{AKC} = \widehat{AEF}$, suy ra $\triangle AIE$ vuông.
- Chứng minh $IE \cdot AD = AI \cdot DB$.
- Chứng minh tứ giác $BHCK$ là hình bình hành, suy ra $AH = 2OM$.
- Tính theo R độ dài đoạn AH nếu $\widehat{BAC} = 60^\circ$.

- f Chứng minh rằng $AB.CK = AK.DB$, suy ra $AB.CK + AC.BK = AK.BC$.
- g Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Chứng minh H, G, O thẳng hàng.
- h Gọi S là giao điểm EF và BC . Chứng minh $SF.SE = SB.SC$.
- i SA cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai N . Chứng minh $SN.SA = SF.SE$, suy ra tứ giác $ANFE$ nội tiếp.
- j Chứng minh N, H, K thẳng hàng.

★★★★☆



Bài 8

Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A sao cho $OA = \frac{5}{2}R$. Vẽ các tiếp tuyến AB và AC với (O) (B, C là các tiếp điểm

- a Chứng minh tứ giác $ABOC$ nội tiếp và AO vuông góc với BC tại trung điểm H của BC .
- b Tính theo R độ dài các đoạn thẳng AB, AH và OH .
- c Tia OA cắt đường tròn (O) tại I . Chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .
- d Vẽ cát tuyến AMN với đường tròn (O) (AMN không qua O, AN và AC thuộc nửa mặt phẳng bờ là OA và M nằm giữa A và N). Vẽ dây $BE \parallel AN$. AN cắt EC và BC tại F và K . Chứng minh tứ giác $ABFC$ nội tiếp.
- e Chứng minh F là trung điểm MN .
- f Chứng minh $KB \cdot KC = KM \cdot KN = KF \cdot KA$.
- g Chứng minh $AK \cdot AF = AM \cdot AN$.
- h Tính theo R độ dài các đoạn thẳng AM và AN trong trường hợp $MN = R\sqrt{3}$.
- i Với $MN = R\sqrt{3}$. Tính AF, AK theo R .
- j Vẽ đường kính PQ qua F (P thuộc cung nhỏ BE), QK cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai D . Chứng minh A, D, P thẳng hàng.

★★★★☆



Bài 9

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H . BE, CF cắt (O) tại điểm thứ hai lần lượt là M, N . Gọi I là trung điểm của BC và AK là đường kính của (O) . Đường tròn tâm O' đường kính AH cắt (O) tại điểm thứ hai U . Chứng minh rằng:

- a $AF \cdot AB = AE \cdot AC, BD \cdot BC = BF \cdot BA, CD \cdot CB = CE \cdot CA$.
- b $DC \cdot DB = DH \cdot DA, EA \cdot EC = EH \cdot EB, FA \cdot FB = FH \cdot FC$.
- c $BH \cdot BE + CH \cdot CF = BC^2$.
- d H đối xứng với M qua AC và đối xứng với N qua AB .
- e EF song song với MN .
- f AO vuông góc với EF .
- g Tứ giác $BHCK$ là hình bình hành.
- h Ba điểm U, H, I thẳng hàng.
- i Các đường thẳng AU, EF, BC đồng quy tại G .
- j H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác
- k Tứ giác $DIEF$ nội tiếp.
- l $BG \cdot CD = CG \cdot BD$.
- m Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu của D trên BH, CH . Chứng minh PQ song song với EF .

- n IF là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF .
- o Gọi X là điểm đối xứng với K qua B . Chứng minh X thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác AHB .
- p Gọi Y là điểm đối xứng với K qua C . Chứng minh H là trung điểm của XY .

★★★★☆



Bài 10

Cho đường tròn $(O; R)$ và một dây BC cố định của (O) . Điểm A chuyển động trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC nhọn. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H .

- a Chứng minh AH có độ dài không đổi. (Có thể hỏi cách khác như: Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF, HEF có bán kính hoặc chu vi không đổi).
- b Chứng minh H chuyển động trên cung tròn cố định.
- c Giả sử $45^\circ < \widehat{BAC} < 90^\circ$. Tìm vị trí điểm A để tam giác AEH có diện tích lớn nhất.
- d Tìm vị trí điểm A để tam giác HBC có diện tích lớn nhất.
- e Tìm vị trí điểm A để tam giác DEF có chu vi lớn nhất.
- f Gọi G là giao điểm của AI và OH . Khi A di chuyển trên cung lớn BC thì G chuyển động trên đường nào?

★★★★☆



Bài 11

Cho đường tròn (O) và điểm M nằm ngoài (O) . Từ M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB tới (O) (A, B là tiếp điểm). Qua M kẻ cát tuyến MNP ($MN < MP$) đến (O) . Gọi K là trung điểm của NP .

- a Chứng minh rằng các điểm M, A, K, O, B cùng thuộc một đường tròn.
- b Chứng minh tia KM là phân giác của góc $\widehat{AKB}$.
- c Gọi Q là giao điểm thứ hai của đường thẳng BK với đường tròn (O) . Chứng minh rằng $AQ \parallel NP$.
- d Gọi H là giao điểm của AB và MO . Chứng minh rằng: $MA^2 = MH \cdot MO = MN \cdot MP = MO^2 - R^2$
- e Chứng minh rằng bốn điểm N, H, O, P cùng thuộc một đường tròn. (có thể khẳng định tứ giác $NHOP$ nội tiếp)
- f Gọi E là giao điểm của AB và KO . Chứng minh rằng: $AB^2 = 4 \cdot HE \cdot HF$. (F là giao điểm của AB và NP).
- g Chứng minh rằng $KEMH$ là tứ giác nội tiếp. Từ đó chứng tỏ rằng $OK \cdot OE$ không đổi.
- h Tìm vị trí của cát tuyến MNP để diện tích tam giác MQP đạt giá trị lớn nhất.
- i Chứng minh rằng: KF và KE lần lượt là phân giác trong và phân giác ngoài của góc $\widehat{AKB}$. Từ đó suy ra: $AE \cdot BF = AF \cdot BE$.
- j Chứng minh khi cát tuyến MNP thay đổi thì trọng tâm G của tam giác NAP luôn chạy trên một đường tròn cố định.
- k Giả sử $MO = 2R$. Tính diện tích hình quạt giới hạn bởi hai bán kính OA, OB và cung nhỏ AB .

★★★★☆



Bài 12

Cho $\triangle ABC$ có 3 góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) , các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H và lần lượt cắt đường tròn (O) tại M, N, P . Chứng minh rằng:

- a Bốn điểm B, E, F, C cùng nằm trên một đường tròn, tứ giác $AEDB$ nội tiếp.
- b $AE \cdot AC = AF \cdot AB$;

- c BC là phân giác của $\widehat{HBM}$, từ đó suy ra H và M đối xứng nhau qua BC ;
- d $PN \parallel EF$;
- e $AO \perp EF$;
- f Gọi I là trung điểm của BC , K là điểm đối xứng với H qua I . Chứng minh rằng $K \in (O)$;
- g Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AHB , tam giác BHC và tam giác AHC có bán kính bằng nhau.
- h H là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle EFD$;
- i Tứ giác $BMKC$ là hình thang cân;
- j Khi A chuyển động trên cung lớn BC và $\triangle ABC$ nhọn thì:
 - i) Diện tích hình tròn ngoại tiếp $\triangle AEF$ không đổi;
 - ii) (Tìm quỹ tích điểm H) thay bằng: điểm H chạy trên đường tròn nào
 - iii) Tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle AHC$ chạy trên một đường tròn cố định.
- k Khi $\widehat{BAC} = 60^\circ$ thì bốn điểm B, H, O, C cùng thuộc một đường tròn;
- l Khi $\widehat{BAC} = 30^\circ$ tính diện tích hình quạt tròn giới hạn bởi hai bán kính OC, OB và cung nhỏ BC ;
- m $\frac{PN}{AH} < 2$;
- n AI cắt OH tại G , chứng minh G là trọng tâm của $\triangle ABC$;
- o Tìm điều kiện ràng buộc của $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ để $OH \parallel BC$;

★★★★☆



Bài 13

Cho đường tròn $(O; R)$ vẽ hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Điểm M di động trên cung nhỏ $\widehat{BC}$, AM cắt CD , CB lần lượt tại N và E . Kẻ $CH \perp AM$ tại H . Tia CM cắt tia AB ở S , MD cắt AB ở F , CF cắt (O) ở K ($K \neq C$). Chứng minh rằng:

- a Chứng minh rằng $SM.SC = SA.SB$;
- b Chứng minh rằng $BE.BC = BF.BA$.
- c Khi M chuyển động trên cung nhỏ $\widehat{BC}$
- d Chứng minh rằng $AN.AM$ không đổi;
- e Chứng minh rằng $CM.CS$ không đổi.
- f Chứng minh các tứ giác $OHCA$; $DOMS$; $MEFB$ nội tiếp. Từ đó chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle OMS$ chạy trên một đường thẳng cố định.
- g Chứng minh $OH \parallel DM$ và tia OH là phân giác của góc $\widehat{COM}$.
- h Chứng minh rằng $\sqrt{2}EF = EB$.
- i Xác định vị trí của M để H là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle OMC$.
- j Chứng minh rằng $AM.AE + BE.BC$ không đổi.
- k Chứng minh rằng tâm đường tròn nội tiếp $\triangle CFM$ luôn nằm trên đường thẳng cố định khi M di chuyển trên cung nhỏ $\widehat{BC}$. (là đoạn BC)
- l Chứng minh rằng CB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle MBS$.
- m Chứng minh rằng D, K, S thẳng hàng.
- n Chứng minh rằng $FB.AS = AF.BS$.
- o Kẻ $MQ \perp AB$ tại Q , xác định vị trí của M trên cung nhỏ $\widehat{BC}$ để $QN \perp AM$.
- p Gọi O' là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle MAB$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle AO'B$.

- q Chứng minh rằng S_{ANFD} không đổi.
- r Xác định vị trí của M để S_{OQM} đạt giá trị lớn nhất.
- s Xác định vị trí của M để chu vi $\triangle OMQ$ đạt giá trị lớn nhất.



Bài 14

Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là AB , dựng các tia tiếp tuyến Ax, By của nửa đường tròn. Lấy một điểm M trên nửa đường tròn $(O; R)$ (M khác A và B). Tiếp tuyến tại M của $(O; R)$ cắt tia Ax, By lần lượt tại C và D .

- 1 Chứng minh tứ giác $OACM$ nội tiếp.
- 2 Chứng minh bốn điểm D, M, O, B cùng nằm trên một đường tròn.
- 3 Chứng minh $AC + BD = CD$.
- 4 Chứng minh $\triangle COD$ là tam giác vuông.
- 5 Chứng minh tích $AC \cdot BD$ không thay đổi khi điểm M di chuyển trên nửa đường tròn $(O; R)$.
- 6 Gọi E là giao điểm của AM và OC , F là giao điểm của BM và OD . Chứng minh $EF = R$.
- 7 Mỗi tứ giác sau đây là hình gì, vì sao: $OBMC, OAEF$.
- 8 Gọi G là trực tâm của $\triangle ACM$. Chứng minh khi M di chuyển trên nửa đường tròn $(O; R)$ thì G luôn chạy trên một đường tròn cố định.
- 9 Chứng minh bốn điểm C, D, E, F cùng thuộc một đường tròn.
- 10 Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle COD$.
- 11 Gọi N là giao điểm của AD và BC . Chứng minh $MN \perp AB$.
- 12 Gọi H là giao điểm của MN và AB . Chứng minh N là trung điểm của MH .
- 13 (Cách tiếp cận khác với mô hình của câu 11) và 12) Kẻ $MH \perp AB$ tại H . Gọi N là trung điểm của MH . Chứng minh AD và BC cùng đi qua N .
- 14 Chứng minh ba điểm E, N, F thẳng hàng.
- 15 Chứng minh đường tròn ngoại tiếp $\triangle HEF$ luôn đi qua một điểm cố định.
- 16 Chứng minh E, F, O, H là bốn đỉnh của một hình thang cân.
- 17 Gọi P là giao điểm của tia Ax và tia BM , Q là giao điểm của tia By và tia AM . Chứng minh C là trung điểm của AP và D là trung điểm của BQ .
- 18 Chứng minh tích $AP \cdot BQ$ không thay đổi khi điểm M di chuyển trên nửa đường tròn $(O; R)$.
- 19 Chứng minh $\triangle OAP \sim \triangle DBA$ và $\triangle OBQ \sim \triangle CAB$.
- 20 Chứng minh $AD \perp OP$ và $BC \perp OQ$.
- 21 Cho biết $AM = R$. Tính theo R diện tích các tam giác sau: $\triangle AMB, \triangle COD, \triangle ACM$.
- 22 Cho biết $OD = 2R$. Tính độ dài các đoạn thẳng BD, AM, CD theo R .
- 23 Cho biết $\widehat{ABC} = 30^\circ$. Tính độ dài các đoạn thẳng AC, AM, CD theo R .
- 24 Tìm vị trí của điểm M trên nửa đường tròn $(O; R)$ để chu vi tứ giác $ABDC$ nhỏ nhất.
- 25 Tìm vị trí của điểm M trên nửa đường tròn $(O; R)$ để diện tích tứ giác $ABDC$ nhỏ nhất.
- 26 Tìm vị trí của điểm M trên nửa đường tròn $(O; R)$ để chu vi tam giác COD nhỏ nhất.
- 27 Tìm vị trí của điểm M trên nửa đường tròn $(O; R)$ để chu vi tam giác AMB lớn nhất.

- 28 Tìm vị trí của điểm M trên nửa đường tròn $(O; R)$ để diện tích tam giác AMB lớn nhất.
- 29 Tìm vị trí của điểm M trên nửa đường tròn $(O; R)$ để chu vi tam giác OMH lớn nhất.
- 30 Tìm vị trí của điểm M trên nửa đường tròn $(O; R)$ để diện tích tam giác OMH lớn nhất.
- 31 Tìm vị trí của điểm M trên nửa đường tròn $(O; R)$ để tổng $AC + 3BD$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- 32 Tìm vị trí của điểm M trên nửa đường tròn $(O; R)$ để bán kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác $CDFE$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- 33 Gọi T là giao điểm của OC với nửa đường tròn $(O; R)$, K là giao điểm của BT và Ax . Xác định vị trí của điểm M trên nửa đường tròn $(O; R)$ để $\widehat{MKA} = 90^\circ$.

★★★★☆



Bài 15

Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Lấy điểm E , thuộc (O) sao cho $AE < EB$, điểm F thuộc cung nhỏ BE (F khác B và E). Gọi C là giao điểm của AE và BF , H là giao điểm của AF và BE , D là giao điểm của CH và AB .

- 1 Chứng minh tứ giác $CEHF$ nội tiếp.
- 2 Chứng minh tứ giác $CEDB$ nội tiếp.
- 3 Chứng minh bốn điểm A, D, F, C cùng thuộc một đường tròn.
- 4 Chứng minh $CE.CA = CF.CB$.
- 5 Chứng minh tam giác CAB đồng dạng với tam giác CFE .
- 6 Chứng minh: $AF.FH = CF.FB$; $CD.DH = AD.DB$.
- 7 Chứng minh rằng khi các điểm E, F di chuyển trên (O) thì tổng $BH.BE + AE.AC$ không thay đổi.
- 8 Chứng minh rằng khi các điểm E, F di chuyển trên (O) thì đường tròn ngoại tiếp $\triangle DEF$ luôn đi qua một điểm cố định.
- 9 Chứng minh H là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle DEF$.
- 10 Gọi G là giao điểm của EF và CD . Chứng minh $CD.HG = CG.HD$.
- 11 Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $CEHF$. Chứng minh IE là tiếp tuyến của (O) .
- 12 Chứng minh các tiếp tuyến tại E và tại F của (O) cắt nhau tại một điểm nằm trên đường thẳng CH .
- 13 Chứng minh $OI \perp EF$.
- 14 Gọi K là giao điểm của CH và (O) . Chứng minh $BK^2 = BH.BE$ và BK là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle KHE$.
- 15 Chứng minh $BK^2 = BF.BC$ và BK là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle KFC$.
- 16 Gọi O' là giao điểm của EF và AB . Chứng minh $O'K$ là tiếp tuyến của (O) .
- 17 Gọi O' là giao điểm của AB và tiếp tuyến tại K của (O) . Chứng minh ba điểm O', E, F thẳng hàng.
- 18 Gọi Q là giao điểm thứ hai của đường thẳng DF với (O) . Chứng minh $DQ = DE$.
- 19 Trên tia đối của tia DF lấy điểm Q sao cho $DQ = DE$. Chứng minh điểm Q nằm trên (O) .
- 20 Gọi M là giao điểm thứ hai của ED và (O) . Gọi N, P lần lượt là hình chiếu của M trên hai đường thẳng EA và EB . Chứng minh ba đường thẳng AB, MF, NP đồng quy.
- 21 Cho $AE = R$. Xác định vị trí của điểm F trên cung nhỏ BE sao cho chu vi tứ giác $AEFB$ lớn nhất.

- 22 Gọi S, T lần lượt là hình chiếu của A, B trên đường thẳng EF . Chứng minh $ST = ED + DF$.
- 23 Gọi L là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ACH . Chứng minh rằng khi điểm E cố định, điểm F di động trên cung nhỏ BE thì điểm L luôn nằm trên một đường thẳng cố định.
- 24 Cho $\widehat{ABE} = 30^\circ$, tính theo bán kính R :
- độ dài cung nhỏ AE .
 - diện tích tam giác AEB .
 - hình viên phân giới hạn bởi dây AE và cung nhỏ AE .
- 25 Cho $AE = EF = R$. Tứ giác $AEFB$ là hình gì? Tính diện tích tứ giác $AEFB$.
- 26 Cho $R = 5\text{cm}$ và $\widehat{ACB} = 60^\circ$. Tính độ dài EF .
- 27 Cho $EF = R$. Tính độ dài CH .
- 28 Cho biết $CH = R$. Chứng minh $\tan \widehat{ACB} = 2$. Tính tỉ số $\frac{S_{\triangle CFE}}{S_{\triangle CAB}}$.

★★★★☆



Bài 16

Cho đường tròn đường tròn (O) , từ điểm M nằm ngoài (O) kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với (O) (A, B là hai tiếp điểm). Trên cung nhỏ AB lấy điểm N (N khác A và B). Qua N kẻ tiếp tuyến với (O) cắt MA, MB lần lượt tại E và F .

- Chứng minh các tứ giác $MAOB, OAEN$ là tứ giác nội tiếp.
- Chứng minh $ME + EN = MF + FN$.
- Chứng minh chu vi tam giác MEF không thay đổi khi điểm N di động trên cung nhỏ AB .
- Khi điểm N di động trên cung nhỏ AB , chứng minh $\widehat{EOF}$ có số đo không thay đổi.
- Cho $OM = 2R$, tính số đo $\widehat{AMB}, \widehat{EOF}$ và chu vi $\triangle MEF$.
- Cho $R = 3\text{cm}, OM = 2R$. Tính độ dài AB và chu vi $\triangle MAB$.
- Cho $\widehat{AMB} = 90^\circ$. Chứng minh rằng $\frac{1}{3}(MA + MB) < EF < \frac{1}{2}(MA + MB)$.
- Gọi H là giao điểm của MO và AB , L là giao điểm thứ hai của NH và (O) . Chứng minh MH là tia phân giác của $\widehat{NML}$.
- Đường thẳng qua O vuông góc với OM cắt MA, MB lần lượt tại C và D . Chứng minh $\widehat{FOD} = \widehat{OEC}$ và $\widehat{EOC} = \widehat{EFO}$.
- Chứng minh ba tam giác sau đồng dạng: $\triangle OEF, \triangle CEO, \triangle DOF$.
- Chứng minh rằng $CE \cdot DF = OD^2 = OC^2 = \frac{CD^2}{4}$.
- Tìm vị trí của điểm N trên cung nhỏ AB để $(CE + DF)$ có độ dài nhỏ nhất.
- Tìm vị trí của điểm N trên cung nhỏ AB để tứ giác $CDFE$ có chu vi nhỏ nhất.
- Tìm vị trí của điểm N trên cung nhỏ AB để tứ giác $CDFE$ diện tích nhỏ nhất.
- Tìm vị trí của điểm N trên cung nhỏ AB để $\triangle MEF$ có diện tích lớn nhất.
- Giả sử đường tròn (O) cố định còn điểm M di động bên ngoài (O) . Xác định tất cả các vị trí của điểm M sao cho đoạn thẳng MC có độ dài nhỏ nhất.
- Giả sử đường tròn (O) cố định còn điểm M di động bên ngoài (O) . Xác định tất cả các vị trí của điểm M sao cho $\triangle MCD$ có diện tích nhỏ nhất.
- Gọi I và K lần lượt là giao điểm của OE và OF với AB . Chứng minh các đường thẳng FI, EK, ON đồng quy.
- Chứng minh $AI \cdot BK = NE \cdot NF$.

- 20 Tính tỉ số $\frac{EF}{IK}$ khi $\widehat{AMB} = 60^\circ$.
- 21 Tính tỉ số $\frac{EF}{IK}$ khi $\widehat{AMB} = 90^\circ$.
- 22 Chứng minh khi điểm N di động trên cung nhỏ AB thì tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle EOF$ luôn thuộc một đường cố định.
- 23 Cho $\widehat{AMB} = 90^\circ$. Tìm vị trí điểm N trên cung nhỏ AB để $\triangle OEF$ có diện tích nhỏ nhất.
- 24 Kẻ đường kính AP, BQ của (O) . Gọi S là hình chiếu của O trên MP . Chứng minh PQ, MA và OS đồng quy (tại điểm T).
- 25 Cho biết $\widehat{AMB}$ là góc nhọn. Trên đoạn thẳng BM lấy điểm X sao cho $BX = AT$. Chứng minh rằng AB đi qua trung điểm của TX .



Bài 17

Cho đường tròn $(O; R)$, có đường kính $AB = 2R$ cố định. Vẽ đường kính CD thay đổi của đường tròn $(O; R)$ (C khác A, C khác B). Tiếp tuyến d của đường tròn $(O; R)$ tại B cắt các đường thẳng AC, AD lần lượt tại các điểm E, F .

- 1 Chứng minh tứ giác $ACBD$ là hình chữ nhật.
- 2 Tính $AC.AE$ theo bán kính R .
- 3 Chứng minh rằng khi đường kính CD quay quanh tâm O thì hiệu $S = AC.AE - AD.AF$ không thay đổi.
- 4 Chứng minh $AC.CE + AD.DF = 4R^2$.
- 5 Giả sử cho $R = 5\text{cm}, AC = 8\text{cm}$, tính diện tích tứ giác $CDFE$.
- 6 Giả sử cho $S_{\triangle BCE} = 4\text{cm}^2, S_{\triangle BDF} = 9\text{cm}^2$, tính diện tích tam giác AEF .
- 7 Giả sử cho $R = 5\text{cm}, \widehat{BAC} = 30^\circ$, tính diện tích hình viên phân giới hạn bởi dây BC và cung nhỏ BC .
- 8 Chứng minh bốn điểm C, D, F, E cùng thuộc một đường tròn (gọi I là tâm của đường tròn đó).
- 9 Khi đường kính CD quay quanh tâm O và thỏa mãn điều kiện đề bài, xác định vị trí của đường kính CD để $S_{\triangle ACD} = \frac{1}{3}S_{\triangle CDFE}$.
- 10 Chứng minh $EC.EA + FD.FA \geq 8R^2$.
- 11 Xác định vị trí của đường kính CD để $EC.EA + FD.FA = 8R^2$.
- 12 Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp $\triangle AEF$. Chứng minh $\frac{2}{3} < \frac{r}{R} < 1$.
- 13 Gọi K là trung điểm của EF , chứng minh $AK \perp CD$.
- 14 Kẻ $AK \perp CD$ ($K \in d$), chứng minh K là trung điểm của EF .
- 15 Chứng minh rằng khi đường kính CD quay quanh tâm O và thỏa mãn điều kiện đề bài thì điểm I luôn thuộc một đường cố định.
- 16 Khi đường kính CD quay quanh tâm O và thỏa mãn điều kiện đề bài, xác định vị trí của đường kính CD để $\triangle IEF$ có diện tích nhỏ nhất.
- 17 Gọi Q là trực tâm của $\triangle EFD$. Chứng minh rằng đường kính CD quay quanh tâm O và thỏa mãn điều kiện đề bài thì điểm Q luôn thuộc một đường cố định.
- 18 Khi đường kính CD quay quanh tâm O và thỏa mãn điều kiện đề bài, xác định vị trí của đường kính CD để $\triangle AEF$ có diện tích nhỏ nhất.
- 19 Khi đường kính CD quay quanh tâm O và thỏa mãn điều kiện đề bài, xác định vị trí của đường kính CD để $\triangle ACD$ có diện tích lớn nhất.

- 20 Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với AK cắt đường thẳng d tại J . Gọi S là trung điểm của JB , chứng minh bốn điểm D, O, C, S thẳng hàng.
- 21 Gọi M là trung điểm của BE . Đường thẳng vuông góc với OM tại O cắt EF tại N . Chứng minh N là trung điểm của FB và $CM \parallel DN$.
- 22 Gọi M là trung điểm của BE , N là trung điểm của FB . Chứng minh $OM \perp ON$.
- 23 Khi đường kính CD quay quanh tâm O và thỏa mãn điều kiện đề bài, xác định vị trí của đường kính CD để $\triangle AMN$ có diện tích nhỏ nhất.
- 24 Khi đường kính CD quay quanh tâm O và thỏa mãn điều kiện đề bài, xác định vị trí của đường kính CD để tứ giác $CMND$ có diện tích nhỏ nhất.
- 25 Khi đường kính CD quay quanh tâm O và thỏa mãn điều kiện đề bài, xác định vị trí của đường kính CD để chu vi tứ giác $CMND$ nhỏ nhất.
- 26 Gọi H là trực tâm của $\triangle AMN$. Chứng minh H là trung điểm của OB .
- 27 Gọi H là trung điểm của OB . Chứng minh H là trực tâm của $\triangle AMN$.